STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Colloquium

Gegeneraliseerde Functies

o.l.v.

Prof. dr. H. A. Lauwerier

1961

Colloquium

Gegeneraliseerde Functies (Distributies)

o.l.v. Prof.dr. H.A. Lauwerier

Eerste bijeenkomst: vrijdag 10 februari

§1. Inleiding

De mathematische formulering van fysische begrippen en verschijnselen heeft bij herhaling de wiskundige voor problemen gesteld. Vaak waren het natuurkundigen die een eigen wiskundig formalisme ontwierpen teneinde bepaalde fysische processen op een beknopte manier te kunnen beschrijven. Hoewel de mathematische fundering vaak te wensen overliet of afwezig was, werkte het formalisme ...meestal. Een illustratief voorbeeld is de operatorenrekening van Oliver Heaviside, waarmede op een verrassend eenvoudige wijze o.a. electrische schakelproblemen opgelost konden worden. Eigenlijk is eerst in 1957 door J. Mikusinski hiervoor een elegante mathematisch strenge fundering gegeven.

In 1930 voerde P.A.M. Dirac in zijn boek over de grondslagen van de quantummechanica de naar hem genoemde delta-functie in waarvoor hij een aantal rekenregels aangaf. Met name is $\delta(x)$ overal gelijk aan nul behalve voor $x=0$ terwijl

(1.1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ \varphi(x)dx = \varphi(0)$$

voor elke continue functie $\varphi(x)$.
Wiskundig is dit onzin, maar ook hier, het werkt!

In zekere zin kan men zeggen, dat het zoeken naar een rechtvaardiging van het werken met delta-functies geleid heeft tot de theorie van de distributies of gegeneraliseerde functies. In 1950-51 is deze rechtvaardiging gegeven door Laurent Schwartz, die in zijn tweedelige monografie "Théorie des distributions" het nieuwe functiebegrip aan een diepgaande analyse onderwierp. Volgens Schwartz moeten we bij een gegeneraliseerde functie $f(x)$ denken aan een op de X-as aangebrachte massaverdeling "distribution des masses". De deltafunctie $\delta(x)$ correspondeert aldus met een puntmassa in de oorsprong. Andere voor de hand liggende fysische voorbeelden van een distributie zijn eén electrische puntlading, dipool, punt- lijn- en vlakvormige warmtebron.

Na Schwartz hebben een groot aantal auteurs in uiteenlopende gebieden van de klassieke analyse gegeneraliseerde functies toegepast.

We noemen bijvoorbeeld het probleem van Cauchy bij partiële differentiaalvergelijkingen, Fourier-transformatie, harmonische analyse, representaties van Lie'se groepen, waarschijnlijkheidsrekening.

De doelstelling van dit colloquium is ons door gemeenschappelijke inspanning te oriënteren in dit reeds omvangrijke, en nog maar ten dele ontgonnen, gebied. Naast het genoemde werk van Schwartz wijzen we op het zeer recente seriewerk van I.M. Gelfand en zijn medewerkers, waarvan in een Duitse vertaling het eerste deel "Verallgemeinerte Funktionen" Berlin 1960, zojuist is verschenen.

Onder een distributie $f(x)$ verstaan we met Schwartz een continue lineaire functionaal op een zekere ruimte van testfuncties $\varphi(x)$. Ons voorlopig beperkend tot één dimensie met $-\infty < x < \infty$ is een testfunctie een functie welke onbeperkt differentieerbaar is en die in het oneindige "zeer sterk" verdwijnt. De distributie is dan een functionaal welke aan elke testfunctie φ een (reëel) getal (f,φ) toevoegt. Lineair wil zeggen

$$(f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(f,\varphi_1) + a_2(f,\varphi_2).$$

Continu wil zeggen

$$\lim_{n\to\infty} (f,\varphi_n) = (f, \lim_{n\to\infty} \varphi_n)$$

voor een passende limietdefinitie.

Het is duidelijk dat een grote klasse van gewone functies $f(x)$ aanleiding geeft tot een dergelijke continue lineaire functionaal indien men definieert

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Anderzijds kan men (1.1) als een continue lineaire functionaal zien nml.

$$(\delta(x), \varphi(x)) \overset{\text{def}}{=} \varphi(0).$$

Aldus omvatten de gegeneraliseerde functies zowel de klassieke functies (althans een grote klasse) als b.v. de delta-functie van Dirac.

Het is de kunst de eigenschappen van de gegeneraliseerde functies zodanig in te voeren, dat ze met die van de klassieke functies consistent zijn. Hierbij kan men wel eens op moeilijkheden stuiten. Het is b.v. niet mogelijk twee distributies met elkaar te vermenigvuldigen of om een distributie over een eindig interval, te integreren. Dingen als

$$\delta^2(x) \quad \text{en} \quad \int_0^1 \delta(x)dx \quad \text{of} \quad \int_0^1 \delta'(x)dx$$

zijn dus zinloos. Aan de andere kant kan men elke distributie onbeperkt differentiëren.

We zullen nu in vogelvlucht een aantal probleemtypen bespreken, waarbij het gebruik van distributies tot een vereenvoudiging of tot een soepele behandeling vanuit een algemeen gezichtspunt leidt.

1. Divergente integralen

Met behulp van distributies kan men een zin geven aan formeel divergente integralen als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}\,dx \quad \text{voor} \;\; \lambda > 1.$$

In het bijzonder is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

in overeenstemming met de gebruikelijke definitie van de hoofdwaarde van Cauchy.

2. Gewone lineaire differentiaalvergelijkingen

Een in rust verkerende lineaire oscillator wordt op het tijdstip t=0 door een stoot in beweging gebracht. Met een passende keuze van eenheden is de vergelijking

$$\ddot{u} + u = \delta(t).$$

De oplossing is $u = \sin t\; \theta(t)$, waarbij $\theta(t)$ de zogenaamde eenheidsfunctie is gedefinieerd als

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ 1 & \text{voor } t \geq 0. \end{cases}$$

3. Partiële differentiaalvergelijkingen

We beschouwen algemeen

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0,$$

waarbij P een polynoom van de m^e graad is. Als beginvoorwaarden nemen we (probleem van Cauchy)

$$u = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x) \;\ldots\; \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}} = u_{m-1}(x) \quad \text{voor } t=0.$$

De oplossing van dit probleem kunnen we gemakkelijk afleiden, indien we een zgn. basis-oplossing kennen, d.w.z. een oplossing $E(x,t)$ met de beginvoorwaarden

$$E=0 \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} E = 0 \qquad \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} E = \delta(x).$$

a warmtevergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Hierbij is

$$E(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{x^2}{4t}.$$

De oplossing van het probleem van Cauchy is de convolutie

$$u = E(x,t) * u_0(x),$$

waarbij

$$f(x) * g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(\xi) g(x-\xi) d\xi .$$

b golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Hierbij is $\quad E(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ \theta(x+t) - \theta(x-t) \right\},$

en

$$u = E * u_1 + \frac{\partial}{\partial t} E * u_0,$$

of (d'Alembert)

$$u = \tfrac{1}{2}\left\{u_0(x+t) + u_0(x-t)\right\} + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)\,d\xi .$$

4. Fourier reeksen

Voor Fourier-reeksen geldt de belangrijke eigenschap, dat de reeks

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ waarbij } c_n = O(n^m) \text{ voor zekere } m$$

in distributionele zin altijd convergeert en een periodieke distributie voorstelt. Als voorbeeld geldt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi m)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}x .$$

Hierbij levert term voor term differentieren de (distributionele) afgeleide van de som.

5. Fourier integralen

Voor distributies f(x) kan men een Fourier-transform g(w) definieren waarbij g(w) een zogenaamde analytische functionaal is met de complexe variabele w. Formeel geldt

$$g(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixw} f(x)dx.$$

Voor $f(x) = \delta(x)$ is $g(w) = 1$.
Voor $f(x) = 1$ is $g(w) = 2\pi\,\delta(w)$.
Voor $f(x) = e^{ax}$ is $g(w) = 2\pi\,\delta(w-ia)$.
Voor $f(x) = \sin ax$ is $g(w) = i\pi\{\delta(w-a) - \delta(w+a)\}$.

6. Distributies in R_n

Men kan distributies van n variabelen $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ invoeren op geheel analoge wijze als voor één variabele. Van bijzondere interesse zijn de generalisaties van $\Theta(x)$, $\delta(x)$, $\delta'(x)$ enz. De definitie van distributies op een m-dimensionale variëteit in R_n staat in nauw verband met die der differentiaalvormen waaraan de namen van o.a. E. Cartan, de Rham en Leray verbonden zijn. We vermelden hier een paar eenvoudige resultaten

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\ln\,(x_1^2+x_2^2) = 2\pi\;\delta(x_1,x_2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}} = -4\pi\;\delta(x_1,x_2,x_3).$$

In een ruimte met een oneven aantal dimensies n is voor $k=\frac{1}{2}(n-3)$ de distributie $\delta^{(k)}(r^2-t^2)$ een oplossing van de golfvergelijking $(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2})u=0$.

§ 2. Grondbegrippen

We beginnen met een lineaire ruimte T van testfuncties $\varphi(x)$ in te voeren. Lineair wil natuurlijk zeggen, dat met $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ elke lineaire combinatie $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$ een testfunctie is. Vervolgens definieren we in T een convergentiebegrip, waarbij het voldoende is ons te beperken tot de definitie van een tot nul convergente rij $\varphi_n(x)$.

Distributies worden vervolgens gedefinieerd als continue lineaire functionalen met betrekking tot de ruimte T.

Onder een continue lineaire functionaal f t.o.v. T verstaan we een voorschrift, waarbij aan elke $\varphi \in T$ een getal (f,φ) is toegevoegd, dusdanig dat

1° $(f,c_1\varphi_1+c_2\varphi_2) = c_1(f,\varphi_1) + c_2(f,\varphi_2)$ (lineariteit).

2° als $\varphi_n \to 0$ dan $(f,\varphi_n) \to 0$ (continuïteit).

Uiteraard bestaat bij de keuze van T enige vrijheid. Voorlopig maken we de volgende keuze, waarbij aan de volgende twee kenmerken moet zijn voldaan:

a $\varphi(x) = 0$ buiten een zeker interval.
b $\varphi(x)$ oneindig vaak differentieerbaar.

Functies van het type a noemen we wel finiet. Een voorbeeld van een testfunctie voor het interval $(-a,a)$ is

(2.1) $$\varphi(x) = \exp\frac{-a^2}{a^2-x^2}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Functies als $\exp -x^2$ zijn geen testfunctie, maar kunnen wel willekeurig dicht door testfuncties benaderd worden. In sommige beschouwingen (zie bijv. Lighthill, generalised functions) kan men met voordeel gebruik maken van de grotere ruimte van testfuncties, waarbij kenmerk a vervangen wordt door het iets zwakkere kenmerk dat voor $|x| \to \infty$ $\varphi(x)$ en alle afgeleiden sterker tot nul convergeren dan welke macht van $|x|$. In deze ruimere klasse past $\exp -x^2$ wel. Men lette hierbij op de volgende eigenaardigheid dat verruiming van T verenging van de ruimte der distributies impliceert.

Het convergentiebegrip in de door ons gekozen testruimte is als volgt.

$$\lim \varphi_n(x) = 0 \text{ in } T$$

wil zeggen:

a $\varphi_n(x)$ is uniform finiet, d.w.z. er bestaat een interval waarbuiten alle $\varphi_n(x)$ verdwijnen.

b $\varphi_n(x)$ en elke afgeleide van $\varphi_n(x)$ convergeert met betrekking tot x uniform tot nul, d.w.z. voor $n > N(\varepsilon,k)$ is $|\varphi_n^{(k)}(x)| < \varepsilon$.

Is f(x) een locaal integreerbare functie, d.w.z. Lebesgue-integreerbaar in elk eindig interval, dan wordt door

(2.2) $$(f,\varphi) \stackrel{def}{=} \int f(x)\, \varphi(x)dx$$

een functionaal bepaald, waarvoor, zoals we gemakkelijk inzien, de eigenschappen 1^o en 2^o gelden. Derhalve leidt elke locaal integreerbare functie tot een distributie. Distributies welke aldus ontstaan zijn noemen we regulier. Een distributie welke niet regulier is noemen we singulier. We zullen meteen laten zien, dat er singuliere distributies bestaan. Definieer maar

(2.3) $$(f,\varphi) \stackrel{def}{=} \varphi(0).$$

Aan de kenmerken 1^o en 2^o is ten duidelijkste voldaan. Zou deze distributie regulier zijn, dan bestaat er een functie f(x) waarvoor

(2.4) $$\int f(x)\, \varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Kies nu in het bijzonder de testfunctie (2.1) met willekeurige a. Dan zou voor elke a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\exp \frac{-a^2}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{e}$$

gelden.
Echter ontstaat voor $a \to 0$ kennelijk een tegenstrijdigheid waarmede de onjuistheid van ons uitgangspunt is aangetoond.

De door (2.3) bepaalde distributie duiden we symbolisch aan met $\delta(x)$ omdat het wel duidelijk is, dat hier de delta-functie van Dirac in het geding is. We kunnen nu (2.2) ook geldig verklaren voor de singuliere distributie $\delta(x)$ door te schrijven

(2.5) $$\varphi(0) = \int \delta(x)\, \varphi(x)dx.$$

Het rechterlid heeft weliswaar alleen symbolische betekenis, maar het zal blijken, dat het in vele opzichten zich gedraagt als een gewone integraal. Uiteraard verklaren we (2.2) niet alleen geldig voor juist $\delta(x)$ maar voor alle singuliere distributies. Het komt er dus op neer, dat we voor singuliere distributies f(x) (2.2) moeten vervangen door

(2.6) $$\int f(x)\, \varphi(x)dx \stackrel{def}{=} (f,\varphi).$$

Is f(x) een locaal integreerbare functie, waarvoor de reguliere distributie $(f,\varphi)=0$ voor alle $\varphi \in T$, dan kunnen we aantonen, dat f(x) bijna overal nul is, d.w.z. f(x)=0 met uitzondering van een verzameling van de maat nul. Het bewijs loopt als volgt. We kiezen een of ander interval (a,b) en daarbij de volgende rij testfuncties

$$\varphi_n(x) = \exp - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}\right) \tag{2.7}$$

voor $a < x < b$ en nul er buiten.

Uit

$$\int_a^b f(x)\ \varphi_n(x)dx = 0$$

voor alle n volgt bij limietovergang $n \to \infty$

$$\int_a^b f(x)dx = 0\ .$$

Aangezien dit voor alle a en b geldt is f(x) bijna overal nul.

Noemen we de distributie $(f,\varphi)=0$ voor alle $\varphi \in T$ de <u>nul-distributie</u> dan correspondeert hiermede de klasse van locaal-integreerbare functies welke bijna overal verdwijnen.

In de gebruikelijke notatie als functie schrijven we de nul-distributie als 0.

Onder de <u>som</u> f+g en het <u>verschil</u> f-g van twee distributies verstaan we de distributies bepaald door

$$(f \pm g,\ \varphi) = (f,\varphi) \pm (g,\varphi)\ . \tag{2.8}$$

Twee distributies f en g heten gelijk als hun verschil de nul-distributie is.

Onder de <u>vermenigvuldiging</u> van een constante c met een distributie f verstaan we de distributie cf bepaald door

$$(cf,\varphi) = c(f,\varphi)\ . \tag{2.9}$$

Onder het <u>product</u> van een distributie f(x) met een oneindig vaak differentieerbare functie c(x) verstaan we de distributie cf bepaald door

$$(cf,\ \varphi) = (f, c\varphi)\ . \tag{2.10}$$

Deze laatste definitie is zinvol omdat met $\varphi(x)$ ook $c(x)\ \varphi(x)$ een testfunctie is. Is in het bijzonder c een constante dan stemt de definitie met de voorafgaande overeen.

Men ziet gemakkelijk, dat deze definities consistent zijn met de corresponderende operaties voor locaal integreerbare functies.

Distributies kan men aan de volgende affiene transformaties onderwerpen:

Uit de distributie $f(x)$ kan men door translatie over een afstand h (voor $h > 0$ naar rechts) de verschoven distributie $f(x-h)$ afleiden welke gedefinieerd is door

(2.11) $$(f(x-h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+h)).$$

Door spiegeling t.o.v. de oorsprong kan men de gespiegelde distributie $f(-x)$ afleiden welke gedefinieerd is door

(2.12) $$(f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)).$$

Door centrale vermenigvuldiging vanuit de oorsprong met de factor c kan men de gelijkvormige distributie $f(cx)$ afleiden welke gedefinieerd is door

$$(f(cx), \varphi(x)) = c^{-1}(f(x), \varphi(\tfrac{x}{c})).$$

Uit (2.2) volgt voor reguliere distributies weer gemakkelijk de consistentie. Voorts definieren we evenals bij functies:

De distributie $f(x)$ heet even als
$$f(-x) = f(x).$$

De distributie $f(x)$ heet oneven als
$$f(-x) = -f(x).$$

De distributie $f(x)$ heet periodiek met de (positieve) periode h als
$$f(x-h) = f(x).$$

De distributie $f(x)$ heet homogeen van de orde m als
$$f(cx) = c^m f(x).$$

Aan een distributie $f(x)$ kan men geen waarde in een punt toekennen ook niet als de distributie regulier is en $f(x)$ als functie een locaal integreerbare functie is. We kunnen immers zonder beïnvloeding van de functionaal (f, φ) in een aantal punten x (verzameling van de maat nul) willekeurige veranderingen aanbrengen. Beter lukt het voor een (open) interval Ω (algemener open verzameling) waar we aan de distributie $f(x)$ (bijna overal) de waarde $f(x)$ kunnen toevoegen. Voor singuliere distributies kunnen we langs een omweg ook tot een waarde in Ω komen. Voor het gemak voeren we het begrip drager in. Onder de drager van de testfunctie $\varphi(x)$ verstaan we de afsluiting van de verzameling x-waarden, waarvoor $\varphi(x) \neq 0$. We zullen zeggen, dat de distributie $f(x)$ in het open interval Ω de waarde nul heeft als $(f, \varphi) = 0$ voor alle testfuncties, waarvan de drager in Ω begrepen is. Voor reguliere distributies is dit niets nieuws maar deze definitie geldt in het bijzonder voor singuliere distributies. Twee distributies $f(x)$ en $g(x)$ heten gelijk in het open interval Ω indien hun verschil er nul is. Het is duidelijk, dat deze (locale) gelijkheidsdefinitie aan de gebruikelijke kenmerken, met name transitiviteit, voldoet, zodat we aan in Ω gelijke distributies dezelfde waarde kunnen toekennen indien er althans reguliere distributies bij zijn, want alleen hiervoor was het begrip waarde gedefinieerd.

Tenslotte kunnen we nu spreken van de drager van een distributie. Deze wordt gedefinieerd als het complement van de open verzameling waar de distributie nul is. De drager van een distributie is dus een gesloten verzameling.

We zullen het een en ander toelichten aan de eenvoudigste singuliere distributie $\delta(x)$. Deze distributie heeft de waarde nul in de open verzameling $x \neq 0$. De drager van deze distributie bestaat uit het enkele punt $x=0$. Volgens (2.12) is $\delta(-x)$ identiek met $\delta(x)$ zodat de delta-functie even is. Uit (2.13) volgt dat $\delta(x)$ homogeen is van de orde -1. Door translatie kan men de verschoven delta-functie (x-a) afleiden. Hiervoor geldt dus

$$(\delta(x-a),\ \varphi(x)) = \varphi(a),$$

of in de bekende symboliek

$$\int \delta(x-a)\,\varphi(x)dx = \varphi(a).$$

§ 3. Differentiatie en Integratie

Onder de distributionele afgeleide $f'(x)$ van de distributie $f(x)$ verstaan we de door

$$(3.1) \qquad (f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x))$$

bepaalde functionaal.
Om ons van de juistheid van deze definitie te overtuigen merken we op dat voor elke $\varphi \in T$ ook $\varphi' \in T$. Voorts is het duidelijk, dat de zojuist gedefinieerde functionaal lineair is. De continuïteit volgt uit het feit, dat als $\varphi_n \to 0$ ook $\varphi_n' \to 0$ voor $n \to \infty$.

Aldus bezit elke distributie een afgeleide. Langs recursieve weg kan dan een afgeleide van de k^e orde $(k=2,3,\ldots)$ gedefinieerd worden zodat elke distributie oneindig vaak differentieerbaar is.

Om ons van de consistentie van de definitie te overtuigen gaan we uit van een gewone functie $f(x)$ welke bijv. een continue afgeleide $f'(x)$ bezit. Dan is nml.

$$(3.2) \qquad (f', \varphi) = \int f'(x)\, \varphi(x)dx = -\int f(x)\, \varphi'(x)dx = -(f, \varphi').$$

Deze betrekking geldt ook onder ruimere voorwaarden, b.v. $f(x)$ absoluut continu.

We ontmoeten vaak het geval dat $f(x)$ een reguliere distributie en $f'(x)$ een singuliere distributie is. Het eenvoudigste voorbeeld is de eenheidsfunctie van Heaviside $\theta(x)$ gedefinieerd als

$$(3.3) \qquad \theta(x)=0 \text{ voor } x < 0, \quad \theta(x)=1 \text{ voor } x > 1.$$

Uit (3.1) volgt als distributionele afgeleide

$$(3.4) \qquad \theta(x) = \delta(x).$$

De functionele afgeleide bestaat ook maar met uitzondering van $x=0$. Buiten $x=0$ constateren we (locale) overeenstemming van distributionele en functionele afgeleide.

Deze overeenstemming is geen toeval maar berust in feite op het principe dat uit $f(x)=0$ in het open gebied Ω voor de distributie $f(x)$ volgt dat voor de distributionele afgeleide ook $f'(x)=0$ in Ω. Hieruit vloeit voort, dat locale overeenstemming van distributies $f(x)$ en $g(x)$ de locale overeenstemming van hun afgeleiden impliceert. In het gegeven geval is b.v. $f(x) \equiv \theta(x)$ en we kiezen voor Ω $(x > 0)$ $g(x) \equiv 1$.

Een interessanter geval is $f(x)=\ln|x|$. De functionele afgeleide is x^{-1} met dus een niet-integreerbare singulariteit voor $x=0$. De distributionele afgeleide welke voor $x \neq 0$ met de functionele afgeleide locaal overeenstemt noteren we ook als x^{-1}. De integraal

$$\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \tag{3.5}$$

welke formeel divergeert kan op grond van (2.6) als (x^{-1}, φ) zinvol geïnterpreteerd worden. Uit (3.1) volgt namelijk

$$\begin{aligned}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx &= (x^{-1}, \varphi) = -(\ln|x|, \varphi') = -\int \ln|x|\, \varphi'(x)dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.\end{aligned} \tag{3.6}$$

We zeggen dat de divergente integraal (3.5) met behulp van (3.6) geregulariseerd is. We komen hier later uitvoerig op terug.

De inverse bewerking van differentiatie is onbepaalde integratie. Is h(x) een gegeven distributie dan kan men vragen naar een primitieve f(x) d.w.z. een distributie waarvoor

$$\frac{df}{dx} = h(x). \tag{3.7}$$

We zullen laten zien, dat, als bij gewone functies, er een op een constante na eenduidig bepaalde oplossing van (3.7) is. We schrijven hiervoor

$$f = \int h(x)dx. \tag{3.8}$$

De betekenis van (3.7) is dat voor elke $\varphi \in T$

$$(f, \varphi') = -(h, \varphi). \tag{3.9}$$

De testfuncties $\varphi_0(x)$ welke de afgeleide van een of andere testfunctie zijn vormen een deelruimte T_0 van T. Het kenmerk van $\varphi_0 \in T_0$ is blijkbaar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi)d\xi = 0. \tag{3.10}$$

De gezochte functionaal (f, φ) is blijkens (3.9) al bekend voor de deelruimte T_0. De voortzetting buiten T_0 in T kan a.v. geschieden. Het is voldoende een vaste testfunctie $\varphi_1 \notin T_0$ te kiezen, b.v. één waarvoor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi)d\xi = 1. \tag{3.11}$$

We kunnen dan namelijk elke testfunctie $\varphi \in T$ schrijven als

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi \ . \tag{3.12}$$

Als $(f, \varphi_1)=C$ dan is wegens de lineariteit van de functionaal

$$(f,\varphi) = (f,\varphi_0) + C\int \varphi(\xi)d\xi \ . \tag{3.13}$$

Door (3.13) is de distributie f op een constante (distributie) na bepaald.

Men zou kunnen denken dat gewone differentiaalvergelijkingen zich voor distributies net zo gedragen als voor functies. Het volgende voorbeeldje toont echter dat zich al in eenvoudige gevallen complicaties kunnen voordoen.

De differentiaalvergelijking

$$x\, f'(x) = 0 \tag{3.14}$$

heeft voor functies één oplossing nml. $f(x)$ = constant. Voor distributies zijn er evenwel <u>twee</u> onafhankelijke oplossingen, b.v.

$$f(x) = 1 \quad \text{en} \quad f(x) = \theta(x). \tag{3.15}$$

§ 4. Limieten

Men zegt dat de rij distributies $f_n(x)$ tot de distributie $f(x)$ convergeert indien voor alle testfuncties

(4.1) $$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f,\varphi).$$

Uiteraard schrijven we als bij functies $f_n(x) \to f(x)$ of

(4.2) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

De discrete variabele n kan door een continue variabele vervangen worden. De definities zijn dan analoog. Men kan gemakkelijk laten zien dat de limiet aan de gebruikelijke lineaire eigenschappen voldoet.

Convergeren de locaal integreerbare functies $f_n(x)$ tot een locaal integreerbare limiet $f(x)$ dan convergeren onder zekere ruime voorwaarden de reguliere functionalen $f_n(x)$ tot de reguliere distributie $f(x)$. Dit is b.v. het geval als de functies $f_n(x)$ in elk (begrensd) interval uniform tot $f(x)$ convergeren of wanneer bijna overal $f_n(x) \to f(x)$ terwijl $|f_n(x)|$ uniform door een vaste locaal integreerbare functie begrensd wordt.

In vele toepassingen is $f_n(x)$ een reguliere functionaal terwijl de limiet een singuliere functionaal is. Als voorbeeld heeft men

(4.3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x).$$

De gewone limiet bestaat nauwelijks ($x=2\pi$ enz. geeft op triviale wijze de limiet nul), de distributionele limiet is aanwezig.

Bij het volgende voorbeeld

(4.4) $$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)} = \delta(x)$$

bestaat de gewone limiet met uitzondering van $x=0$ en stemt locaal (in het open gebied $x\neq 0$) met de distributionele limiet overeen.

Voor distributies geldt

Uit $f_n(x) \to f(x)$ volgt $f_n'(x) \to f'(x)$.

Het bewijs van deze stelling volgt onmiddellijk uit de definitie van distributionele afgeleide.

Als toepassing volgt uit (4.4)

(4.5) $$\lim_{\lambda\to 0} \frac{-2\lambda x}{\pi(x^2+\lambda^2)^2} = \delta'(x).$$

Hierbij bestaat de gewone limiet zelfs voor $x=0$, dus voor alle x. Er is slechts weer locale overeenstemming voor $x \neq 0$.

Van groot belang voor de theorie van de distributies is de eigenschap dat de ruimte van de distributies volledig is. Dit betekent, dat uit het bestaan van $\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi)$ voor elke $\varphi \in T$ volgt dat er een distributie is waartoe $f_n(x)$ convergeert. Het bewijs van deze stelling volgt later.

Met o.a. topologische hulpmiddelen kan men bewijzen, dat elke singuliere distributie opgevat kan worden als de limiet van reguliere distributies. Het bewijs van deze existentiestelling stellen we voorlopig uit. Voor de practijk zijn deze twee stellingen uiteraard van minder belang.

Op de gebruikelijke wijze kunnen we het begrip van een oneindige reeks invoeren. Men heeft namelijk

(4.6) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} c_n(x).$$

Een eenvoudig voorbeeld is

(4.7) $$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2m\pi).$$

Term voor term differentiatie (in distributionele zin) is toegestaan zodat b.v. uit (4.7) volgt dat

(4.8) $$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx = -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x-2m\pi).$$

Uit de in klassieke zin convergente reeks

(4.9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \sin \tfrac{1}{2}x \right|,$$

volgt door distributionele differentiatie de in distributionele zin convergente reeks

(4.10) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}x.$$

§ 5. Regularisatie

Is $f(x)$ een reguliere distributie dan is zoals bekend

$$(5.1)\qquad (f,\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)dx.$$

Is daarentegen de functie $f(x)$ niet locaal integreerbaar, waarbij we ons ter wille van de eenvoud beperken tot functies met een niet-integreerbare singulariteit in de oorsprong, dan heeft het rechterlid van (5.1) voorlopig alleen betekenis voor testfuncties $\varphi(x)\in T_\varepsilon$ welke in het interval $(-\varepsilon,\varepsilon)$ nul zijn met $\varepsilon>0$ willekeurig klein. Lukt het de gevormde functionaal tot een voor alle $\varphi(x)\in T$ continue lineaire functionaal uit te breiden, dan heet de integraal (5.1) geregulariseerd. Het volgende voorbeeld toont, dat regularisatie niet eenduidig is. Beschouwen we $f(x)=1/x$ dan is

$$(5.2)\qquad \int_{-\infty}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{a}^{b} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{b}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

voor elke a en b met $a<0<b$ een regularisatie van

$$(5.3)\qquad \int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Twee verschillende regularisaties verschillen blijkbaar in een deltafunctie (algemeen een op $x=0$ geconcentreerde distributie).
Onder de zogenaamde kanonische regularisatie (afgekort k.r.) van $1/x$ verstaan we de reeds in § 3 besproken functionaal

$$(5.4)\qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Het lukt ons aan een grote klasse functies met een singulariteit in de oorsprong een kanonische regularisatie toe te voegen, waarbij de volgende regels gelden:

1. $\text{k.r.}\,(\alpha f+\beta g) = \alpha\ \text{k.r.}\ f + \beta\ \text{k.r.}\ g$

2. $\text{k.r.}\ \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\ \text{k.r.}\ f.$

3. $\text{k.r.}\ c(x)f = c(x)\ \text{k.r.}\ f$ voor elke oneindig vaak differentieerbare functie $c(x)$.

We beschouwen hier alleen in $x=0$ singuliere functies welke lineair samengesteld zijn uit de standaard-typen

$$(5.5)\qquad x_+^\lambda \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x^\lambda & \text{voor } x>0 \\ 0 & \text{voor } x\leq 0, \end{cases} \qquad \lambda\neq -1,-2,\ldots$$

$$(5.6)\qquad x_-^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{voor } x > 0 \\ |x|^\lambda & \text{voor } x \leq 0, \end{cases} \qquad \lambda \neq -1,-2,\ldots$$

$$(5.7)\qquad x^{-n}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Is $s_j(x)$ een dezer standaard-typen dan beperken we ons dus tot functies van het type

$$(5.8)\qquad f(x) = \sum c_j(x) s_j(x),$$

waarbij $c_j(x)$ een oneindig vaak differentieerbare functie is. Met de hieronder te geven kanonische regularisatie van deze standaard-typen definieren we

$$(5.9)\qquad \text{k.r. } f(x) = \sum c_j(x) \text{ k.r. } s_j(x).$$

Men kan vrij gemakkelijk bewijzen, dat de definitie (5.9) aan de gestelde kenmerken voldoet en een eenduidige voorstelling geeft.

We gaan nu over tot de aangekondigde regularisatie van x_+^λ. Voor $\lambda > -1$ is het een reguliere distributie. Differentiatie volgens

$$(5.10)\qquad \frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda x_+^{\lambda-1}$$

strekt de betekenis van x_+^λ als distributie uit tot λ-waarden voorbij -1 met uitzondering van $\lambda = -1,-2,\ldots$.
Voor $-2 < \lambda < -1$ is bijvoorbeeld

$$(5.11)\qquad (x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^1 x^\lambda \{\varphi(x) - \varphi(0)\} dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1},$$

waarbij het rechterlid de kanonische regularisatie is van

$$(5.12)\qquad \int_0^\infty x_+^\lambda \varphi(x) dx$$

voor $\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$.

Van ruimer standpunt uit kan de regularisatie van een functie als x_+^λ verkregen worden met behulp van analytische voortzetting. Hierbij moet het begrip distributie op voor de hand liggende wijze uitgebreid worden tot een (complexe) analytische functionaal $f(x,\lambda)$, waarbij λ tot een zeker (complex) gebied Λ behoort. Dit betekent niets anders dan dat voor elke testfunctie $(f(x,\lambda), \varphi(x))$ een analytische functie van λ in Λ is.

In dit licht bezien is (x_+^λ, φ) een analytische functie die voor $\text{Re}\,\lambda > -1$ door (5.12) gegeven is. De formule (5.11) is dus de analy-

tische voortzetting voor Re $\lambda > -2$ waarbij $\lambda = -1$ een gewone pool met residu $\varphi(0)$ is.
De algemenere formule welke de voortzetting tot Re $\lambda > -n-1$ geeft is

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^1 x^\lambda \left\{ \varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right\} dx + \tag{5.13}$$
$$+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)} .$$

Met behulp hiervan is de voortzetting van de gegeneraliseerde analytische functie x_+^λ bekend. Tevens vinden we het resultaat:

x_+^λ is analytisch met uitzondering van $\lambda = -1, -2, \dots$
Het residu in $\lambda = -k$ is $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(x)$.

De verificatie van (5.10) aan de hand van (5.13) zij aan de lezer overgelaten.

Men zou kunnen trachten door toevoeging van een geschikte factor welke een analytische functie van λ is uit x_+^λ een gehele analytische distributie af te leiden. Kiezen we in (5.12) een of andere testfunctie dan is het resultaat i.h.a. een analytische functie met polen in $\lambda = -1, -2, \dots$. De keuze $\varphi(x) = e^{-x}$ (bijna een testfunctie) leidt tot een zeer geschikte factor

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-x} dx = \lambda ! \tag{5.14}$$

Aldus komen we tot de functionaal $x_+^\lambda / \lambda !$ welke geheel blijkt te zijn. Een kleine berekening toont dat de waarde bij $\lambda = -k$ $(k=1,2,3,\dots)$ a.v. is

$$\left. \frac{x_+^\lambda}{\lambda !} \right|_{\lambda=-k} = \delta^{(k-1)}(x). \tag{5.15}$$

De regularisatie van x_-^λ kan analoog behandeld worden of desgewenst uit die van x_+^λ afgeleid worden aangezien

$$(x_-^\lambda, \varphi(x)) = (x_+^\lambda, \varphi(-x)). \tag{5.16}$$

We vinden het volgende resultaat

x_-^λ is analytisch met uitzondering van $\lambda = -1, -2, \dots$
Het residu in $\lambda = -k$ is $\frac{1}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(x)$.

Analoog is $x_-^\lambda / \lambda !$ een gehele analytische functionaal, waarbij

(5.17) $$\frac{x_-^\lambda}{\lambda!}\Big|_{\lambda=-k} = (-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}(x).$$

Uit x_+^λ en x_-^λ kunnen we als even en oneven combinatie de volgende twee nieuwe distributies afleiden

(5.18) $$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda$$

en

(5.19) $$|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda.$$

Uit het voorafgaande volgt, dat $|x|^\lambda$ polen heeft bij $\lambda=-1,-3,-5,\ldots$. Het residu bij $\lambda=-2k-1$ is $\frac{2}{(2k)!}\delta^{(2k)}(x)$.

Voorts heeft $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ polen bij $\lambda=-2,-4,-6,\ldots$. Het residu bij $\lambda=-2k$ is $-\frac{2}{(2k-1)!}\delta^{(2k-1)}(x)$.

Een rechtstreekse regularisatie kan a.v. worden verkregen. In de strook $-n-1<\operatorname{Re}\lambda<-n$ geldt

(5.20) $$(x_+^\lambda,\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right\}dx,$$

en

(5.21) $$(x_-^\lambda,\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)-\ldots-\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right\}dx$$

Optelling en aftrekking geeft

(5.22) $$(|x|^\lambda,\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(x)+\varphi(-x)-2(\varphi(0)+\tfrac{1}{2!}x^2\varphi''(0)+\ldots)\right\}dx$$

en

(5.23) $$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x,\varphi) = \int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2(x\varphi'(0)+\tfrac{1}{3!}x^3\varphi'''(0)+\ldots)\right\}dx$$

In het bijzonder is voor negatief gehele λ

(5.24) $$(x^{-2m},\varphi) =$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(x)+\varphi(-x)-2(\varphi(0)+\frac{x^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0))\right\}dx$$

en

(5.25) $$(x^{-2m-1},\varphi) =$$
$$= \int_0^\infty x^\lambda\left\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2(x\varphi'(0)+\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\ldots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\right\}dx$$

De speciale gevallen x^{-1} en x^{-2} vermelden we nog even apart

(5.26) $$(x^{-1},\varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx,$$

(5.27) $$(x^{-2},\varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx.$$

Uit (5.10) en de overeenkomstige regel voor x_-^λ volgt

(5.28) $$\frac{d}{dx}|x|^\lambda = \lambda|x|^{\lambda-1}\operatorname{sgn} x,$$

en

(5.29) $$\frac{d}{dx}|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = \lambda|x|^{\lambda-1}.$$

In het bijzonder geldt voor $\lambda = -n$

(5.30) $$\frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1}.$$

§ 6. Convolutie

De definitie van distributies in ruimtes met meer dimensies is volkomen analoog aan die van distributies van een enkele variabele. Als voorbeeld worden distributies in het (x,y) vlak gedefinieerd als continue lineaire functionalen t.ov. testfuncties (x,y) welke oneindig vaak partieel differentieerbaar en finiet zijn. De speciale testfuncties

$$\sum_{1}^{n} c_j \; \varphi_j(x)\, \psi_j(y) \tag{6.1}$$

waarbij φ_j en ψ_j eendimensionale testfuncties zijn liggen overal dicht in de testruimte zodat het voldoende is de functionaal te kennen t.o.v. de klasse testfuncties van het type $\varphi(x)\,\psi(y)$.

Reguliere distributies van twee veranderlijken worden op de gebruikelijke wijze gedefinieerd als

$$(f,\varphi) = \iint f(x,y)\;\varphi(x,y)dx\,dy. \tag{6.2}$$

Een voorbeeld van een singuliere distributie is de delta-functie $\delta(x,y)$ gedefinieerd als

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0,0). \tag{6.3}$$

Uit eendimensionale distributies $f(x)$ en $g(x)$ kan men d.m.v. het zogenaamde directe product een tweedimensionale afleiden $f(x)g(y)$ welke t.o.v. de speciale testfuncties $\varphi(x)\,\psi(y)$ gedefinieerd als

$$(fg,\ \varphi\,\psi) = (f,\varphi)(g,\psi). \tag{6.4}$$

Op grond van bovenstaande opmerking is hiermede de functionaal t.o.v. alle testfuncties vastgelegd.

Het directe product kan t.o.v. een willekeurige testfunctie $\varphi(x,y)$ ook a.v. bepaald worden

$$(f(x)g(y),\ \varphi(x,y)) = (f(x),\ \psi(x)), \tag{6.5}$$

waarbij

$$\psi(x) = (g(y),\ \varphi(x,y)). \tag{6.6}$$

Inderdaad leert een eenvoudige beschouwing dat $\psi(x)$ een testfunctie is.

Voor de bovenbeschouwde speciale testfuncties zijn de definities (6.4) en (6.5) blijkbaar identiek zodat ze ook in de gehele testruimte identiek zijn. In (6.5) kan men uiteraard de rol van $f(x)$ en $g(y)$ verwisselen zodat (symbolisch)

$$(6.7) \quad \iint f(x)g(y)\ \varphi(x,y)dx\ dy = \int f(x)dx \int g(y)\ \varphi(x,y)dy =$$
$$= \int g(y)dy \int f(x)\ \varphi(x,y)dx.$$

Uit het bovenstaande volgt de commutativiteit van het directe product. De associatieve eigenschap kan men eveneens vrij gemakkelijk bewijzen.

Als voorbeeld van het directe product is

$$(6.8) \qquad \delta(x,y) = \delta(x)\ \delta(y).$$

Onder de <u>convolutie</u> van twee distributies f(x) en g(x) verstaat men met enige nader te omschrijven beperkingen de distributie h(x) bepaald door

$$(6.9) \qquad (h,\varphi) = \iint f(x)g(y)\ \varphi(x+y)dx\ dy.$$

Voor gewone functies f(x) en g(x) die we absoluut integreerbaar in $(-\infty,\infty)$ veronderstellen stemt deze definitie met de klassieke

$$(6.10) \qquad h(x) = \int f(\xi)g(x-\xi)d\xi$$

overeen. In dat geval is ook h(x) absoluut integreerbaar in $(-\infty,\infty)$. Als bij functies schrijven we de distributionele convolutie als $h=f*g$.

De opvatting (6.9) van h als direct product van f en g t.o.v. de functies $\varphi(x+y)$ heeft alleen zin als $\varphi(x+y)$ een tweedimensionale testfunctie is. Nu is weliswaar $\varphi(x)$ een eendimensionale testfunctie en dus $\varphi(x+y)$ onbeperkt differentieerbaar, maar $\varphi(x+y)$ is niet finiet in het (x,y) vlak. Ligt de drager van $\varphi(x)$ bijvoorbeeld in het interval (-a,a) dan ligt die van $\varphi(x+y)$ in de schuine band $-a < x+y < a$. Alleen wanneer f en/of g zodanig zijn dat van deze band alleen een begrensd deel in aanmerking komt heeft de definitie (6.9) zin. We onderscheiden daartoe de volgende twee gevallen:

<u>a</u>. De drager van een der factoren is begrensd.
<u>b</u>. De drager van elk van beide factoren is positief (negatief) begrensd (bijv. f=0 voor $x < a$ en g=0 voor $x < b$).

Alleen in deze twee gevallen zullen we de distributionele convolutie definieren.

Uit de eigenschappen van het directe product volgen, als bij functies, de commutativiteit en de associativiteit van de convolutie.

In het volgende voorbeeld is aan de voorwaarde <u>a</u> voldaan

$$(6.11) \qquad \delta(x) * f(x) = f(x).$$

Toepassing van (6.7) op de definitie (6.9) geeft een bepaling van de convolutie als herhaalde functionaal

(6.12) $$(f*g,\ \varphi) = (f(x),(g(y),\ \varphi(y+x))).$$

Met behulp van (6.12) leiden we gemakkelijk de volgende differentiatie-regel af

(6.13) $$D(f*g) = Df*g = f*Dg$$

allereerst geldig voor $D=d/dx$ en bij uitbreiding geldig voor een lineaire differentiaal-operator met constante coëfficienten.

Zonder moeite bewijst men m.b.v. (6.12) dat de convolutie continu is, d.w.z.

(6.14) $$\lim(f_n*g) = (\lim f_n)*g$$

onder een der volgende voorwaarden

<u>a</u> De dragers van f_n zijn uniform begrensd.
<u>b</u> De drager van g is begrensd.
<u>c</u> De dragers van f_n en g zijn uniform eenzijdig begrensd.

§ 7. Meerdimensionale distributies

Is R_n een n-dimensionale ruimte met Cartesische coördinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan kan men, zoals in de vorige paragraaf reeds opgemerkt is, distributies in R_n invoeren als continue lineaire functionalen t.o.v. een klasse T van testfuncties $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ welke finiet en onbeperkt partieel differentieerbaar zijn. In het algemeen zijn de bewerkingen met meerdimensionale distributies voor de hand liggende uitbreidingen van die met eendimensionale distributies. We bespreken daarom hier alleen een paar bewerkingen waarbij nieuwe facetten aan het licht treden.

Is u een affiene transformatie van R_n dan wil toepassing van u op een functie f(x) (x is nu een vector met n componenten) zeggen dat

$$u\, f(x) = f(u^{-1}x). \tag{7.1}$$

Geeft f(x) aanleiding tot een reguliere functionaal dan is

$$(uf, \varphi) = (f(u^{-1}x), \varphi(x)) = |u| \int f(y)\, \varphi(uy)dy = |u|\, (f(x), \varphi(ux)),$$

waarbij $|u|$ de absolute waarde van de transformatiedeterminant is. Voor distributies kunnen we dus de volgende consistente definitie van een affiene transformatie geven

$$(f(u^{-1}x), \varphi(x)) = |u|\, (f(x), \varphi(ux)). \tag{7.2}$$

Is u een draaiing dan is bovendien $|u| = 1$.

Als voorbeeld kunnen we een translatie over een vector h op de volgende wijze uitvoeren.

$$ux = x+h, \text{ dus}$$

$$(f(x-h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+h)). \tag{7.3}$$

De gevolgen van het invoeren van een ander coördinatenstelsel bespreken we aan de hand van de overgang in R_2 van Cartesische coördinaten (x,y) op poolcoördinaten (r,θ). De testfuncties $\varphi(x,y)$ gaan over in testfuncties $\psi(r,\theta)$ waarbij $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Het is duidelijk dat ψ in de hoekvariabele de periodiciteit 2π bezit zodat bij $\theta=2\pi$ de testfunctie met alle afgeleiden continu bij $\theta=0$ aansluit.

Voor een reguliere functionaal geldt

$$(f, \varphi) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, \varphi(x,y)dx\, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f\, \psi\, r\, dr\, d\theta = (rf, \psi).$$

In het algemeen dus voor distributies

(7.4) $$(f,\varphi) = (rf,\psi).$$

Is $f(x,y) = \delta(x-x_0)\ \delta(y-y_0)$ en correspondeert met (x_0,y_0) in Cartesische coördinaten (r_0,θ_0) in poolcoördinaten zodat $\varphi(x_0,y_0) = \psi(r_0,\theta_0)$ dan volgt uit (7.4)

$$(f,\varphi) = \varphi(x_0,y_0) = \psi(r_0,\theta_0) = (rf,\psi),$$

zodat in poolcoördinaten de functionaal bepaald is door $r^{-1}\ \delta(r-r_0)\ \delta(\theta-\theta_0)$ d.w.z.

(7.5) $$\delta(x-x_0)\ \delta(y-y_0) = \frac{1}{r_0}\,\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0).$$

In het uitzonderingsgeval $x_0=y_0=0$ is eenvoudiger

(7.6) $$\delta(x)\ \delta(y) = \frac{1}{2\pi r}\,\delta(r).$$

In drie dimensies is analoog

(7.7) $$\delta(x)\ \delta(y)\ \delta(z) = \frac{1}{4\pi r^2}\,\delta(r).$$

Zoals bekend is in R_3 de functie r^{-1} de potentiaal van een puntlading in de oorsprong. We zullen in verband hiermee bewijzen dat in distributionele zin

(7.8) $$\Delta\,\frac{1}{r} = -4\pi\ \delta(x,y,z),$$

waarbij

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Is φ een willekeurige testfunctie dan is (7.8) aequivalent met

(7.9) $$(\Delta\,\frac{1}{r}\,,\varphi) = -4\pi\ \varphi(0).$$

Voor het linkerlid van (7.9) kunnen we schrijven

$$(\frac{1}{r},\Delta\varphi) = \iiint \frac{\Delta\varphi}{r}\,dv = \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r>\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r}\,dv.$$

Volgens de stelling van Green is

$$\iiint_{r>\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{r}\,dv = -\iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,ds + \iint_{r=\varepsilon} \varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\,(\frac{1}{r})ds =$$

$$= O(1) - \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{r=\varepsilon} \varphi\,ds \longrightarrow -4\pi\ \varphi(0),$$

waaruit de bewering (7.9) onmiddellijk volgt.

Als voorbeeld van regularisering beschouwen we de functie r^λ in R_n. Voor Re $\lambda > -n$ geeft deze functie de reguliere functionaal

(7.10) $$(r^{\lambda},\varphi) = \int r^{\lambda}\varphi(x)dx.$$

Voeren we hierin bolcoördinaten in waarbij $d\Omega$ het oppervlakteelement van de eenheidsbol is, dan is

$$(r^{\lambda},\varphi) = \int_0^{\infty} r^{\lambda}\left\{\int_{\Omega}\varphi(x)d\Omega\right\} r^{n-1}dr.$$

Schrijven we

$$\int_{\Omega}\varphi(x)d\Omega = \Omega_n S_{\varphi}(r),$$

waarbij Ω_n de oppervlakte van de eenheidsbol en $S_{\varphi}(r)$ het gemiddelde van $\varphi(x)$ op de bol om de oorsprong met straal r, dan is

(7.11) $$(r^{\lambda},\varphi) = \Omega_n \int_0^{\infty} v^{\lambda+n-1}S_{\varphi}(r)dr.$$

We kunnen vrij gemakkelijk aantonen dat $S_{\varphi}(r)$ opgevat kan worden als een even testfunctie in $-\infty < r < \infty$. De regularisering van r^{λ} kan derhalve teruggebracht worden tot de in § 5 besproken regularisering van x_+^{λ} (zie 5.13). We vinden dus dat r^{λ} een analytische functionaal is met polen in $\lambda=-n-2k$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Het residu in $\lambda=-n-2k$ is daarbij $\frac{\Omega_n}{(2k)!}\delta^{(2k)}(r)$. Door toevoeging van een geschikte factor kunnen we als in § 5 uit r^{λ} een gehele analytische functionaal afleiden. Daartoe kiezen we

(7.12) $$\frac{2r^{\lambda}}{\Omega_n \Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\lambda)}.$$

De waarde van deze functionaal voor $\lambda=-n$ is dan precies $\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Ook voor meerdimensionale distributies kunnen we het "direct product" invoeren en vervolgens voor twee n-dimensionale distributies de "convolutie" definiëren als

(7.13) $$(f*g,\varphi) = (f(x)g(y),\varphi(x+y)),$$

met soortgelijke beperkingen als in het eendimensionale geval. Als voorbeeld hiervan kunnen we de potentiaal van een massaverdeling $\mu(x_1,x_2,x_3)$ eenvoudig schrijven als

(7.14) $$\mu * \frac{-1}{4\pi r}.$$

§ 8. Differentiaalvergelijkingen

In § 3 hebben we al gezien dat de eenvoudigste differentiaal-vergelijking

$$(8.1) \qquad \frac{df}{dx} = 0$$

als oplossing slechts de constante (distributie) toelaat. De iets moeilijkere

$$(8.2) \qquad \frac{df}{dx} = \delta(x)$$

heeft de particuliere oplossing $f=\theta(x)$ en de algemene $f=\theta(x)+C$. Vervangen we het rechterlid van (8.2) door een willekeurige distributie $h(x)$ dan kan de oplossing met behulp van die van (8.2), nml. $\theta(x)$, onmiddellijk neergeschreven worden als de convolutie

$$(8.3) \qquad f(x) = \theta(x) * h(x).$$

Immers is volgens (6.13) en (6.11)

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\theta(x) * h(x) = \delta(x) * h(x) = h(x).$$

Algemener kan de oplossing van

$$(8.4) \qquad P(\tfrac{d}{dx})f = h(x),$$

waarbij P een polynoom met constante coëfficiënten is, afgeleid worden uit de kennis van de oplossing $g(x)$ van de eenvoudiger vergelijking

$$(8.5) \qquad P(\tfrac{d}{dx})g = \delta(x).$$

Men heeft dan

$$(8.6) \qquad f(x) = g(x) * h(x).$$

We beschouwen vervolgens de lineaire warmtevergelijking

$$(8.7) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

voor $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$.
Het is bekend dat hieraan voor $t > 0$ de oplossing

$$(8.8) \qquad g(x,t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{x^2}{4t}$$

voldoet.
Aangezien voor een willekeurige testfunctie

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)\,\varphi(x)dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\varphi(2y\sqrt{t})dy =$$
$$= \varphi(0),$$

is (8.8) de oplossing met de beginvoorwaarde

(8.9) $$g(x,0) = \delta(x).$$

De oplossing van (8.7) met de beginvoorwaarde

(8.10) $$T(x,0) = \mu(x),$$

waarbij $\mu(x)$ een willekeurige (finiete) distributie is, is dan

(8.11) $$T(x,t) = g(x,t) * \mu(x).$$

Uit de continuïteit (6.14) van de convolutie volgt namelijk

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} * \mu$$

terwijl

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} * \mu$$

zodat (8.11) aan (8.7) voldoet. De beginvoorwaarde (8.10) verifieert men gemakkelijk.

Op een soortgelijke wijze kan men de golfvergelijking

(8.12) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

behandelen.

De oplossing van het probleem van Cauchy, d.w.z. een oplossing te vinden met de beginvoorwaarde

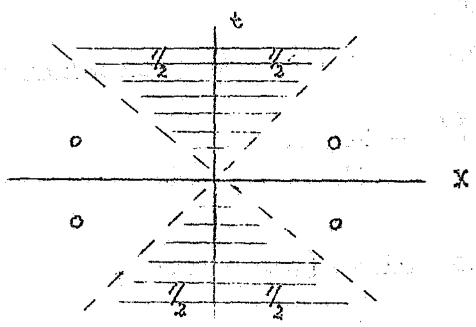
(8.13) $$u = u_0(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{voor } t=0,$$

kan men terugbrengen tot die van het vinden van een soort Green'se functie $g(x,t)$ met de beginvoorwaarden

(8.14) $$g(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} g(x,0) = \delta(x).$$

Men verifieert gemakkelijk dat (zie figuur)

(8.15) $$g(x,t) = \tfrac{1}{2}\left\{\theta(x+t) - \theta(x-t)\right\}.$$



De oplossing van (8.12) met (8.13) is dan

(8.16) $$u(x,t) = g(x,t) * u_1(x) + \frac{\partial}{\partial t} g(x,t) * u_o(x),$$

of uitgeschreven (formule van d'Alembert)

(8.17) $$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left\{ u_o(x+t)+u_o(x-t)\right\} + \tfrac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)d\xi \;.$$

Tenslotte beschouwen we een generalisatie van de vergelijking van Poisson (zie 7.8). Het probleem is een oplossing te vinden van

(8.18) $$L(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})u = -\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

waarbij L een homogene elliptische lineaire operator van de orde 2m is, d.w.z. een operator waarbij $L(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ een homogene veelterm is die voor alle waarden van de ω_j positief is, met uitzondering slechts voor $\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_n=0$.

We handelen als volgt. Gebruikmakend van (7.12) vervangen we (8.18) door

(8.19) $$L\,u = \frac{-2r^{\lambda}}{\Omega_n \Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\lambda)} ,$$

waarbij achteraf weer $\lambda=-n$ gesteld zal worden.
Het rechterlid van (8.19) kunnen we in vlakke golven ontwikkelen, d.w.z. we stellen

(8.20) $$r^{\lambda} = C\int_{\Omega} |\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\ldots+\omega_n x_n|^{\lambda}\, d\Omega ,$$

waarbij over de eenheidsbol $\omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^2=1$ geïntegreerd wordt. Aangezien het rechterlid van (8.20) symmetrisch in de variabelen x_j is kan de constante C bepaald worden door $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$ en $x_n=r$ te stellen, dus

$$1 = C\int_{\Omega} |\omega_n|^{\lambda}\, d\Omega .$$

In hypersferische hoekvariabelen $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$ is

$$\omega_n = \cos\theta_{n-1} \quad (\text{en } \omega_{n-1}=\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2},$$
$$\omega_{n-2} = \sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3} \text{ enz.})$$

en
$$d\Omega = \sin^{n-2}\theta_{n-1}\, d\Omega_{n-1},$$

waarbij $d\Omega_{n-1}$ het oppervlakteelement van de n-dimensionale eenheidsbol is. Dan is

$$\int_{\Omega} |\omega_n|^{\lambda} d\Omega = 2\,\Omega_{n-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2}\theta\,\cos^{\lambda}\theta\, d\theta = \Omega_{n-1} B(\tfrac{1}{2}n-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}).$$

Aangezien $\Omega_{n-1}=2\pi^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}/\,\Gamma(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2})$ is tenslotte

(8.21) $$C = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}n)}{2\pi^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2})} .$$

Combinatie van (8.19), (8.20) en (8.21) geeft

(8.22) $$L\,u = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})}{2\pi^{n}\,\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2})}\int_{\Omega}|\omega_1x_1+\omega_2x_2+\ldots+\omega_nx_n|^{\lambda}\,d\Omega .$$

De overeenkomstige vergelijking met in het rechterlid een enkele vlakke golf

(8.23) $$L\,u = |\xi|^{\lambda},$$

waarbij

(8.24) $$\xi = \omega_1x_1+\omega_2x_2+\ldots+\omega_nx_n$$

kunnen we gemakkelijk oplossen. Stellen we $u=v(\xi)$ dan volgt uit (8.23)

(8.25) $$L(\omega_1,\ldots,\omega_n)\,\frac{d^{2m}}{d\xi^{2m}}\,v(\xi) = |\xi|^{\lambda} ,$$

zodat

(8.26) $$v(\xi) = \frac{1}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\left\{\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)} + P(\xi)\right\} ,$$

waarbij $P(\xi)$ een veelterm van hoogstens de graad $2m-1$ is.
Uit (8.22) volgt daarmee de algemene oplossing

(8.27) $$u(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2})}{2\pi^{n}\,\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2})}\int_{\Omega}\left\{\frac{|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{\lambda+2m}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+2m)}+P(\xi)\right\}\frac{d\Omega}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)} .$$

Hierin moeten we tenslotte de limietovergang $\lambda \to -n$ uitvoeren.
Het is noodzakelijk verschillende gevallen te onderscheiden.

a $2m > n$ en n oneven.
Voor $\lambda \to -n$ volgt uit (8.27) zonder meer de particuliere oplossing

(8.28) $$u = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4(2\pi)^{n-1}(2m-n)!}\int_{\Omega}\frac{|\omega_1x_1+\ldots+\omega_nx_n|^{2m-n}}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\,d\Omega .$$

b $2m \geq n$ en n even.
Teneinde de limietovergang te kunnen uitvoeren moet een passende term van $P(\xi)$ toegevoegd worden om de pool bij $\lambda=-n$ op te heffen.
We vinden dan

$$(8.29) \qquad u = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{2n}(2m-n)!} \int_{\Omega} \frac{(\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n)^{2m-n} \ln|\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n|}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\, d\Omega.$$

c $2m < n$ en n oneven

We maken gebruik van het feit dat

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2})}\right|_{\lambda=-n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2})!}{(n-2m-1)!}\,\delta^{(n-2m-1)}(x).$$

Dan is

$$(8.30) \qquad u = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Omega} \frac{\delta^{(n-2m-1)}(\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n)}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\, d\Omega .$$

d $2m < n$ en n even

Nu is

$$\left.\frac{|\xi|^{\lambda+2m}}{\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2})}\right|_{\lambda=-n} = \frac{|\xi|^{-n+2m}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n)},$$

en dus

$$(8.31) \qquad u = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n+1}(n-2m-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} \frac{|\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n|^{-n+2m}}{L(\omega_1,\ldots,\omega_n)}\, d\Omega .$$

We kunnen gemakkelijk bewijzen dat in alle gevallen de gevonden oplossing $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ een gewone functie is met het volgende gedrag in de oorsprong

$$u = \begin{cases} O(r^{2m-n}) & \text{als } n \text{ oneven is of} \\ & \text{als } n \text{ even is en } 2m < n, \\ O(r^{2m-n}\ln r) & \text{als } n \text{ even is en } 2m \geq n. \end{cases}$$

Voorbeeld $\qquad L = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m$

$u = C_{mn}\, r^{2m-n}$ als $2m < n$,
en als $2m \geq n$, n oneven;

$u = C_{mn}\, r^{2m-n} \ln|r|$ als $2m \geq n$, n even.

Bijeenkomst op vrijdag 24 maart
Spreker: P.C. Baayen

§ 9. De volledigheid van de ruimte der distributies

Reeds in § 4 is vermeld dat de ruimte der gegeneraliseerde functies volledig is. D.w.z. als een rij f_n de eigenschap heeft, dat voor iedere toetsfunctie φ de limiet $\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi) = f(\varphi)$ bestaat, dan is ook f een gegeneraliseerde functie, en $f_n \to f$, in distributionele zin.

Van deze belangrijke stelling zullen we nu een bewijs schetsen. Om te beginnen is het duidelijk dat $f(\varphi)$ lineair is. We behoeven dus alleen de continuiteit aan te tonen: als $\varphi_n \to 0$, dan $f(\varphi_n) \to 0$. Welnu, neem eens aan dat er een rij $\varphi_n \to 0$ in T is waarvoor <u>niet</u> $f(\varphi_n) \to 0$. Het is eenvoudig in te zien dat dan voor zekere $c > 0$ en voor een geschikte deelrij van de rij φ_n - die we gemakshalve maar weer met φ_n aangeven - geldt

$$|f(\varphi_n)| \geq c > 0;$$
$$|\varphi_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{4^n}, \text{ voor } 0 \leq k \leq n.$$

Als $\psi_n(x) = 2^n . \varphi_n(x)$, dan zal ook nog $\psi_n(x) \to 0$ in T; en dus geldt, voor iedere k,

$$(f_k, \psi_n) \to 0. \tag{9.1}$$

Maar bovendien geldt nog

$$f(\psi_n) \to \infty, \tag{9.2}$$

en dit, gecombineerd met (9.1), maakt het mogelijk een deelrij ψ_n' van de rij ψ_n, en een deelrij f_n' van de rij f_n te kiezen, zodat voor alle n

$$|(f_k', \psi_n')| < \frac{1}{2^{n-k}} \text{ als } 0 \leq k \leq n-1; \tag{9.3}$$

$$|f(\psi_n')| > \sum_{i=1}^{n} |f(\psi_i')| + n. \tag{9.4}$$

Als tenslotte $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n'(x)$, dan is $\psi \in T$, en uit (9.3) en (9.4) volgt dat voor alle n

$$|(f_n', \psi)| > n-1,$$

zodat $\lim_{n\to\infty}(f_n', \psi) = \infty$, in strijd met $\lim_{n\to\infty}(f_n', \psi) = f(\psi)$. Dus $f(\varphi)$ is inderdaad ook continu, m.a.w. f is een gegeneraliseerde functie. De volledigheidsstelling is daarmee bewezen.

§ 10. Afhankelijkheid van een parameter

Stel Λ is een verzameling reële of complexe getallen, en stel aan iedere $\lambda \in \Lambda$ is een gegeneraliseerde functie f_λ toegevoegd. Het ligt voor de hand om te zeggen dat f_λ continu is in λ als voor iedere $\lambda_o \in \Lambda$ geldt

(10.1) $$\lim_{\lambda \to \lambda_o} f_\lambda = f_{\lambda_o} .$$

Dat f_λ continu afhangt van λ betekent dus, dat voor iedere toetsfunctie φ de functie (f_λ, φ) een gewone continue functie van λ is.

Wanneer zal het nu mogelijk zijn f_λ in een verdichtingspunt λ_o van Λ, waar f_λ nog niet gedefinieerd is, continu voort te zetten? In ieder geval zal dan iedere functie (f_λ, φ) $(\varphi \in T)$ in λ_o continu voortgezet moeten kunnen worden. Uit de volledigheid van de ruimte der distributies (§ 9) kunnen we echter afleiden dat deze voorwaarde ook voldoende is:

Continue voortzetting van f_λ in λ_o is precies dan mogelijk, als voor iedere $\varphi \in T$ de functie (f_λ, φ) continu voortgezet kan worden in λ_o.

Immers, voor vaste φ bestaat dan, voor $\lambda \to \lambda_o$, de limiet van (f_λ, φ), en als we deze limiet aangeven met (f_{λ_o}, φ), dan is f_{λ_o} weer een gegeneraliseerde functie, volgens de volledigheidsstelling, en bovendien geldt dan (10.1).

Evenals voor rijen f_n geldt voor gegeneraliseerde functies f_λ die van een continue parameter λ afhangen:

(10.2) $$\text{als } f_\lambda(x) \to f_{\lambda_o}(x), \text{ dan } f'_\lambda(x) \to f'_{\lambda_o}(x).$$

Als dus f_λ continu van λ afhangt, dan geldt hetzelfde voor f'_λ.

Als f_λ continu afhangt van λ, dan kan men naar λ integreren. Als bijv. Γ een rectificeerbare kromme is in Λ, dan kan men $\int_\Gamma f_\lambda \, d\lambda$ definieren door

(10.3) $$\left(\int_\Gamma f_\lambda \, d\lambda , \varphi\right) = \int_\Gamma (f_\lambda, \varphi) d\lambda .$$

Een andere methode, die aansluit bij de invoering van de integraal voor gewone functies, is, de kromme Γ te verdelen, door deelpunten $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, en te beschouwen

(10.4) $$s_n = \sum_{j=1}^{n} f_{\lambda_j} \Delta \lambda_j \, .$$

Dan is s_n een gegeneraliseerde functie, en voor alle $\varphi \in T$ is

(10.5) $$(s_n, \varphi) = \sum_{j=1}^{n} (f_{\lambda_j}, \varphi) \Delta \lambda_j \, .$$

Als nu max $|\Delta \lambda_j| \to 0$, dan gaat het rechterlid van (10.5) over in $\int_{\Gamma} (f_\lambda, \varphi) d\lambda$, voor iedere φ. Dat betekent dat s_n overgaat in een gegeneraliseerde functie, die we per definitie $\int_{\Gamma} f_\lambda \, d\lambda$ noemen, en die dan blijkbaar voldoet aan (10.3). (We gebruiken hier weer de volledigheid van de verzameling der gegeneraliseerde functies!).

Indien voor zekere $\lambda_0 \in \Delta$

(10.6) $$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$$

bestaat, zullen we natuurlijk zeggen dat f_λ <u>differentieerbaar is naar λ</u> voor $\lambda = \lambda_0$. Is dit het geval voor alle $\lambda \in \Lambda$, dan krijgen we zo een afgeleide $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}$. Ook differentieerbaarheid van gegeneraliseerde functies f_λ is te herleiden tot differentieerbaarheid van gewone functies:

Dan en slechts dan is f_λ differentieerbaar voor $\lambda = \lambda_0$, als voor iedere $\varphi \in T$ geldt: (f_λ, φ) is differentieerbaar voor $\lambda = \lambda_0$.

In één richting is dit duidelijk: als f_λ differentieerbaar is, dan zijn alle (f_λ, φ) differentieerbaar. Is omgekeerd het laatste het geval, dan bestaat voor iedere $\varphi \in T$ de limiet van

(10.7) $$\frac{(f_\lambda, \varphi) - f(\lambda_0, \varphi)}{\lambda - \lambda_0} = \left(\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}, \varphi \right)$$

voor $\lambda \to \lambda_0$, en dus kan, volgens het voorgaande, de gegeneraliseerde functie $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$ continu voortgezet worden tot $\lambda = \lambda_0$. D.w.z. er is een gegeneraliseerde functie g, die de limiet is van $\frac{f_\lambda - f_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$, voor $\lambda \to \lambda_0$. Dus f_λ is differentieerbaar.

Men kan onmiddellijk nagaan, dat met $f_\lambda(x)$ ook $\frac{\partial}{\partial x} f_\lambda(x)$ differentieerbaar is en dat

(10.8) $$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x} f_\lambda(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda(x) \, .$$

Als λ een complexe parameter is, en f_λ is differentieerbaar naar λ, dan zeggen we ook dat f_λ <u>analytisch</u> is in λ. Volgens het bovenstaande is f_λ dan en slechts dan analytisch, als alle (f_λ, φ) gewone analytische functies zijn. Uit deze mogelijkheid, om het gedrag van f_λ te herleiden tot het gedrag van gewone functies, volgt onmiddellijk dat voor analytische f_λ alle afgeleiden $\frac{\partial^n f_\lambda}{\partial \lambda^n}$ bestaan, en dat in een omgeving van een waarde $\lambda_0 \in \Lambda$ een Taylor-ontwikkeling geldt:

(10.9) $$f_\lambda = f_{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)\frac{\partial f_{\lambda_0}}{\partial \lambda} + \tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 \frac{\partial^2 f_{\lambda_0}}{\partial \lambda^2} + \ldots \quad .$$

Verder kan f_λ analytisch voortgezet worden door de (f_λ, φ) afzonderlijk analytisch voort te zetten. Op deze wijze kunnen de meeste klassieke resultaten uit de functietheorie overgebracht worden naar gegeneraliseerde functies.

Als voorbeeld van een Taylorreeks zij vermeld de ontwikkeling van $|x|^\lambda$ in een regulier punt λ_0:

(10.10) $$|x|^\lambda = |x|^{\lambda_0} + (\lambda-\lambda_0)|x|^{\lambda_0}\log|x| + \tfrac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^2|x|^{\lambda_0}\log^2|x| + \ldots$$

In deze uitdrukking treden nieuwe gegeneraliseerde functies op, van het type

(10.11) $$|x|^\lambda \log^m|x| \; .$$

Desgewenst kan men deze beschouwen als <u>gedefinieerd</u> door de ontwikkeling (10.10).

§ 11. Locale beschrijving van gegeneraliseerde functies

De gegeneraliseerde functies zijn ingevoerd als continue lineaire functionalen, d.w.z. zij worden bepaald door de waarden (f, φ) voor zekere toetsfuncties φ. Die toetsfuncties zijn altijd finiet, ze zijn nul buiten een begrensd gebied. Maar een begrensd gebied kan nog vervelend groot zijn, en in de practijk zal men het dan i.h.a. niet in zijn geheel aanpakken, maar het overdekken met een aantal (kleine) waarnemingsgebiedjes.

De vraag rijst dan, of we uit dergelijke locale waarnemingen de gegeneraliseerde functie f wel in zijn geheel kunnen bepalen. Wat voor waarde zullen we moeten toekennen aan (f,φ) waarbij φ een heel grote drager heeft, als we om te beginnen alleen waarden (f,φ_i) kennen, voor toetsfuncties φ_i die elk identiek nul zijn buiten een klein waarnemingsgebied?

We zullen deze vraag kunnen beantwoorden als we in staat zijn een willekeurige φ te schrijven als lineaire combinatie van de φ_i:

(11.1) $$\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x).$$

En dit blijkt inderdaad mogelijk!

Daartoe merken we eerst op, dat iedere continue functie f(x) benaderd kan worden door oneindig vaak differentieerbare functies $f_\delta(x)$. Neem maar, voor iedere $\delta > 0$, een toetsfunctie $\varphi_\delta(x)$ met de eigenschappen

(11.2) $$\varphi_\delta(x) = 0 \quad \text{als} \quad |x| > \delta ;$$

(11.3) $$\int \varphi_\delta(x)dx = 1.$$

Als dan

(11.4) $$f_\delta(x) = (f * \varphi_\delta)(x) = \int f(y)\, \varphi_\delta(x-y)dy,$$

dan zijn de functies f_δ oneindig vaak differentieerbaar, en $f_\delta(x) \to f(x)$ voor $\delta \to 0$, zelfs uniform op ieder begrensd interval. Bovendien merken we op: als f(x) finiet is, dan zijn ook alle $f_\delta(x)$ finiet.

Een gevolg is, dat bij een gegeven begrensde gesloten verzameling F, die bevat is in een open verzameling U, altijd een toetsfunctie φ bestaat, die 1 is op F en 0 buiten U, en die alleen waarden tussen 0 en 1 aanneemt.

Stel nu de ruimte overdekt door een rij waarnemingsgebieden $U_1, U_2, U_3, \ldots$, die alle begrensd zijn, en open. Bovendien nemen we aan dat deze overdekking van de ruimte <u>locaal eindig</u> is, d.w.z. dat ieder punt een omgeving heeft die slechts eindig veel U_n snijdt.

Dan construeren we eerst een nieuwe rij open gebieden $V_1, V_2, V_3 \dots$ die samen de ruimte overdekken, met de eigenschap dat steeds $\overline{V}_n \subset U_n$. Volgens het voorgaande is er dan voor iedere n een toetsfunctie $\varphi_n(x)$, die alleen waarden tussen 0 en 1 aanneemt, en die 1 is in V_n en 0 buiten U. De reeks

$$(11.5) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

is dan in een omgeving van ieder punt x in feite een eindige som, omdat ieder punt x een omgeving heeft die slechts eindig veel U_n snijdt. Dus niet alleen convergeert de reeks in (11.5) overal, bovendien is de somfunctie $\varphi(x)$ weer willekeurig vaak differentieerbaar. Omdat iedere x in een V_n ligt, zodat $\varphi_n(x) = 1$, is ook $\varphi(x) \neq 0$ voor alle x, en we mogen definieren:

$$(11.6) \qquad \alpha_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\varphi(x)} \; .$$

De functies $\alpha_n(x)$ zijn dan toetsfuncties, met de eigenschappen, dat steeds de drager van $\alpha_n(x)$ bevat is in U_n; dat ieder punt x een omgeving heeft waar slechts eindig veel $\alpha_n(x)$ niet identiek nul zijn; terwijl tenslotte, voor iedere x,

$$(11.7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) = 1.$$

Men zegt wel dat de functies $\alpha_n(x)$ een <u>partitie van de eenheid</u> vormen. Als onmiddellijk gevolg hebben we de volgende stelling:

Als $\varphi(x)$ een willekeurige toetsfunctie is, en de begrensde gebieden $U_1, U_2, U_3, \dots$ vormen een locaal eindige overdekking van de ruimte, dan kunnen we schrijven

$$(11.8) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

waarbij voor iedere n de drager van $\varphi_n(x)$ bevat is in U_n.

Ten bewijze behoeft alleen opgemerkt te worden, dat

$$(11.9) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \cdot \varphi(x),$$

en dat de drager van $\alpha_n(x) \cdot \varphi(x)$ bevat is in U_n.

We zijn nu ook in staat de vraag die in het begin van deze § gesteld is, volledig te beantwoorden. Stel ieder punt x_0 heeft een omgeving $U(x_0)$ waarop een continue lineaire functionaal (f, φ) bepaald is; d.w.z. de waarden (f, φ) zijn bekend voor toetsfuncties $\varphi(x)$ die nul zijn buiten $U(x_0)$. Neem ook nog aan dat deze waarden (f, φ) niet van het punt x_0 afhangen: als $\varphi(x)$ ook nul is buiten een omgeving $U(y_0)$ van een ander punt y_0, dan moeten we langs deze weg dezelfde waarde (f, φ) vinden, als uitgaande van x_0 en $U(x_0)$.

Onder deze voorwaarden kunnen we op één en slechts één wijze f uitbreiden tot een gegeneraliseerde functie die voor alle toetsfuncties gedefinieerd is. Want het is mogelijk, gebruikmakend van de overdekkingsstelling van Heine-Borel, de ruimte te overdekken met eindig veel begrensde omgevingen $U(x_n)=U_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ zo, dat ieder punt x een omgeving heeft die slechts eindig veel U_n snijdt. Bij deze overdekking bestaan toetsfuncties $\alpha_n(x)$, die een partitie van de eenheid vormen. Als we nu een willekeurige toetsfunctie $\varphi(x)$ schrijven als

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad \text{met} \quad \varphi_n(x) = \alpha_n(x) \cdot \varphi(x) \tag{11.10}$$

dan blijkt door

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \tag{11.11}$$

een continue lineaire functionaal gedefinieerd te zijn, die een voortzetting is van de gegeven locale functionalen; kennelijk is f door (11.11) ook ondubbelzinnig vastgelegd.

Zo is het mogelijk gebleken, uit een locale beschrijving een gegeneraliseerde functie globaal op te bouwen. Er volgt nu bijv. onmiddellijk, dat een gegeneraliseerde functie f met de eigenschap dat ieder punt een omgeving heeft waarin f nul is, noodzakelijk de nuldistributie is. En twee distributies, die overeenstemmen in een omgeving van elk punt, moeten samenvallen.

Uit de locale beschrijving volgt ook onmiddellijk: als φ een toetsfunctie is, die nul is in een omgeving van de drager van een gegeven distributief, dan is $(f,\varphi)=0$.

§ 12. Gegeneraliseerde functies als limieten of als afgeleiden van gewone functies

In het voorgaande zijn de distributies ingevoerd als continue lineaire functionalen over een ruimte van toetsfuncties. Maar de gegeneraliseerde functies kunnen ook langs andere weg verkregen worden. Eén methode (uitgewerkt door Mikusinski, en ook gebruikt in het boekje van Lighthill) gaat uit van rijen van gewone locaal-integreerbare functies. Een dergelijke rij $f_n(x)$ wordt dan een fundamentaalrij genoemd als voor iedere toetsfunctie $\varphi(x)$ de getallenrij (f_n, φ) convergeert; en iedere fundamentaalrij wordt geacht een gegeneraliseerde functie te bepalen. Strikt genomen is in deze opzet een gegeneraliseerde functie een klasse van aequivalente fundamentaalrijen van gewone functies. Deze methode is dus analoog aan de opbouw van de reële getallen volgens Cantor, waarbij ieder reëel getal een klasse van aequivalente fundamentaalrijen van rationale getallen is.

Dat deze methode inderdaad succes heeft, wordt gewaarborgd door de volgende belangrijke stelling:

Iedere distributie f is limiet (in distributionele zin) van een rij reguliere distributies $f_n(x)$. Zelfs kunnen voor de functies $f_n(x)$ toetsfuncties worden gekozen.

Deze stelling zullen we nu bewijzen.

Zij $\varphi_n(x)$ een rij toetsfuncties die convergeert naar de δ-functie. Omdat de dragers der $\varphi_n(x)$ uniform begrensd zijn, geldt (zie 6.14)

$$\varphi_n * f \longrightarrow \delta * f. \tag{12.1}$$

En volgens 6.11 is $\delta * f = f$.

Als $\alpha(x)$ een toetsfunctie is, en f is een willekeurige gegeneraliseerde functie, dan is de distributie $\alpha * f$ regulier; en wel is $\alpha * f$ de functie $(f(y), \alpha(x-y))$. Immers, als $\varphi(x)$ een willekeurige toetsfunctie is, dan is

$$(\alpha * f, \varphi) = (f(y), (\alpha(x), \varphi(x+y))=(f(y), \int\alpha(x)\ \varphi(x+y)dx) = \tag{12.2}$$
$$= (f(y), \int\alpha(x-y)\ \varphi(x)dx)= \int(f(y),\alpha(x-y))\varphi(x)dx.$$

De laatste stap in (12.2) kunnen we rechtvaardigen door de integraal te benaderen door Riemannse sommen. Voorts is eenvoudig in te zien dat de functie $(f(y),\alpha(x-y))$ continu, en zelfs oneindig vaak differentieerbaar is. I.h.b. zijn dus de distributies $\varphi_n * f$ uit (12.1) alle regu-

lier, en zij zijn zelfs oneindig vaak differentieerbare functies. Zij zijn misschien nog geen toetsfuncties, want ze behoeven niet finiet te zijn. Maar dat is eenvoudig te verhelpen.
Laten we de functie $\varphi_n * f$ kortheidshalve aangeven met g_n; we weten dat, in distributionele zin, $g_n \to f$; ofwel

$$(g_n, \varphi) \to (f, \varphi), \text{ voor alle toetsfuncties } \varphi .$$

Zij nu $\psi_n(x)$, voor iedere n, een toetsfunctie met $\psi_n(x)=1$ als $|x| < n$ en $\psi_n(x)=0$ als $|x| > 2n$. Iedere toetsfunctie φ is finiet, en dus is $\psi_n . \varphi = \varphi$ zodra n groot genoeg is. Dus geldt

$$\begin{aligned} (\psi_n . g_n, \varphi) &= (g_n, \psi_n . \varphi) = \\ &= (g_n, \varphi) \text{ als n groot genoeg} \\ &\to (f, \varphi). \end{aligned} \tag{12.3}$$

M.a.w. de toetsfuncties $f_n(x) = \psi_n(x).g_n(x)$ convergeren, als distributies beschouwd, naar f.

Een geheel ander verband tussen gegeneraliseerde en gewone functies is het volgende: iedere gegeneraliseerde functie is, in ieder geval locaal, een distributie-afgeleide (van zekere orde) van een gewone functie.

Alsvorens dit te kunnen bewijzen moeten we eerst een paar hulpresultaten afleiden. Het eerste resultaat is a.h.w. een verscherping van de continuiteitseigenschappen van distributies.

Een distributie f is per definitie continu op de ruimte T van alle toetsfuncties; d.w.z. als $\varphi_n \to 0$ in T, dan zal $(f, \varphi_n) \to 0$. Maar het is natuurlijk denkbaar dat er rijen φ_n zijn, waarvoor $(f, \varphi_n) \to 0$, zonder dat de rij φ_n convergeert in T. De eis: $\varphi_n \to 0$ in T, is immers nogal zwaar, eigenlijk zelfs een samenvatting van oneindig veel voorwaarden: er is een begrensd interval K waarbuiten alle $\varphi_n(x)=0$; de rij φ_n convergeert uniform naar 0; de rij $\varphi_n'(x)$ convergeert uniform naar 0; de rij $\varphi_n''(x)$ convergeert uniform naar 0; etc. Er blijkt nu dat we met slechts <u>eindig</u> veel voorwaarden kunnen volstaan zodra we de gegeneraliseerde functie f en het begrensde interval K vast houden:

> Zij f een vaste gegeneraliseerde functie, en K een vast begrensd interval. Dan bestaat er een geheel getal $r \geq 0$ (dat alleen van f en van K afhangt) zodanig, dat voor iedere rij toetsfuncties φ_n met de eigenschappen: $\varphi_n(x)=0$ buiten K, en $\varphi_n^{(r)}(x) \to 0$, uniform, geldt: $(f, \varphi_n) \to 0$.

Dit zullen we nu bewijzen.

Stel zo'n r bestaat niet. Voor k=0,1,2,... bestaat er dan een rij $\varphi_{k,n}$ van toetsfuncties, nul buiten K, met

(12.4) $$\varphi_{k,n}^{(k)}(x) \to 0, \quad \text{voor } n \to \infty, \text{ uniform in } x;$$

(12.5) $$(f,\varphi_{k,n}) > 1, \quad \text{voor alle } k,n.$$

Uit (12.4) volgt dat ook $\varphi_{k,n}^{(i)}(x) \to 0$ voor $n \to \infty$, uniform in x, als $i=0,1,2,\dots,k-1$.

We construeren nu een nieuwe rij toetsfuncties, $\psi_n(x)$ als volgt: zij

(12.6) $$\psi_k(x) = \varphi_{k,n_k}(x),$$

waarbij n_k zo groot gekozen is dat voor alle $x \in K$

(12.7) $$\left|\varphi_{k,n_k}^{(i)}(x)\right| \leq \frac{1}{k} \qquad (i=0,1,\dots,k).$$

Dan is ψ_n een rij waarvoor geldt: $\psi_n(x) \to 0$ in T. Dus zal $(f,\psi_n) \to 0$. Maar dit is in tegenspraak met (12.5).

Het tweede resultaat dat we nodig hebben is de beroemde <u>representatiestelling van Riesz</u> voor lineaire functionalen. Deze stelling betreft lineaire functionalen over de lineaire ruimte C van alle continue functies op een begrensd interval, zeg het eenheidsinterval $[0,1]$. Een dergelijke lineaire functionaal F heet <u>continu</u> als $F(\varphi_n) \to 0$ voor iedere rij functies $\varphi_n(x)$ uit C die uniform naar 0 convergeert. We kennen reeds vele continue functionalen op C, nl. de toevoegingen

(12.8) $$\varphi \to (f,\varphi) = \int_0^1 f(x)\,\varphi(x)dx,$$

waarbij f(x) een locaal integreerbare functie is. Andere voorbeelden zijn de Stieltjes-integralen

(12.9) $$\varphi \to \int_0^1 \varphi(x)dg(x),$$

waarbij g(x) een functie van begrensde variatie is. De stelling van Riesz nu zegt dat <u>alle</u> continue lineaire functionalen op C van dit type zijn:

Iedere continue lineaire functionaal F op C is te schrijven als een Stieltjes-integraal. D.w.z. er is een functie g(x), van begrensde variatie, zodat voor iedere functie op $\varphi \in C$ geldt:

$$F(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dg(x).$$

Een eenvoudig bewijs van deze stelling is o.a. te vinden in het boek van Ljusternik en Sobolev, Elemente der Funktionalanalysis.

Nu zijn we in staat de aangekondigde stelling over het verband tussen gegeneraliseerde functies, en distributie-afgeleiden van gewone functies, te bewijzen:

Als f een gegeven gegeneraliseerde functie is, en K is een vast begrensd interval, dan bestaan er een geheel getal $s \geq 0$, en een continue functie $g(x)$, zodanig, dat voor iedere $\varphi(x)$ met drager binnen K geldt

(12.10) $$(f,\varphi) = \left(\frac{d^s g}{dx^s}, \varphi\right),$$

waarbij met $\frac{d^s g}{dx^s}$ de distributie-afgeleide wordt bedoeld.

Bewijs.

Volgens ons eerste hulpresultaat is er een $r \geq 0$ zodanig dat voor functies $\varphi_n(x)$ met dragers in K uit $\varphi_n^{(r)}(x) \rightarrow 0$, uniform op K, reeds volgt $(f,\varphi_n) \rightarrow 0$. Alle functies $\psi(x) = \varphi^{(r)}(x)$, met $\varphi(x)=0$ buiten K, vormen een lineaire ruimte, en wel een deelruimte van de ruimte C van alle continue functies op K. Door

(12.11) $$F(\psi) = (f,\varphi)$$

is blijkbaar op de ruimte van alle $\psi(x) = \varphi^{(r)}(x)$ een continue lineaire functionaal gedefinieerd, die we kunnen voortzetten tot de hele ruimte C. Maar volgens de stelling van Riesz is er dan ook een functie $h(x)$, van begrensde variatie, zodat voor iedere op K continue functie $\psi(x)$

(12.12) $$F(\psi) = \int \psi(x)dh(x).$$

Door partiële integratie volgt dat

(12.13) $$F(\psi) = -\int k(x)\ \psi'(x)dx,$$

waarbij $k(x) = \int_0^x dhx$. Als we nu voor $\psi(x)$ weer speciaal nemen $\varphi^{(r)}(x)$, dan vinden we zo

(12.14) $$(f,\varphi) = F(\psi) = -\int k(x)\ \varphi^{(r+1)}(x)dx,$$

ofwel

(12.15) $$(f,\varphi) = \left(\frac{d^{r+1} g}{dx^{r+1}}, \varphi\right),$$

waarbij $g(x) = (-1)^r k(x)$. Hiermee is de stelling bewezen.

Deze stelling toont dat de gegeneraliseerde functies in zekere zin de kleinste uitbreiding vormen van de verzameling van alle locaal integreerbare functies, zó, dat iedere functie oneindig vaak differentieerbaar wordt (differentiatie in de zin van de distributies). Hij heeft een locaal karakter, en dat is essentieel; een distributie als

$$(12.16) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(x-n)$$

is zeker geen afgeleide van eindige orde van een gewone functie.

Er is een belangrijke klasse van distributies die ook globaal distributie-afgeleiden van gewone functies zijn, nl. de distributies met begrensde drager. Over deze distributies zal in de volgende § nog het een en ander gezegd worden.

§ 13. Distributies met begrensde drager

De gegeneraliseerde functies waarvan de drager begrensd is hebben verschillende prettige eigenschappen. In de eerste plaats kunnen we ze samenstellen, niet alleen met de tot nu toe beschouwde finiete toetsfuncties, maar met willekeurige, niet noodzakelijk finiete, oneindig vaak differentieerbare functies.

Zij f een distributie, en zij de drager K van f begrensd. Dan is er een (finiete) toetsfunctie $\alpha(x)$ die op een omgeving van K de waarde 1 heeft (cf. § 11). Is nu $\varphi(x)$ een willekeurige oneindig vaak differentieerbare functie, dan is $\alpha(x).\varphi(x)$ finiet, dus een toetsfunctie. We definieren:

(13.1) $$(f,\varphi) = (f,\alpha\varphi).$$

Deze definitie is onafhankelijk van de keus van $\alpha(x)$; want als $\beta(x)$ een tweede toetsfunctie is, met $\beta(x)=1$ op een omgeving van K, dan is $\alpha(x).\varphi(x)-\beta(x).\varphi(x)=0$ op een omgeving van K, en dus (zie § 11) $(f,\alpha.\varphi) = (f,\beta.\varphi)$.

Alle oneindig vaak differentieerbare functies $\varphi(x)$ vormen een lineaire ruimte E, die de ruimte T van alle toetsfuncties omvat. We zullen zeggen: $\varphi_n \to 0$ in E, als $\varphi_n(x)$ en al zijn afgeleiden uniform naar 0 gaan.

Als $\varphi_n \to 0$ in E, dan zal $\alpha.\varphi_n \to 0$ in T, en dus

(13.2) $$(f,\varphi_n) = (f,\alpha\varphi_n) \to 0.$$

M.a.w. de distributies f met begrensde drager zijn continue lineaire functionalen op de ruimte E. Omgekeerd kan men gemakkelijk aantonen dat iedere continue lineaire functionaal op E een distributie met begrensde drager is.

Immers, T is een deelruimte van E, en als $\varphi_n \to 0$ in T, dan zeker $\varphi_n \to 0$ in E. Een continue lineaire functionaal f op E is dus zeker ook een continue lineaire functionaal op T, d.w.z. is een gegeneraliseerde functie f. En de drager van f moet begrensd zijn, want anders is er een rij toetsfuncties $\varphi_n(x)$ met de eigenschappen

(13.3) $$\varphi_n(x) = 0 \text{ als } |x| \leq n;$$

(13.4) $$(f,\varphi_n) = 1.$$

Deze rij convergeert kennelijk naar 0 in E, dus moet $(f,\varphi_n) \to 0$: tegenspraak.

Wij zullen nu aantonen:

> Iedere gegeneraliseerde functie f met begrensde drager is een distributie-afgeleide (van zekere orde) van een gewone continue functie.

Het bewijs berust op de analoge locale stelling uit § 12. Zij $\alpha(x)$ weer een toetsfunctie die 1 is op een omgeving van de drager K van f. Voor iedere oneindig vaak differentieerbare functie $\varphi(x)$ is dan

$$(f,\varphi) = (f,\alpha.\varphi).$$

Volgens § 12 is er een index $s \geq 0$ en een continue functie $g(x)$, zodat steeds

$$(f,\alpha.\varphi) = \left(\frac{d^s g}{dx^s},\alpha.\varphi\right) = (-1)^s(g,(\alpha.\varphi)^{(s)}) =$$

$$= (-1)^s\left\{(g,\alpha^{(s)}.\varphi)+(g,s.\alpha^{(s-1)}.\varphi')+\ldots+(g,\alpha.\varphi^{(s)}\right) =$$

(13.15)
$$= (-1)^s\left\{(g.\alpha^{(s)},\varphi)+(sg.\alpha^{(s-1)},\varphi')+\ldots+(g.\alpha,\varphi^{(s)}\right) =$$

$$= (h,\varphi),$$

met

(13.6)
$$h=(-1)^s\left\{g.\alpha^{(s)} - \frac{d}{dx}(sg.\alpha^{(s-1)})+\ldots+(-1)^s\frac{d^s}{dx^s}(g.\alpha)\right\}.$$

Hierbij is met $\frac{d}{dx}$ steeds bedoeld de distributie-afgeleide, terwijl de gewone afgeleide aangegeven is met een accent, of, bij hogere orde, bijv. met $\alpha^{(s)}$. Aangezien de distributie h in (13.6) kennelijk een distributie-afgeleide is, van de orde s, van een gewone continue functie, is de stelling geheel bewezen.

Met behulp van de theorie uit § 11 kunnen we nog een globaal resultaat voor willekeurige gegeneraliseerde functies verkrijgen. In § 11 hebben we aangetoond, dat er bij iedere locaal eindige overdekking van de ruimte met begrensde open verzamelingen $U_1,U_2,\ldots$ een partitie van de eenheid bestaat, toetsfuncties $\alpha_1(x),\alpha_2(x),\ldots$ met $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\equiv 1$, terwijl de drager van $\alpha_n(x)$ steeds bevat is in U_n. Als nu f een willekeurige gegeneraliseerde functie is, dan geldt, voor iedere toetsfunctie $\varphi(x)$:

(13.7)
$$(f,\varphi) = \left(f,\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n.\varphi\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\alpha_n.\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n.f,\varphi).$$

De drager van de gegeneraliseerde functie $f_n = \alpha_n.f$ is bevat in U_n, dus is begrensd. We hebben dus bewezen:

Iedere gegeneraliseerde functie f is te schrijven als een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, waarbij f_n steeds een begrensde drager heeft. Men kan zelfs voorschrijven dat de drager van f_n bevat moet zijn in de begrensde open verzameling U_n, waar $U_1, U_2, \ldots$ een locaal eindige overdekking van de ruimte is.

Uit deze stelling en de voorgaande volgt nu onmiddellijk:

Iedere gegeneraliseerde functie f is te schrijven als een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{s_n} g_n}{dx^{s_n}}$ van distributie-afgeleiden van gewone continue functies $g_n(x)$.

Colloquium "Gegeneraliseerde Functies" (Distributies)

o.l.v. Prof.dr. H.A. Lauwerier

Bijeenkomst 27 oktober 1961

Spreker: E.M. de Jager

§ 14. Samenvatting van de theorie

14.1. Inleiding

Bij een distributie denken we aan een massaverdeling (bijv. op de x-as) voorgesteld door de functie $f(x)$ en die gemeten wordt met een meetapparaat met karakteristiek $\varphi(x)$; de waarnemingsuitkomst wordt gegeven door:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx = (f,\varphi)\ . \tag{14.1}$$

Het collectief van waarden (f,φ) voor alle φ behorende tot een nader te bepalen klasse noemen we een functionaal.
De éénheids punt-massa in de oorsprong is de idealisering van een massaverdeling $f_\varepsilon(x)$, die alleen ongelijk aan nul is in een klein intervalletje $(-\varepsilon,+\varepsilon)$ en waarvoor de integraal van $-\varepsilon$ tot $+\varepsilon$ gelijk aan 1 is. Substitueren we dit in (14.1) dan krijgen we bij benadering

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\ \varphi(x)dx \approx \varphi(0).$$

De functionaal

$$(f,\varphi) = \varphi(0) \tag{14.2}$$

is de juiste mathematische voorstelling van de éénheidspuntmassa en deze functionaal heet de δ-functie van Dirac $\delta(x)$.
De functie $f_\varepsilon(x)$ kunnen we ook krijgen door differentiatie van een differentieerbare functie $\theta_\varepsilon(x)$ die gelijk aan 0 is voor $x < -\varepsilon$ en gelijk aan 1 voor $x > +\varepsilon$.

$$f_\varepsilon(x) = \frac{d\theta_\varepsilon(x)}{dx}\ .$$

Gaan we nu over tot de "limiet" voor $\varepsilon \to 0$ dan krijgen we:

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

waarin $\theta(x)$ de eenheidsstapfunctie is.

Het is duidelijk, dat het begrip "limiet" en de afgeleide van de discontinue functie θ een nadere mathematische rechtvaardiging behoeft. Dit geschiedt in de theorie van de distributies. Alvorens een overzicht van deze theorie te geven behandelen we enkele tot de verbeelding sprekende voorbeelden.

1. De functie van Green, die voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,\delta(x-x_0),\quad 0 < x_0 < 1,$$

met randvoorwaarden $x=0$, $y=0$ en $x=1$, $y=0$.

De oplossing luidt:

$$y = \begin{cases} +(1-x_0)x & \text{voor } x \leq x_0 \\ +(1-x)x_0 & \text{voor } x \geq x_0 \end{cases}$$

De discontinuiteit in $x=x_0$ stoort niet in de differentiaalvergelijking.

2. De Fourier getransformeerde van $f(x) \equiv 1$.

De getransformeerde van $f(x) \equiv 1$ is:

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\nu}^{+\nu} e^{ixu}\, dx = 2 \lim_{\nu \to \infty} \frac{\sin u\nu}{u} = 2\pi\, \delta(u).$$

3. Zelfgeadjungeerde operator in Hilbert-ruimte.

We beschouwen de zelfgeadjungeerde operator:

$$\Omega\, f(x) = xf(x)$$

voor alle functies $f(x)$ behorende tot $L^2(0,1)$; deze laatste vormen een Hilbertruimte.

Het spectrum is een continu spectrum nml. $0 \leq \lambda \leq 1$, maar geen enkele waarde van λ levert een eigenwaarde.

Laten we evenwel distributies toe, dan heeft de operator Ω wel degelijk eigenwaarden in het spectrum $0 \leq \lambda \leq 1$; er geldt nml.:

$$x\,\delta(x-\lambda) = \lambda\,\delta(x-\lambda)$$

en iedere λ uit het spectrum is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctionaal $\delta(x-\lambda)$. Voor iedere f uit $L^2(0,1)$ is voldaan aan de bekende relatie:

$$f(x) = \int_0^1 (x-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda\ .$$

14.2. De ruimte van toetsfuncties

Φ zij een verzameling van functies $\varphi(x)$, die we voortaan toetsfuncties zullen noemen.

De verzameling Φ is gekenmerkt door de eis, dat Φ een zgn. rijtjes-genormeerde lineaire ruimte vormt (polynorme ruimte).

Dit betekent onder meer het volgende:

1ᵉ. Indien φ_1 en φ_2 tot Φ behoren, dan ook $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2$, waarin a_1 en a_2 constanten zijn.

2ᵉ. Het is mogelijk aan ieder element φ van Φ een rij normen $\|\varphi\|_m$ toe te kennen, zodanig dat iedere norm $\|\varphi\|_m$ voldoet aan de bekende eigenschappen van de norm, terwijl $0 \leqslant \|\varphi\|_m \leqslant \|\varphi\|_{m+1}$ $(m=0,1,2,\ldots)$.

Met behulp van deze rijtjes van normen kunnen we in Φ als volgt een topologie invoeren. Een omgeving $U(m,\varepsilon)$ van het nulelement wordt gevormd door alle toetsfuncties $\varphi(x)$, waarvoor geldt $\|\varphi(x)\|_m < \varepsilon$; door m en ε te variëren krijgen we een stelsel omgevingen van het nulelement. Een stelsel omgevingen van het element $\varphi_1(x)$ wordt gevormd door alle toetsfuncties $\varphi(x)$, die te schrijven zijn als $\varphi_0(x)+\varphi_1(x)$, waarbij $\varphi_0(x)$ tot een of andere $U(m,\varepsilon)$ behoort.

Door de invoering van een topologie hebben we tevens een convergentiebegrip in Φ geïntroduceerd. De rij toetsfuncties $\varphi_\nu(x)$ nadert tot de toetsfunctie $\varphi(x)$ indien voor $\nu > N(m,\varepsilon)$ de functies $\varphi_\nu(x) - \varphi(x)$ tot $U(m,\varepsilon)$ behoren, d.w.z. $\|\varphi_\nu - \varphi\|_m < \varepsilon$ voor $\nu > N(m,\varepsilon)$; notatie: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(x) = \varphi(x)$.

Opmerking. In één van de volgende bijeenkomsten zal duidelijk gemaakt worden, waarom we in de theorie van de distributies niet met een "enkelvoudig" genormeerde ruimte kunnen volstaan.

Voorbeelden.

1. De ruimte $K(a)$

Deze ruimte bestaat uit alle oneindig vaak differentieerbare functies $\varphi(x)$ die buiten een gegeven interval $-a < x < +a$ gelijk aan nul zijn.

We voeren de volgende rij normen in:

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\substack{|x|<a \\ 0\leqslant j\leqslant m}} |\varphi^{(j)}(x)| \qquad m=0,1,2\ldots \qquad (14.4)$$

waarin $\varphi^{(j)}(x)$ de j^e afgeleide van $\varphi(x)$ voorstelt.

Een rij toetsfuncties $\varphi_\nu(x)$ convergeert naar 0 dan en alleen dan als $\varphi_\nu(x)$ en al z'n afgeleiden uniform in $(-a,+a)$ tot nul naderen als ν gaat naar oneindig.

2. De ruimte S

Deze ruimte bestaat uit alle oneindig vaak differentieerbare functies, die tezamen met al hun afgeleiden voor $|x| \to \infty$ sterker dan iedere negatieve macht van x afnemen; d.w.z.

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} , \quad k,q=0,1,2,\ldots \tag{14.5}$$

waarin C_{kq} nog wel van φ afhankelijk is.
In deze ruimte wordt de volgende rij normen ingevoerd:

$$\|\varphi\|_m = \sup_x |x^k \varphi^{(q)}(x)| \tag{14.6}$$

$$|k|,|q| \leqslant m .$$

Een rij toetsfuncties $\varphi_\nu(x)$ nadert tot 0 dan en alleen dan, als in de schattingen (14.5) de C_{kq} onafhankelijk van ν gekozen kunnen worden en $\varphi_\nu(x)$ tezamen met al z'n afgeleiden in ieder begrensd gebied gelijkmatig tot nul nadert.

3. De ruimte K

De ruimte K bestaat uit de vereniging van alle ruimten K(a) met a willekeurig, maar eindig.

$$K = \bigcup_a K(a) \tag{14.7}$$

Definitie: Een rij toetsfuncties $\varphi_\nu(x)$ nadert tot 0 dan en alleen dan, als de rij naar 0 convergeert in één of andere K(a).

Wij zullen in het vervolg voornamelijk deze ruimte van toetsfuncties gebruiken. De generalisatie van deze ruimten voor toetsfuncties van meerdere variabelen kan op een voor de hand liggende manier geschieden.

14.3. Het begrip van een distributie

Een distributie (of gegeneraliseerde functie) op K is een continue lineaire functionaal op de ruimte van alle finiete oneindig vaak differentieerbare toetsfuncties; dat wil zeggen de distributie f(x) voegt aan iedere toetsfunctie $\varphi(x)$ behorende tot K een reëel of eventueel complex getal (f,φ) toe met de volgende eigenschappen:

1^e. $(a_1f_1+a_2f_2, \varphi) = a_1(f_1, \varphi)+a_2(f_2, \varphi)$, waarin a_1 en a_2 willekeurige reële of complexe constanten zijn (14.8)

2^e. Als $\varphi_\nu(x) \to \varphi(x)$, dan $(f, \varphi_\nu) \to (f, \varphi)$. (14.9)

De verzameling van alle continue lineaire functionalen op K heet de met K geconjugeerde ruimte; deze ruimte duiden we aan met K'.
Indien f(x) een locaal integreerbare functie is, dan is

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx \qquad (14.10)$$

een continue lineaire functionaal op K.
Een distributie, die voor iedere toetsfunctie in de vorm (14.10) geschreven kan worden heet een reguliere distributie.
Er zijn ook distributies, die niet voor iedere φ in K in de vorm (14.10) geschreven kunnen worden; bijv.

$$(f,\varphi) = \varphi(0). \qquad (14.11)$$

Stel eens dat dit wel mogelijk was, dan zou gelden:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx = e^{-1}$$

waarin f(x) locaal integreerbaar is en a willekeurig klein mag zijn.
Nemen we links en rechts de limiet voor $a \to 0$, dan stuiten we op een tegenspraak. Distributies, die niet in de vorm (14.10) geschreven kunnen worden, heten singuliere distributies.
De singuliere distributie (14.11) heet de delta-functie van Dirac, $\delta(x)$, en we schrijven ook wel

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(0). \qquad (14.12)$$

Hierin heeft het integraalteken niet de betekenis van een echt integraalteken. Indien f(x) een gewone Lebesgue integreerbare functie is, dan ligt het collectief van alle waarden $(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)dx$ de functie f(x) bijna overal ondubbelzinnig vast. We mogen dus de Lebesgue-integreerbare functie identificeren met de reguliere distributies en aldus deze functies als distributies opvatten. Door middel van het distributiebegrip wordt dan het functiebegrip gegeneraliseerd. We kunnen aan een distributie niet een waarde in een zeker punt toekennen, maar we kunnen wel iets locaals aangaande de distributie f(x) beweren.

We zeggen f(x) is in een omgeving U van x_0 gelijk aan nul, indien (f,φ) gelijk aan nul is voor iedere $\varphi(x)$ die ongelijk aan nul is binnen U en gelijk aan nul daarbuiten.
Is f(x) in geen omgeving van het punt x_0 gelijk aan nul dan heet x_0 een <u>wezenlijk</u> punt van de gegeneraliseerde <u>functie</u>.

De verzameling van alle wezenlijke punten heet de <u>drager</u> van de distributies. Wanneer een verzameling F de drager van f(x) bevat, dan zeggen we dat f(x) op F <u>geconcentreerd</u> is. Het is duidelijk dat bijv. de drager van $\delta(x)$ de oorsprong is. De nul-distributie is de distributie, die in iedere omgeving van de x-as gelijk aan nul is. Men kan aantonen, dat dan geldt $(f,\varphi)=0$ voor iedere toetsfunctie. Twee distributies heten <u>gelijk</u>, indien hun verschil de nul distributie is. Het is duidelijk, dat, indien twee gewone locaal integreerbare functies bijna overal aan elkaar gelijk zijn, zij ook als distributie aan elkaar gelijk zijn.

14.4. Bewerkingen met distributies

1. <u>Vermenigvuldiging met een oneindige vaak differentieerbare functie a(x)</u>

<u>Def.</u>: $(af, \varphi) = (f, a\varphi)$ (14.13)

<u>Vb.</u> ; $x\,\delta(x) = 0.$ (14.14)

2. <u>Affiene transformaties voor distributies</u>

a. <u>Verschuiving over afstand h</u>

<u>Def.</u>: $(f(x-h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+h))$ (14.15)

b. <u>Spiegeling</u>

<u>Def.</u>: $(f(-x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi(-x))$ (14.16)

c. <u>Gelijkvormigheidstransformatie</u>

<u>Def.</u>: $(f(\frac{x}{\alpha}), \varphi(x)) = \alpha(f(x), \varphi(\alpha x))$ (14.17)

We noemen de gegeneraliseerde functie homogeen van de graad indien geldt

$$f(\alpha x) = \alpha^{\lambda} f(x) \qquad (14.18)$$

$$(f(x), \varphi(\tfrac{x}{\alpha})) = \alpha^{\lambda+1}(f(x), \varphi(x))$$

Dus de deltafunctie is homogeen van de graad -1.
Deze definities laten zich gemakkelijk voor meer onafhankelijke variabelen generaliseren; $\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ is homogeen van de graad -n.

3. Limieten van distributies

Def.: de rij distributies $f_\nu(x)$ convergeert tot de distributie $f(x)$, indien voor iedere $\varphi(x)$ uit K geldt: de rij (f_ν, φ) heeft een limiet en er geldt:

$$\lim_{\nu \to \infty} (f_\nu, \varphi) = (f, \varphi) \qquad (14.19)$$

De convergentie van een reeks van distributies wordt gedefinieerd met behulp van de convergentie van de partiële sommen.

Het is duidelijk, dat de limiet ondubbelzinnig bepaald is en dat de operatie van de limietvorming lineair is; d.w.z. als $f_\nu \to f$ en $g_\nu \to g$ dan $\alpha f_\nu + \beta g_\nu \to \alpha f + \beta g$.

Voorbeelden

a. Indien de rij locaal integreerbare functies $f_\nu(x)$ in ieder begrensd gebied gelijkmatig nadert tot de locaal integreerbare functie $f(x)$, dan nadert de rij corresponderende reguliere distributies $f_\nu(x)$ ook in distributionele zin naar de corresponderende distributie $f(x)$.

b. Hetzelfde geldt, indien bijna overal $f_\nu(x) \to f(x)$ en alle $|f_\nu(x)|$ door een vaste locaal integreerbare functie begrensd zijn (m.b.v. het theorema van Osgood-Lebesgue).

c. Hetzelfde geldt, indien $f_\nu(x) \to f(x)$ monotoon en $f(x)$ is locaal integreerbaar.

d. $$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \delta(x), \quad \lim_{t \to +0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} = \delta(x), \quad \lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \nu x}{x} = \delta(x) \qquad (14.20)$$

In één van de vorige voordrachten is bewezen, dat de ruimte van de distributies volledig is (zie § 9) en dat iedere distributie is op te vatten als de distributionele limiet van een rij toetsfuncties (zie § 12).

4. Differentiatie van distributies

Def.: $$\left(\frac{df(x)}{dx}, \varphi(x)\right) = -\left(f(x), \frac{\partial \varphi(x)}{dx}\right) \quad \text{(1 onafh. variabele)} \qquad (14.21)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi(x)\right) = -\left(f(x), \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}\right) \quad \text{(meerdere onafh. variabelen)} \qquad (14.22)$$

Gevolgen

a. iedere distributie is oneindig vaak differentieerbaar.

b. limiet- en differentiatie-operator zijn altijd verwisselbaar

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{df_\nu(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x) \right) \tag{14.23}$$

c. bij partiële integratie is de volgorde van differentiatie nimmer wezenlijk.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_q \partial x_p} \, . \tag{14.24}$$

We vermelden nog tenslotte, dat iedere distributie geschreven kan worden als een convergente reeks van distributieafgeleiden van gewone continue functies $g_\nu(x)$ (zie § 13).

14.5. Toepassingen

1. $\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ voor } x < 0 \\ 1 \text{ voor } x \geq 0 \end{cases}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x) \tag{14.25}$$

2. Uit (14.20)

$$\lim_{\varepsilon \to +0} -\frac{2}{\pi} \frac{x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} = \delta'(x) \tag{14.26}$$

3. $$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x} \tag{14.27}$$

waarin de distributie $\frac{1}{x}$ gedefinieerd wordt als de hoofdwaarde van Cauchy van

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx .$$

De distributie x^{-n} wordt gedefinieerd als:

$$x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{x} \tag{14.28}$$

Het is duidelijk dat de distributie x^{-n} buiten de oorsprong met de functie x^{-n} overeenstemt.

4. Iedere reeks van de gedaante $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$, waarin de $|a_n|$ voor $n \to \infty$ niet sterker dan een bepaalde macht van n aangroeien, is in de ruimte van de gegeneraliseerde functies convergent, daar men deze reeks door differentiatie verkrijgt uit de reeks $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{(in)^k} e^{inx}$, welke voor k voldoende groot gelijkmatig con-

vergeert.

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-2\pi n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx \doteq - \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x-2\pi n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left|2 \sin \frac{x}{2}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cos nx = -1/4 \, \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \; .$$

14.6. Convolutie van twee distributies.

De convolutie van twee distributies f en g wordt gedefinieerd door

$$(f(x) * g(x), \varphi(x)) = (f(x) \times g(y), \varphi(x+y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))). \qquad (14.29)$$

Deze definitie is zinvol, indien aan f en g één van de volgende beperkingen wordt opgelegd:

a. De drager van één van de distributies f en g is begrensd.

b. De dragers van beide distributies zijn aan één en dezelfde kant begrensd. (bijv. $f=0$ voor $x < a$ en $g=0$ voor $y < b$).

Er gelden de volgende relaties:

$$f * g = g * f \qquad (14.30)$$

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg \qquad (14.31)$$

waarin D een willekeurige differentiaaloperator voorstelt.

Voorbeelden:

$\delta(x) * f(x) = f(x)$

$\delta'(x) * f(x) = f'(x)$

Stelling.

Indien de rij distributies $f_\nu(x)$ nadert tot de distributie $f(x)$ in distributionele zin dan nadert ook de rij $f_\nu(x) * g(x)$ naar $f(x) * g(x)$ in distributionele zin, indien één van de volgende veronderstellingen vervuld zijn.

a. Alle distributies $f_\nu(x)$ zijn op één en dezelfde begrensde verzameling geconcentreerd.

b. De distributie $g(x)$ is op een begrensde verzameling geconcentreerd.

c. De dragers van de distributies $f_\nu(x)$ en $g(x)$ zijn aan één en dezelfde zijde door een van ν onafhankelijke constante begrensd.

De convolutie en deze stelling kunnen op natuurlijke wijze voor meer dimensies gegeneraliseerd worden.

Toepassing.

We definiëren de potentiaal van een 3-dimensionale distributie door

$$U = f(x) * \frac{1}{r}, \qquad x = (x_1, x_2, x_3), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

U voldoet aan de vergelijking van Poisson, immers

$$\Delta U = \Delta\left(f(x) * \frac{1}{r}\right) = f(x) * \Delta\frac{1}{r} = -4\pi\, f(x) * \delta(x) = -4\pi\, f(x).$$

De Fouriertransformatie.

1. Inleiding.

Indien de functie $f(x)$ absoluut integreerbaar is op $(-\infty,+\infty)$ dan heeft $f(x)$ stellig een Fouriergetransformeerde, die we aanduiden met $g(\sigma)$. Als de Fouriergetransformeerde van de toetsfunctie $\varphi(x) \in K$ gegeven wordt door $\psi(\sigma)$, dan kunnen we schrijven:

$$(f(x),\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\,\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\psi(\sigma)d\sigma\right\}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)e^{i\sigma x}}dx\right\}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g(\sigma)}\,\psi(\sigma)d\sigma = \frac{1}{2\pi}(g(\sigma),\psi(\sigma)).$$

(De streep duidt complex-toegevoegde aan).

Dus $(g(\sigma), \psi(\sigma)) = 2\pi\,(f(x), \varphi(x))$. (1.1)

Indien we dus de functie $f(x)$ opvatten als een distributie op de ruimte K, dan wordt zijn Fouriergetransformeerde een functionaal op de ruimte van de Fouriergetransformeerden van de toetsfuncties $\varphi(x)$ behorende tot K. De ruimte van de Fouriergetransformeerden van $\varphi(x)$ noemen we Z en de ruimte van lineaire continue functionalen op Z, de zgn. duale ruimte, Z'.

De Fouriergetransformeerde $g(\sigma)=F[f(x)]$ van een distributie $f(x)$ behorende tot K' definiëren we als die distributie van Z', waarvoor (1.1) geldt.

Voorbeeld:

1. $(F[\delta(x)], \psi(\sigma)) = 2\pi\,(\delta(x), \varphi(x)) = 2\pi\,\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)d\sigma =$
$= (1, \psi(\sigma))$.

   Dus $F[\delta(x)]=1$ en $F^{-1}[1]=\delta(x)$.

2. $(F[1], \psi(\sigma)) = 2\pi\,(1, \varphi(x)) = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = 2\pi\,\psi(0) =$
$= 2\pi\,(\delta(\sigma), \psi(\sigma))$.

   Dus $F[1] = 2\pi\,\delta(\sigma)$ en $F^{-1}[\delta(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}$.

De fundering van de definitie (1.1) zal in dit hoofdstuk gegeven worden en we zullen vele eigenschappen uit de theorie van de Fouriertransformatie voor functies generaliseren voor distributies.

2. De ruimte Z.

We beperken ons tot het geval van één onafhankelijke variabele; de theorie laat zich gemakkelijk tot het geval van meerdere onafhankelijke variabelen uitbreiden.

$\varphi(x)$ zij een toetsfunctie behorende tot de ruimte K; zijn Fouriergetransformeerde is dan

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\,\varphi(x)dx \qquad (2.1)$$

Deze functie $\psi(\sigma)$ duiden we ook wel aan met $\tilde{\varphi}(\sigma)$ of $F[\varphi(x)]$.
Omdat $\varphi(x)$ een eindige drager heeft, stel $\varphi(x) \in K(a)$, kan $\psi(\sigma)$ ook voor complexe waarden $s=\sigma+i\tau$ gedefinieerd worden:

$$\psi(s) = \psi(\sigma+i\tau) = \int_{-a}^{+a} e^{isx}\,\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}e^{-\tau x}\,\varphi(x)dx. \qquad (2.2)$$

Uit (2.2) volgt dat $\psi(s)$ een gehele analytische functie van s is.
Door partiële integratie vindt men gemakkelijk:

$$F[\varphi^{(q)}(x)] = (-is)^q\, F[\varphi(x)]$$

ofwel $|s|^q|\psi(s)| = \left|\int_{-a}^{+a} \varphi^{(q)}(x)e^{isx}dx\right| \leq C_q e^{a|\tau|}$ voor $q=0,1,2,\ldots$ (2.3)

Dus iedere toetsfunctie $\varphi(x) \in K(a)$, heeft een Fouriergetransformeerde $\psi(s)$, die een gehele analytische functie is van de complexe variabele $s=\sigma+i\tau$ en die op de wijze van (2.3) begrensd is. Ook het omgekeerde is waar.
Iedere gehele analytische functie $\psi(s)$, begrensd op de wijze van (2.3) is de Fouriergetransformeerde van een toetsfunctie behorende tot $K(a)$. De teruggetransformeerde van $\psi(s)$ is:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\,\psi(\sigma)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx}\,\psi(s)d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{\tau x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x}\,\psi(\sigma+i\tau)d\sigma\,.$$

Op grond van de ongelijkheid (2.3) kunnen we $\varphi(x)$ willekeurig vaak differentiëren door de differentiatie achter het integraalteken uit te voeren.

$$\varphi^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (-is)^q\,\psi(s)e^{-isx}\,ds \qquad (2.4)$$

Dus $\varphi(x)$ is oneindig vaak differentieerbaar, en er rest ons nog het finiet-zijn van $\varphi(x)$ aan te tonen.
Uit (2.3) volgt voor q=0 en q=2

$$|\psi(s)| \leq e^{a|\tau|}\min(C_o, \frac{C_2}{|s|^2}) \leq C\,\frac{e^{a|\tau|}}{1+|s|^2} \leq C\,\frac{e^{a|\tau|}}{1+|\sigma|^2}\,.$$

We nemen nu $\tau=-t$ sign x, waarin t een willekeurige positieve parameter is. We kunnen de volgende schatting maken:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2\pi}e^{\tau x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C\,e^{a|\tau|}}{1+\sigma^2}\,d\sigma = C'e^{\tau x+a|\tau|} = C'e^{-t|x|+at} = C'e^{t(a-|x|)}.$$

Laten we nu t tot ∞ naderen, dan blijkt $\varphi(x)=0$ voor $|x|>a$.
De verzameling van alle gehele functies, die voldoen aan de ongelijkheid (2.3) noemen we de ruimte Z(a); het is duidelijk, dat Z(a) lineair is. De Fouriertransformatie beeldt dus de ruimte K(a) omkeerbaar 1-1 duidig af op de ruimte Z(a); deze afbeelding is vanzelfsprekend lineair. In de ruimte Z(a) voeren we het volgende rijtje normen in:

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\substack{s \\ 0\leq q\leq m}} |s^q \psi(s)|\ e^{-a|\tau|} \leq \max(C_o,\ldots C_q) \quad . \qquad (2.5)$$

Bijgevolg is de ruimte Z(a) weer een lineaire rijtjes genormeerde ruimte. Een rij functies $\psi_\nu(s)$ behorende tot Z(a) nadert tot de functie $\psi(s)$ behorende tot Z(a), indien bij iedere willekeurig kleine ε getallen $N(m,\varepsilon)$ bestaan, zodat voor $\nu > N(m,\varepsilon)$ geldt: $\|\psi - \psi_\nu\|_m < \varepsilon$, of eenvoudiger uitgedrukt:
Een rij toetsfuncties $\psi_\nu(s) \in Z(a)$ nadert tot nul, indien aan de ongelijkheid (2.3) voldaan is, waarbij de C_q's onafhankelijk van ν gekozen kunnen worden, èn indien de functies $\psi_\nu(s)$ op ieder begrensd gebied van het complexe s-vlak gelijkmatig tot nul naderen.
Uit (2.3) volgt onmiddellijk, dat indien een rij toetsfuncties $\varphi_\nu(x)$ in K(a) tot nul nadert, dat dan ook de rij van de overeenkomstige $\psi_\nu(s)$ in Z(a) tot nul nadert.
De Fouriertransformatie is dus een 1-1 duidige continue lineaire afbeelding van de ruimte K(a) op de ruimte Z(a). Ook omgekeerd geeft de inverse Fouriertransformatie een 1-1 duidige continue lineaire afbeelding van Z(a) op K(a) (m.b.v. (2.4) of de stelling van Banach, zie later). De vereniging van alle ruimten Z(a) met a eindig noemen we Z
Convergentie in Z wordt gedefinieerd als convergentie in één of andere vaste Z(a). De Fouriertransformatie is een continue lineaire afbeelding van K op Z en omgekeerd.
Men verifieert gemakkelijk de formules:

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right) \varphi(x)\right] = P(-is)\ F\left[\varphi(x)\right]$$

$$P\left(\frac{d}{ds}\right)F\left[\varphi(x)\right] = F\left[P(ix)\ \varphi(x)\right] \qquad (2.6)$$

waarin P een willekeurig polynoom is

$$F\left[\varphi(x-h)\right] = e^{ish}\ F\left[\varphi(x)\right] \qquad (2.7)$$

$$\psi(s+h) = \sum_{q=0}^{\infty} \psi^{(q)}(s)\ \frac{h^q}{q!} \quad . \qquad (2.8)$$

De Taylor-reeks (2.8) convergeert voor willekeurige vaste h in de topologie van de ruimte Z. Dit volgt uit de duale formule

$$\sum_{q=0}^{\infty} (ix)^q \frac{h^q}{q!} \varphi(x) = e^{ihx} \varphi(x) \tag{2.9}$$

die convergeert in de zin van K.

3. Distributies op de ruimte Z.

Op analoge manier als in 14.3 distributies (lineaire continue functionalen) op de ruimte K gedefinieerd zijn, kunnen we ook distributies op de ruimte Z definiëren.

Een distributie op de ruimte Z is een lineaire continue functionaal op de ruimte Z, d.w.z. aan iedere functie $\psi(s)$ behorende tot Z is een getal (reeël of complex) (g, ψ) toegevoegd, dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. $(g, \psi_1 + \psi_2) = (g, \psi_1) + (g, \psi_2)$

   $(g, a\psi) = a(g, \psi)$ met a constant.

2. Indien $\psi_\nu(s)$ nadert $\psi(s)$ in Z, dan geldt $\lim_{\nu \to \infty} (g, \psi_\nu) = (g, \psi)$.

De verzameling van alle continue lineaire functionalen op Z noemen we de toegevoegde ruimte Z'.

Die functionalen uit Z', die door een uitdrukking van de gedaante

$$(g, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma)\, \psi(\sigma)\, d\sigma \tag{3.1}$$

voorgesteld kunnen worden, waarin $g(\sigma)$ een integreerbare functie is, noemen we weer een reguliere distributie.

Omdat $\psi(s)$ een analytische functie van s is, kunnen we beschouwen distributies van de gedaante

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s)\, \psi(s)\, ds \tag{3.2}$$

waarin g(s) één of andere functie van de complexe variabele s voorstelt en Γ één of andere geschikt gekozen contour in het complexe s-vlak.

Een dergelijke distributie noemen we een analytische distributie

Vb. $\delta(s-s_0)$ is een analytische distributie; immers

$$(\delta(s-s_0), \psi(s)) = \psi(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(s)}{s-s_0}\, ds$$

waarbij Γ een in het eindige gelegen gesloten contour om het punt s_o voorstelt.
Voor de distributies van Z' gelden weer analoge operaties als voor de distributies van K', zoals bijv. optellen, verschuivingsregel, differentiatie en limiet-vorming.
In het bijzonder wordt de differentiatie van de distributie g(s) gedefinieerd door:

$$\left(\frac{dg}{ds}, \psi\right) = -\left(g, \frac{d\psi}{ds}\right) \tag{3.3}$$

en we zien dus, dat de distributies van Z' wederom oneindig vaak differentieerbaar zijn.
De vermenigvuldiging met een oneindig vaak differentieerbare functie a(s) moet met enige voorzichtigheid geschieden. Opdat de vermenigvuldiging met de functie a(s) voor iedere distributie van Z' betekenis zal hebben, moet $a(s)\ \psi(s)$ voor iedere $\psi(s)$ wederom tot Z behoren. Dus een zgn. multiplicator in Z' is aan de volgende eisen onderworpen:

1^e^. a(s) is analytisch in het complexe s-vlak.
2^e^. $|a(s)| < Ce^{b|\tau|}\,|s|^q$ voor $s \to \infty$.

We hebben zojuist gezien, dat iedere distributie op Z oneindig vaak differentieerbaar is; er geldt evenwel meer: <u>iedere distributie op Z kan in een Taylor-reeks ontwikkeld worden:</u>

$$g(s+h) = \sum_{q=0}^{\infty} g^{(q)}(s)\,\frac{h^q}{q!} \quad . \tag{3.4}$$

<u>Bewijs:</u>

$$(g(s+h), \psi(s)) = (g(s), \psi(s-h)) = \left(g(s), \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q \frac{h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)\right) =$$
$$\lim_{N\to\infty}\left(g(s), \sum_{q=0}^{N}(-1)^q \frac{h^q}{q!}\psi^{(q)}(s)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{q=0}^{N}\frac{h^q}{q!}g^{(q)}(s), \psi(s)\right).$$

<u>Voorbeeld</u>

$$\delta(s+h) = \sum_{q=0}^{\infty}\delta^{(q)}(s)\,\frac{h^q}{q!} \tag{3.5}$$

4. De Fouriertransformatie van distributies, behorende tot K'.

In de inleiding 1 hebben we reeds gezien, dat voor een absoluut integreerbare functie f(x) geldt:

$$(f(x),\ \varphi(x)) = \frac{1}{2\pi}\,(g(\sigma),\ \psi(\sigma)) = \frac{1}{2\pi}\,(g(s),\ \psi(s)) \qquad (4.1)$$

waarin $g(\sigma)$ de Fouriergetransformeerde van f(x) en $\psi(\sigma)$ die van $\varphi(x)$ is. De relatie (4.1) staat bekend onder de naam van de relatie van Parseval.

De Fouriergetransformeerde van een willekeurige distributie f(x) behorende tot K' wordt gedefinieerd als die distributie g(s) behorende tot Z', waarvoor (4.1) geldt. Dat de aldus gedefinieerde distributie g(s) inderdaad een lineaire continue functionaal is volgt gemakkelijk uit de continuiteit van de Fouriertransformatie voor de toetsfuncties. De Fouriergetransformeerde van de distributie f(x) duiden we aan met $F[f(x)]$ of f(s). Uit de definitie (4.1) volgt tenslotte nog dat de Fouriergetransformeerde van een absoluut integreerbare functie in distributionele zin overeenkomt met die in klassieke zin.

Indien de distributies $f_\nu(x)$ in distributionele zin naderen tot f(x), dan naderen ook de Fouriergetransformeerden van $f_\nu(x)$ naar de Fouriergetransformeerde van f(x) en de Fouriertransformatie is dus een continue operatie voor distributies. Dit is wederom een direct gevolg van definitie (4.1).

De inverse Fouriergetransformeerde van $g(s) \in Z'$ wordt eveneens gedefinieerd door (4.1) en we schrijven:

$$F^{-1}[g(s)] = f(x)$$

Dus $$F^{-1}[F[f(x)]] = f(x) \text{ en } F[F^{-1}[g(s)]] = g(s). \qquad (4.2)$$

Met behulp van (2.6) en (3.3) laten de volgende formules zich snel verifiëren:

$$P(\tfrac{d}{ds})F[f(x)] = F[P(ix)\ f(x)] \qquad (4.3)$$

$$F[P(\tfrac{d}{dx})f(x)] = P(-is)\ F[f(x)] \qquad (4.4)$$

waarbij P(x) een willekeurig polynoom is.

5. Voorbeelden

a. $F[\delta(x)] = 1$ (5.1)

$F^{-1}[1] = \delta(x)$

b. $F[1] = 2\pi\ \delta(s)$ (5.2)

$F^{-1}[\delta(s)] = \frac{1}{2\pi}$

c. $F[P(x)] = 2\pi\ P(-i\frac{d}{ds})\ \delta(s)$ (m.b.v. (4.3) en (5.2)) (5.3)

$F[P(\frac{d}{dx})\ \delta(x)] = P(-is)$ (m.b.v. (4.4) en (5.1) (5.4)

waarin $P(x)$ een willekeurig polynoom van x is.

d. $F[e^{bx}] = 2\pi\ \delta(s-ib)$. (m.b.v. (5.3) en (3.5)) (5.5)

gevolg:

$F[\sin bx] = i\pi[\delta(s-b) - \delta(s+b)]$

$F[\cos bx] = \pi[\delta(s-b) + \delta(s+b)]$ (5.6)

$F[\sinh bx] = \pi[\delta(s-ib) - \delta(s+ib)]$

$F[\cosh bx] = \pi[\delta(s-ib) + \delta(s+ib)]$

e. Fouriertransformatie van een periodieke functie.
Iedere periodieke locaal integreerbare functie met periode 2π kan als een Fourierreeks

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inx} \qquad (5.7)$$

voorgesteld worden, die in distributionele zin convergeert.
Uit (5.5) en (5.7) en de continuiteit van de Fouriertransformatie volgt

$$F[f(x) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\ \delta(s+n) \qquad (5.8)$$

f. $F[\theta(x)] = \frac{i}{\sigma} + \pi\delta(\sigma)$ (5.9)

$F[x^{-n}] = \frac{i^n.\pi}{(n-1)!}\ \sigma^{n-1}.\ \mathrm{sign}\,\sigma$; $n=1,2,\ldots$ (5.10)

$F[f_\lambda(x)] = \sqrt{2\pi}\ f_{-\lambda-1}(\sigma)$ (5.11)

met $f_\lambda(x) = \dfrac{2^{-\frac{\lambda}{2}}|x|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}$

$F[g_\lambda(x)] = i\sqrt{2\pi}\ g_{-\lambda-1}(\sigma)$ (5.12)

$$\text{met } g_\lambda(x) = \frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}|x|^\lambda \operatorname{sign} x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}$$

Voor de afleiding van deze laatste formules wordt de lezer verwezen naar I.M. Gelfand en G.E. Schilow "Verallgemeinerte Funktionen" Bd I.

6. De Fouriertransformatie van analytische distributies

Indien de analytische distributie $g(s)$ op de ruimte Z voorgesteld wordt door:

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s)\, \psi(s)ds \qquad (6.1)$$

waarbij de eindige of oneindige integratieweg Γ zodanig is, dat de functie $g(s)\, e^{\tau b}$ voor willekeurige reële b op Γ absoluut integreerbaar is, dan is de distributie $g(s)$ de Fouriergetransformeerde van een reguliere distributie op de ruimte K. Deze distributie is gedefinieerd door:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_\Gamma g(s)e^{isx}ds} \ . \qquad (6.2)$$

Bewijs:

Krachtens de veronderstelling betreffende de kromme Γ definieert (6.2) voor iedere x een functie $f(x)$. Drukken we in (6.1) $\psi(s)$ in z'n Fourierteruggetransformeerde $\varphi(x)$ uit, dan vinden we:

$$(g, \psi) = \int_\Gamma g(s)\{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{isx}dx\}ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\{\int_\Gamma g(s)e^{isx}ds\}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\, \varphi(x)dx =$$

$$= 2\pi(f, \varphi).$$

Hieruit volgt $F[f(x)] = g(s)$.

Is bijvoorbeeld Γ een begrensde gesloten kromme, die één geïsoleerd singulier punt s_o van de functie $g(s)$ omsluit, dan geldt

$$\overline{f(x)} = i\, e^{is_o x} \operatorname*{Res}_{s=s_o}[g(s)] \qquad (6.3)$$

Toepassing: $(g(s), \psi(s)) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\frac{s^2}{2}} \psi(s) ds.$

Hieruit volgt

$$F^{-1}[g(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\frac{s^2}{2}} \cdot e^{isx} \, ds = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$$

en

$F[e^{\frac{x^2}{2}}]$ = analytische distributie $i\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{s^2}{2}}$, waarbij de integratie langs de imaginaire as geschiedt.

7. Fouriertransformatie en convolutie

Een belangrijke toepassing van de Fouriertransformatie bestaat daarin, dat de Fouriergetransformeerde van de vouwintegraal van twee functies het product is van de Fouriergetransformeerden der beide functies (mits natuurlijk de vouwintegraal en de respectievelijke Fouriertransformaties bestaan).

Deze stelling uit de klassieke analyse geldt ook voor distributies. Onder een multiplicator van K' of Z' verstaan we een zodanige distributie van K' resp. Z', dat zij met iedere distributie van K' resp. Z' vermenigvuldigd kan worden.

Onder een convolutor van K' of Z' verstaan we een zodanige distributie van K' resp. Z', dat zij met iedere distributie van K' resp. Z' een convolutie kunnen vormen.

De Fourier-transformatie transformeert een multiplicator van K' resp. Z' in een convolutor van Z' resp. K' en een convolutor van K' resp. Z' in een multiplicator van Z' resp. K', waarbij de volgende formules gelden:

$$\left.\begin{aligned} F[f(x).g(x)] &= \frac{1}{2\pi} F[f(x)] * F[g(x)] \\ F[f(x)*g(x)] &= F[f(x)] . F[g(x)]. \end{aligned}\right\} \quad (7.1)$$

$$\left.\begin{aligned} F^{-1}[h(\sigma).k(\sigma)] &= F^{-1}[h(\sigma)] * F^{-1}[k(\sigma)] \\ \frac{1}{2\pi} F^{-1}[h(\sigma)*k(\sigma)] &= F^{-1}[h(\sigma)] . F^{-1}[k(\sigma)] \end{aligned}\right\} \quad (7.2)$$

De Fouriertransformatie geeft dus een omkeerbare 1-1 duidige afbeelding van de convolutoren resp. multiplicatoren van K' op de multiplicatoren resp. convolutoren van Z'.

Bewijs:

We definiëren $f(x) * \varphi(x)$ als $(f(\xi), \varphi(\xi + x))$ en analoog $g(\sigma) * \psi(\sigma)$ als $(g(\sigma), \psi(\sigma + \omega))$, waarbij f en g distributies zijn van K' resp. Z' en φ en ψ toetsfuncties van K resp. Z.
Op grond van de klassieke analyse gelden voor de toetsfuncties φ_1 en $\varphi \in K$ de volgende relaties:

$$F[\varphi_1(x) * \varphi(x)] = \overline{\psi_1(\sigma)} \cdot \psi(\sigma) \qquad (7.3)$$

en $$F[\overline{\varphi}_1(x) \cdot \varphi(x)] = \frac{1}{2\pi} \psi_1(\sigma) * \psi(\sigma) \qquad (7.4)$$

waarbij $F[\varphi] = \psi$ en $F[\varphi]_1 = \psi_1$.

g(x) zij een multiplicator van K'. Evenals iedere distributie van K' kunnen we g(x) opvatten als de distributionele limiet van een rij toetsfuncties, behorende tot K.
Stel $g(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x)$ en dus ook $\tilde{g}(\sigma) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \psi_\nu(\sigma)$.

Volgens (7.4) kunnen we schrijven:

$$F[g(x)\ \varphi(x)] = \lim_{\nu \to \infty} F[\overline{\varphi_\nu(x)} \cdot \varphi(x)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{\nu \to \infty} [\psi_\nu(\sigma) * \psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \tilde{g}(\sigma) * \psi(\sigma).$$

Omdat g(x) een multiplicator in K' is, behoort $\overline{g(x)}\ \varphi(x)$ voor iedere φ tot K en bijgevolg $\frac{1}{2\pi} \tilde{g}(\sigma) * \psi(\sigma)$ voor iedere ψ tot Z.
Hieruit volgt $\tilde{g}(\sigma)$ is een convolutor in Z'.
Verder geldt:

$$\left(F[f(x).g(x)], \psi(\sigma)\right) = 2\pi (f(x).g(x), \varphi(x)) = 2\pi (f(x), \overline{g(x)} \varphi(x)) =$$

$$\frac{1}{2\pi} (\tilde{f}(\sigma), \tilde{g}(\sigma) * \psi(\sigma)) = \frac{1}{2\pi} (\tilde{f}(\sigma) * \tilde{g}(\sigma), \psi(\sigma))$$

en dus $$F[f(x).g(x)] = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(\sigma) * \tilde{g}(\sigma) \quad . \qquad (7.5)$$

Iedere multiplicator van K' wordt afgebeeld op een convolutor van Z' en er geldt de relatie (7.5).
Stel g(x) is nu een convolutor van K'

$$F[g(x) * \varphi(x)] = F[\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x) * \varphi(x)] = \lim_{\nu \to \infty} F[\varphi_\nu(x) * \varphi(x)] =$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \overline{\psi_\nu(\sigma)} \cdot \psi(\sigma) = \overline{\tilde{g}(\sigma)} \cdot \psi(\sigma).$$

Omdat g(x) een convolutor is van K' behoort $g(x) * \varphi(x)$ voor

iedere φ tot K en bijgevolg $\overline{\tilde{g}(\sigma)}.\psi(\sigma)$ voor ieder ψ tot Z. Hieruit volgt $\tilde{g}(\sigma)$ is een multiplicator van Z'.
Verder geldt weer:

$$\left(F[f(x) * g(x)], \psi(\sigma)\right) = 2\pi\,(f(x)*g(x), \varphi(x)) =$$
$$= 2\pi(f(x), g(x)*\varphi(x)) = (\tilde{f}(\sigma), \overline{\tilde{g}(\sigma)}\,\psi(\sigma)) = (\tilde{f}(\sigma).\tilde{g}(\sigma), \psi(\sigma))$$

en derhalve $F[f(x) * g(x)] = \tilde{f}(\sigma).\tilde{g}(\sigma)$. (7.6)

Iedere convolutor van K' wordt derhalve afgebeeld op een multiplicator van Z' en daarbij geldt (7.6).
Het bewijs, dat iedere multiplicator resp. convolutor van Z' door de inverse Fouriertransformatie op een convolutor resp. multiplicator van K' wordt afgebeeld, terwijl daarbij de formules (7.2) gelden, verloopt geheel analoog als boven en wordt daarom weggelaten.

8. Toepassingen op differentiaalvergelijkingen uit de mathematische fysica.

a. tweedimensionale diffractietheorie

Gegeven zij een vlakke golf, die in het boven-halfvlak $y > 0$ vanuit de richting $\alpha\,(0 < \alpha < \pi)$ op de x-as valt en daar gedeeltelijk gespiegeld en gedeeltelijk geabsorbeerd wordt.
De golffunctie van de inkomende golf wordt gegeven door:

$$u = \exp\{i\,\omega\,(x \cos\alpha + y \sin\alpha) + t\} \qquad (8.1)$$

waarin t de tijd coördinaat en ω de frequentie aangeeft.
De golffunctie f van het totale veld voldoet voor $y > 0$ aan de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad y > 0 \qquad (8.2)$$

met randvoorwaarde

$$\frac{\partial f}{\partial y} + hf = 0 \text{ voor } y=0 \qquad (8.3)$$

waarin h een of andere constante voorstelt.
Voor de oplossing van dit randwaardeprobleem stellen we

$$f = e^{i\omega t}\,a(x,y) \qquad (8.4)$$

met $a(x,y) = \exp\{i\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\} + b(x,y)$ (8.5)

waarin $b(x,y)$ dus de amplitude van de verstoring van de golf-functie (8.1) aangeeft.

$b(x,y)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \omega^2 b = 0 \qquad (8.6)$$

met randvoorwaarde

$$\frac{\partial b}{\partial y} + hb = -(i\omega\sin\alpha + h)e^{i\omega(\cos\alpha)x}. \qquad (8.7)$$

Fouriertransformatie m.b.t. x levert:

$$\frac{\partial^2\tilde{b}}{\partial y^2} + (\omega^2 - \sigma^2)\tilde{b} = 0 \qquad (8.8)$$

met randvoorwaarde

$$\frac{\partial\tilde{b}}{\partial y} + h\tilde{b} = -2\pi(i\omega\sin\alpha + h)\,\delta(\sigma + \omega\cos\alpha).$$

Oplossing is

$$\tilde{b}(\sigma,y) = -2\pi\,\delta(\sigma + \omega\cos\alpha)\,\frac{h + i\omega\sin\alpha}{h - i\sqrt{\omega^2 - \sigma^2}}\,e^{-iy\sqrt{\omega^2-\sigma^2}}$$

ofwel

$$\tilde{b}(\sigma,y) = -2\pi\,\frac{h + i\omega\sin\alpha}{h - i\omega\sin\alpha}\,e^{-i\omega(\sin\alpha)y}\,\delta(\sigma + \omega\cos\alpha).$$

Terugtransformeren levert:

$$b(x,y) = -\frac{h + i\omega\sin\alpha}{h - i\omega\sin\alpha}\exp\{i\omega(x\cos\alpha - y\sin\alpha)\} \qquad (8.9)$$

zodat tenslotte

$$f(x,y) = e^{i\omega t}\Big[\exp\{i\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\} - \frac{h + i\omega\sin\alpha}{h - i\omega\sin\alpha}\exp\{i\omega(x\cos\alpha - y\sin\alpha)\}\Big]. \qquad (8.10)$$

b. <u>ééndimensionale warmtegeleiding</u>

We beschouwen als tweede voorbeeld een aan twee zijden oneindig lange balk, waarin de warmte zich alleen door geleiding kan voortplanten (1 dimensionale warmtegeleiding).

We veronderstellen, dat er in de balk warmtebronnen aanwezig zijn, waarvan de sterkte gegeven is door de distributie-functie

$\rho(x,t)$. Een warmtebron heeft in een punt x en op tijdstip $t(>0)$ de sterkte $\rho(x,t)$, als de bron aan het interval $(x-\frac{1}{2}dx, x+\frac{1}{2}dx)$ gedurende de tijd $(t,t+dt)$ een hoeveelheid warmte afgeeft, die gelijk is aan $\rho\, dx\, dt$. Wij vragen ons nu af, hoe de temperatuur van de balk in de loop van de tijd zal veranderen bij een gegeven bronnenverdeling in de balk en een gegeven temperatuurverdeling van de balk op het tijdstip t=0. Er dient opgemerkt te worden, dat $\rho(x,t)$ een gegeneraliseerde functie mag zijn. (Van belang voor "pulsen", zie slot).
De temperatuur T van de balk voldoet na geschikte dimensionering van plaats en tijd coördinaat aan de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho(x,t), \quad t > 0 \tag{8.11}$$

met beginvoorwaarde:

$$T(x,0) = U_0(x) . \tag{8.12}$$

Voor de oplossing van dit Cauchy-probleem, gaan we eerst de functies T en ρ door t=0 naar het gebied $t < 0$ voortzetten. $T^*(x,t)=T(x,t)$ voor $t \geqslant 0$ en $T^*(x,t)=0$ voor $t<0$; analoog voor ρ^*. (8.11) gaat nu over in:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \rho^*(x,t) + U_0(x)\,\delta(t).$$

Fouriertransformatie met betrekking tot x levert:

$$\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial t} + \sigma^2 \tilde{T}^*(\sigma,t) = \tilde{\rho}^*(\sigma,t) + \tilde{U}_0(\sigma)\delta(t) \text{ ofwel}$$

$$\left(\frac{d\,\delta(t)}{dt} + \sigma^2\,\delta(t)\right) \underset{(t)}{*} \tilde{T}^*(\sigma,t) = \tilde{\rho}^*(\sigma,t) + \tilde{U}_0(\sigma)\delta(t). \tag{8.13}$$

M.b.v. $\left(\frac{d\,\delta(t)}{dt} + \sigma^2\,\delta(t)\right) \underset{(t)}{*} \theta(t)e^{-\sigma^2 t} = \delta(t)$

krijgen we uit (8.13).

$$\tilde{T}^*(\sigma,t) = \tilde{\rho}^*(\sigma,t) \underset{(t)}{*} \theta(t)e^{-\sigma^2 t} + \tilde{U}_0(\sigma)\theta(t)e^{-\sigma^2 t}$$

ofwel $\tilde{T}^*(\sigma,t) = \int_0^t \tilde{\rho}^*(\sigma,\tau)e^{-\sigma^2(t-\tau)}d\tau + \tilde{U}_0(\sigma)e^{-\sigma^2 t}, \quad t > 0.$ (8.14)

Met behulp van:

$$F\left[\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] = e^{-\sigma^2 t} \tag{8.15}$$

kan (8.14) teruggetransformeerd worden en we vinden de gezochte temperatuur $T(x,t)$.

Bijzonder geval: de balk heeft temperatuur 0 voor $t \leqq 0$ en op $t=+0$ geeft een bron op $x=0$ aan de balk plotseling een warmtepuls van de grootte 1. $U_0(x)=0$ en $\rho(x,t)= \delta(x)\, \delta(t+0)$

$$\tilde{T}^*(\sigma,t) = \int_0^t \delta(\tau+0)e^{-\sigma^2(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\sigma^2 t} \qquad \text{met } t > 0.$$

Dus $$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} . \tag{8.16}$$

De warmte plant zich dus in dit model met een oneindige grote snelheid voort en de temperatuurverdeling heeft de vorm van een Gauss-verdeling, waarvan het maximum in $x=0$ ligt. Dit maximum daalt met de tijd als $\frac{1}{\sqrt{t}}$.