

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TW

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Inleiding tot de methoden van de Mathematische Fysica

door

H.A. Lauwerier



TW

VERKOOPT DEEL MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

College Toegepaste Wiskunde 1961-'62

Prof.dr. H.A. Lauwerier

Dit college geeft een inleiding tot de voornaamste principes en methoden van de toegepaste wiskunde.

Hierbij behandelen we dus die delen van de wiskunde welke van belang zijn voor de bestudering van de problemen der natuur. De problemen van de toegepaste wiskunde betreffen enerzijds het opstellen van mathematische modellen van de zich in de natuur afspelende processen, anderzijds de mathematische discussie van deze modellen met alle voor het doel bruikbare wiskundige hulpmiddelen. Hoewel hierbij het accent valt op gewone en partiële differentiaalvergelijkingen wordt vooral in de laatste tijd veel gebruik gemaakt van o.a. topologische en functionaalanalytische hulpmiddelen.

Dit college is in beginsel bedoeld voor kandidaten. In het bijzonder veronderstellen we

- 1° vaardigheid in het hanteren van de begrippen van de elementaire analyse, bijv. limietprocessen en reeksen.
- 2° bedrevenheid in de techniek van differentiëren en integreren.
- 3° kennis van de analytische meetkunde in E_3 en i.h.b. van de theorie van de tweedegraadsoppervlakken.
- 4° kennis van de elementaire mechanica.

Een belangrijk deel van dit college zal gewijd zijn aan de toepassing van maximum-en minimumprincipes en aan de begrippen van eigenfunctie en eigenwaarde.

Het verdient aanbeveling bij het volgen van dit college het volgende boek te raadplegen:

H. Sagan, Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics. J. Wiley & Sons, New York 1961.

Voorzover de door ons behandelde stof ook in dit leerboek te vinden is, zal de syllabus tamelijk beknopt zijn. Het genoemde boek is ook van belang voor diegenen die zich willen oriënteren over Fourier reeksen en speciale functies als Bessel functies.

I. Extremaalprincipes

§ 1. Maxima en minima

a Bij een functie $y=f(x)$ van één variabele kunnen de extremale waarden gevonden worden m.b.v.

$$(1.1) \quad f'(x)=0$$

Deze voorwaarde is nodig maar niet voldoende zoals de voorbeelden

$$y=x^2 \quad \text{en} \quad y=x^3$$

demonstreren.

Hier en ook in het vervolg beschouwen we slechts nodige voorwaarden.

b Bij een functie $z=f(x,y)$ van twee variabelen kunnen we de extrema vinden m.b.v.

$$(1.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Deze voorwaarden zijn weer nodig maar niet voldoende.

Voorbeeld

$z=x^2+y^2+1$ (omwentelingsparaboloïde)
minimum $(0,0,1)$, top van de paraboloïde.

Voorbeeld

$z=x^2-y^2+1$ (hyp. paraboloïde)
geen extreem, zadelpunt $(0,0,1)$.

c We beschouwen nu een extreem-probleem met een nevenvoorwaarde

$$(1.3) \quad z=f(x,y) \quad \text{met} \quad g(x,y) = 0.$$

Volgens Lagrange kunnen de extrema elegant op de volgende wijze bepaald worden. Beschouw namelijk de functie

$$(1.4) \quad z=f(x,y) + \lambda g(x,y),$$

waarin λ een zekere nog nader te bepalen constante is, als een functie van de onafhankelijke variabelen x en y en pas (1.2) toe. Dan is

$$(1.5) \quad f_x + \lambda g_x = 0 \quad \text{en} \quad f_y + \lambda g_y = 0$$

Door deze voorwaarden en door

$$(1.6) \quad g(x,y) = 0$$

zijn de combinaties (x, y, λ) bepaald waarvoor $f(x, y)$ extreem is. De parameter λ heet een multiplicator van Lagrange en de gevolgde methode de multiplicatorenmethode van Lagrange.

Voorbeeld

$$z = x^2 + y^2 - 2x + 2 \quad (\text{paraboloïde})$$

met de nevenvoorwaarde

$$x + y + 1 = 0 \quad (\text{doorsnijding met verticaal vlak})$$

Door (1.4) wordt een bundel paraboloïdes bepaald. Volgens (1.5) liggen de toppen op de lijn

$$x = 1 - \frac{1}{2}\lambda, \quad y = -\frac{1}{2}\lambda.$$

De in aanmerking komende waarde van λ is volgens (1.6) $\lambda = 2$. Het gezochte extremum (minimum, top van de parabolische snijkromme) is $(0, -1, 3)$.

d Een generalisatie van het voorafgaande. Beschouw een functie van n variabelen met m nevenvoorwaarden ($m < n$).

$$(1.7) \quad \begin{cases} z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad j=1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Volgens Lagrange beschouwen we

$$z = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$$

met m multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ als functie van de n onafhankelijke variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

§ 2. Variatierekening

Bij de variatierekening gaat het in zekere zin om een uitbreiding van het voorafgaande voor functies met een continue oneindigheid van vrijheidsgraden. We zoeken hierbij naar een functie waarvoor een zekere functionaal, een integraaluitdrukking bijvoorbeeld, een extremum aanneemt.

a We zoeken een functie $y=f(x)$, welke continu differentieerbaar is (anders gezegd uit de functieklassse C^1), waarvoor

$$(2.1) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

minimaal is. Hierbij stellen we nog de randvoorwaarden

$$(2.2) \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2$$

waarbij y_1 en y_2 gegeven zijn.

Nemen we aan dat $f(x)$ de gezochte functie is dan definiëren we een schaar naburige functies m.b.v.

$$(2.3) \quad y = f(x) + \varepsilon \eta(x) \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

waarbij $\eta(x)$ een willekeurig gekozen functie uit C^1 is. De randvoorwaarden (2.2) betekenen

$$(2.4) \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Dat (2.1) minimaal is betekent dat, voor vaste $\eta(x)$, I als functie van ε beschouwd bij $\varepsilon=0$ een minimum heeft d.w.z.

$$(2.5) \quad \frac{d I(\varepsilon)}{d \varepsilon} = 0$$

Uitwerking van (2.5) geeft, aannemend dat $F \in C^2$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right\} dx = 0$$

I.v.m. (2.4) volgt hieruit na partiële integratie

$$(2.6) \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx = 0.$$

We maken nu gebruik van het volgende principe

Fundamenteel lemma van de variatierekening

Is $M(x)$ continu in $x_1 \leq x \leq x_2$, is $\eta(x)$ een willekeurige functie $\in C^1(x_1, x_2)$ met $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, en is

$$(2.7) \quad \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) M(x) dx = 0$$

voor alle mogelijke $\eta(x)$, dan is identiek $M(x)=0$.

Bewijs

Zie Sagan p.10.

Uit (2.6) volgt dus de zgn. vergelijking van Euler-Lagrange (1744-1755)

$$(2.8) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$$

In sommige toepassingen hangt F niet expliciet van x af. In dat geval mogen we uit (2.8) onmiddellijk besluiten tot

$$(2.9) \quad F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{constant}$$

zoals differentiatie van (2.9) laat zien.

Voorbeeld (Brachistochrone van Johan Bernoulli (1696)).

Een massadeeltje beweegt in het XY-vlak en is onderworpen aan de volgens de positieve Y-as gerichte zwaartekracht g .

Het deeltje start vanuit rust in $P(0,0)$ en eindigt in

$Q(a,b)$ waarbij $a > 0$ en $b > 0$. Het probleem is een zodanige glijbaan $y=f(x)$ met $f(0)=0$, $f(a)=b$ te bepalen dat de valtijd minimaal is. Volgens een eenvoudige mechanische beschouwing (som van kinetische en potentiële energie constant) is de valtijd bepaald door

$$T = \int_P^Q (2gy)^{-\frac{1}{2}} ds$$

zodat de te minimaliseren integraal gegeven is door

$$(2.9) \quad I = \int_0^b \sqrt{\frac{1+p^2}{y}} dx ,$$

waarbij we $y' = p$ gesteld hebben.

Volgens (2.8) en (2.9) volgt hieruit

$$(2.10) \quad \{ (1+p^2)y \}^{-\frac{1}{2}} = \text{constant}.$$

De gezochte functie volgt uit (2.10) d.m.v. integratie. Een gemakkelijke methode daartoe is om de onbekende functie in parametervorm

$$(2.11) \quad x = x(p) \quad y = y(p)$$

te zoeken. Uit (2.10) volgt al b.v.

$$(2.12) \quad y = \frac{2c}{1+p^2}$$

Aangezien

$$(2.13) \quad x = \int \frac{dy}{p}$$

is

$$(2.14) \quad x = c' - 2c \left(\frac{p}{1+p^2} + \arctg p \right) .$$

Kiezen we ter vereenvoudiging $p = \cotg \frac{1}{2} \varphi$ dan volgt uit (2.12) en (2.14) met aanpassing aan de beginvoorwaarde

$$(2.15) \quad \begin{cases} x = c (\varphi - \sin \varphi) \\ y = c (1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

hetgeen een cycloïde voorstelt welke beschreven wordt indien een cirkel met straal c over de X-as rolt. De constante c is hierbij uiteraard door a en b bepaald.

b Het voorafgaande variatieprobleem kan gemakkelijk uitgebreid worden tot n functies van dezelfde onafhankelijke variabele x . We zoeken n functies $y_k = f_k(x)$, $k=1,2,\dots,n$ met derandvoorwaarden

$$(2.16) \quad f_k(x_1) = y_k^{(1)}, \quad f_k(x_2) = y_k^{(2)}, \quad k=1,2,\dots,n,$$

zodanig dat

$$(2.17) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

minimaal is.

Zijn $f_1, f_2, \dots, f_n$ de gezochte functies dan beschouwen we weer naburige functies

$$(2.18) \quad y_k = f_k(x) + \epsilon_k \eta_k(x), \quad k=1,2,\dots,n$$

en stellen we

$$(2.19) \quad \frac{\partial I}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial I}{\partial \epsilon_2} = \dots = \frac{\partial I}{\partial \epsilon_n} = 0.$$

Uiteraard leidt dit tot een systeem van n . Euler-Lagrange vergelijkingen van het type (2.8) d.w.z.

$$(2.20) \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'}, \quad k=1,2,\dots,n$$

c We beschouwen nu een variatieprobleem met een nevenvoorwaarde. We zoeken een functie $y=f(x)$ met de randvoorwaarden (2.2) zodanig dat

$$(2.21) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

minimaal is, waarbij echter de volgende nevenvoorwaarde vervuld moet zijn

$$(2.22) \quad \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx = 0.$$

Dit probleem kunnen we weer elegant behandelen met de multipliatormethode van Lagrange. Met een nader te bepalen parameter λ passen we onze techniek toe op de uitdrukking

$$(2.23) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} \{ F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y') \} dx.$$

De vergelijking van Euler-Lagrange

$$(2.24) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \right) (F + \lambda G) = 0$$

tezamen met de nevenvoorwaarde (2.22) geeft dan een volledige

bepaling van $f(x)$ (en van λ).

Voorbeeld (kettinglijn)

Tussen $A(-a,0)$ en $B(a,0)$ denken we een koord gespannen van de lengte $2b$ ($b > a$). Gevraagd wordt welke vorm het koord aanneemt indien het alleen aan de zwaartekracht onderworpen is.

Uitgaande van het principe dat het zwaartepunt zo laag mogelijk moet liggen ($y_z = \int y ds / \int ds$ min.) komen we tot het volgende minimumprobleem

$$(2.25) \quad \int_{-a}^a y \sqrt{1+p^2} dx = \min.$$

met de nevenvoorwaarde

$$(2.26) \quad \int_{-a}^a \sqrt{1+p^2} dx = 2b.$$

Toepassing van de methode van Lagrange en gebruikmakend van (2.9) komen we tot

$$\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+p^2}} = \text{constant}.$$

Hieruit volgt als bij de brachistochrone de parametervoorstelling voor de gezochte functie

$$x = c \ln(p + \sqrt{1+p^2}) \quad y = -\lambda + c \sqrt{1+p^2}.$$

Eliminatie van de parameter p en aanpassing aan de randvoorwaarden geeft

$$(2.27) \quad y = c \left(\operatorname{ch} \frac{x}{c} - \operatorname{ch} \frac{a}{c} \right)$$

met $c \operatorname{sh} \frac{a}{c} = b$.

d We zoeken een functie $y=f(x)$ waarvoor

$$(2.28) \quad \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \min.$$

maar we stellen bij $x=x_1$ en $x=x_2$ geen eisen als (2.2). Handelend als bij a leidt dit tot

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \eta(x) dx + \left\{ \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right\} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

voor alle functies $\eta(x)$ uit C^1 . Beperken we ons eerst tot de deelverzameling met $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ dan moet dus aan de vergelijking van Euler-Lagrange (2.8) voldaan zijn.

Kiezen we vervolgens functies $\eta(x)$ met of $\eta(x_1) \neq 0$ of $\eta(x_2) \neq 0$ dan moet ook voldaan zijn aan

$$(2.29) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

voor resp. $x=x_1$ en $x=x_2$. Een dergelijke randvoorwaarde noemt men een natuurlijke randvoorwaarde.

Aldus is de oplossing van het variatieprobleem steeds bepaald door de vergelijking van Euler-Lagrange tezamen met randvoorwaarden bij $x=x_1$ en $x=x_2$ hetzij als a priori gegevene hetzij als uit het probleem voortvloeiende natuurlijke randvoorwaarden.

e We zoeken een functie $z=f(x,y)$ van twee onafhankelijk variabelen in de rechthoek R bepaald door $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ waarvoor

$$(2.30) \quad I = \iint_R F(x,y,z,z_x,z_y) dx dy$$

minimaal is.

We nemen aan dat $f(x,y)$ op de rand van de rechthoek voorgeschreven waarden aanneemt. Handelend als in punt a stellen we weer

$$(2.31) \quad z = f(x,y) + \varepsilon \eta(x,y), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Substitutie van (2.31) in (2.30) levert op overeenkomstige wijze als bij a

$$(2.32) \quad \iint_R \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial z_y} \right\} \eta dx dy + \\ + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial F}{\partial z_x} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} dy + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial z_y} \eta \Big|_{y_1}^{y_2} dx = 0$$

Gezien het feit dat $\eta = 0$ op de rand van R leidt dit tot de volgende vergelijking van Euler-Lagrange

$$(2.33) \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z_x} + \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial z_y} = 0$$

Is $z=f(x,y)$ op de rand van R niet of slechts gedeeltelijk voorgeschreven dan kunnen we uit (2.32) op overeenkomstige wijze als bij punt a natuurlijke randvoorwaarden afleiden.

§ 3. Principe van Hamilton

Volgens Hamilton kunnen de bewegingsvergelijkingen van een mechanisch systeem uit het volgende variatieprincipe verkregen worden.

Een mechanisch systeem met de kinetische energie T en de potentiële energie V beweegt zich in het tijdinterval $t_1 < t < t_2$ zodanig dat

$$(3.1) \quad \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$$

met een vaste begin- en eindpositie stationnair is.

Gewoonlijk noemt men $T-V$ de Lagrange-functie en de integraaluitdrukking (3.1) de actie. Vergelijkt men de werkelijke baan met naburige banen dan is de actie voor de werkelijke baan doorgaans minimaal.

Is het mechanisch systeem bepaald door de (gegeneraliseerde) coördinaten $q_1, q_2, \dots, q_n$, zodat we kunnen schrijven

$$(3.2) \quad \begin{cases} T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \\ V = V(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \end{cases}$$

dan zijn de vergelijkingen van Euler-Lagrange volgens (2.17) en (2.20) gelijk aan

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} (T-V), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Het stelsel (3.3) staat bekend als de bewegingsvergelijkingen van Lagrange.

Bij mechanische systemen met oneindig veel variabelen, zoals bijv. een snaar die opgevat wordt als een limietgeval van n onderling elastisch verbonden lijnelementjes waarbij $n \rightarrow \infty$, verliest (3.3) zijn zin. Het variatieprincipe blijft echter gelden en de beweging kan weer worden beschreven met de vergelijking(en) van Euler-Lagrange, die dan de passende generalisatie van (3.3) voorstelt.

Voorbeeld

Bij de mathematische slinger (lengte l , massa g) is in de gebruikelijke notatie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \\ V &= \frac{1}{2} m g l \theta^2, \quad (\text{uitwijking } \theta \text{ klein verondersteld}). \end{aligned}$$

Volgens (3.3) is $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$, de bekende trillingsvergelijking met de oplossing

$$\theta = a \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

§ 4. De trillende snaar

We beschouwen een tussen $A(0,0)$ en $B(a,0)$ gespannen snaar welke in de evenwichtstoestand met AB samenvalt. De beweging van de snaar kunnen we beschrijven door de functie $u(x,t)$, de uitwijking ten tijde t op de plaats x gemeten in de richting van de positieve Y -as. Bij het hier beschouwde model beschouwen we z.g. kleine trillingen waarbij hogere machten van u en de afgeleiden t.o.v. lagere machten verwaarloosd kunnen worden. Is ρ de massadichtheid van de snaar en τ de spanning op de uiteinden dan is de kinetische energie

$$(4.1) \quad T = \frac{1}{2} \int_A^B \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$$

en de potentiële energie

$$U = \int_A^B \tau (ds - dx) = \int_A^B \tau \left\{ (1 + u_x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} dx$$

of in de beschouwde benadering

$$(4.2) \quad U = \frac{1}{2} \int_A^B \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Volgens het principe van Hamilton dient de volgende uitdrukking stationnair te zijn

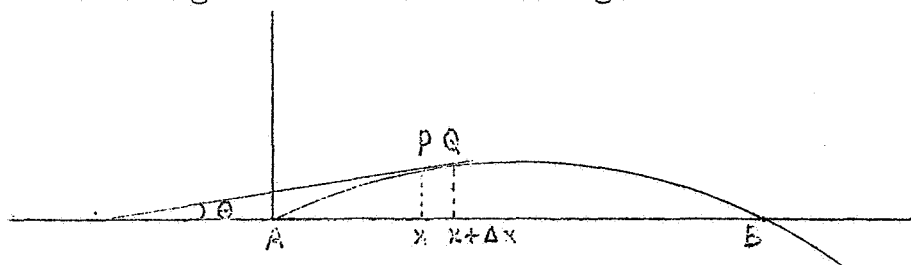
$$(4.3) \quad J(u) = \frac{1}{2} \iint_R (\rho u_t^2 - \tau u_x^2) dx dt,$$

waarbij R de rechthoek $0 < x < a$, $t_1 < t < t_2$ is.

Volgens (2.33) is de hierbij behorende vergelijking van Euler-Lagrange

$$(4.4) \quad \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

In verband met het grote belang van deze trillingsvergelijking geven we hiervan nog een andere afleiding.



We beschouwen het snaarelement Δs tussen $P(x)$ en $Q(x+\Delta x)$. Tengevolge van de spanning werkt hierop de verticale kracht

$$(\tau \sin \theta)_{x+\Delta x} - (\tau \sin \theta)_x.$$

Aangezien

$$\sin \theta = \left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

is deze kracht dus in de beschouwde benadering $\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x$. Volgens de wet van Newton toegepast op PQ is

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x$$

of

$$(4.5) \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

waarbij

$$(4.6) \quad c^2 = \tau / \rho.$$

Indien de beweging van de trillende snaar onderworpen is aan een uitwendige kracht $F(x,t)$ kunnen we de bewegingsvergelijking weer uit het principe van Hamilton afleiden. De potentiële energie bevat nu een extra term nml.

$$(4.7) \quad U = \frac{1}{2} \int_0^a \tau u_x^2 dx - \int_0^a F(x,t) u dx.$$

Gemakkelijk blijkt nu

$$(4.8) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(x,t) = 0.$$

Hangt de uitwendige kracht niet van de tijd af dan is een evenwichtstoestand mogelijk welke bepaald is door

$$(4.9) \quad \tau \frac{d^2 u}{dx^2} = -F(x).$$

De randvoorwaarden bij $x=0$ en $x=a$ zijn steeds $u=0$.

Is de snaar niet ingeklemd, maar vrij in een of beide einden, dan is er a priori geen voorwaarde opgelegd bij de vrije einden. Zoals we hebben gezien volgt uit het variatieprincipe een natuurlijke randvoorwaarde. Deze natuurlijke randvoorwaarde is nodig om de mathematische beschrijving compleet te maken. Beschouwen we b.v. een snaar met twee vrije einden zonder uitwendige kracht, dan volgt door variatie van (4.3) (vergl. 2 d)

$$(4.10) \quad \int_0^a \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \eta dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \tau \frac{\partial u}{\partial x} \eta \right\}_0^a dt = 0.$$

Aangezien dit voor alle $\eta(x)$ geldt volgt in de eerste plaats de differentiaalvergelijking (4.4) en in de tweede plaats de natuurlijke randvoorwaarden

$$(4.11) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{voor } x=0 \text{ en } x=a.$$

Een tussen een vrij en een vast einde inliggende mogelijkheid is een z.g. elastisch einde. Hierbij treedt b.v. bij $x=0$ een extra kracht $-hu$ op, welke dus evenredig aan de uitwijking u en er aan tegengesteld is ($h > 0$). Geldt iets dergelijks voor $x=a$ dan is de potentiële energie nu bepaald door

$$(4.12) \quad U = \int_0^a \frac{1}{2} \tau u_x^2 dx + \frac{1}{2} \tau h_1 u^2(0, t) + \frac{1}{2} \tau h_2 u^2(a, t).$$

Het principe van Hamilton geeft weer

$$(4.13) \quad \int_0^a \int_{t_1}^{t_2} \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \eta dx dt +$$

$$(4.13) \quad - \int_{t_1}^{t_2} \tau \frac{\partial u}{\partial x} \eta + \tau h_2 u \eta \Big|_{x=a} dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \tau \frac{\partial u}{\partial x} \eta - \tau h_1 u \eta \right\}_{x=0} dt = 0,$$

zodat de differentiaalvergelijking (4.4) weer wordt verkregen, maar nu met de "elastische" randvoorwaarden

$$(4.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = h_1 u & \text{voor } x=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -h_2 u & \text{voor } x=a. \end{cases}$$

De vergelijking (4.5), welke we steeds de vergelijking van de trillende snaar zullen noemen, ontstaat ook bij vele andere situaties waarbij het op de een of andere manier om voortplanting van kleine trillingen gaat.

We vermelden slechts de volgende twee voorbeelden.

Bij longitudinale trillingen in staven betekent $u(x, t)$ de uitwijking van een vast met de staaf verbonden punt t.o.v. de evenwichtspositie. De relatieve verlenging van een staaf-element is $\partial u / \partial x$. Volgens de elasticiteitswet van Hooke is de

verandering van de spanning $\tau - \tau_0$ hieraan gekoppeld volgens

$$(4.15) \quad \tau - \tau_0 = \sigma E \frac{\partial u}{\partial x},$$

waarbij σ de doorsnede van de staaf en E de elasticiteitsmodulus voorstelt. Toepassing van de wet van Newton op het staaf-element $(x, x + \Delta x)$ geeft

$$(4.16) \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

waarbij ρ de dichtheid is. Is de staaf homogeen van vorm en samenstelling dan leiden (4.15) en (4.16) onmiddellijk tot de snaarvergelijking (4.4) waarbij nu

$$(4.17) \quad c^2 = \frac{\sigma E}{\rho}.$$

Voor staal is aldus $c = 5000$ m/sec.

De randvoorwaarden zijn hierbij $u=0$ voor een ingeklemd einde en $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ voor een vrij einde.

Bij een met trillende lucht gevulde (nauwe) cylinder, een orgelpijp, is de situatie geheel analoog. De afhankelijk variabele $u(x, t)$ heeft dezelfde betekenis. In plaats van de elastische spanning τ komt nu de druk p en in plaats van de wet van Hooke komt een toestandsvergelijking:

$$(4.18) \quad p v^\gamma = \text{constant},$$

de adiabatische gaswet - of in differentiaalvorm

$$(4.19) \quad \frac{\partial p}{p} + \gamma \frac{\partial v}{v} = 0.$$

Voor de relatieve compressie schrijven we weer $-\frac{\partial u}{\partial x}$. Passen we weer de wet van Newton toe dan vinden we als boven de snaarvergelijking terug met nu

$$(4.20) \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

De randvoorwaarden $u=0$ en $u_x=0$ corresponderen nu met een gesloten resp. open orgelpijp.

II De vergelijking van de trillende snaar

§ 5. Fourier reeksen

Omdat we bij de behandeling van de vergelijking van de

vergelijking van de trillende snaar gebruik moeten maken van enige eigenschappen van trigonometrische reeksen (Fourier reeksen) geven we in deze paragraaf een kort overzicht van de voornaamste eigenschappen van deze reeksen,

lemma 1

$$(5.1^a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi \delta_{mn},$$

$$(5.1^b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn},$$

$$(5.1^c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0,$$

waarbij $\delta_{mn} = 0$ voor $m \neq n$

en $\delta_{mn} = 1$ voor $m = n$.

bewijs elementair

Stelling 1. Is $f(x)$ periodiek met de periode 2π en bezit $f(x)$ de volgende uniform convergente reeksontwikkeling

$$(5.2) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dan is

$$(5.3) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi \, d\xi$$

bewijs elementair m.b.v. lemma 1.

lemma 2 (Riemann-Lebesgue)

Is $f(x)$ R-integreerbaar dan is

$$(5.4) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\cos \omega x}{\sin \omega x} \, dx = 0$$

bewijs niet elementair; berust op de definitie van de Riemann-integraal.

Stelling 2 (Hoofdstelling-Dirichlet)

Is $f(x)$ periodiek met de periode 2π en van begrensde variatie (in elk eindig interval) dan geldt

$$(5.5) \quad \frac{1}{2} \{f(x-0) + f(x+0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

waarbij a_n en b_n door (5.3) gegeven zijn.

bewijs Met gebruikmaking van (5.3) kan men op elementaire wijze een gesloten uitdrukking in de vorm van een integraal met een eenvoudige integrand afleiden voor de partiële som $S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N \dots$ en vervolgens voor $\frac{1}{2} \{f(x-0) + f(x+0)\} - S_N(x)$.

Het bewijs dat de laatstgenoemde uitdrukking tot nul convergeert berust op het lemma van Riemann-Lebesgue en op de tweede middelwaardestelling.

Gewoonlijk beperkt men zich tot het interval $-\pi \leq x \leq \pi$ en dan kan de eis van periodiciteit vervallen.

Is $f(x)$ even dan is de Fourier reeks een cosinusreeks. Uiteraard kunnen we ons dan tot het interval $0 \leq x \leq \pi$ beperken. Men heeft dan

$$(5.6) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi.$$

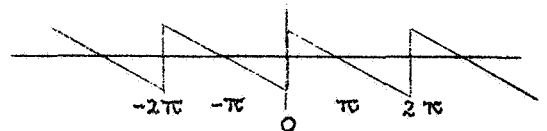
Is $f(x)$ oneven dan is analoog

$$(5.7) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi.$$

Voorbeeld

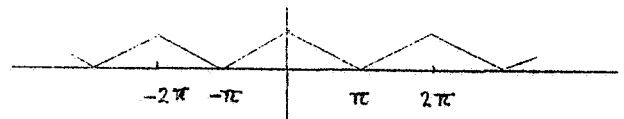
a $0 < x < \pi$, $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$



b $0 < x < \pi$, $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} - \dots \right).$$



§ 6. Methode van Bernoulli

We beschouwen het volgende probleem

$$(6.1) \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a,$$

met de randvoorwaarden

$$(6.2) \quad u=0 \quad \text{voor } x=0 \quad \text{en } x=a$$

en de beginvoorwaarde

$$(6.3) \quad \begin{cases} u = u_0(x) \\ u_t = u_1(x) \end{cases}$$

Zoals we gezien hebben beschrijft dit probleem de trillende beweging van een snaar waarvan de aanvangssituatie (vorm en beginsnelheid) bekend is verondersteld. Echter komen problemen van dit type ook bij vele andere fysische verschijnselen voor. We noemen slechts longitudinale trillingen in staven en orgelpijpen.

We lossen het gestelde probleem op met een door Daniël Bernoulli aangegeven methode welke van grote draagwijdte is en die bij talloze meer gecompliceerde problemen toegepast kan worden. De methode van Bernoulli berust op een scheiding van de variabelen. We zoeken namelijk eerst naar speciale trillingsvormen waarbij u het product is van een functie $\varphi(x)$ welke alleen van x afhangt en een functie $\psi(t)$ welke alleen van t afhangt. Substitutie van

$$(6.4), \quad u = \varphi(x) \psi(t)$$

en (6.1) geeft

$$(6.5) \quad c^2 \varphi'' \psi = \varphi \psi''$$

zodat

$$(6.6) \quad c^2 \varphi'' / \varphi = \psi'' / \psi = -\lambda$$

waarbij λ een zekere constante is. Zoals zal blijken is λ zelfs een positieve constante.

Volgens (6.6) en (6.2) geldt

$$(6.7) \quad c^2 \varphi'' + \lambda \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(a) = 0.$$

Hieruit volgt

$$(6.8) \quad \varphi = A \sin \frac{x\sqrt{\lambda}}{c} \quad \text{en} \quad \sin \frac{a\sqrt{\lambda}}{c} = 0,$$

waarbij A een willekeurige constante is. Uit (6.8) volgt dat voor λ een rij waarden, de zogenaamde eigenwaarden van het probleem, in aanmerking komt bepaald door

$$(6.9) \quad \lambda_n = \frac{n^2 c^2 \pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De bijbehorende vormfuncties φ heten de eigenfuncties van het

probleem en zijn dus bepaald door

$$(6.10) \quad \varphi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Volgens (6.6.) is de bijpassende tijdfunctie

$$(6.11) \quad \psi_n(t) = \frac{\sin}{\cos} \frac{nc\pi t}{a}$$

zodat de trillingsvormen van het type (6.4), de eigentrillingen van het probleem, van de volgende vorm zijn

$$(6.12) \quad u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{nc\pi t}{a} + B_n \sin \frac{nc\pi t}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Fysisch gesproken geeft $n=1$ de grondtoon van de snaar, $n=2$ de eerste boventoon (octaaf) enz.

We veronderstellen nu dat een willekeurige beweging van de snaar te beschouwen is als een superpositie van eigentrillingen. Denken we ter vereenvoudiging zodanige eenheden gekozen dat $c=1$ en $a=\pi$ dan zoeken we de oplossing dus in de vorm

$$(6.13) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx.$$

Aanpassing aan de beginvoorwaarden (6.3) geeft

$$(6.14) \quad \begin{cases} u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx, & 0 < x < \pi, \\ u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin nx, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Volgens de theorie van de Fourier-reeksen is het inderdaad mogelijk coëfficiënten A_n en B_n te vinden zodanig dat (6.14) geldt. Volgens (5.7) is namelijk

$$(6.15) \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(\xi) \sin n\xi \, d\xi, \quad B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} u_1(\xi) \sin n\xi \, d\xi.$$

Aldus is voor een willekeurige beginsituatie de oplossing van het probleem door (6.13) en (6.15) bepaald.

§ 7. Karakteristiekenmethode

We beschouwen wederom de eendimensionale golfvergelijking

$$(7.1) \quad c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

maar nu voor alle x in $(-\infty, \infty)$, d.w.z. zonder randvoorwaarden, en met de beginsituatie

$$(7.2) \quad u = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{voor } t=0.$$

Substitutie van de nieuwe onafhankelijke variabelen (r, s) bepaald door

$$r = ct + x \quad s = ct - x$$

transformeert (7.1) in de eenvoudige vergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0$$

met de algemene oplossing

$$u = F_1(r) + F_2(s),$$

waarbij F_1 en F_2 willekeurige functies uit C^2 zijn. In de oorspronkelijke variabelen heeft dus (7.1) de oplossing

$$(7.3) \quad u = F_1(ct+x) + F_2(ct-x).$$

De betekenis van de eerste term $F_1(ct+x)$ is voor toenemende t een beweging van de functie $F_1(x)$ naar links met de snelheid c . Analoog stelt de tweede term een voortplanting naar rechts voor.

Het lukt om (7.3) aan de beginvoorwaarden (7.2) aan te passen. Zonder moeite vindt men dat

$$(7.4) \quad \begin{cases} F_1(x) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \right\} \\ F_2(x) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \right\} \end{cases}$$

zodat

$$(7.5) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \{ u_0(x+ct) + u_0(x-ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi.$$

De beschrijving (7.3) van een zich voortplantende storing is algemener dan die d.m.v. een partiële d.v. (7.1). De beschrijving (7.1) geldt alleen voor oplossingen uit de klasse C^2 .

In zekere zin kan men de geldigheid van (7.1) uitbreiden voor oplossingen (7.3) waarbij F_1 en F_2 niet tot C^2 behoren, dus

bijv. discontinuïteiten bezitten. Dergelijke gegeneraliseerde oplossingen noemt men wel zwakke oplossingen. Een voorbeeld van een dergelijke oplossing is

$$(7.6) \quad u(x,t) = \{ \theta(x+ct) - \theta(x-ct) \}$$

waarbij de "eenheidssprong-functie" $\theta(x)$ gedefinieerd is als

$$(7.7) \quad \begin{cases} \theta(x) = 0 & \text{voor } x < 0, \\ \theta(x) = 1 & \text{voor } x \geq 0. \end{cases}$$

De interpretatie van de bijpassende beginvoorwaarden (7.2) brengt ons op het terrein van de gegeneraliseerde functies of distributies waartoe o.a. de delta-functie van Dirac $\delta(x)$ behoort. Dergelijke gegeneraliseerde functies bestaan bij de gratie van z.g. toetsfuncties $\varphi(x)$ welke onbeperkt differentieerbaar zijn en slechts op een eindig x -interval betrekking hebben. Hiermede wordt b.v. $\delta(x)$ vastgelegd door

$$(7.8) \quad \int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

De theorie van de distributies leidt o.a. tot het belangrijke resultaat dat

$$(7.9) \quad \frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x).$$

We kunnen nu zeggen dat (7.6) correspondeert met de beginvoorwaarden

$$(7.10) \quad u_0(x) = 0 \quad u_1(x) = 2c \delta(x).$$

We voegen nu aan het probleem een randvoorwaarde toe. We beschouwen het gebied $x \geq 0$ met de randvoorwaarde

$$(7.11) \quad u = 0 \quad \text{voor } x = 0$$

Het z.g. spiegelingprincipe voert dit probleem tot het voortgaande terug door het gebied voor $x < 0$ voort te zetten met

$$(7.12) \quad \begin{cases} u = -u_0(-x) & \text{voor } x < 0, \\ u_t = -u_1(-x) & \text{voor } x < 0. \end{cases}$$

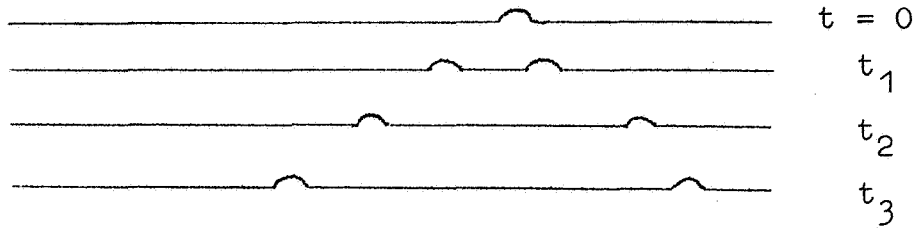
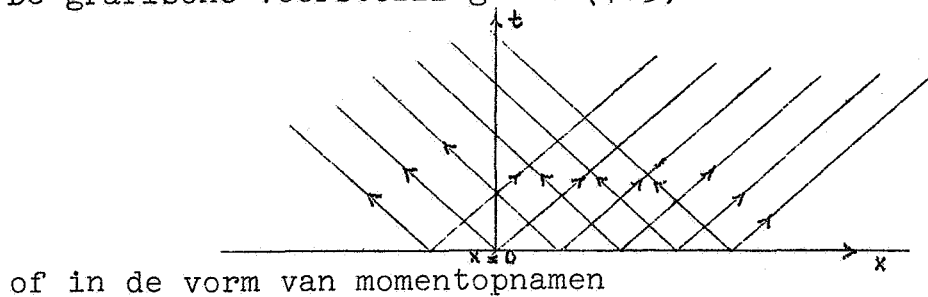
Deze "oneven" spiegeling maakt dat in (7.3) $F_2(x) = -F_1(-x)$ zodat de oplossing nu eenvoudig geschreven kan worden als

$$(7.13) \quad u = F(ct+x) - F(ct-x).$$

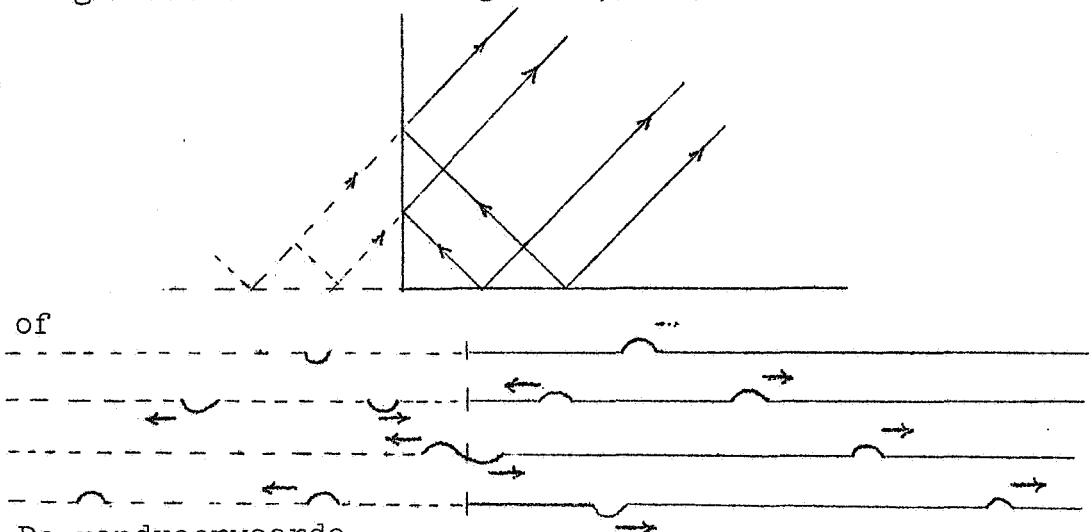
Grafisch kan men de voortplanting beschrijven met de

rechten $ct \pm x = \text{constant}$ in het (x,t) vlak. Deze rechten heten de karakteristieken.

De grafische voorstelling van (7.3) is a.v.



De grafische voorstelling van (7.13) is analoog



De randvoorwaarde

$$(7.14) \quad u_x = 0 \quad \text{voor } x = 0$$

leidt met even spiegeling tot

$$(7.15) \quad u = F(ct+x) + F(ct-x)$$

met een analoge grafische voorstelling.

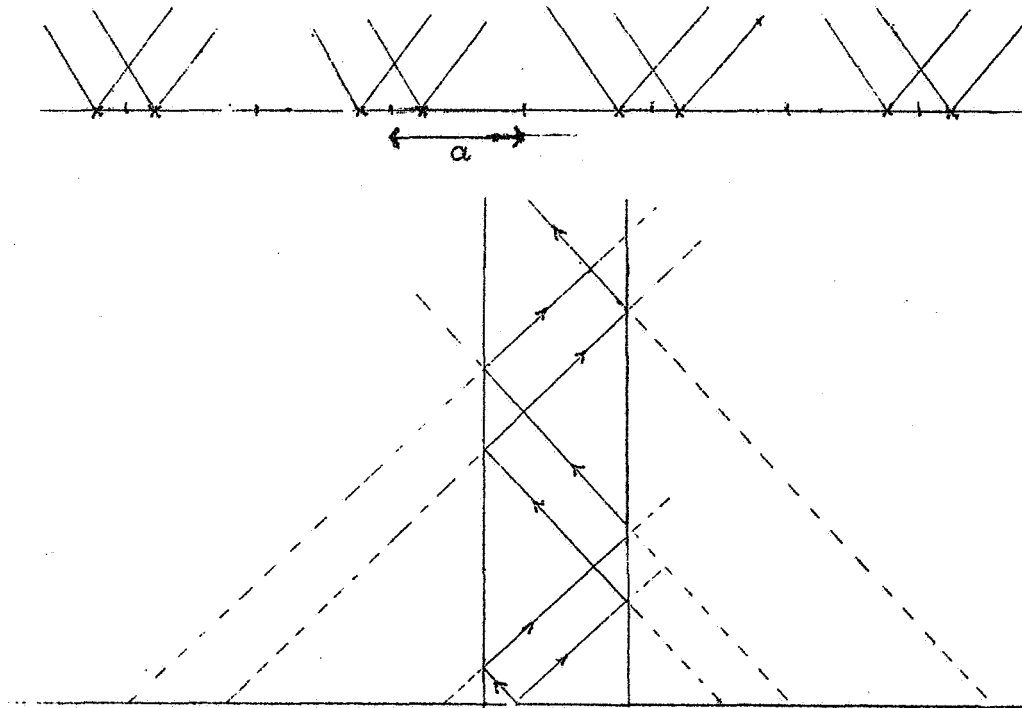
Beschouwen ^{we} tenslotte een eindig gebied dan kunnen we met "herhaald spiegelen" de oplossing tot die van het oneindige gebied terugbrengen. Kiezen we b.v. het geval van een open orgelpijp, d.w.z. de randvoorwaarden

$$u_x = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = a,$$

dan kunnen we $u(x,t)$ opbouwen met behulp van de karakteris-

tieken vanuit x_0 ($0 < x_0 < a$) op het tijdstip $t=0$ en vanuit de spiegelingen $\pm x_0 \pm 2na$ ($n=0,1,2,\dots$) waarbij de begintoestand tussen de uiteinden even gespiegeld wordt.

Grafisch aldus:



Om tenslotte weer aan te sluiten bij de voorstelling (6.13) van de oplossing m.b.v. een Fourier reeks behoeven we slechts op te merken dat

$$\begin{aligned}\cos nt \sin nx &= -\frac{1}{2}\sin n(t-x) + \frac{1}{2}\sin n(t+x) \\ \sin nt \sin nx &= -\frac{1}{2}\cos n(t-x) - \frac{1}{2}\cos n(t+x),\end{aligned}$$

zodat het rechterlid van (6.13) inderdaad van de vorm (7.3) is.

II . Storm-Liouville problemen

§ 8. Gewone differentiaalvergelijkingen

Hierin geven we een overzicht van de voornaamste eigenschappen van gewone differentiaalvergelijkingen van de tweede orde welke we voor ons doel nodig hebben.

We beschouwen vergelijkingen van het volgende type

$$(8.1) \quad y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

waarbij x beperkt is tot het interval (a,b) . De functies $p_1(x)$ en $p_2(x)$ veronderstellen we continu, d.w.z. behorend tot de klasse $C(a,b)$.

Het is duidelijk dat met $y=f(x)$ ook $y=cf(x)$ een oplossing van (8.1) is. Dergelijke oplossingen die slechts in een constante factor verschillen heten afhankelijk. Verder volgt onmiddellijk uit de lineariteit van (8.1) dat met $f(x)$ en $g(x)$ ook elke lineaire combinatie van deze functies een oplossing van (8.1) is.

Zonder bewijs vermelden we de existentiestelling:

Stelling 8.1

De randvoorwaarde $y(a)=c_1$, $y'(a)=c_2$ bepaalt een eenduidige oplossing van (8.1).

Noemen we de door $c_1=1$, $c_2=0$ bepaalde oplossing $y_1(x)$ en de door $c_1=0$, $c_2=1$ bepaalde oplossing $y_2(x)$ dan is $y=c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ blijkbaar de oplossing met $y(a)=c_1$ en $y'(a)=c_2$. Aangezien we zo alle oplossingen van (8.1) verkrijgen geldt

Stelling 8.2

De oplossingen van (8.1) zijn van de vorm

$$(8.2) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

waarbij $y_1(x)$ en $y_2(x)$ onafhankelijke oplossingen zijn.

De voorstelling (8.2) geldt allereerst voor de speciale keuze van $y_1(x)$ en $y_2(x)$ welke we boven getroffen hebben. Het is echter eenvoudig in te zien dat de genoemde functies door elk ander stel onafhankelijke oplossingen vervangen kunnen wor-

den.

We definiëren de zogenaamde Wronskiaan of determinant van Wronski van twee oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$ a.v.

$$(8.3) \quad W_x(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

We bewijzen nu

Stelling 8.3

$$(8.4) \quad W_x(y_1, y_2) = C \exp - \int_a^x p_1(\xi) d\xi .$$

Bewijs

Uit (8.1) volgt voor $y_1(x)$ en $y_2(x)$

$$y_1 y_2'' + p_1 y_1 y_2' + p_2 y_1 y_2 = 0 .$$

$$y_1'' y_2 + p_1 y_1' y_2 + p_2 y_1 y_2 = 0 .$$

Aftrekken geeft

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + p_1(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0$$

of

$$\left(\frac{d}{dx} + p_1\right) (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0 .$$

Integratie van deze vergelijking, d.w.z. van

$$W' + p_1 W = 0$$

leidt onmiddellijk tot (8.4).

Zijn y_1 en y_2 afhankelijk dan is natuurlijk $W_x(y_1, y_2) \equiv 0$ en omgekeerd. Weten we alleen dat $W_x(y_1, y_2) = 0$ voor bijvoorbeeld $x=c$ dan volgt uit (8.4) dat $C=0$ dus dat $W=0$ voor alle waarden van x . Dus

Stelling 8.4

Verdwijnt de Wronskiaan van $y_1(x)$ en $y_2(x)$ in minstens één punt dan zijn $y_1(x)$ en $y_2(x)$ afhankelijk.

Voorbeeld $y'' + y = 0$ heeft de onafhankelijke oplossingen $\cos x$ en $\sin x$ met $W=1$.

We beschouwen vervolgens de niet-homogene vergelijking

$$(8.5) \quad y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = h(x),$$

waarbij $h(x)$ een gegeven continue functie is.

Zijn $f(x)$ en $g(x)$ verschillende oplossingen van (8.5) dan voldoet het verschil $y=f-g$ blijkbaar aan de homogene vergelijking (8.1). Het is dus voldoende slechts één particuliere oplossing van (8.5) te vinden.

Alle andere oplossingen van (8.5) ontstaan dan hieruit door additie van een willekeurige oplossing van (8.1), d.w.z. de algemene oplossing van (8.5) is

$$(8.6) \quad y = \text{part.opl.} + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

We kunnen een particuliere oplossing van (8.5) systematisch afleiden met behulp van de zgn. methode van de "variatie van de constanten". We gaan daartoe uit van twee willekeurige onafhankelijke oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$ van de homogene vergelijking (8.1). Naar analogie van (8.2) trachten we een oplossing van (8.5) te vinden van de vorm

$$(8.7) \quad y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x),$$

waarbij c_1 en c_2 dus nu als nader te bepalen functies opgevat worden. Uit (8.7) volgt

$$y' = (c_1 y_1' + c_2 y_2') + (c_1' y_1 + c_2' y_2).$$

Ter vereenvoudiging stellen we

$$(8.8) \quad c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

zodat dus

$$(8.9) \quad y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Uit (8.9) volgt

$$(8.10) \quad y'' = (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + (c_1' y_1' + c_2' y_2')$$

Substitutie van (8.7), (8.9) en (8.10) in (8.5) geeft

$$(8.11) \quad c_1' y_1' + c_2' y_2' = h(x).$$

Uit (8.8) en (8.11) kunnen we gemakkelijk c_1' en c_2' oplossen. Stellen we als afkorting

$$(8.12) \quad W_x(y_1, y_2) = w(x),$$

dan is

$$(8.13) \quad c_1'(x) = -\frac{y_2 h}{w}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1 h}{w}$$

Aldus vinden we de particuliere oplossing

$$(8.14) \quad y = y_1(x) \int_x \frac{y_2(\xi) h(\xi)}{w(\xi)} d\xi + y_2(x) \int^x \frac{y_1(\xi) h(\xi)}{w(\xi)} d\xi,$$

of in iets andere vorm

$$(8.15) \quad y = \int_x \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) \end{vmatrix}}{w(\xi)} h(\xi) d\xi.$$

Met behulp van een door Liouville aangegeven transformatie kunnen we (8.1) herleiden tot een vergelijking zonder eerste afgeleide.

Stel namelijk $y=f(x)z$, waarbij $f(x)$ een nader te bepalen factor is. Uit (8.1) volgt

$$f z'' + (2f' + p_1 f)z' + (f'' + p_1 f' + p_2 f)z = 0$$

We kiezen dus $2f' + p_1 f = 0$, waaruit volgt dat $f = \exp \int^x p_1(\xi) d\xi$. De zogenaamde transformatie van Liouville is dus

$$(8.16) \quad y = z \exp \left(-\frac{1}{2} \int^x p_1(\xi) d\xi \right).$$

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we i.p.v. (8.1) dus de eenvoudiger vergelijking beschouwen

$$(8.17) \quad y'' - q(x)y = 0.$$

Het voordeel van (8.17) is dat blijkens (8.4) de Wronskiaan steeds een constante is.

§ 9 Functie van Green

We beschouwen het volgende probleem

$$(9.1) \quad -y'' + q(x)y = h(x), \quad a < x < b,$$

met de randvoorwaarden

$$(9.2) \quad y \cos \alpha + y' \sin \alpha = 0 \quad \text{voor } x=a$$

en

$$(9.3) \quad y \cos \beta + y' \sin \beta = 0 \quad \text{voor } x=b.$$

We veronderstellen hierbij dat $q(x)$ een reële functie is en α, β reële constanten zijn.

Zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien is de differentiaalvergelijking (9.1) niet minder algemeen dan de vergelijking (8.5). De speciale vorm (9.1) geeft echter aanleiding tot enige technische vereenvoudigingen.

We gaan uit van twee speciale oplossingen van de homogene vergelijking welke we zodanig kiezen, dat ze aan één van beide randvoorwaarden voldoen, en wel $y_1(x)$ bepaald door $y_1(a) = \sin \alpha$, $y_1'(a) = -\cos \alpha$, $y_2(x)$ bepaald door $y_2(b) = \sin \beta$, $y_2'(b) = -\cos \beta$. We nemen aan dat $y_1(x)$ en $y_2(x)$ onafhankelijke oplossingen zijn. Wat we moeten doen als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ toevallig afhankelijk zijn zullen we later zien (pag. 29).

Met behulp van het principe van de "variatie van de constanten" construeren we volgens (8.14) de volgende particuliere oplossing van (9.1)

$$(9.4) \quad y = -w^{-1} y_1(x) \int_x^b y_2(\xi) h(\xi) d\xi - w^{-1} y_2(x) \int_a^x y_1(\xi) h(\xi) d\xi,$$

waarbij we opmerken dat de Wronskiaan $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ een constante is die we $\neq 0$ hebben verondersteld.

De afgeleide van (9.4) is blijkbaar

$$(9.5) \quad y' = -w^{-1} y_1'(x) \int_x^b y_2(\xi) h(\xi) d\xi - w^{-1} y_2'(x) \int_a^x y_1(\xi) h(\xi) d\xi.$$

Een eenvoudige verificatie laat zien dat de door (9.4) bepaalde oplossing van (9.1) ook aan de randvoorwaarden (9.2) en (9.3) voldoet.

Inderdaad is bijv. $y(a) = c y_1(a)$ en $y'(a) = c y_1'(a)$, waarbij

$$c = -w^{-1} \int_a^b y_2(\xi) h(\xi) d\xi, \text{ zodat } y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0.$$

Voor (9.4) schrijven we

$$(9.6) \quad y = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

waarbij

$$(9.7) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} -w^{-1} y_1(x) y_2(\xi) & \text{voor } x \leq \xi, \\ -w^{-1} y_1(\xi) y_2(x) & \text{voor } x \geq \xi. \end{cases}$$

De aldus gedefinieerde functie heet de functie van Green. We merken op dat deze functie $G(x, \xi)$ aan de volgende eigenschappen voldoet

- a) $G(x, \xi) = G(\xi, x)$
- b) $\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right\} G(x, \xi) = 0$ voor $a < x < \xi$ en $\xi < x < b$.
- c) $G(x, \xi)$ voldoet aan de randvoorwaarden (9.2) en (9.3).
- d) $G(x, \xi)$ is als functie van x continu bij $x = \xi$.
- e) $\frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi)$ is als functie van x discontinu bij $x = \xi$
 en wel is
- $$G_x(\xi + 0, \xi) - G_x(\xi - 0, \xi) = -1.$$

Voorbeeld

We beschouwen een tussen $x=0$ en $x=1$ gespannen snaar welke aan een uitwendige kracht $F(x)$ onderworpen is. Differentiaalvergelijking en randvoorwaarden zijn

$$-y'' = F(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

De boven gebruikte speciale oplossingen van de homogene vergelijking $y'' = 0$ zijn

$$y_1(x) = x \quad \text{en} \quad y_2(x) = 1 - x.$$

De Wronskiaan is $w = -1$. Volgens (9.7) is de functie van Green

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{voor } x \leq \xi \\ \xi(1-x) & \text{voor } x \geq \xi \end{cases}$$

Eventueel kunnen we schrijven

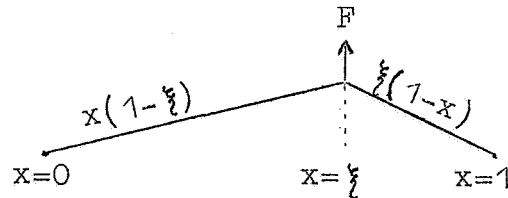
$$G(x, \xi) = (x + \xi) - \frac{1}{2} |x - \xi| - x\xi.$$

De verificatie van de eigenschappen a t.m. e levert geen enkele moeilijkheid. De uiteindelijke oplossing is dus

$$y = \int_0^1 G(x, \xi) F(\xi) d\xi.$$

We merken bij dit voorbeeld op dat $G(x, \xi)$ zelf weliswaar geen normale oplossing van de differentiaalvergelijking is (omdat G niet tot de klasse $C^2(0,1)$ behoort) maar wel een fysische oplossing van het snaarprobleem oplevert, namelijk de vorm die de snaar aanneemt t.g.v. een in het punt $x = \xi$ geconcentreerde kracht (zie figuur). We merken alvast op dat we deze

kracht kunnen beschrijven met behulp van delta-functie.



We kunnen (9.1) en (9.6) in operatorvorm compact schrijven als

$$(9.8) \quad L y = h, \quad y = G h,$$

waarbij L de differentiaaloperator

$$(9.9) \quad L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

en G de door (9.6) bepaalde integraaloperator is.

De operator L beeldt de functieruimte $C^2(a,b)$ van de tweemaal continu differentieerbare functies af op de ruimte $C(a,b)$ van de continue functies.

Deze toevoeging is pas een-eenduidig indien we aan de functies y de twee randvoorwaarden (9.2) en (9.3) opleggen. Aldus is G de inverse operator van L voor de deelruimte van de functies uit $C^2(a,b)$ die aan de randvoorwaarden (9.2) en (9.3) voldoen. Breiden we de y -ruimte uit tot bijvoorbeeld continue functies waarvan de afgeleiden niet noodzakelijk continu zijn, dan heeft dit tot gevolg dat de ruimte van de functies Ly met zogenaamde gegeneraliseerde functies als $\delta(x-c)$ uitgebreid wordt.

Aldus kunnen we zeggen dat de oplossing $G(x, \xi)$ als functie van x correspondeert met de gegeneraliseerde functie $\delta(x-\xi)$, d.w.z.

$$(9.10) \quad L G(x, \xi) = \delta(x-\xi).$$

Inderdaad volgt op de gebruikelijke wijze uit (9.6) voor $h(x) = \delta(x-\xi)$

$$(9.11) \quad \int_a^b G(x,t) \delta(t-\xi) dt = G(x, \xi).$$

In de theorie van de distributies of gegeneraliseerde functies kunnen deze min of meer formele bewerkingen exact gefundeerd worden.

Bij het voorbeeld van de snaar is de bij $G(x, \xi)$ behorende uitwendige kracht dus de in $x=\xi$ geconcentreerde eenheidskracht $F(x) = \delta(x - \xi)$.

We beschouwen nu het in de aanvang van deze paragraaf genoemde uitzonderingsgeval van afhankelijkheid van de oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$. Dit betekent dus dat er één oplossing $y_1(x)$ van de homogene vergelijking is welke aan beide randvoorwaarden voldoet. We beweren dat de inhomogene vergelijking (9.1) met de randvoorwaarden (9.2) en (9.3) i.h.a. geen oplossing toelaat tenzij het rechterlid $h(x)$ voldoet aan de nevenvoorwaarde

$$(9.12) \quad \int_a^b y_1(\xi) h(\xi) d\xi = 0$$

Zij nml. $y_0(x)$ een oplossing van het inhomogene probleem dan is

$$\begin{aligned} \int_a^b y_1(\xi) h(\xi) d\xi &= \int_a^b y_1(\xi) \{ -y_0''(\xi) + q(\xi) y_0(\xi) \} d\xi = \\ &= \int_a^b (y_0 y_1'' - y_1 y_0'') d\xi = (y_0 y_1' - y_1 y_0') \Big|_a^b = 0, \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit het feit dat zowel y_0 als y_1 aan de randvoorwaarden (9.2) en (9.3) voldoen. We beweren vervolgens dat de voorwaarde (9.12) niet alleen nodig maar ook voldoende is voor het bestaan van een oplossing van het inhomogene probleem. We kunnen dan meteen opmerken dat met $y_0(x)$ ook $y_0(x) + C y_1(x)$ voor elke constante C een oplossing is. Een geschikte oplossing y_0 kunnen we gemakkelijk met behulp van (9.4) construeren. We gaan uit van de onafhankelijke oplossingen $y_1(x)$ en $y_3(x)$ welke bepaald zijn door

$$\begin{aligned} y_1(a) &= \sin \alpha & y_3(a) &= \cos \alpha \\ y_1'(a) &= -\cos \alpha & y_3'(a) &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

We merken op dat de Wronskiaan $w(y_1, y_3) \equiv 1$ is. Inderdaad kan men gemakkelijk verifiëren dat

$$(9.13) \quad y_0(x) = -y_1(x) \int_x^b y_3(\xi) h(\xi) d\xi - y_3(x) \int_a^x y_1(\xi) h(\xi) d\xi$$

voldoet. Dat aan (9.2) en (9.3) voldaan is volgt namelijk uit
 $y_0(a) = -y_1(a) \int_a^b y_3(\xi) h(\xi) d\xi$, $y_0'(a) = -y_1'(a) \int_a^b y_3(\xi) h(\xi) d\xi$,
 en $y_0(b) = y_0'(b) = 0$.

De oplossing (9.13) kan men desgewenst weer in de vorm (9.6) brengen, d.w.z.

$$(9.14) \quad y_0(x) = \int_a^b G_0(x, \xi) h(\xi) d\xi,$$

waarbij de zogenaamde Greense functie $G_0(x, \xi)$ bepaald is door

$$(9.15) \quad G_0(x, \xi) = \begin{cases} -y_1(x)y_3(\xi) & \text{voor } x \leq \xi, \\ -y_3(x)y_1(\xi) & \text{voor } x \geq \xi. \end{cases}$$

Vervangen we $G_0(x, \xi)$ door de algemenere functie

$$(9.16) \quad G(x, \xi) = G_0(x, \xi) + A y_1(x)y_3(\xi) + B y_3(x)y_1(\xi),$$

waarbij A en B constanten zijn, dan geeft substitutie in (9.14) in verband met de betrekking (9.12) het resultaat

$$(9.17) \quad y(x) = y_0(x) + C y_1(x),$$

d.w.z. de algemene oplossing van het inhomogene probleem.

Voorbeeld

Beschouw als in het vorige voorbeeld de d.v. $-y'' = F(x)$ maar nu met de randvoorwaarden $y'(0) = y'(1) = 0$. Hierbij is $y_1(x) \equiv 1$ een oplossing van het homogene probleem. De voorwaarde (9.12) eist $\int_0^1 F(x) dx = 0$. Kiezen we $y_3(x) \equiv x$, waarbij dus $w(y_1, y_2) = 1$, dan is volgens

$$(9.15) \quad G_0(x, \xi) = \begin{cases} -\xi & \text{voor } x \leq \xi, \\ -x & \text{voor } x \geq \xi, \end{cases}$$

een particuliere functie van Green. Maar ook

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} x & \text{voor } x \leq \xi, \\ \xi & \text{voor } x \geq \xi, \end{cases}$$

voldoet!

§ 10 Probleem van Sturm-Liouville

We beschouwen het volgende probleem (Sturm-Liouville probleem)

$$(10.1) \quad L y = \lambda y, \quad a < x < b,$$

waarbij L de differentiaaloperator (9.9) is of

$$(10.2) \quad L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad q(x) \in C^2,$$

met de volgende randvoorwaarden (zie 9.2 en 9.3)

$$(10.3) \quad \begin{cases} y \cos \alpha + y' \sin \alpha = 0 & \text{voor } x=a \\ y \cos \beta + y' \sin \beta = 0 & \text{voor } x=b. \end{cases}$$

Een voor een zekere waarde van de parameter λ geldende oplossing van dit probleem $y = \varphi(x, \lambda)$ noemen we een eigenfunctie behorende bij de eigenwaarde λ .

Het zal later blijken dat de eigenwaarden een naar opklimmende grootte van $|\lambda|$ geordende aftelbare rij reële getallen

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$ vormen. Voorts dat bij elke eigenwaarde λ_n precies één (genormeerde) eigenfunctie $\varphi_n(x)$ behoort.

In deze paragraaf voeren we de volgende notatie in

$$(10.4) \quad (u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b u(x)v(x)dx,$$

het zgn. inwendige of scalair product van de (continue) functies $u(x)$ en $v(x)$. Als $(u, v) = 0$ zeggen we dat $u(x)$ en $v(x)$ orthogonaal zijn.

Als $u(x)$ en $v(x)$ beide aan de randvoorwaarden (10.3) voldoen geldt de betrekking

$$(10.5) \quad (u, Lv) = (v, Lu).$$

Immers is

$$(u, Lv) - (v, Lu) = \int_a^b (-uv'' + vu'')dx = (-uv' + vu') \Big|_a^b = 0.$$

Met behulp van (10.5) kunnen we gemakkelijk aantonen dat de eigenwaarden van het Sturm-Liouville probleem (zo aanwezig) reëel zijn en dat de eigenfuncties onderling loodrecht zijn. Zou namelijk $\varphi(x, \lambda)$ een bij de complexe eigenwaarde λ behorende eigenfunctie zijn dan is wegens de veronderstelde realiteit

van $q(x)$, α en β ook $\varphi(x, \bar{\lambda})$ een eigenfunctie welke bij $\bar{\lambda}$ behoort. Aangezien $\varphi(x, \bar{\lambda}) = \bar{\varphi}(x, \lambda)$ volgt uit (10.1)

$$(\varphi, L\bar{\varphi}) - (\bar{\varphi}, L\varphi) = (\bar{\lambda} - \lambda)(\varphi, \bar{\varphi}) = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b |\varphi|^2 dx.$$

Maar anderzijds is volgens (10.5)

$$(\varphi, L\bar{\varphi}) - (\bar{\varphi}, L\varphi) = 0.$$

Alleen wanneer $\bar{\lambda} = \lambda$, d.w.z. reëel, wordt aldus een contradictie vermeden.

Zijn voorts $\varphi_m(x)$ en $\varphi_n(x)$ de bij λ_m en λ_n behorende eigenfuncties dan is weer volgens (10.5)

$$0 = (\varphi_m, L\varphi_n) - (\varphi_n, L\varphi_m) = (\lambda_n - \lambda_m)(\varphi_m, \varphi_n),$$

zodat $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$.

Dat bij een eigenwaarde λ slechts één (op een constante factor na) ondubbelzinnig bepaalde eigenfunctie behoort kan a.v. gemakkelijk bewezen worden.

Waren namelijk φ en ψ onafhankelijke oplossingen van (10.1) en (10.3) dan is er zeker een lineaire combinatie χ waarvoor $\chi(a) = \cos \alpha$ en $\chi'(a) = \sin \alpha$. Aangezien anderzijds met φ en ψ ook χ aan de randvoorwaarde bij a voldoet, zou $\chi(a)\cos \alpha + \chi'(a)\sin \alpha = 0$ moeten zijn hetgeen kennelijk een contradictie is.

Nemen we aan dat $\lambda = 0$ geen eigenwaarde is, d.w.z. dat het homogene probleem $Ly = 0$ met de randvoorwaarden (10.3) geen oplossing toelaat, dan volgt uit de voorafgaande paragraaf dat het probleem van Sturm-Liouville equivalent is met de integraalvergelijking

$$y = \lambda Gy$$

of expliciet

$$(10.6) \quad y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi.$$

Zou $\lambda = 0$ een eigenwaarde zijn dan kunnen we tot het reeds behandelde terugkomen door bij $q(x)$ en λ eenzelfde constante op te tellen. D.w.z. we verschuiven de rij eigenwaarden zodanig dat nul geen eigenwaarde is.

Een andere mogelijkheid is om de in de vorige paragraaf beschouwde gegeneraliseerde functie van Green te gebruiken. Op

dit punt zullen we echter niet nader ingaan.

De theorie van integraalvergelijkingen van het type (10.6) met een symmetrische continue kernfunctie $G(x, \xi)$ welke in een later hoofdstuk aan de orde zal komen levert het nog ontbrekende bewijs dat het Sturm-Liouville probleem eigenwaarden bezit (existentiebewijs) en dat de eigenwaarden een aftelbare zich nergens verdichtende rij vormen. Bovendien levert deze theorie de volgende ontwikkelingsstelling:

Stelling 10.1

Zijn $\varphi_n(x)$ ($n=1,2,\dots$) de orthonorme eigenfuncties van het Sturm-Liouville probleem (10.1), (10.3) dan kan elke functie $f(x) \in C^2(a,b)$ welke aan de randvoorwaarden (10.3) voldoet ontwikkeld worden in een uniform convergente reeks:

$$(10.7) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$$

met

$$(10.8) \quad f_n = (f, \varphi_n).$$

Voorbeeld

We beschouwen de vergelijking van de trillende snaar (4.4) met de "elastische" randvoorwaarden. Separatie volgens Bernoulli leidt tot het eigenwaarde-probleem

$$-y'' = \lambda y$$

$$y' = h_1 y \quad \text{voor } x=0, \quad \text{met } h_1 \geq 0,$$

$$y' = -h_2 y \quad \text{voor } x=a, \quad \text{met } h_2 \geq 0.$$

We kunnen gemakkelijk aantonen dat slechts positieve eigenwaarden te verwachten zijn:

$$\begin{aligned} \lambda(y, y) &= -(y, y'') = (y', y') - y y' \Big|_0^a = \\ &= (y', y') + h_2 y^2(a) + h_1 y^2(0) > 0. \end{aligned}$$

Bij de verdere expliciete uitwerking kiezen we gemakshalve $h_1 = \infty$ en $h_2 = h$. De eigenfuncties zijn uiteraard van de vorm $\varphi(x, \lambda) = \sin x \sqrt{\lambda}$, waarbij dus al rekening is gehouden met de randvoorwaarde bij $x=0$. Die bij $x=a$ levert de eigenwaarde-verge-

lijking

$$\operatorname{tg} a \sqrt{\lambda} = -\frac{1}{h} \sqrt{\lambda}$$

die men slechts numeriek of grafisch kan oplossen.

Een eenvoudige grafische beschouwing - snijdt de tangenslijn $y = \operatorname{tg} x$ met een rechte $y = c x$ - demonstreert de aanwezigheid van een aftelbare rij positieve eigenwaarden.

Voorbeeld

Beschouw het boven gestelde probleem met in het bijzonder $h_1 = h_2 = 0$, d.w.z.

$$-y'' = \lambda y \quad \text{met } y'(0) = y'(a) = 0.$$

We verkeren nu in het uitzonderingsgeval dat $\lambda_0 = 0$ een eigenwaarde is, en wel één met de eigenfunctie $\varphi_0(x) \equiv 1$. Gemakkelijk blijkt dat de overige eigenfuncties en eigenwaarden gegeven zijn door $\varphi_n(x) \equiv \cos n x$ en $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$ ($n=1, 2, \dots$). De eigenfuncties $\varphi_n(x)$ vormen inclusief $\varphi_0(x)$ een orthogonaal stelsel, overigens in overeenstemming met de voor dit uitzonderingsgeval geldende nevenvoorwaarde (9.12). De ontwikkelingsstelling heeft nu betrekking op een zuivere cosinusreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx.$$

§ 11 Resonantie

We beschouwen het zogenaamde inhomogene probleem van Sturm-Liouville

$$(11.1) \quad L y = \lambda y + h(x)$$

met de randvoorwaarden

$$(11.2) \quad y \cos \alpha + y' \sin \alpha = 0 \quad \text{voor } x=a$$

en

$$(11.3) \quad y \cos \beta + y' \sin \beta = 0 \quad \text{voor } x=b.$$

Hierbij is de differentiaaloperator L gegeven door (9.9). Dit probleem kan geheel behandeld worden volgens het schema van § 9. We gaan dus uit van een oplossing $y_1(x)$ van $(L - \lambda)y = 0$ met $y_1(a) = \sin \alpha$, $y_1'(a) = -\cos \alpha$ en een oplossing $y_2(x)$ van $(L - \lambda)y = 0$

met $y_2(b) = \sin \beta$, $y_2'(b) = -\cos \beta$. Deze oplossingen zijn onafhankelijk dan en alleen dan wanneer $\lambda=0$ geen eigenwaarde is. In dat geval is het inhomogene probleem van Sturm-Liouville eenduidig oplosbaar.

Is λ een eigenwaarde met eigenfunctie $\varphi(x)$ dan zijn $y_1(x)$ en $y_2(x)$ beide evenredig aan $\varphi(x)$. Volgens (9.12) bestaat er i.h.a. geen oplossing van het probleem tenzij

$$(11.4) \quad \int_a^b \varphi(x) h(x) dx = 0.$$

Is deze voorwaarde vervuld dan bestaat er een oplossing welke uiteraard niet eenduidig bepaald is aangezien aan een particuliere oplossing een willekeurig veelvoud van de eigenfunctie $\varphi(x)$ toegevoegd kan worden.

Uit de beschouwingen van de vorige paragraaf volgt dat het inhomogene probleem van Sturm-Liouville herleid kan worden tot een zgn. inhomogene integraalvergelijking

$$y = \lambda G y + G h$$

d.w.z.

$$(11.5) \quad y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x).$$

Op deze wijze kan de theorie van het inhomogene probleem van Sturm-Liouville afgeleid worden uit die van de inhomogene integraalvergelijkingen.

Het inhomogene probleem van Sturm-Liouville ontstaat bij de beschouwing van een trillend systeem met een uitwendige kracht. In het algemeen is dit probleem van de vorm

$$(11.6) \quad L u = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(x, t)$$

met de randvoorwaarden

$$(11.7) \quad \begin{cases} u \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha = 0 & \text{voor } x = a, \\ u \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \beta = 0 & \text{voor } x = b, \end{cases}$$

en de beginvoorwaarden

$$(11.8) \quad u = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{voor } t=0.$$

We zullen dit probleem niet in de volle algemeenheid behande-

len. In de eerste plaats beschouwen we een periodieke uitwendige kracht

$$(11.9) \quad F(x,t) = h(x) \frac{\sin}{\cos} \sigma t,$$

en in de tweede plaats zien we af van de beginvoorwaarde (11.8). We vragen slechts naar de mogelijkheid van een zogenaamde quasi-stationnaire oplossing welke van de volgende vorm is

$$(11.10) \quad u(x,t) = y(x) \frac{\sin}{\cos} \sigma t.$$

Substitutie van (11.9) en (11.10) in (11.6) en (11.7) leidt tot het inhomogene probleem van Sturm-Liouville (11.1) met (11.2) en (11.3), waarbij $\lambda = \sigma^2$. Tenzij σ^2 een eigenwaarde is bestaat er dus een eenduidig bepaalde oplossing, een zogenaamde opgedrongen periodieke beweging.

Is echter σ^2 een eigenwaarde dan is er i.h.a. geen stationnaire oplossing mogelijk. We noemen dit verschijnsel resonantie. Een diepergaande analyse toont aan dat in het resonantiegeval de beweging steeds heftiger wordt d.w.z. $\max_x |u(x,t)| \rightarrow \infty$ voor $t \rightarrow \infty$. Dit verschijnsel zullen we toelichten aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld

We beschouwen een trillende snaar welke onderworpen is aan een periodieke uitwendige kracht welke in resonantie is met de eerste eigenwaarde. De mathematische beschrijving is a.v.

$$(11.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \sin x \sin t,$$

$$(11.12) \quad u=0 \quad \text{voor } x=0 \text{ en } x=\pi.$$

$$(11.13) \quad \begin{cases} u=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x), \end{cases} \quad \text{voor } t=0.$$

We zoeken eerst een particuliere oplossing welke wel aan de randvoorwaarden maar niet noodzakelijk aan de beginvoorwaarden voldoet. Door proberen vinden we bijv. $u = -\frac{1}{2} \sin x \cdot t \cos t$. We stellen nu

$$(11.14) \quad u = -\frac{1}{2} \sin x \cdot t \cos t + v(x,t).$$

Substitutie van deze uitdrukking geeft voor v

$$(11.15) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} ,$$

$$(11.16) \quad v=0 \quad \text{voor } x=0 \text{ en } x=\pi ,$$

met voor $t=0$ de beginvoorwaarde

$$(11.17) \quad \begin{cases} v=0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = u_1(x) + \frac{1}{2} \sin x \end{cases}$$

Dit is een ons uit de behandeling van de trillende snaar reeds bekend probleem. De oplossing is van de vorm

$$(11.18) \quad v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \frac{\sin nt}{n}$$

Aanpassing aan de beginvoorwaarde geeft

$$(11.19) \quad u_1(x) + \frac{1}{2} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

waaruit de coëfficiënten a_n gemakkelijk afgeleid kunnen worden. De oplossing van het gestelde probleem is nu gegeven door (11.14) en (11.18). We merken op, dat voor $t \rightarrow \infty$ $u(x,t)$ steeds grotere waarden aanneemt. Er is dus geen quasi-stationaire limiettoestand. Fysisch betekent het resonantie-effect dat de snaar tenslotte stuk trilt.

IV De vergelijking van het trillende vlies

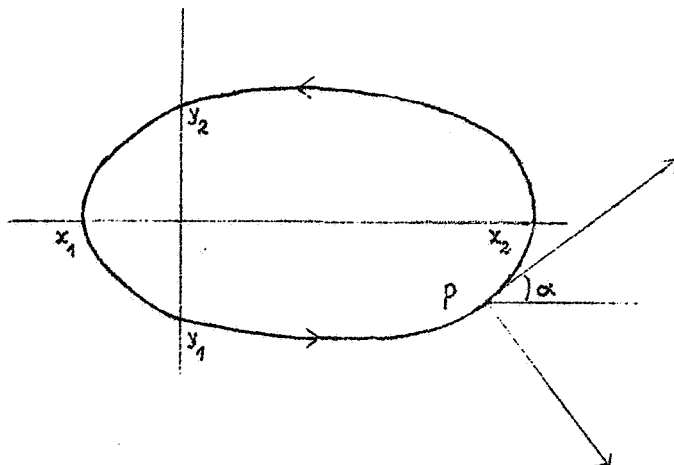
§ 12 De stelling van Green

In deze paragraaf beschouwen we een aantal eigenschappen van functies van twee variabelen $f(x,y)$ welke we later nodig hebben. We nemen aan dat $f(x,y)$ tot de klasse C^2 behoort, d.w.z. twee maal continu differentieerbaar is. In het (x,y) -vlak beschouwen we bij onze toepassingen doorgaans eivormige gebieden G met een stuksgewijs gladde randkromme K . Deze randkromme kunnen we bepaald denken door de parameter-voorstelling

$$(12.1) \quad x=x(s) \quad , \quad y=y(s)$$

waarbij de afgeleiden $x'(s)$ en $y'(s)$ bestaan en continu zijn eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten. We nemen aan dat G door een willekeurige snijlijn zodanig wordt gesneden dat er twee snijpunten met K ontstaan. Aan deze voorwaarden voldoen bijv. een cirkel, vierkant en ellips maar geen ringvormig gebied. Meestal kunnen we onze beschouwingen zonder moeite uitbreiden tot ingewikkelder gebieden mits deze maar op eenvoudige wijze uit de bovenomschreven gebieden samengesteld kunnen worden.

We beschouwen nu i.h.b. een eivormig gebied G met een gladde rand K . Zonder bezwaar mogen we bij (12.1) aannemen dat s de booglengte is. Bij dit gebied kunnen we een binnen-gebied en een buitengebied onderscheiden. Bij de rand hebben we te maken met de raaklijn, gericht volgens toenemende s , en de normaal welke we naar buiten gericht denken.



Bij functies van twee variabelen x, y is de richtingsafgeleide in de richting α gedefinieerd door

$$(12.2) \quad \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}$$

Passen we dit toe op het punt P van de randkromme K dan kunnen we differentieren in de richting van de raaklijn, aangeduid met $\frac{\partial}{\partial s}$ en in de richting van de normaal, aangeduid met

$$\frac{\partial}{\partial n}.$$

Blijkbaar geldt voor de raaklijn

$$(12.3) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds},$$

zodat

$$(12.4) \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{ds},$$

en

$$(12.5) \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{dx}{ds}.$$

Lemma van Green

Behoren $u(x, y)$ en $v(x, y)$ tot C^2 dan geldt

$$(12.6) \quad \iint_G (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \int_K u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iint_G u \Delta v dx dy,$$

waarbij

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{operator van Laplace})$$

bewijs (zie fig.)

$$\iint_G (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \iint_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u v_y) - u \Delta v \right\} dx dy =$$

$$= \int \left\{ (u v_x) \Big|_{x_1}^{x_2} \right\} dy + \int \left\{ (u v_y) \Big|_{y_1}^{y_2} \right\} dx - \iint_G u \Delta v dx dy$$

$$= \int_K u (v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds}) ds - \iint_G u \Delta v dx dy =$$

$$= \int_K u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iint_G u \Delta v dx dy, \quad \text{q.e.d.}$$

Aangezien het linkerlid van (12.6) symmetrisch is mogen we

rechts u en v verwisselen. Aldus vinden we het belangrijke resultaat

$$(12.7) \quad \iint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_K \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

hetgeen bekend staat als de stelling van Green.

Stellen we hierin i.h.b. $v \equiv 1$ dan vinden we de zgn. stelling van Gauss

$$(12.8) \quad \iint_G \Delta u dx dy = \int_K \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

§ 13 De vergelijking van het trillende vlies

We beschouwen een vlies dat over een door een randkromme K begrensde gebied G opgespannen is. Nemen we, evenals bij de trillende snaar, aan dat het vlies een kleine vormverandering ondergaat waarbij de plaatselijke doorbuiging door $u(x,y)$ gegeven is dan is de potentiële energie gelijk aan

$$V = \iint_G \left\{ \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1 \right\} dx dy.$$

Met verwaarlozing van hogere termen is dus

$$(13.1) \quad V = \frac{1}{2} \tau \iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

De kinetische energie is uiteraard gegeven door

$$(13.2) \quad T = \frac{1}{2} \rho \iint_G u_t^2 dx dy.$$

Is er bovendien een uitwendige kracht $F(x,y,t)$ werkzaam dan geldt als uitbreiding van (13.1)

$$(13.3) \quad V = \frac{1}{2} \tau \iint_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \iint_G u F dx dy.$$

We kunnen nu het principe van Hamilton van § 3 toepassen. Variatie van u wil zeggen (verg. 2.31)

$$u \rightarrow u(x,y) + \varepsilon \eta(x,y)$$

Uit

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_G \left\{ \frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} \tau (u_x^2 + u_y^2) + u F \right\} dx dy \right\} dt = \text{extr.}$$

volgt dan

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_G \left\{ e^{u_t} \eta_t - \tau (u_x \eta_x + u_y \eta_y) + \eta F \right\} dx dy dt = 0$$

Met behulp van het lemma van Green kunnen we dit herleiden tot

$$(13.4) \quad \int_{t_1}^{t_2} \iint_G (\tau \Delta u - e^{u_{tt}} + F) \eta dx dy dt - \tau \int_{t_1}^{t_2} \int_K \frac{\partial u}{\partial n} \eta ds dt = 0.$$

Aangezien dit moet gelden voor alle variaties η vinden we als de vergelijking van Euler-Lagrange de bewegingsvergelijking

$$(13.5) \quad e^{u_{tt}} = \tau \Delta u + F(x, y, t)$$

Aangezien het vlies aan de rand vastzit geldt de randvoorwaarde

$$(13.6) \quad u = 0 \quad \text{op } K$$

zodat volledig aan (13.4) voldaan is.

De vrije bewegingen van het trillende vlies zijn bepaald door (13.5) met $F \equiv 0$. Door een passende keuze van eenheden kunnen we bereiken dat de volgende vergelijking ontstaat

$$(13.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Naar analogie van de behandeling van de vergelijking van de trillende snaar kunnen we de vrije bewegingen voorstellen door

$$(13.8) \quad u(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{it\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

Substitutie in (13.7) geeft

$$(13.9) \quad (\Delta + \lambda) \varphi = 0$$

hetgeen met de randvoorwaarde

$$(13.10) \quad \varphi = 0 \quad \text{op } K$$

een eigenwaarde probleem voorstelt en wel een tweedimensionale generelisatie van een Sturm-Liouville probleem.

Beschouwen we i.h.b. een vierkant gebied, bijv.

$0 < x, y < \pi$ dan kunnen we (13.9) en (13.10) weer oplossen met behulp van de methode van Bernoulli. Het zoeken naar bijzondere oplossingen van de vorm

$$\varphi = \varphi_1(x) \varphi_2(y)$$

leidt als bij de trillende snaar tot

$$(13.11) \quad \varphi_1(x) = \sin mx, \quad \varphi_2(y) = \sin ny, \quad \lambda = m^2 + n^2.$$

voor alle combinaties $m, n = 1, 2, 3, \dots$.

Rangschikking van de eigenbewegingen naar opklimmende λ 's geeft

$\sin x \sin y$	$\lambda = 2$
$\sin 2x \sin y, \sin x \sin 2y$	$\lambda = 5$
$\sin 2x \sin 2y$	$\lambda = 8$
$\sin 3x \sin y, \sin x \sin 3y$	$\lambda = 10$
etc	

De algemene bewegingsvorm van het trillende vlies is van de vorm

$$(13.12) \quad u(x, y, t) = \sum \sum a_{mn} \sin mx \sin ny \frac{\sin t \sqrt{m^2 + n^2}}{\cos t \sqrt{m^2 + n^2}}.$$

We merken hierbij op dat bij sommige eigenwaarden meer eigenfuncties behoren. Aldus zeggen we dat $\lambda = 5$ en $\lambda = 10$ tweevoudig (ontaard) zijn.

Een eigenwaarde als $\lambda = 65 (= 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2)$ is zelfs viervoudig ontaard.

Het aanvangswaardenprobleem bepaald door (13.7), (13.6) en

$$(13.13) \quad \begin{cases} u = u_0(x, y) \\ u_t = u_1(x, y) \end{cases} \quad \text{voor } t = 0$$

Leidt voor een vierkant en algemener voor een rechthoek als in § 6 tot het probleem een gegeven functie in een dubbele Fourier-reeks te ontwikkelen. Op dit probleem zullen we hier echter niet nader ingaan.

We kunnen op vrij eenvoudige wijze aantonen dat twee bij verschillende eigenwaarden behorende eigenfuncties onderling orthogonaal zijn. Daartoe beschouwen we het eigenwaarde probleem (13.9) en (13.10) waarbij K geheel willekeurig mag zijn.

Zijn $\varphi(x,y,\lambda)$ en $\psi(x,y,\mu)$ de twee eigenfuncties dan volgt uit (13.9)

$$\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi = (\lambda - \mu) \varphi \psi .$$

Integratie over G levert met toepassing van de stelling van Green

$$(\lambda - \mu) \iint_G \varphi \psi \, dx \, dy = \int_K \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds .$$

De randvoorwaarde (13.10) maakt het rechterlid nul zodat inderdaad

$$(13.14) \quad \iint_G \varphi \psi \, dx \, dy = 0$$

De bewering blijft blijkbaar geldig als (13.10) door bijv. de randvoorwaarde

$$(13.15) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{op } K,$$

vervangen wordt.

In § 15 zullen we een cirkelvormig gebied beschouwen, Hierbij doen zich een aantal problemen voor waarvoor enige kennis van de theorie van de Bessel functies gewenst is. Deze theorie zal in de volgende paragraaf worden gegeven.

§ 14 Bessel functies

We zullen een korte samenvatting geven van de voornaamste eigenschappen van de Bessel functies welke voor ons van belang zijn. Meer details vindt men in de volgende boeken

- | | |
|---------|--|
| Bowman | Introduction to Bessel functions.
Dover ed. (1958) \$ 1.35.
(Zeer aanbevolen, geeft verschillende toepassingen.) |
| Sneddon | Special functions of mathematical physics and chemistry.
Univ.Math. Texts, Oliver & Boyd (1956) 10 sh.
(Bevat een hoofdstuk over Bessel functies. Geeft ook beknopt overzicht van o.a. hypergeometrische |

functies en Legendre functies.)

Mc Lachlan Bessel functions for engineers.
Oxford Univ. Press (1941).
(Is uitvoeriger dan Bowman. Bevat een waarde-
volle formuleverzameling. Eveneens aanbevolen.)

Aan de differentiaalvergelijking van Bessel

$$(14.1) \quad z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \mu^2)w = 0$$

voldoen twee typen oplossingen resp.

$$J_\mu(z) \text{ en } Y_\mu(z)$$

geheten functie van Bessel van de eerste resp. tweede soort.
 $Y_\mu(z)$ noemt men wel de functie van Neumann en wordt ook ge-
schreven als $N_\mu(z)$. Nemen we aan dat $\mu \geq 0$ dan is

$$J_\mu(z) \text{ is regulier voor } z=0$$

$$Y_\mu(z) \text{ is singulier voor } z=0.$$

Voor $J_\mu(z)$ kan men gemakkelijk een machtreeks afleiden. Sub-
stitutie van

$$J_\mu(z) = z^\mu \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$$

geeft

$$\left(z \frac{d}{dz}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{\mu+j} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mu^2 c_j - c_{j-2}) z^{\mu+j}$$

met de afspraak $c_{-2}=c_{-1}=0$. Gelijkstelling van de coëfficiënt
van $z^{\mu+j}$ geeft de recurrente betrekking

$$(\mu+j)^2 c_j = \mu^2 c_j - c_{j-2}.$$

Men ziet gemakkelijk dat hieraan voldaan is door bijv.

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\mu+m+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu+2m}, \quad c_{2m+1} = 0.$$

Men definieert aldus

$$(14.2) \quad J_\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\mu+j+1)} \left(\frac{1}{2}z\right)^{\mu+2j}.$$

Deze reeks convergeert voor alle waarden z en μ . We breiden deze definitie uit tot alle complexe waarden van z en μ . In het bijzonder stelt de reeks ook een oplossing voor als μ reëel en negatief is. Is μ negatief maar niet een negatief geheel getal dan is $J_\mu(z)$ voor $z=0$ singulier. Anders gezegd leidt dit tot :

Voor $\mu > 0$ en $\mu \neq 1, 2, 3, \dots$ zijn $J_\mu(z)$ en $J_{-\mu}(z)$ onafhankelijke oplossingen van (14.1).

Is μ een geheel getal, zeg m , dan blijkt uit (14.2) dat

$$(14.3) \quad J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z).$$

Definieert men echter voor alle μ

$$(14.4) \quad Y_\mu(z) = \frac{\cos \mu \pi J_\mu(z) - J_{-\mu}(z)}{\sin \mu \pi}$$

dan bestaat $Y_\mu(z)$ ook voor gehele waarden van μ en stelt onder alle omstandigheden een van $J_\mu(z)$ onafhankelijke oplossing voor.

In het bijzonder is

$$(14.5) \quad J_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!j!} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2j} = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} - \dots$$

$$(14.6) \quad Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{1}{2}z\right) + \gamma \right\} J_0(z) + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j}}{j!j!} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2j} = \\ = \frac{2}{\pi} \ln z + \frac{2}{\pi} (\gamma - \ln 2) + O(z^2 \ln z).$$

Met behulp van (14.2) kan men gemakkelijk bewijzen dat

$$(14.7) \quad J_{\mu-1}(z) + J_{\mu+1}(z) = \frac{2\mu}{z} J_\mu(z)$$

en

$$(14.8) \quad J_{\mu-1}(z) - J_{\mu+1}(z) = 2 J'_\mu(z).$$

Uit (14.3) en (14.8) volgt voor $\mu=0$ i.h.b.

$$(14.9) \quad J'_0(z) = -J_1(z).$$

Uit (14.4) volgt dan ook b.v.

$$(14.10) \quad Y'_0(z) = -Y_1(z) .$$

Uit (14.1) volgt dat de Wronski determinant

$J_\mu(z)Y'_\mu(z) - J'_\mu(z)Y_\mu(z)$ gelijk is aan C/z , waarbij C een constante is nml.

$$\begin{aligned} J_\mu(z Y'_\mu)' &= \left(\frac{\mu^2}{z} - z\right) J_\mu Y_\mu \\ Y_\mu(z J'_\mu)' &= \left(\frac{\mu^2}{z} - z\right) J_\mu Y_\mu . \end{aligned}$$

Trek af

$$J_\mu(z Y'_\mu)' - Y_\mu(z J'_\mu)' = 0$$

of

$$\{J_\mu(z Y'_\mu) - Y_\mu(z J'_\mu)\}' = 0 ,$$

zodat de vorm tussen accolades een constante C is. De waarde van C volgt door het gedrag in de omgeving van $z=0$ te gebruiken. Met behulp van (14.4) is, mits μ niet geheel is

$$\begin{aligned} z(j_\mu Y'_\mu - J'_\mu Y_\mu) &= - \frac{z}{\sin \mu \pi} (J_\mu J'_{-\mu} - J'_\mu J_{-\mu}) \\ &\approx \frac{\frac{1}{2} \mu z}{\sin \mu \pi} \left\{ \frac{(\frac{1}{2} z)^\mu}{\Gamma(1+\mu)} \frac{(\frac{1}{2} z)^{-1-\mu}}{\Gamma(1-\mu)} + \frac{(\frac{1}{2} z)^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)} \frac{(\frac{1}{2} z)^{-1+\mu}}{\Gamma(1+\mu)} \right\} = \\ &= \frac{2\mu}{\sin \mu \pi \Gamma(1+\mu) \Gamma(1-\mu)} = \frac{2}{\pi} . \end{aligned}$$

Derhalve is

$$(14.11) \quad \begin{vmatrix} J_\mu(z) & Y_\mu(z) \\ J'_\mu(z) & Y'_\mu(z) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi z} .$$

Dit is vooreerst geldig mits μ geen geheel getal is. Bij limietovergang is de geldigheid universeel.

Stelt men in (14.1) $w=z^{-\frac{1}{2}}u$ dan geldt voor u

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + u = \frac{\mu^2 - 1/4}{z^2} u .$$

Is z zeer groot, $z \rightarrow +\infty$ dan gedraagt u zich als een oplossing van

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + u = 0$$

nm1. $\cos(z-\alpha)$. Inderdaad toont een nauwkeuriger analyse aan dat voor $z \rightarrow \infty$ (asymptotische voorstelling)

$$(14.12) \quad J_{\mu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{z\sqrt{z}}\right).$$

In het bijzonder is $J_0(z)$ voor $0 < z < \infty$ een oscillerende functie, waarvan de eerste nulpunten a.v. zijn

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2.405 \\ \beta_2 &= 5.520 \\ \beta_3 &= 8.654 \end{aligned}$$

Voor $J_1(z)$ zijn ze

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 0 \\ \beta_1 &= 3.832 \\ \beta_2 &= 7.016 \\ \beta_3 &= 10.173 \end{aligned}$$

Een benadering van de nulpunten volgt uit (14.12).

§ 15 Een cirkelvormig vlies

De vrije trillingen van een cirkelvormig vlies zijn bepaald door de bewegingsvergelijking

$$(15.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{voor } x^2 + y^2 < a^2,$$

en de randvoorwaarde

$$(15.2) \quad u=0 \quad \text{voor } x^2 + y^2 = a^2.$$

Het ligt voor de hand poolcoördinaten (r, θ) in te voeren volgens

$$(15.3) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

We zullen laten zien dat deze transformatie de Laplace operator overvoert in

$$(15.4) \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

De rechtstreekse methode waarbij de partiële afgeleide naar x en y m.b.v. (15.3) worden uitgedrukt in die naar r en θ is nogal bewerkelijk. Korter en eleganter kunnen we (15.4) afleiden via de complexe transformaties

$$(15.5) \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

en

$$(15.6) \quad z = re^{i\theta}, \quad \bar{z} = re^{-i\theta}.$$

Uit (15.5) volgt direct

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

zodat

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Uit (15.6) volgt analoog

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta}$$

en dus

$$r \frac{\partial}{\partial r} = z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

en voorts

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = i \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Uit de laatste twee betrekkingen volgt

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 4 z \bar{z} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = r^2 \Delta,$$

waarmee (15.4) bewezen is.

Het gestelde probleem is in poolcoördinaten dus bepaald door

$$(15.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{voor } r < a$$

met

$$(15.8) \quad u=0 \quad \text{voor } r=a.$$

Passen we weer de methode van Bernoulli toe dan beginnen we met oplossingen te zoeken van het type

$$(15.9) \quad u = \varphi(r) \exp(A\theta + Bt)$$

De samenhang van het vlies vereist dat u een periodieke functie

van θ is met de periode 2π . Dit kan alleen wanneer A geheel is. We stellen dus $A=n$ ($n=0,1,2,\dots$) en voorts i.v.m. de vroeger gebruikte notatie $B=\sqrt{\lambda}$.

Substitutie van (15.9) in (15.7) levert de vergelijking van Bessel.

$$(15.10) \quad \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) = 0,$$

welke van de vorm (14.1) is indien we als nieuwe variabelen $z=r\sqrt{\lambda}$ nemen. De oplossingen van (15.10) zijn van de vorm

$$\varphi = C J_n(r\sqrt{\lambda}) + D Y_n(r\sqrt{\lambda}).$$

Aangezien voor $r=0$ de uitwijking eindig is moet $B=0$ zijn zodat, afgezien van een constante factor, van (15.10) alleen de volgende oplossing bruikbaar is.

$$(15.11) \quad \varphi(r) = J_n(r\sqrt{\lambda}).$$

De randvoorwaarde (15.8) eist

$$(15.12) \quad J_n(a\sqrt{\lambda}) = 0$$

zodat de eigenwaarden bepaald zijn door de nulpunten van $J_n(z)$. Duiden we deze aan met $\beta_{n,1}, \beta_{n,2}, \dots$ dan verkrijgen we aldus het dubbel-oneindige stelsel

$$(15.13) \quad \lambda = \frac{1}{a^2} \beta_{n,m}^2 \quad (n=0,1,2,\dots; m=1,2,\dots).$$

De laatste vrije beweging wordt aldus

$$(15.14) \quad u = J_0(\beta_{0,1} r/a) \exp \pm i t \beta_{0,1}/a \quad \beta_{0,1} = 2.405$$

De vrije bewegingen kunnen we ordenen naar opklimmende waarden van n . Voor $n=0$ heeft men een reeks radiaal-symmetrische eigenbewegingen. Voor $n=1$ heeft men een reeks eigenbewegingen welke bijv. rondlopende golven kunnen voorstellen, bijv. ($a=1$ kiezend)

$$(15.15) \quad u = J_1(\beta r) \exp i (\beta t \pm \theta).$$

Op soortgelijke wijze als bij vierkant en rechthoek kunnen we het beginwaarden-probleem oplossen. Als voorbeeld voegen we aan (15.7) en (15.8) de volgende beginconditie toe

$$(15.16) \quad t=0 \quad \begin{cases} u=f(r) \\ u_t=0 \end{cases}$$

Aangezien de beginvoorwaarde symmetrisch is kunnen we de te verwachten beweging samengesteld denken uit de bij $n=0$ behorende vrije bewegingen. Aldus stellen we

$$(15.17) \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(\beta_m r) \cos \beta_m t$$

waarbij met $a=1$ de β_m de nulpunten van $J_0(z)$ zijn. De beginvoorwaarde (15.16) leidt tot het ontwikkelingsprobleem

$$(15.18) \quad f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(\beta_m r) .$$

Op grond van onze algemene beschouwingen en zoals ook rechtstreeks gemakkelijk uit (15.10) afgeleid kan worden geldt de orthogonaliteitsvoorwaarde

$$(15.19) \quad \int_0^1 r J_0(\beta_m r) J_0(\beta_n r) dr = 0 \quad \text{voor } m \neq n .$$

Aldus heeft men als bij Fourier-reeksen de volgende uitdrukking voor c_m :

$$(15.20) \quad c_m = \int_0^1 r f(r) J_0(\beta_m r) dr / \int_0^1 r J_0^2(\beta_m r) dr .$$

V Systemen met eindig veel vrijheidsgraden

§ 16 De Euclidische ruimte E_n

We beschouwen eerst een abstracte lineaire ruimte R . De elementen $x, y, z, \dots$ van R noemt men punten of vectoren en R heet daarom wel een lineaire vectorruimte. De vectoren van R kan men vermenigvuldigen met scalaire factoren $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Doorgaans zijn dit de reële getallen en dan heet R een reële lineaire vectorruimte. In iets algemener verband zijn dit de complexe getallen en dan noemt men R een complexe lineaire vectorruimte. Voorzover niet nader aangeduid nemen we aan dat R steeds een reële ruimte is.

Een abstracte ruimte $R(x, y, z, \dots)$ kan men op de volgende wijze axiomatisch invoeren. De eerste groep axioma's drukt uit dat vectoren opgeteld kunnen worden en dat R ten opzichte van de optelling een commutatieve groep is. De tweede groep axioma's heeft betrekking op de vermenigvuldiging van een vector met een scalar. De derde groep axioma's verbindt beide bewerkingen volgens distributieve eigenschappen.

I R is een commutatieve additieve groep.

Dit betekent dat voor elk tweetal vectoren x, y op eenduidige wijze een som gedefinieerd is die ook tot R behoort. De somvector schrijven we als $x+y$. De somvorming of optelling is commutatief en associatief. Er is een nulelement 0 en elke vector x bezit een inverse $-x$.

In formulevorm:

$$\begin{array}{lll} \underline{a} & x+y & = y+x \quad ; \\ \underline{b} & x+(y+z) & = (x+y)+z \quad ; \\ \underline{c} & x+0 & = x \quad \text{voor elke } x \quad ; \\ \underline{d} & x+(-x) & = 0 \quad . \end{array}$$

Uit de genoemde axioma's volgt op eenvoudige wijze dat er slechts één nulvector is en dat elk element slechts één inverse bezit.

II Voor elke vector x en elk (reëel) getal α is op eenduidige wijze een product met een scalar αx gedefinieerd.

Voor de vermenigvuldiging met een scalar gelden de volgende twee axioma's

$$\underline{a} \quad \alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x \quad ;$$

$$\underline{b} \quad 1.x = x \quad .$$

III Optelling en vermenigvuldiging met een scalar zijn distributief ten opzichte van elkaar. In formulevorm:

$$\underline{a} \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad ;$$

$$\underline{b} \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad .$$

Uit deze axioma's kan men gemakkelijk afleiden dat

$$(-1)x = -x$$

en dat

$$\alpha x = 0$$

dan en alleen dan als $\alpha=0$ of $x=0$.

De ons vertrouwde Euclidische ruimte van drie dimensies E_3 , hoewel een zeer speciaal geval van de boven gedefinieerde abstracte lineaire ruimte, stelt ons in staat aan vele begrippen en eigenschappen van een abstracte ruimte een anschouwelijk beeld te verbinden. Aldus zijn de elementen in E_3 punten P of vectoren OP gerekend vanaf een vaste oorsprong O .

Een stelsel van m vectoren $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$ heet lineair afhankelijk als een stelsel van m scalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, niet alle nul, bestaat zodanig dat

$$(16.1) \quad \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_m x^{(m)} = 0 \quad .$$

De genoemde vectoren heten lineair onafhankelijk indien uit het bestaan van de betrekking (16.1) volgt dat alle α_i ($i=1, 2, \dots, n$) nul zijn.

Indien er maximaal n onafhankelijke vectoren bestaan zegt men dat R de dimensie n bezit. Een willekeurig stelsel van n onafhankelijke vectoren in een ruimte R_n van de dimensie n heet een basis in R_n . Vormen $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ een basis in R_n dan kan volgens (16.1) een willekeurige vector x geschreven worden als

$$(16.2) \quad x = x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)} + \dots + x_n e^{(n)} .$$

De scalars $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ heten de componenten van x of de coördinaten van x t.o.v. de gekozen basis. Omgekeerd vormen alle lineaire combinaties van een stelsel van m onafhankelijke vectoren, d.w.z. alle vectoren van het type (16.2), waarbij n door $m \leq n$ vervangen is een lineaire ruimte van de dimensie m . Voor $m < n$ verkrijgt men aldus een lineaire deelruimte R_m van R_n .

In het aanschouwelijke model van E_3 zijn er tweedimensionale deelruimten E_2 als vlakken door de oorsprong en eendimensionale deelruimten E_1 als lijnen door de oorsprong.

Onder de lineaire ruimten is de Euclidische ruimte gekarakteriseerd door een speciale metriek van hoeken en afstanden, de zogenaamde Euclidische metriek. Ook hiervan geven we een axiomatische behandeling waarbij we uitgaan van het in de vectorrekening bekende scalaire of inwendig product.

IV Voor elk paar vectoren x en y is op eenduidige wijze een inwendig product (x, y) gedefinieerd dat voldoet aan de volgende axioma's

$$\begin{array}{ll} \underline{a} & (y, x) = (x, y) \quad ; \\ \underline{b} & (x, x) > 0 \text{ als } x \neq 0; \\ \underline{c} & (x+y, z) = (x, z) + (y, z) \quad ; \\ \underline{d} & (\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad . \end{array}$$

De uitdrukking

$$(16.3) \quad \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)} \quad .$$

heet de norm of de lengte van de vector x .

Stelling 16.1 (Ongelijkheid van Schwarz)

$$(16.4) \quad (x,y)^2 \leq (x,x) (y,y)$$

Bewijs

Voor alle waarden van λ is $(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$, d.w.z.

$$\lambda^2 (y,y) + 2\lambda (x,y) + (x,x) \geq 0.$$

Bovenstaande ongelijkheid drukt uit dat de discriminant van deze kwadratische vorm niet negatief is.

Twee vectoren x en y heten orthogonaal als

$$(16.5) \quad (x,y) = 0.$$

Een vector waarvan de lengte 1 is heet een eenheidsvector. Een basis $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ van onderling orthogonale eenheidsvectoren heet een orthonorme basis.

De coördinaten van een vector x t.o.v. een orthonorme basis heten de Cartesische coördinaten van x . Men kan gemakkelijk uit de axioma's IV afleiden dat voor twee vectoren x en y met Cartesische coördinaten $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ het inwendig product bepaald is door

$$(16.6) \quad (x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Uitgaande van een willekeurige basis $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ kunnen we volgens het zogenaamde orthogonaliseringsprincipe van Schmidt op de volgende wijze gemakkelijk een orthonorme basis $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ afleiden. We definiëren daartoe achtereenvolgens

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= f^{(1)} / \|f^{(1)}\|, \\ e^{(2)} &= \{ f^{(2)} - (f^{(2)}, e^{(1)}) e^{(1)} \} / \|f^{(2)} - (f^{(2)}, e^{(1)}) e^{(1)}\|, \\ e^{(3)} &= \{ f^{(3)} - (f^{(3)}, e^{(1)}) e^{(1)} - (f^{(3)}, e^{(2)}) e^{(2)} \} / \\ &\quad \|f^{(3)} - (f^{(3)}, e^{(1)}) e^{(1)} - (f^{(3)}, e^{(2)}) e^{(2)}\|, \end{aligned}$$

enz.

De afstand $d(x,y)$ tussen twee vectoren x en y definiëren we als

$$(16.7) \quad d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-y\| .$$

Deze definitie voldoet aan de volgende drie karakteristieke eigenschappen

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & d(x,x) = 0 \quad ; \\ 2^0 \quad & d(x,y) = d(y,x) > 0 \quad \text{voor } x \neq y ; \\ 3^0 \quad & d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad (\text{driehoeksongelijkheid}). \end{aligned}$$

Het bewijs van de driehoeksongelijkheid kan worden geleverd door beide leden van de ongelijkheid te kwadrateren en de ongelijkheid van Schwarz toe te passen.

Uit de definitie (16.7) volgt dat als x en y de Cartesische coördinaten $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ hebben, het kwadraat van de afstand $d(x,y)$ bepaald is door

$$(16.8) \quad d^2(x,y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 .$$

Voor $n=3$ komen de bovenstaande definities en formules overeen met de vertrouwde begrippen van de vectorrekening en de analytische meetkunde van de ruimte.

Zijn $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ en $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ twee orthonorme basissen van E_n en heeft x t.o.v. deze stelsels de Cartesische coördinaten $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ resp. $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dan heeft men de transformatieformules

$$(16.9) \quad y_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad ,$$

en

$$(16.10) \quad x_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} y_j \quad , \quad i=1,2,\dots,n .$$

waarbij

$$(16.11) \quad t_{ij} = (f^{(i)}, e^{(j)}) .$$

Substitutie van (16.10) in (16.9) geeft natuurlijk een identiteit nml.

$$(16.12) \quad y_i = \sum \sum t_{ik} t_{jk} y_j$$

zodat

$$(16.13) \quad \sum_{k=1}^n t_{ik} t_{jk} = \delta_{ij} \quad , \quad i, j=1, 2, \dots, n,$$

waarbij δ_{ij} het symbool van Kronecker is:

$$(16.14) \quad \delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases} .$$

Analoog geeft substitutie van (16.9) in (16.10)

$$(16.15) \quad \sum_{k=1}^n t_{ki} t_{kj} = \delta_{ij} \quad , \quad i, j=1, 2, \dots, n .$$

De betrekkingen (16.13) en (16.15) heten de orthogonaliteitsrelaties. Zij zijn karakteristiek voor de overgang van het ene Cartesische coördinatenstelsel op het andere.

§ 17 Matrices

We beschouwen matrices $A, B, \dots$ van de n^e orde welke we hier definiëren als systemen van n^2 (reële) componenten $a_{ij}, b_{ij}, \dots$ waarbij $i, j=1, 2, \dots, n$. Gewoonlijk denken we deze elementen als bij determinanten in vierkante blokken gerangschikt. De determinantwaarde van A of (a_{ij}) schrijven we als $\det a_{ij}$ of $|a_{ij}|$. De nulmatrix is gedefinieerd als de matrix waarvan alle componenten 0 zijn. We schrijven hiervoor (0) of 0. De eenheidsmatrix is de matrix met de elementen δ_{ij} . We schrijven hiervoor (δ_{ij}) of, voorzover dit tot geen verwarring kan leiden, kortweg 1.

Matrices kan men optellen en met een scalar vermenigvuldigen volgens

$$(17.1) \quad \lambda A + \mu B = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) .$$

Matrices kan men vermenigvuldigen volgens

$$(17.2) \quad AB = \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) .$$

In het algemeen is de matrix-vermenigvuldiging niet commutatief. Uit de theorie van de determinanten volgt

$$(17.3) \quad \det AB = \det A \cdot \det B .$$

Uit de theorie van de determinanten volgt voorts dat elke

matrix A waarvoor $\det A \neq 0$ een inverse A^{-1} bezit zodanig dat

$$(17.4) \quad A A^{-1} = A^{-1} A = 1.$$

Verwisseling van rijen en kolommen van $A(a_{ij})$ geeft de zogenaamde getransponeerde matrix $A^*(a_{ij})$ met $a_{ij}^* = a_{ji}$.

Als $a_{ij} = a_{ji}$, d.w.z. als $A^* = A$, heet A symmetrisch.

Matrices kan men opvatten als operatoren in E_n , en algemener in een willekeurige n -dimensionale vectorruimte.

Het effect van de matrix $A(a_{ij})$ op de vector $x(x_i)$ kan worden beschreven door

$$(17.5) \quad y = Ax, \quad y_i = \sum_j a_{ij} x_j.$$

Is A symmetrisch dan geldt voor willekeurige vectoren x en y de betrekking

$$(17.6) \quad (Ax, y) = (x, Ay),$$

welke men gemakkelijk door uitschrijven in de componenten kan verifiëren. Omgekeerd volgt uit (17.6) de symmetrie van A .

Geldt voor een matrix A , die we als operator opvatten, de betrekking

$$(17.7) \quad A e = \lambda e$$

voor een zekere scalar λ en vector e , dan heet λ een eigenwaarde van A en e een bij deze λ behorende eigenvector. Een zodanige vector denken we steeds genormeerd als eenheidsvector.

Hoofdstelling

Een reële symmetrische matrix bezit n - (niet noodzakelijk verschillende) reële eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ met eigenvectoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ welke een orthonorm stelsel vormen.

Bewijs

Zou λ een complexe eigenwaarde met bijbehorende complexe eigenvector e zijn dan is ook $\bar{\lambda}$ een eigenwaarde met eigenvector $\bar{e}$. Volgens (17.6) is

$$(A e, \bar{e}) = (A \bar{e}, e),$$

zodat

$$\lambda(e, \bar{e}) = \bar{\lambda}(e, \bar{e}) \quad ,$$

waaruit volgt dat $\lambda = \bar{\lambda}$, d.w.z. λ reëel.

In componenten uitgeschreven is (17.7) equivalent met

$$(17.8) \quad \sum_i (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) e_i = 0 \quad ,$$

d.w.z.

$$(17.9) \quad |a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \quad .$$

De betrekking (17.9) is een vergelijking van de n^e graad in λ en levert n wortels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die dus reëel moeten zijn. Voor elk van deze λ_j is het stelsel (17.8) oplosbaar en levert een eigenvector $e^{(j)}$.

Twee eigenvectoren e en f behorende bij verschillende eigenwaarden λ en μ zijn orthogonaal. Dit volgt weer uit (17.6) en (17.7) nml.

$$(\lambda - \mu)(e, f) = (\lambda e, f) - (e, \mu f) = (Ae, f) - (e, Af) = 0.$$

De stelling is nu al bewezen indien de n eigenwaarden alle verschillend zijn. Is daarentegen bijvoorbeeld $\lambda_1 = \lambda_2$ dan is het stelsel (17.9) tweevoudig ontaard en bepaalt het een stelsel oplossingen van de vorm $\alpha e' + \beta e''$, d.w.z. een lineaire deelruimte van de 2^e rang. Het is voldoende hieruit twee onderling orthogonale genormeerde eenheidsvectoren te kiezen.

De transformatieformules (16.9) en (16.10) bepalen een matrix $T(t_{ij})$ waarvoor blijkens (16.13) geldt

$$(17.10) \quad TT^* = 1 \quad ,$$

zodat dus de getransponeerde matrix tegelijk de inverse is. Als matrixoperatoren kunnen we T opvatten als een draaiing en wel een echte draaiing als $\det T = 1$ en een onechte draaiing (draaispiegeling) als $\det T = -1$.

De transformatie (17.9) kunnen we compact schrijven als

$$(17.11) \quad y = Tx \quad .$$

We hebben dit opgevat als een transformatie van de componenten van eenzelfde vector bij de overgang van het ene naar

het andere Cartesische coördinatenstelsel. Maar ook kunnen we (17.11) opvatten als een transformatie van de vector bij een-zelfde coördinatenstelsel, d.w.z. een draaiing van de vectorruimte. Beide interpretaties zijn mogelijk en men spreekt hierbij gewoonlijk van het passieve standpunt resp. actieve standpunt. Bij onze beschouwingen zullen we ons afwisselend op het ene of het andere standpunt plaatsen al naar gelang dit in de gegeven situatie uitkomt.

De operator transformatie (17.5) kan men schrijven als $y = AT^{-1} T x$, zodat

$$T y = (TAT^{-1})T x ,$$

d.w.z. dat de operator A op de elementen x en y hetzelfde effect heeft als de operator TAT^{-1} op de "gedraaide" elementen Tx en Ty. De operatoren A en TAT^{-1} kunnen we dus aequivalent noemen. Uit

$$(TA_1T^{-1})(TA_2T^{-1}) = T A_1A_2T^{-1}$$

volgt dat de productvorming t.o.v. aequivalentie een invariante eigenschap is. Aan de identieke operator 1 zijn wegens $TT^{-1}=1$ geen andere operatoren toegevoegd. Hieruit volgt dat de eigenwaarden van aequivalente operatoren overeenstemmen. Men heeft namelijk

$$\{T(A-\lambda)T^{-1}\} e = \{(TAT^{-1})-\lambda\} e = 0 .$$

Aan een symmetrische operator A werkend op een n-dimensionale Euclidische ruimte met een orthonorme basis $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ kan men een kwadratische vorm toevoegen volgens

$$(17.12) \quad (A x, x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j .$$

De punten x bepaald door

$$(17.13) \quad (A x, x) = 1$$

vormen een centrale kwadriek welke bijv. een hyperellipsoïde kan zijn. Volgens de hoofdstelling bezit A een stelsel orthonorme basisvectoren $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ zodanig dat $Ae^{(i)} = \lambda_i e^{(i)}$. Denken we een vector x van de kwadriek volgens

dit stelsel ontbonden d.w.z.

$$(17.14) \quad x = \sum_i y_i e^{(i)},$$

dan volgt uit (17.13) de eenvoudige vergelijking

$$(17.15) \quad \sum_i \lambda_i y_i^2 = 1.$$

De basisvectoren $e^{(i)}$ heten hoofdassen van de kwadriek. In het bijzondere geval dat alle eigenwaarden positief zijn heet de kwadriek een (hyper) ellipsoïde. Hierbij denken we de λ_i 's steeds zo geordend dat

$$(17.16) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0.$$

Elke hoofdas $e^{(i)}$ bepaalt een middellijn van de ellipsoïde waarvan de lengte gelijk is aan $2/\sqrt{\lambda_i}$. De grootste (kleinste) eigenwaarde behoort dus bij de kleinste (grootste) middellijn.

Een symmetrische matrixoperator A noemt men positief definit indien voor een willekeurige vector x steeds

$$(17.17) \quad (A x, x) > 0.$$

Blijkbaar bepaalt een dergelijke operator een ellipsoïde en omgekeerd. Inderdaad volgt via de hoofdstelling volgens (17.14) en (17.15)

$$(A x, x) = \sum_i \lambda_i y_i^2.$$

Zou een der eigenwaarden negatief zijn dan zou dit onmiddellijk leiden tot het bestaan van een vector waarvoor

$$(A x, x) < 0.$$

We moeten wel even opmerken dat de hoofdassen van een ellipsoïde niet ondubbelzinnig gedefinieerd zijn indien er onder de λ_i 's gelijke voorkomen. Dit volgt reeds uit het bewijs van de hoofdstelling. Een extreem voorbeeld is de bol

$$(17.18) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

waarbij elke middellijn symmetrieas is.

Nemen we gemakshalve even aan dat alle λ_i 's verschillend zijn dan kan de grootste eigenwaarde met de kortste

symmetrieas ook tevoorschijn gebracht worden door de eis

$$(17.19) \quad \begin{cases} (x, x) = \text{minimum} & , \\ (Ax, x) = 1 & . \end{cases}$$

Dit volgt eenvoudig uit het feit dat in de door (17.14) bepaalde y-coördinaten (17.19) overgaat in

$$(17.20) \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \text{minimum} & , \\ \sum_i \lambda_i y_i^2 = 1 & . \end{cases}$$

Een equivalent probleem is natuurlijk

$$(17.21) \quad \begin{cases} (A x, x) = \text{maximum} & , \\ (x, x) = 1 & . \end{cases}$$

Zoals we later zullen zien kan dit extremaalprincipe gebruikt worden voor een onafhankelijk bewijs van de hoofdstelling.

§ 18 Conservatieve mechanische systemen met n vrijheidsgraden

We beschouwen een mechanisch systeem met een eindig aantal vrijheidsgraden bewegend in een conservatief krachtenveld dat bepaald is door de potentiële energie V . We nemen aan dat V een gegeven minstens tweemaal continu differentieerbare functie is van de n gegeneraliseerde coördinaten $q_1, q_2, \dots, q_n$ die het systeem bepalen en dat V een (locaal) minimum $V=0$ heeft voor $q_1=q_2=\dots=q_n=0$. Deze situatie bepaalt een stabiel evenwicht. In de omgeving hiervan ontwikkelen we V in een Taylor-reeks. Ons beperkend tot de kwadratische termen - we beschouwen slechts kleine verstoringen van de evenwichtsstand - geldt dan

$$(18.1) \quad V = \sum_{i,j} a_{ij} q_i q_j \quad (a_{ij}=a_{ji}), \quad i, j=1, 2, \dots, n.$$

De kinetische energie T is een homogeen kwadratische functie van de gegeneraliseerde snelheden $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ met coëfficiënten die van $q_1, q_2, \dots, q_n$ afhangen. In de omgeving van de evenwichtspositie is analoog met weglating van hogere

termen

$$(18.2) \quad T = \sum_{ij} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (b_{ij}=b_{ji}), \quad i,j=1,2,\dots,n,$$

waarbij de coëfficiënten b_{ij} constanten zijn.

Volgens Lagrange is de beweging bepaald door bewegingsvergelijkingen welke zich in het gegeven geval reduceren tot

$$(18.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

We bewezen dat we zodanige nieuwe coördinaten $x_1, x_2, \dots, x_n$ kunnen invoeren dat de uitdrukkingen (18.1) en (18.2) zich reduceren tot

$$(18.4) \quad \begin{aligned} V &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \\ T &= \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_n^2, \end{aligned}$$

waarbij bijvoorbeeld

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0.$$

De mogelijkheid van een dergelijke voorstelling wordt ons gegarandeerd door de in de vorige paragraaf besproken hoofdassentransformatie. We vatten namelijk $q_1, q_2, \dots, q_n$ op als scheefhoekige coördinaten van een vector q in een E_n zodanig dat de kwadraatlengte van q bepaald is door de met (18.2) corresponderende positief definitieve vorm

$$(18.5) \quad (q, q) = \sum_{ij} b_{ij} q_i q_j.$$

De uitdrukking voor het inwendig product (q, r) kunnen we hieruit gemakkelijk afleiden. Men heeft namelijk voor willekeurige μ de identiteit

$$(18.6) \quad (q + \mu r, q + \mu r) = (q, q) + 2\mu (q, r) + \mu^2 (r, r).$$

Substitutie van de door (18.5) bepaalde kwadraatlengten levert

$$(18.7) \quad (q, r) = \sum_{ij} b_{ij} q_i r_j.$$

Uitgaande van n willekeurige onafhankelijke vectoren kunnen we volgens het in § 16 besproken orthogonaliseringsprincipe van Schmidt gemakkelijk een orthonorm stelsel eenheidsvec-

toren $e_1, e_2, \dots, e_n$ bepalen. In de door een dergelijk stelsel bepaalde Cartesische coördinaten $x_1, x_2, \dots, x_n$ neemt T reeds de gewenste vorm aan. Echter gaat V in een soortgelijke positief definitieve vorm

$$V = \sum_{ij} c_{ij} x_i x_j$$

over. De hoofdassen van de ellipsoïde $V=1$ definieren tenslotte een stelsel Cartesische coördinaten waarin de gewenste vorm (18.4) bereikt wordt.

Voor (18.4) nemen de bewegingsvergelijkingen (18.3) de eenvoudige vorm aan

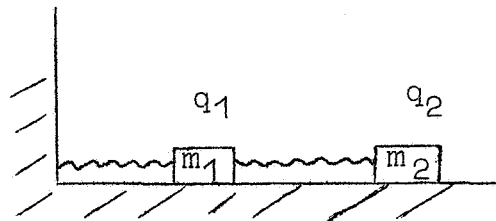
$$(18.8) \quad \ddot{x}_i + \lambda_i x_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

waarvan de oplossing is

$$(18.9) \quad x_i = c_i \sin(t\sqrt{\lambda_i} + \alpha_i) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

De beweging van het mechanische systeem in de buurt van het evenwicht is dus een samenstel van harmonische trillingen.

Voorbeeld



Beschouw twee massa's m_1 en m_2 welke in één richting kunnen bewegen en waarvan de uitwijkingen bepaald zijn door $q_1(t)$ en $q_2(t)$. We veronderstellen dat de eerste massa door een veer met veerconstante $k_1 - k_2$ aan een muur verbonden is en dat beide massa's onderling door een veer met veerconstante k_2 verbonden zijn. De kinetische en potentiële energie zijn

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} (k_1 - k_2) q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - q_1)^2 = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 - k_2 q_1 q_2 + \frac{1}{2} k_2 q_2^2.$$

Ter numerieke illustratie kiezen we $m_1 = m_2 = 2$, $k_1 = 10$, $k_2 = 4$. Dan zijn de te orthogonaliseren kwadratische vormen dus

$$\begin{cases} A = 5q_1^2 - 4q_1q_2 + 2q_2^2 \\ B = q_1^2 + q_2^2 \end{cases}.$$

Substitutie van de nieuwe coördinaten x_1 en x_2 d.m.v.

$$\begin{cases} q_1 = 5^{-\frac{1}{2}} x_1 + 2 \cdot 5^{-\frac{1}{2}} x_2 \\ q_2 = 2 \cdot 5^{-\frac{1}{2}} x_1 - 5^{-\frac{1}{2}} x_2 \end{cases}$$

voert A en B in de volgende gewenste vorm over

$$\begin{cases} A = x_1^2 + 6 x_2^2 \\ B = x_1^2 + x_2^2 \end{cases} .$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1=1$ en $\lambda_2=6$. De beweging van het systeem is bepaald door

$$x_1=a_1 \sin (t+\theta_1) , x_2=a_2 \sin 6^{\frac{1}{2}}(t+\theta_2).$$

§ 19 Extremaalprincipes

We beschouwen een positief-definiete symmetrische operator A in E_n . Uit de beschouwingen van § 2 volgt dat A een reeks eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ heeft die we a.v. kunnen ordenen

$$(19.1) \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n ,$$

en dat $(A x, x)=1$ in E_n een hyperellipsoïde voorstelt waarvan de hoofdassen de lengten $2\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, 2\lambda_2^{-\frac{1}{2}}, \dots, 2\lambda_n^{-\frac{1}{2}}$ hebben. Aan het eind van § 17 hebben we laten zien dat de grootste eigenwaarde bepaald is door een minimum- of maximum-principe. Analooq geldt voor de kleinste eigenwaarde welke volgens (18.9) de overheersende fysische betekenis heeft (grondtoon en grondtoestand) het zogenaamde principe van Rayleigh

$$(19.2) \quad \lambda_1 = \min \frac{(Ax, x)}{(x, x)} .$$

Dit principe betekent dus voor het in de vorige paragraaf beschouwde mechanische systeem van n vrijheidsgraden dat

$$(19.3) \quad \lambda_1 = \min \frac{V(q_1, \dots, q_n)}{T(q_1, \dots, q_n)} ,$$

waarbij V en T homogene kwadratische vormen in de gegeneraliseerde coördinaten $q_1, \dots, q_n$ zijn. Uiteraard moeten hierbij

in T de variabelen $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ door $q_1, \dots, q_n$ vervangen worden.

Voorbeeld

Bij het in de vorige paragraaf beschouwde voorbeeld is

$$\lambda_1 = \min \frac{5 q_1^2 - 4 q_1 q_2 + 2 q_2^2}{q_1^2 + q_2^2} .$$

Het minimum is $\lambda_1=1$ en wordt bereikt voor $q_1=1, q_2=2$.

Leggen we aan het mechanische systeem een extra voorwaarde op, een zogenaamde binding, dan zullen we zien dat het beperktere systeem met minder vrijheidsgraden i.h.a. hogere eigenwaarden bezit. Een voor de evenwichtssituatie $q_1=q_2=\dots=q_n=0$ toelaatbare binding kunnen we voorstellen door een vergelijking van de vorm

$$(19.4) \quad f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

welke voor $q_1=q_2=\dots=q_n=0$ vervuld is. In de omgeving van de oorsprong is dus (19.4) een homogene lineaire voorwaarde van de vorm

$$(19.5) \quad f_1 q_1 + f_2 q_2 + \dots + f_n q_n = 0 .$$

Het eigenwaarde-probleem van het oorspronkelijke systeem kwam neer op het bepalen van de hoofdassen van een n-dimensionale ellipsoïde. De invloed van de binding (19.5) betekent dat we de hoofdassen moeten bepalen van de (n-1)-dimensionale ellipsoïde welke uit de vorige ontstaat door snijding met het hypervlak (19.5).

We beweren nu dat door de binding (19.5) de laagste eigenwaarde λ_1 overgaat in de eigenwaarde μ_1 waarbij echter

$$(19.6) \quad \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 .$$

Het bewijs is vrij eenvoudig. Gebruiken we de notatie van (19.3) dan is

$$(19.7) \quad \mu_1 = \min \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \text{met } (f, x) = 0 .$$

Uiteraard is $\mu_1 \geq \lambda_1$.

T.o.v. de langs de hoofdassen van de oorspronkelijke ellip-

sofde vallende eenheidsvectoren is (19.7)

$$\mu_1 = \min \frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n = 0.$$

Nemen we aan dat f_1 en f_2 niet tegelijk verdwijnen dan geeft de keuze $x_1 = -f_2$, $x_2 = f_1$, $x_3 = \dots = x_n = 0$

$$\frac{\lambda_1 f_2^2 + \lambda_2 f_1^2}{f_1^2 + f_2^2} = \lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} \leq \lambda_2,$$

zodat zeker $\mu_1 \leq \lambda_2$. Is $f_1 = 0$ dan geeft de keuze $x_1 = 1$, $x_2 = \dots = x_n = 0$ reeds $\mu_1 = \lambda_1$.

Voor de tweede eigenwaarde van het oorspronkelijke systeem, d.w.z. zonder binding, geldt analoog de recursieve bepaling

$$(19.8) \quad \lambda_2 = \min \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \text{met } (x, e_1) = 0,$$

waarbij e_1 de bij λ_1 behorende eigenvector is.

Voor de bepaling van λ_m is aldus voortgaande de kennis van alle eerder bepaalde eigenvectoren $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$ noodzakelijk:

$$(19.9) \quad \lambda_m = \min \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \text{met } (x, e_1) = (x, e_2) = \dots = (x, e_{m-1}) = 0.$$

Courant heeft in 1920 een extremaalprincipe opgesteld dat een onafhankelijke bepaling van de hogere eigenwaarden mogelijk maakt. De redenering is a.v. . Het effect van een binding doet de laagste eigenwaarde μ_1 maximaal tot λ_2 toenemen. Aldus

$$(19.10) \quad \lambda_2 = \max_f \left\{ \min \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \text{met } (f, x) = 0 \right\}.$$

Het bewijs ligt in het hierboven gezegde opgesloten.

Algemeen geldt

$$(19.11) \quad \lambda_m = \max_{f_1, f_2, \dots, f_{m-1}} \left\{ \min \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \text{met } (f_1, x) = \dots = (f_{m-1}, x) = 0 \right\}.$$

Het bewijs van dit algemene resultaat geven we nog even. Voor de speciale keuze $f_1 = e_1, \dots, f_{m-1} = e_{m-1}$ is de uitdrukking tus-

sen accolades precies λ_m .

Anderzijds kunnen we gemakkelijk inzien dat voor willekeurige bindingen het minimum tussen accolades λ_m zeker niet overtreft.

Is weer

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

dan kiezen we alvast $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ en $x_1, x_2, \dots, x_m$ zodanig dat aan de bindingen voldaan is.

Aldus is

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_m x_m^2}{x_1^2 + \dots + x_m^2} \leq \lambda_m.$$

Uit het principe van Courant volgt dat in uitbreiding van (19.6) bij het opleggen van een binding de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ overgaan in eigenwaarden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ met

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Voorbeeld

Bij het in de vorige paragraaf beschouwde probleem voeren we de binding $q_1 = 0$ in. Dan is

$$T = \dot{q}_2^2, \quad V = 2 q_2^2$$

zodat $\mu_1 = 2$ met $1 < 2 < 6$.

VI Systemen met oneindig veel vrijheidsgraden

§ 20 De functieruimte F

Bij systemen met oneindig veel vrijheidsgraden kunnen we gebruik maken van de meetkundige beschrijving met behulp van een oneindig-dimensionale lineaire vectorruimte. We zullen deze ruimte F , waarvan de elementen $f, g, h, \dots$ i.h.a. reële functies zijn, op de wijze van § 16 abstract invoeren. Daartoe kunnen we een groot deel van deze paragraaf zonder meer hier copieren.

Dat F een lineaire vectorruimte is betekent dat met f en g ook elke lineaire combinatie $\alpha f + \beta g$ tot F behoort.

In F is een inwendig product (f, g) gedefinieerd met de eigenschappen

1. $(f, g) = (g, f)$;
2. $(f, f) > 0$ mits $f \neq 0$;
3. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$.

We noemen

$$(20.1) \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

de norm van f of de lengte van de vector f . We memoreren de stelling van Schwarz (zie stelling 16.1)

$$(20.2) \quad |(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Twee vectoren f en g heten weer orthogonaal als $(f, g) = 0$.

Essentieel nieuw is het feit dat F oneindig veel onafhankelijke elementen bezit. We nemen aan dat F een aftelbare basis $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$ bezit zodat elk element voorgesteld kan worden door een oneindige reeks

$$(20.3) \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e^{(j)}.$$

Voorlopig heeft dit alleen formele betekenis omdat nog geen convergentiebegrip gedefinieerd is. We kunnen dit a.v. invoeren. Onder de afstand van twee elementen f en g verstaan we de norm van het verschil $\|f - g\|$. De betekenis van de limiet $f_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$, is dat de afstand van f_n tot f naar nul con-

vergeert. D.w.z.

$$f_n \rightarrow f \text{ betekent } \|f_n - f\| \rightarrow 0.$$

Uitgaande van een basis in F kunnen we met behulp van het in § 16 beschreven orthogonaliseringsprincipe van Schmidt komen tot een orthonorme basis, d.w.z.

$$(20.4) \quad (e^{(1)}, e^{(j)}) = \delta_{1j}.$$

De ruimte F heet volledig wanneer het convergentieprincipe van Cauchy geldt, d.w.z. dat uit $\|f_m - f_n\| \rightarrow 0$ voor $m, n \rightarrow \infty$ het bestaan van een limiet f in F volgt zodanig dat $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

Voorbeeld

De verzameling continue functies $f(x)$, $a \leq x \leq b$, die we aanduiden met $C(a, b)$ is stellig een lineaire vectorruimte. We definiëren het inwendig product als

$$(20.5) \quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Blijkbaar is aan de vereisten 1, 2, 3 van het inwendig product voldaan. De stelling van Schwarz vindt hierin de volgende realisatie

$$(20.6) \quad \left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

We vermelden even dat $C(a, b)$ niet volledig is.

Aanvulling tot een volledige ruimte leidt tot de ruimte $L^2(a, b)$ van kwadratisch integreerbare (in de zin van Lebesgue) functies (stelling van Riesz en Fischer).

We veronderstellen nu dat $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$ een orthonorm systeem is en we stellen het probleem een gegeven vector f zo goed mogelijk te benaderen door een lineaire combinatie $\sum_{j=1}^n \alpha_j e^{(j)}$ van de eerste n eenheidsvectoren.

We eisen dus

$$(20.7) \quad \left\| f - \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{(j)} \right\| = \text{minimum}.$$

Dit minimumprobleem kan heel elementair opgelost worden indien we gebruik maken van de volgende gemakkelijk te verifiëren identiteit

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{(j)} \right\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{j=1}^n (f_j - \alpha_j)^2 - \sum_{j=1}^n f_j^2,$$

waarbij

$$(20.8) \quad f_j = (f, e^{(j)})$$

Blijkbaar wordt het minimum bereikt voor $\alpha_j = (f, e^{(j)})$.

Noemen we het minimum m_n dan is dus

$$m_n = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n f_j^2.$$

Aangezien $m_n \geq 0$ is geldt de zogenaamde ongelijkheid van Bessel

$$(20.9) \quad \|f\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} (f, e^{(j)})^2,$$

waarbij we $n \rightarrow \infty$ hebben gesteld.

Het orthonorme systeem $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$ heet per definitie compleet of volledig indien de ongelijkheid van Bessel in een gelijkheid overgaat:

$$(20.10) \quad \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f, e^{(j)})^2.$$

Deze gelijkheid wordt gewoonlijk naar Parseval genoemd hoewel hij feitelijk een generalisatie van de stelling van Pythagoras is: de kwadraatlengte van een vector is gelijk aan de som van de kwadraten van zijn projecties op een volledig stelsel orthogonale vectoren, d.i. een orthonorme basis.

De volledigheid van een orthonorm systeem $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$

impliceert dat er geen eenheidsvector bestaat welke orthogonaal op alle $e^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots$) staat. Dit feit volgt onmiddellijk uit de gelijkheid van Parseval. Zonder bewijs vermelden we dat ook het omgekeerde waar is.

We passen het bovenstaande nu toe op de ruimte $L^2(0, \pi)$ van alle kwadratisch integreerbare functies $f(x)$ waarvoor dus $\int_0^\pi f^2(x) dx$ bestaat en eindig is.

In deze ruimte wordt een orthonorm systeem bepaald door de

functies

$$(20.11) \quad e^{(j)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin jx \quad j=1,2,\dots$$

Inderdaad blijkt gemakkelijk aan (20.4) voldaan te zijn. Zonder bewijs vermelden we dat dit systeem compleet is. Uit het bovenstaande volgt nu dat elke functie uit deze klasse in een sinusreeks ontwikkelbaar is

$$(20.12) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin jx, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Uiteraard betekent dit niet convergentie in de gewone zin maar convergentie in de functieruimte volgens

$$(20.13) \quad \int_0^{\pi} \left(f - \sum_{j=1}^n a_j \sin jx \right)^2 dx \rightarrow 0.$$

Deze "convergentie in het gemiddelde" is voor vele mathematisch-fysische toepassingen zeer bruikbaar en vaak soepeler dan de gewone puntsgewijze convergentie.

Toepassing van de gelijkheid van Parseval op (20.12) geeft

$$(20.14) \quad \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2.$$

Een ander compleet orthonorm systeem wordt ons geleverd door het stelsel

$$(20.15) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos jx, \quad j=0,1,2,\dots$$

§ 21 Het hoofdassen probleem in F

Een operator A in de functieruimte F kunnen we naar analogie van operatoren in E_n beschrijven door een oneindig grote matrix. Uitgaande van een (volledige) orthonorme basis $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots$ kunnen we schrijven

$$(21.1) \quad \begin{cases} f = \sum f_n e^{(n)} \\ g = Af = \sum g_m e^{(m)} \end{cases}$$

en

$$(21.2) \quad g_m = \sum a_{mn} f_n, \quad a_{mn} = (Ae_n, e_m).$$

Deze beschrijving is echter niet bijzonder geschikt omdat bijv. geen gebruik van determinanten gemaakt kan worden. Als in § 17 heet een operator A symmetrisch als

$$(21.3) \quad (Af, g) = (f, Ag)$$

voor willekeurige elementen f en g. Is de operator bovendien positief definit dan wil dit zeggen dat

$$(21.4) \quad (Af, f) > 0 \quad \text{voor } f \neq 0.$$

Doorgaans heeft een operator A eigenwaarden en eigenvectoren. Indien

$$(21.5) \quad A e = \lambda e$$

heet weer λ een eigenwaarde en e een eigenvector.

Evenals bij de in § 17 bewezen hoofdstelling heeft een (reële) symmetrische operator slechts reële eigenwaarden. Is A bovendien positief-definit dan zijn de eigenwaarden positief. De hoofdstelling geldt in F echter niet algemeen, d.w.z. een symmetrische operator behoeft niet noodzakelijk eigenwaarden te bezitten.

Voorbeeld

In de ruimte $C(0,1)$ beschouwen we de operator M bepaald door $M f(x) = x f(x)$.

De eigenwaarde-vergelijking (21.5) betekent $(x-\lambda)f(x)=0$, waaruit slechts $f(x) \equiv 0$ volgt. Hoewel deze operator symmetrisch (en positief-definit) is zijn er geen eigenwaarden en eigenfuncties.

De hoofdstelling geldt wel voor de belangrijke klasse van totaalcontinue operatoren. De operator A heet namelijk totaalcontinu wanneer uit

$$(f_n, h) \rightarrow (f, h) \quad \text{voor alle } h \in F$$

volgt dat

$$\|A f_n - A f\| \rightarrow 0.$$

Voor ons doel is het voldoende te weten dat integraaloperatoren met een continue kern:

$$(21.6) \quad A f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b K(x, t) f(t) dt,$$

waarbij $K(x,t)$ continu is in de rechthoek $a \leq x, t \leq b$, totaal-continu zijn. Uiteraard geldt dit ook voor functies van meer variabelen. De hoofdstelling luidt nu

Hoofdstelling

Een reële symmetrische totaalcontinue operator bezit een stelsel eigenwaarden en eigenvectoren welke een volledige orthonorme basis vormen.

Een positief-definiëte symmetrische operator A met eigenwaarden $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ en eigenvectoren $e_1, e_2, \dots$ bepaalt de ellipsoïde

$$(21.7) \quad (A f, f) = \lambda_1 f_1^2 + \lambda_2 f_2^2 + \dots$$

waarbij we $f_1, f_2, \dots$ kunnen opvatten als een oneindige reeks Cartesische coördinaten. Als in § 19 kan de kleinste eigenwaarde λ_1 bepaald worden door het minimumprobleem

$$(21.8) \quad \lambda_1 = \min \frac{(A f, f)}{(f, f)},$$

en analoog voor de hogere eigenwaarden.

§ 22 Conservatieve mechanische systemen met oneindig veel vrijheidsgraden

De beschouwingen van deze paragraaf lopen geheel parallel aan die van § 18 voor systemen met eindig veel vrijheidsgraden. We nemen nu aan dat het systeem bepaald is door een functie q van de continue variabele x ($a \leq x \leq b$ bijvoorbeeld).

De oneindig veel waarden van x uit het interval (a, b) leveren het oneindig dimensionale analogon van de indices $1, 2, \dots, n$ van de n coördinaten van § 18. In de evenwichtstoestand zij de potentiële energie weer nul voor $q(x, t) = 0$. In de omgeving van het evenwicht is de potentiële energie bepaald door het volgende analogon van (18.1)

$$(22.1) \quad V = \int_a^b q A q dx,$$

waarbij A een operator is werkend op functies van x .

Analoog geldt voor de kinetische energie

$$(22.2) \quad T = \int_a^b \dot{q} B \dot{q} dx ,$$

waarbij B een operator is werkend op functies van x.

De bewegingsvergelijkingen volgen gemakkelijk als de Euler-Lagrange vergelijkingen van het variatieprincipe van Hamilton nml.

$$(22.3) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} (T-V) dt = 0.$$

Men heeft dus de bewegingsvergelijking

$$(22.4) \quad B \ddot{q} + A q = 0 ,$$

waaraan uiteraard randvoorwaarden dienen te worden toegevoegd. Analoog als in § 18 zijn de operatoren A en B symmetrisch en positief definit.

Het is niet moeilijk het voorafgaande te generaliseren voor functies q van meer variabelen, bijv. functies $q(r, \varphi, t)$ van poolcoördinaten r, φ en de tijd.

Voorbeeld

a) Bij een trillende snaar bepaald door de functie $u(x, t)$ met $u=0$ voor $x=0$ en $x=1$ geldt met een passende keuze van de eenheden

$$V = \int_0^1 u_x^2 dx = - \int_0^1 u u_{xx} dx ,$$

en

$$T = \int_0^1 u_t^2 dx ,$$

zodat

$$A \equiv - \frac{d^2}{dx^2} \quad \text{en} \quad B \equiv 1 .$$

De bewegingsvergelijking (22.4) is de bekende vergelijking van de trillende snaar.

b) Bij een trillend cirkelvormig membraan bepaald door de functie $u(r, \varphi, t)$ met $u=0$ voor $r=1$ geldt analoog

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\varphi^2) r dr d\varphi =$$

$$- \int_0^1 \int_0^{2\pi} u (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}) \cdot r dr d\varphi ,$$

en

$$T = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u_t^2 r dr d\varphi ,$$

zodat

$$A \equiv - \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{en} \quad B \equiv r .$$

De bewegingsvergelijking (22.4) is de bekende vergelijking van het trillend vlies.

Evenzo in § 18 vatten we de functies q op als elementen van een functieruimte F met inwendig product

$$(22.5) \quad (q, r) = \int_a^b q B r dx .$$

Krachtens de eigenschappen van de operator B (symmetrisch en positief-definiet) is dit een correcte definitie, m.a.w. is aan de axioma's van het inwendig product voldaan.

De met de kinetische energie corresponderende kwadratische vorm kunnen we schrijven als

$$\int_a^b q A r dx = \int_a^b q B (B^{-1} A r) dx = (q, B^{-1} A r)$$

zodat het probleem uiteindelijk neerkomt op het beschouwen van de operator $B^{-1}A$. Gemakkelijk ziet men dat deze operator symmetrisch en positief definiet is. We nemen aan dat voor deze operator de hoofdstelling geldt en dat er dus een volledige reeks eigenfuncties $\varphi_n(x)$ en positieve eigenwaarden λ_n bestaat. Substitutie van $q = \varphi_n$ voor elke n in de bewegingsvergelijking (22.4) geeft dan

$$(22.6) \quad \ddot{\varphi}_n + \lambda_n \varphi_n = 0 \quad n=1, 2, \dots, \infty$$

d.w.z.

$$(22.7) \quad \varphi_n = c_n \sin (t \sqrt{\lambda_n} + \alpha_n) ,$$

een zuivere harmonische trilling.

De algemene beweging is dus een superpositie van harmonische trillingen. De belangrijkste trilling is die met de laagste eigenwaarde λ_1 . Als bij systemen met eindig veel vrijheidsgraden kunnen we λ_1 vinden met een extremaalprincipe. Als bij (19.2) geldt

$$\lambda_1 = \min \frac{(B^{-1}A q, q)}{(q, q)}$$

of

$$(22.8) \quad \lambda_1 = \min \frac{\int_a^b q Aq \, dx}{\int_a^b q Bq \, dx},$$

waarbij het minimum aangenomen wordt voor de laagste trillingstoestand $\varphi_1(x)$.

Voorbeeld

Bij de trillende snaar uit het vorige voorbeeld is

$$\lambda_1 = \min \frac{-\int_0^1 q q_{xx} \, dx}{\int_0^1 q^2 \, dx},$$

waarbij de toelaatbare functies $q(x)$ moeten voldoen aan de randvoorwaarden $q(0)=q(1)=0$. Het antwoord van het minimumprobleempje is natuurlijk

$$\lambda_1 = \pi^2 \quad \text{voor } q = \varphi_1 = \sin \pi x.$$

Proberen we rechtstreeks het minimum te benaderen met een reeks proef-functies, waarvoor we doorgaans veeltermen kiezen, dan moeten we beginnen met

$$\begin{aligned} q_1 &= 1-x^2 \\ q_2 &= (1-x^2)(1+\alpha x) \quad \text{enz.} \end{aligned}$$

De eerste keuze levert reeds de frappant goede benadering 10 voor π^2 ($=9.87$).

Het uit (22.4) voortvloeiend eigenwaarde probleem

$$(22.9) \quad A \varphi = \lambda B \varphi$$

is in vele gevallen niets anders dan een probleem van het Sturm-Liouville type. De operatoren A en B zijn dan van de vorm

$$(22.10) \quad A \equiv - \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x), \quad B(x) \equiv r(x).$$

Gemakshalve zullen we $p(x) \equiv 1$ en $r(x) \equiv 1$ kiezen, hetgeen zonder verlies van algemeenheid geschieden kan.

Het eigenwaarde probleem (22.9)

$$A \varphi = \lambda \varphi$$

kunnen we ook lezen als

$$(22.11) \quad A^{-1} \varphi = \lambda^{-1} \varphi$$

In sommige gevallen heeft de inverse operator A^{-1} van A eenvoudiger eigenschappen dan A zelf. De inverse operator van A hebben we bij de behandeling van het Sturm-Liouville probleem leren vinden met behulp van de Greense functie volgens het schema:

$$(22.11) \quad \begin{cases} A \varphi = \lambda \varphi & \longrightarrow \varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \\ + \text{randvoorwaarden} \end{cases}$$

waarbij $G(x, \xi)$ de functie van Green is. In dit geval is A^{-1} een integraal-operator en dus totaalcontinu zodat de hoofdstelling geldt. De laagste eigenwaarde λ_1 van A correspondeert met de hoogste eigenwaarde λ_1^{-1} van de inverse en kan dus volgens het principe van Rayleigh nu ook bepaald worden als

$$\frac{1}{\lambda_1} = \max \frac{(A^{-1} u, u)}{(u, u)}$$

of

$$(22.12) \quad \lambda_1 = \min \frac{\int_a^b u^2(x) dx}{\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) u(x) u(\xi) dx d\xi}.$$

Schema

n vrijheidsgraden	oo vrijheidsgraden
$V = \sum a_{ij} q_i q_j$	$V = \int_a^b u A u \, dx$
$T = \sum b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$	$T = \int_a^b \dot{u} B \dot{u} \, dx$
Vat $q(q_1, \dots, q_n)$ op als vector in E_n met inwendig product	Vat $u(x)$ op als vector in F met inwendig product
$(q, r) = \sum b_{ij} q_i r_j$	$(u, v) = \int_a^b u B v \, dx$
hoofdassenprobleem hoofdassen te bepalen van ellipsoïde $V=1$	hoofdassenprobleem hoofdassen te bepalen van ellipsoïde $V=1$
eigenwaarde probleem $\sum a_{ij} e^{(j)} = \lambda \sum b_{ij} e^{(j)}$	eigenwaarde probleem $B^{-1} A \varphi = \lambda \varphi$
eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eigenfuncties $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ $\det a_{ij} - \lambda b_{ij} = 0$	eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ eigenfuncties $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$
Cartesische coördinaten $x = x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)} + \dots + x_n e^{(n)}$	"Cartesische coördinaten" $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(x)$
vergelijking ellipsoïde $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 = 1$	vergelijking ellipsoïde $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^2 = 1$
$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$
$1/\sqrt{\lambda_1}$ grootste hoofdas methode Rayleigh-Ritz	$1/\sqrt{\lambda_1}$ grootste hoofdas methode Rayleigh-Ritz
Bewegingsvergelijking Euler-Lagrange $\sum b_{ij} \ddot{q}_j + \sum a_{ij} q_j = 0$	Bewegingsvergelijking Euler-Lagrange $B \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A u = 0$
	aequivalent met Sturm-Liouville probleem.

VII Diffusie en warmteoverdracht

§ 23 De diffusievergelijking

Onder diffusie verstaan we de ongerichte beweging van microscopische deeltjes in een medium. Bijvoorbeeld de verspreiding van kleurstofdeeltjes in een gelatineuze massa. In de praktijk treedt de diffusie meestal tezamen met convectorie, een gerichte beweging, op. Bijvoorbeeld een druppel rode inkt in water. Ten gevolge van de zwaartekracht treedt naast de diffusie een naar beneden gerichte convectieve beweging op. Een vloeistof welke in een lange buis stroomt waarin zich een gegranuleerd medium bevindt, bijv. glaskorrels, is onderworpen aan convectorie, de gemiddelde voortgaande stroom en diffusie. Afhankelijk van de grootteschaal kan men spreken van moleculaire diffusie en turbulente, of effectieve, diffusie. Voor ons is het voldoende alleen moleculaire diffusie te beschouwen aangezien het hierbij passende mathematisch model gemakkelijk op andere diffusieprocessen overgedragen kan worden.

We beschouwen (moleculaire) deeltjes zich bewegend in een homogeen medium. Op elk tijdstip is de toestand te beschrijven door de concentratie welke evenredig is aan het aantal deeltjes per volume-eenheid. Aan de mathematische beschrijving van de diffusie ligt het zogenaamde "nivelleringsprincipe" ten grondslag volgens hetwelk concentratieverschillen een materiële stroom verwekken welke evenredig is aan het concentratieverval. Met name geldt voor de hoeveelheid materie dm welke in dt sec. een oppervlakte-element $d\sigma$ passeert de uitdrukking

$$(23.1) \quad dm = - D \frac{\partial c}{\partial n} d\sigma dt,$$

waarbij $\partial/\partial n$ differentiatie langs de normaal van $d\sigma$ aanduidt. We beschouwen nu een elementair blokje

$(x, x+dx) (y, y+dy) (z, z+dz)$.

Door het linker- en rechterzijvlak stroomt resp.

$$- D \frac{\partial}{\partial x} c(x,y,z) dy dz dt,$$

$$- D \frac{\partial}{\partial x} c(x+dx,y,z) dy dz dt .$$

Het verschil is $D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dx dy dz dt$. Voor het gehele blokje is er dus een materiewinst van $D \Delta c dx dy dz dt$. De materie-winst komt anderzijds tot uitdrukking in de concentratie-verhoging in dt sec. van $\frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz dt$. Gelijkstelling geeft de diffusievergelijking

$$(23.2) \quad D \Delta c = \frac{\partial c}{\partial t} .$$

Voor de randvoorwaarden bestaan er verschillende mogelijkheden.

a) Vindt aan een begrenzing van het medium geen materie-transport plaats dan is daar

$$(23.3) \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0 .$$

b) Wordt aan een wand een vaste concentratie onderhouden dan is daar

$$(23.4) \quad c = c_0 .$$

c) Algemener kunnen aan een wand hetzij de concentratie hetzij het materietransport gegeven functies van de tijd zijn.

Warmtegeleiding in een homogeen medium wordt door precies dezelfde vergelijking beschreven. In plaats van de concentratie treedt nu de temperatuur T op. In plaats van (23.1) heeft men

$$(23.5) \quad dq = - K \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt ,$$

d.w.z. de hoeveelheid warmte welke in dt sec. een oppervlakte-element $d\sigma$ passeert is evenredig aan het temperatuurverval. Tenslotte is de hoeveelheid warmte dw die nodig is om een massa m een temperatuursverhoging dT te doen ondergaan gegeven door

$$(23.6) \quad dw = m c dT ,$$

waarbij c de soortelijke warmte is.

Als boven leidt de "warmtebalans" voor een elementair blokje tot

$$(23.7) \quad K \Delta T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} ,$$

waarbij ρ de dichtheid is.

Gewoonlijk schrijven we hiervoor

$$(23.8) \quad \kappa \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

met

$$(23.9) \quad \kappa = \frac{K}{\rho c} .$$

Bij warmtegeleiding hebben we naast de boven beschreven randvoorwaarden soms te maken met de zgn. randvoorwaarde van Newton welke straling in een medium met temperatuur T_0 beschrijft. De betrokken randvoorwaarde is

$$(23.10) \quad K \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_0) .$$

Bij warmtegeleidingsproblemen maakt het doorgaans niet uit in welke eenheden we meten. De nul-temperatuur kunnen we willekeurig vastleggen en ook maakt het niet uit of we in graden Celsius, Fahrenheit of Réaumur rekenen.

§ 24 Eendimensionale diffusie

We beschouwen enkele problemen waarin de diffusie of warmtevoortplanting slechts in één richting plaats vindt. Dergelijke problemen treden o.a. op bij staven, buizen en dikke platen.

We beginnen met het volgende probleem

$$(24.1) \quad \begin{cases} 0 < x < a & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \\ x=0, x=a & T = 0 \\ t=0 & T = g(x) \end{cases} .$$

We kunnen dit interpreteren als de warmtegeleiding in een staaf welke aan de uiteinden op eenzelfde vaste temperatuur ($=0$) gehouden wordt. Ter vereenvoudiging is hierbij een zodanige keuze van lengte en tijd-eenheden gedaan dat $\kappa=1$ is.

Volgens Bernoulli zoeken we oplossingen van het type $\varphi(x) \psi(t)$ welke aan de randvoorwaarden bij $x=0$ en $x=a$ voldoen. Zonder veel moeite vinden we

$$(24.2) \quad \begin{cases} \psi(t) = e^{-\lambda^2 t} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \lambda^2 \varphi = 0 \end{cases}.$$

De eis $\varphi(0)=\varphi(a)=0$ leidt tot de eigenfuncties

$$(24.3) \quad \varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n=1,2,3,\dots$$

We kunnen dus trachten de oplossing van het gestelde probleem te schrijven als

$$(24.4) \quad T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

De beginvoorwaarde eist

$$(24.5) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Volgens de theorie van de Fourier reeksen kan $g(x)$ inderdaad aldus voorgesteld worden en geldt

$$(24.6) \quad c_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(u) \sin \frac{n\pi u}{a} du.$$

We beschouwen nu het volgende iets moeilijker probleem

$$(24.7) \quad \begin{cases} 0 < x < a & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \\ x=0 & T = T_0, \\ x=a & T = T_1, \\ t=0 & T = g(x). \end{cases}$$

De oplossing van dit probleem kan tot die van het vorige gereduceerd. We zoeken nml. eerst de z.g. stationaire oplossing d.w.z. de van t onafhankelijke toestand welke voor $t \rightarrow \infty$ bereikt wordt.

Noemen we deze oplossing U , dan is dus

$$(24.8) \quad \begin{cases} 0 < x < a \\ x=0 \\ x=a \end{cases} \quad \begin{aligned} U_{xx} &= 0, \\ U &= T_0, \\ U &= T_1, \end{aligned}$$

waarvan de oplossing

$$(24.9) \quad U = T_0 + \frac{x}{a} (T_1 - T_0)$$

is. Stellen we de oplossing van (24.7) voor door

$$(24.10) \quad T = U + V,$$

dan blijkt dat V voldoet aan het probleem (24.1) waarvan de oplossing boven gegeven is.

Vervolgens beschouwen we warmtegeleiding in een half-oneindige staaf. In (24.1) stellen we $a \rightarrow \infty$. Het probleem is dus

$$(24.11) \quad \begin{cases} 0 < x < \infty \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial T}{\partial t}, \\ T &= 0, \\ T &= g(x). \end{aligned}$$

De oplossing hiervan kan wel door limietovergang uit (24.4) en (24.6) afgeleid worden.

$$(24.12) \quad T(x,t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a e^{-\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n u \sin \lambda_n x g(u) du.$$

Formeel leidt dit tot

$$(24.13) \quad T(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda u \sin \lambda x g(u) d\lambda du.$$

In verband met de gemakkelijk te verifiëren integraal-uitdrukking

$$(24.14) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda v d\lambda = \frac{\exp - \frac{v^2}{4t}}{2\sqrt{\pi t}}$$

volgt na enige herleiding

$$(24.15) \quad T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp - \frac{(x-u)^2}{4t} - \exp - \frac{(x+u)^2}{4t} \right\} g(u) du.$$

Een zelfstandige oplossing van (24.11) zal later verkregen worden.

§ 25 De Fourier-transformatie

Is $f(x)$ een (complexe) functie van de reële variabele x in $(-\infty, \infty)$ en bestaat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

dan bestaat ook

$$(25.1) \quad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx$$

voor alle reële waarden van y . De functie $g(y)$ heet de (complexe) Fourier-getransformeerde van $f(x)$.

Men kan bewijzen dat uit (25.1) de volgende omkeerformule afgeleid kan worden.

$$(25.2) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy.$$

Het bewijs van (25.2) zullen we hier slechts schetsen. Voor een volledig bewijs en details zij verwezen naar de literatuur of andere colleges.

Dit bewijs berust op

a de stelling van Riemann-Lebesgue

$$(25.3) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^b \sin \omega x f(x) dx = 0.$$

b de integraal van Dirichlet

$$(25.4) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin \omega x}{x} f(x) dx = \frac{1}{2} \pi f(+0),$$

mits $f(x)$ bij $x=0$ monotoon (evt. van begrensde variatie) is.

Het bewijs van (25.3) volgt o.a. uit de integraaldefinitie in de zin van Riemann, dat van (25.4) berust op de 2^e middelwaardestelling en het feit dat

$$(25.5) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \pi.$$

Deze laatste relatie kan op vele wijzen afgeleid worden.

Bijvoorbeeld als volgt. Stel

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dan is $\varphi'(s) = -(1+s^2)^{-1}$, dus

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \pi - \operatorname{arctg} s$$

zodat $\varphi(0) = \frac{1}{2} \pi$.

Het bewijs van (25.2) geschiedt nu a.v.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-ixy} g(y) dy = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(z-x)} f(z) dz = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\omega}^{\omega} e^{iy(z-x)} dy = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(z-x)}{z-x} f(z) dz = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega z}{z} \{ f(x+z) + f(x-z) \} dz = \frac{1}{2} \{ f(x+0) + f(x-0) \} = f(x). \end{aligned}$$

Is $f(x)$ even resp. oneven dan volgt uit (25.1) en (25.2) de z.g. cosinus-transformatie resp. sinus-transformatie

$$(25.6) \quad \begin{cases} g(y) = \int_0^{\infty} \cos xy f(x) dx \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xy g(y) dy, \end{cases}$$

en

$$(25.7) \quad \begin{cases} g(y) = \int_0^{\infty} \sin xy f(x) dx \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xy g(y) dy. \end{cases}$$

Voorbeeld

a cosinustransf. $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, g(y) = \frac{\pi}{2a} e^{-a|y|}$

b sinustransf. $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}, g(y) = \frac{\pi}{2} e^{-a|y|} \operatorname{sgn} y.$

Bij diffusieproblemen voor een half-oneindig medium ($0 < x < \infty$) vinden vooral de cosinus- en sinustransformatie veelvuldig toepassing. We beschouwen als voorbeeld nog eens het laatste probleem van § 24. De methode van Bernoulli leidt tot oplossingen van het type

$$e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

waaruit de gezochte oplossing samengesteld moet worden. Blijkbaar zijn alle (reële) waarden van λ bruikbaar, hetgeen we soms uitdrukken door te spreken van een continu spectrum van eigenwaarden. De gezochte oplossing is nu van de vorm

$$(25.8) \quad T = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x f(\lambda) d\lambda,$$

een analogon van (24.4). De beginvoorwaarde eist

$$(25.9) \quad g(x) = \int_0^{\infty} \sin \lambda x f(\lambda) d\lambda.$$

Volgens (25.7) is de oplossing hiervan

$$(25.10) \quad f(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x g(x) dx.$$

Substitutie van (25.10) in (25.8) leidt nu weer tot de oplossing (24.15).

§ 26 Bronnen en putten

We beschouwen het volgende probleem

$$(26.1) \quad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \\ T = g(x) \end{cases} .$$

Het principe van Bernoulli leidt tot oplossingen van het type

$$e^{-\lambda^2 t} e^{ix\lambda} .$$

De gezochte oplossing kunnen we dus voorstellen als

$$(26.2) \quad T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t + ix\lambda} f(\lambda) d\lambda .$$

De beginvoorwaarde eist

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\lambda} f(\lambda) d\lambda .$$

Volgens de omkeerformule (25.2) van de complexe Fourier-transformatie is

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} g(u) du .$$

Substitutie in (26.2) geeft

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-u)} g(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\lambda^2 t + i\lambda(x-u) \right\} d\lambda \end{aligned}$$

en tenslotte

$$(26.3) \quad T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp - \frac{(x-u)^2}{4t} g(u) du .$$

Kiezen we voor $g(x)$ de delta-functie $\delta(x-\xi)$ dan is de oplossing

$$(26.4) \quad T(x,t) = \frac{\exp - \frac{(x-\xi)^2}{4t}}{2\sqrt{\pi t}} .$$

Dit is dus de oplossing voor een "momentane warmtebron" op de plaats $x = \xi$ en het tijdstip $t=0$. De oplossing (26.4) speelt bij de warmtegeleidingsproblemen de rol van een functie van Green. Met behulp van het superpositiebeginsel kan men uit (26.4) oplossingen voor ingewikkelder problemen afleiden.

We beschouwen b.c. het probleem

$$(26.5) \quad \begin{cases} 0 < x < \infty \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} , \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 , \\ T = g(x) . \end{cases}$$

De functie van Green voor dit probleem is (spiegelingsprincipe)

$$(26.6) \quad G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp - \frac{(x-\xi)^2}{4t} + \exp - \frac{(x+\xi)^2}{4t} \right\} .$$

De oplossing van (26.5) is derhalve

$$(26.7) \quad T = \int_0^\infty G(x, \xi, t) g(\xi) d\xi .$$

Met behulp van iteratieve spiegeling kan men ook een andere oplossing van het probleem (26.1) vinden. De uitwerking hiervan wordt aan de lezer overgelaten.

Een veel voorkomende toepassing van (26.1) is die waarbij $g(x) \equiv 1$ voor $x > 0$ en $g(x)=0$ voor $x < 0$. Dan is volgens (26.3)

$$(26.8) \quad T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp - \frac{(u-x)^2}{4t} du ,$$

of

$$(26.9) \quad T(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \right\} .$$

Met de volgende definitie van de z.g. error-functie

$$(26.10) \quad \operatorname{erf} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du ,$$

kan men schrijven

$$(26.11) \quad T(x,t) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} \right).$$

Volledigheidshalve vermelden we nog enige eenvoudig te bewijzen eigenschappen van deze functie

$$(26.12) \quad \frac{d}{dz} \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2},$$

$$(26.13) \quad \operatorname{erf} 0 = 0 \quad \operatorname{erf} \infty = 1,$$

$$(26.14) \quad \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf} z,$$

$$(26.15) \quad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)j!}$$

§ 27 Warmtegeleiding in een cylinder

Bij problemen welke betrekking hebben op cilindrische gebieden heeft het voordeel z.g. cylindercoördinaten (r, θ, z) in te voeren volgens

$$(27.1) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Als gevolg hiervan gaat de Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ over in

$$(27.2) \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dit kan natuurlijk gemakkelijk rechtstreeks door substitutie van (27.1) bewezen worden als bij de vergelijking van het trillende vlies. We volgen echter hier een indirecte weg door beschrijving van de warmtegeleiding in cylindercoördinaten.

Het volumeelement is nu bepaald door

$$(r, r+dr), (\theta, \theta+d\theta), (z, z+dz).$$

De warmteflux in de r -richting geeft per tijdseenheid

$$K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr$$

id. in de θ -richting

$$K \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} d\tau$$

id. in de z -richting

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} d\tau .$$

De warmtewinst is anderzijds gelijk aan

$$\int c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau .$$

Men heeft dus (weer $K=1$ kiezend)

$$(27.3) \quad \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} T = \frac{\partial T}{\partial t} .$$

De separatiemethode leidt tot oplossingen van de vorm

$$(27.4) \quad \varphi(r) e^{i\mu\theta} e^{i\nu z} e^{-\lambda^2 t}$$

waarbij

$$(27.5) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \left\{ (\lambda^2 - \nu^2) - \frac{\mu^2}{r^2} \right\} \varphi = 0.$$

Dit is de vergelijking van Bessel met de volgende twee typen oplossingen

$$(27.6) \quad J_\mu(r\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}) \text{ en } Y_\mu(r\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}).$$

Beschouwen we een homogene oneindig lange cylinder waarbij T niet van θ en z afhangt dan vereenvoudigen (27,4) en (27.6) zich tot

$$(27.7) \quad \begin{cases} \varphi(r, \lambda) e^{-\lambda^2 t} \\ \varphi = A J_0(\lambda r) + B Y_0(\lambda r). \end{cases}$$

Bij wijze van illustratie kiezen we het volgende probleem. Een oneindig lange cylinder $0 < r < R$ heeft op het begintijdstip $t=0$ de temperatuur $T=g(r)$. De buitenwand $r=R$ wordt op de constante temperatuur $T=0$ gehouden. De temperatuurverdeling op een willekeurig tijdstip kan a.v. worden beschreven. De eigenfuncties zijn

$$(278) \quad \varphi_n(r) = J_0(\lambda_n r),$$

waarbij

$$(27.9) \quad J_0(\lambda_n R) = 0.$$

Noemen we de nulpunten van $J_0(x)$ achtereenvolgens

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$ dan zijn de eigenwaarden van het probleem dus expliciet

$$(27.10) \quad \lambda_n = \beta_n / R, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Aldus is

$$(27.11) \quad T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t}$$

waarbij de c_n volgen uit

$$(27.12) \quad g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r).$$

Als bij de vergelijking van het cirkelvormige vlies vormen de eigenfuncties (27.8) een orthogonaal stelsel (zie 15.19) met

$$(27.13) \quad \int_0^R r \varphi_m \varphi_n dr = 0, \quad m \neq n$$

Men heeft dus

$$(27.14) \quad c_n = \frac{\int_0^R r g(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\int_0^R r J_0^2(\lambda_n r) dr}.$$

De noemer van het rechterlid kan nog wat vereenvoudigd worden. Uit de d.v. van Bessel volgt voor $\varphi_n(r)$

$$\left(r \frac{d\varphi_n}{dr} \right) \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_n}{dr} \right) + \lambda_n^2 r^2 \varphi_n \frac{d\varphi_n}{dr} = 0.$$

Integratie geeft

$$\left(r \frac{d\varphi_n}{dr} \right)^2 \Big|_{r=R} + \lambda_n^2 \int_0^R r^2 d\varphi_n^2 = 0$$

en vervolgens

$$2 \lambda_n^2 \int_0^R r \varphi_n^2 dr = \left\{ r^2 \left(\frac{d\varphi_n}{dr} \right)^2 + \lambda_n^2 r^2 \varphi_n^2 \right\} \Big|_{r=R}.$$

Substitutie van (27.8), (27.9) en (27.10) geeft voor de noemer van (27.14)

$$(27.15) \quad \int_0^R r J_0^2(\lambda_n r) dr = \frac{1}{2} R^2 J_1^2(\beta_n).$$

Uit (27.11), (27.14) en (27.15) volgt tenslotte

$$(27.16) \quad T(r,t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t}}{J_1^2(\beta_n)} \int_0^R r g(r) J_0(\lambda_n r) dr.$$

Is in het bijzonder $g(r) \equiv T_0$, dan volgt met gebruikmaking van

$$(27.17) \quad \int_0^R r J_0(\lambda_n r) dr = R^2 \frac{J_1(\beta_n)}{\beta_n}$$

uit (27.16) het eindresultaat

$$(27.18) \quad T(r,t) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_n \frac{r}{R})}{\beta_n J_1(\beta_n)} e^{-\lambda_n^2 t}.$$

De gemiddelde temperatuur welke per definitie bepaald is door

$$T_m = \frac{2}{R^2} \int_0^R r T(r,t) dr$$

wordt

$$(27.19) \quad T_m(t) = 4T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{\beta_n^2}.$$

Dat voor $t=0$ natuurlijk $T_m = T_0$ moet zijn leidt tot de volgende merkwaardige eigenschap

$$(27.20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} = \frac{1}{4}.$$

We gaan nog even in op het verband met integraalvergelijkingen. We herhalen het eigenwaardeprobleem

$$(27.21) \quad \begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \lambda^2 r \varphi = 0 \\ r=0 \quad \varphi \text{ eindig} \\ r=R \quad \varphi=0 \end{cases}$$

We bepalen dus eerst de functie van Green uit

$$(27.22) \quad \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} G(r,\rho) \right\} = -\delta(r-\rho)$$

met dezelfde randvoorwaarden.

Daartoe stellen we

$$(27.23) \quad \begin{cases} G(r, \rho) = A, & 0 < r < \rho, \\ G(r, \rho) = B \ln r + C, & \rho < r < R. \end{cases}$$

Gemakkelijk blijkt dat

$$(27.24) \quad G(r, \rho) = \begin{cases} - \ln \frac{\rho}{R} \\ - \ln \frac{r}{R} \end{cases}.$$

De eigenfunctie-vergelijking leidt derhalve tot de integraal-vergelijking

$$(27.25) \quad \varphi(r) + \lambda^2 \int_0^R G(r, \rho) \rho \varphi(\rho) d\rho = 0.$$

Uit (27.25) kan men dan weer besluiten tot orthogonaliteit en volledigheid van het stelsel φ_n .

VIII De transformatie van Laplace

§ 28 Beknopte theorie

Vele problemen uit de toegepaste wiskunde kunnen gemakkelijk opgelost worden door gebruik te maken van operatorenrekening en Laplace transformatie. De operatorenrekening, welke vooral bij de theorie van elektrische schakelingen toegepast wordt, zullen we niet behandelen omdat de transformatie van Laplace in zekere zin de operatorenrekening als speciaal geval bevat. De theorie van de Laplace transformatie is iets moeilijker omdat er o.a. gebruik wordt gemaakt van enkele begrippen uit de complexe functietheorie, maar we kunnen er veel meer mee doen. In het bijzonder lenen zgn. inschakelproblemen zich voor behandeling met de Laplace transformatie. Dit zijn problemen welke een fysisch gebeuren in de tijd beschrijven waarbij op een zeker ogenblik $t=0$ de situatie als bekend is verondersteld. Een dergelijk proces is dan beschreven door een differentiaalvergelijking van het type

$$(28.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \{ f(x, y, z, t) \}$$

waarbij f een gewone functie of een vector-functie van plaats en tijd is en waarbij Ω een op f werkende operator is welke bijv. een differentiaal-operator kan zijn.

Door de transformatie van Laplace wordt een functie van de tijd $f(t)$ omgezet in een functie van de "variabele van Laplace" s volgens

$$(28.2) \quad \bar{f}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

Hierbij is s een reële of complexe variabele.

We zullen hier van de Laplace transformatie slechts een beknopte behandeling geven en ons alleen concentreren op de techniek van deze transformatie en op een aantal toepassingen. Een uitvoeriger behandeling wordt gegeven in het desbetreffende speciale college. (Lit. R.V. Churchill. Modern operational methods in engineering. Mc Graw Hill).

De transformatie (28.2) schrijven we soms als

$$(28.3) \quad \bar{f}(s) \doteq f(t)$$

of

$$(28.4) \quad \bar{f}(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$$

Indien $f(t)$ zich voor $t \rightarrow \infty$ gedraagt als $e^{\alpha t}$ met α willekeurig reëel, dan bestaat de Laplace-getransformeerde (28.2) in een zeker rechterhalfvlak $\operatorname{Re} s > \alpha$ en is daar differentieerbaar

$$(28.5) \quad \frac{d}{ds} \bar{f}(s) = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt.$$

Het gebied $\operatorname{Re} s > \alpha$ is dus een halfvlak, waarin $\bar{f}(s)$ regulier is.

Bij de volgende voorbeelden maken we gebruik van de eenheidsfunctie $\theta(t)$ om eraan te herinneren dat we alleen tijd-functies beschouwen welke voor $t < 0$ identiek nul zijn.

Voorbeelden

$$(28.6) \quad \theta(t) \doteq \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$(28.7) \quad t^{\mu} \theta(t) \doteq \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \quad \operatorname{Re} s > 0, \mu > -1,$$

$$(28.8) \quad e^{at} \theta(t) \doteq \frac{1}{s-a} \quad \operatorname{Re} s > a,$$

$$(28.9) \quad \cos at \theta(t) \doteq \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$(28.10) \quad \sin at \theta(t) \doteq \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

De Laplace transformatie is een zgn. lineaire transformatie d.w.z.

$$(28.11) \quad \mathcal{L} \{ a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \} = a_1 \mathcal{L} \{ f_1(t) \} + a_2 \mathcal{L} \{ f_2(t) \}.$$

Bij de toepassingen maken we vaak gebruik van de volgende rekenregels welke eenvoudige gevolgen van de definitie (28.2) zijn

gelijkvormigheidsregel

$$(28.12) \quad \mathcal{L} f(at) = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{voor } a > 0.$$

verschuivingsregel

$$(28.13) \quad \mathcal{L} f(t-a) \theta(t-a) = e^{-as} \bar{f}(s).$$

differentiatieregel

$$(28.14) \quad \mathcal{L} f'(t) = s \bar{f}(s) - f(0).$$

$$(28.15) \quad \mathcal{L} f''(t) = s^2 \bar{f}(s) - sf(0) - f'(0).$$

convolutieregel

De convolutie van de tijdfuncties $f(t)$ en $g(t)$ (beiden $\equiv 0$ voor $t < 0$) is gedefinieerd als

$$(28.16) \quad f(t) * g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Er geldt

$$(28.17) \quad \mathcal{L} \{ f * g \} = \bar{f}(s) \cdot \bar{g}(s).$$

Het (formele) bewijs van (28.17) is a.v.

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) \cdot \bar{g}(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st-su} f(t)g(u)dt du = \\ &= \int_0^\infty f(t)dt \int_t^\infty e^{-sv} g(v-t)dv = \\ &= \int_0^\infty e^{-sv} dv \int_0^v f(t)g(v-t)dt = \mathcal{L} \{ f * g \}. \end{aligned}$$

Als eerste toepassing beschouwen we een mathematische slinger met een periodieke uitwendige kracht. De vergelijking, welke van het type (28.1) is, is

$$(28.18) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \sigma^2 u = a \sin \omega t.$$

met de beginvoorwaarde

$$u = u_t = 0 \text{ voor } t=0.$$

Laplace transformatie geeft met gebruikmaking van (28.10) en

(28.15)

$$(s^2 + \sigma^2) \bar{u} = \frac{a \omega}{s^2 + \omega^2}$$

zodat

$$\bar{u} = \frac{a \omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \sigma^2)} = \frac{a \omega}{\sigma^2 - \omega^2} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{s^2 + \sigma^2} \right).$$

Het origineel $u(t)$ is dus

$$(28.19) \quad u(t) = \frac{a}{\sigma^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\sigma} \sin \sigma t \right).$$

Het resonantiegeval $\omega = \sigma$ geeft (limietovergang)

$$(28.20) \quad u = \frac{a}{2 \sigma^2} (\sin \sigma t - \sigma t \cos \sigma t)$$

maar deze formule kan natuurlijk ook rechtstreeks uit de uitdrukking voor $\bar{u}$ afgeleid worden.

Als tweede toepassing beschouwen we een trillende snaar welke aan een der uiteinden onderworpen is aan een periodieke uitwendige kracht. De beschrijving, eveneens van het type (28.1), is a.v.

$$(28.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < a \\ u = \sin \omega t & \text{voor } x=0 \\ u=0 & \text{voor } x=a \\ u=u_t=0 & \text{voor } t=0. \end{array} \right.$$

Laplace transformatie levert nu een gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - s^2 \bar{u} = 0$$

met

$$\bar{u} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{voor } x=0$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{voor } x=a.$$

De oplossing hiervan is

$$(28.22) \quad \bar{u} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\text{sh } s(a-x)}{\text{sh } sa}.$$

We beschouwen eerst het speciale geval $a = \infty$. De oplossing is dan

$$(28.23) \quad \bar{u} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-sx}.$$

Volgens de verschuivingsregel (28.13) is dus

$$(28.24) \quad u(x,t) = \sin \omega(t-x) \theta(t-x),$$

d.w.z. een naar rechts voortschrijdende sinusvormige beweging. Het algemene geval kunnen we analoog oplossen door het rechterlid van (28.23) in een reeks te ontwikkelen met gebruikmaking van

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh } s(a-x)}{\text{sh } sa} &= e^{-sx} \frac{1 - e^{-2s(a-x)}}{1 - e^{-2sa}} = \\ &= e^{-sx} (1 - e^{-2s(a-x)}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nsa}. \end{aligned}$$

Aldus is

$$\bar{u} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp -s(2na+x) - \exp -s(2na+2a-x) \right\}.$$

Volgens de verschuivingsregel is dan

$$(28.25) \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sin \omega(t-2na-x) \theta(t-2na-x) - \sin \omega(t-2na-2a+x) \cdot \theta(t-2na-2a+x) \right\}.$$

De interpretatie van (28.25) zij aan de lezer overgelaten (spiegelingsprincipe).

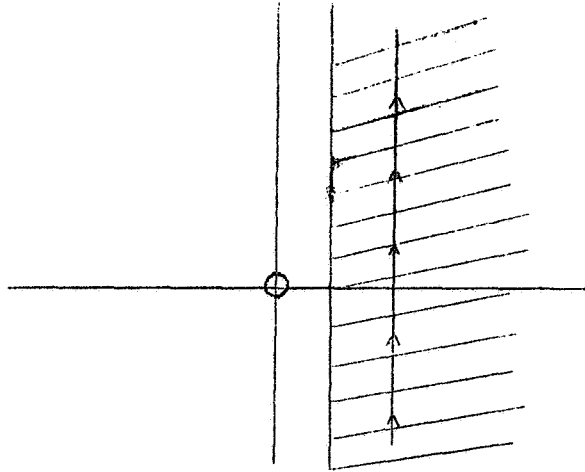
§ 29 De complexe omkeerformule

Bij vele problemen waarbij Laplace transformatie toegepast wordt doet zich de moeilijkheid voor dat de gezochte oplossing teruggevonden moet worden uit zijn Laplace getransformeerde zonder dat van tabellen, al of niet tezamen met de rekenregels,

gebruik gemaakt kan worden. In dat geval kunnen wij gebruik maken van de zogenaamde complexe omkeerformule welke algemeen geldig is nml.

$$(29.1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} \bar{f}(s) ds.$$

waarbij L een verticale weg ($\sigma - i\infty$, $\sigma + i\infty$) in het reguliere rechterhalfvlak van $\bar{f}(s)$ is (zie fig.)



Het bewijs van (29.1), waarvoor we naar de literatuur verwijzen, berust in feite op de omkeerformule (25.2) van de Fourier transformatie.

In vele gevallen kan de integraal in (29.1) met behulp van residuekening berekend worden. Dit lukt wanneer $\bar{f}(s)$ een in het gehele complexe s-vlak analytische functie is welke als enige singulariteiten polen heeft. We memoreren even dat $\bar{f}(s)$ in de omgeving van een pool $s=c$ a.v. ontwikkeld kan worden:

$$(29.2) \quad \bar{f}(s) = \frac{R}{s-c} + S + T(s-c) + \dots$$

als c een enkelvoudige pool is, en

$$(29.3) \quad \bar{f}(s) = \frac{Q}{(s-c)^2} + \frac{R}{s-c} + S + T(s-c) + \dots$$

als c een tweevoudige pool is.

Hierbij is dus R het residu van de desbetreffende pool.

Onder zeer algemene voorwaarden kan dan uit (29.1) afgeleid worden:

$$(29.4) \quad f(t) = \sum \text{Res} \{ e^{st} \bar{f}(s) \} ,$$

d.w.z. de som van de residuen van de functie tussen accolades voor alle polen van $\bar{f}(s)$.

Aangezien

$$e^{st} = e^{ct} \{ 1 + (s-c)t + \dots \}$$

levert een enkelvoudige pool c een bijdrage Re^{ct} op waarbij R door

(29.2) gegeven is. Een tweevoudige pool levert de bijdrage

$(R + Qt)e^{ct}$ waarbij Q en R door (29.3) gegeven zijn.

Aldus kunnen we (29.4) symbolisch schrijven als

$$(29.5) \quad f(t) = \sum_1 Re^{ct} + \sum_2 (R + Qt)e^{ct} + \dots$$

Voorbeeld

1. Het origineel van $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ dat ons reeds bekend is bepalen we

volgens de bovenstaande methode. Er zijn twee polen $s = \pm i\omega$.

Volgens (29.2) is $R = \pm \frac{1}{2i}$. Volgens (29.4) is dus

$$f(t) = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t} = \sin \omega t.$$

2. We beproeven nu onze krachten op (28.22). Het rechterlid heeft de polen $s = \pm i\omega$ en $s = \pm \frac{n\pi i}{a}$ ($n=1, 2, \dots$) welke laatste volgen uit $\sin sa = 0$.

De residuen zijn

$$s = i\omega \quad R = \frac{1}{2i} \frac{\sin \omega(a-x)}{\sin \omega a}$$

$$s = \frac{n\pi i}{a} \quad R = \frac{(-1)^{n-1} i a \omega}{n^2 \pi^2 - a^2 \omega^2} \sin n\pi \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Volgens (29.4) dus

$u(x, t) =$

$$= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\sin \omega(a-x)}{\sin \omega a} \frac{e^{i\omega t}}{2i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} i a \omega e^{\frac{i n \pi t}{a}}}{n^2 \pi^2 - a^2 \omega^2} \sin n\pi \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right]$$

of

(29.6)

$$u(x,t) = \frac{\sin \omega(a-x)}{\sin \omega a} \sin \omega t - 2a\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}}{n^2 \pi^2 - a^2 \omega^2}.$$

We zien dat de laatste uitdrukking overeenstemt met de ontwikkeling van $u(x,t)$ in eigenfuncties.

Inderdaad geldt in het algemeen voor oplossingen van een partiële differentiaalvergelijking dat de polen van de Laplace getransformeerde corresponderen met de eigenwaarden van het probleem en dat de ontwikkeling (29.4) of (29.5) leidt tot de ontwikkeling van de oplossing in de eigenfuncties van het probleem.

§ 30 Resonantie

We beschouwen weer het probleem (28.21). De Laplace getransformeerde van de oplossing is door (28.22) gegeven. Het origineel is enerzijds gegeven door (28.25) anderzijds door (29.6). Beide uitdrukkingen zijn natuurlijk identiek gelijk maar de eerste uitdrukking is voor kleine waarden van t het meest bruikbaar omdat dan slechts enkele termen van de reeksontwikkeling meedoen. De uitdrukking (29.6) levert problemen op wanneer $n^2 \pi^2 = a^2 \omega^2$ voor enige waarde van n . Dit feit betekent resonantie zoals we aanstonds zullen zien. Voor $\bar{u}(x,s)$ betekent dit namelijk dat twee polen samenvallen zodat volgens (29.5) er termen van het type $(R+Qt) \exp ct$ optreden. In deze problemen van trillende systemen zijn de polen c zuiver imaginair zodat $\exp ct$ met een sinus of cosinus correspondeert. Echter is de amplitude $R+Qt$ nu niet meer begrensd maar neemt lineair met de tijd toe hetgeen dus resonantie is. We gaan nog even na wat er gebeurt als $\omega = \pi/a$ d.w.z. wanneer de frequentie van de uitwendige kracht overeenstemt met de laagste eigenwaarde. Stellen we ter vereenvoudiging $a=\pi$ dan is volgens (28.22)

$$(30.1) \quad \bar{u}(x,s) = \frac{1}{s^2+1} \frac{\operatorname{sh} s(\pi-x)}{\operatorname{sh} s\pi}.$$

De polen $s=\pm i$ zijn tweevoudig. Volgens (29.3) is

$$\bar{u} = -\frac{\sin x}{2\pi(s-i)^2} + \frac{\sin x + (\pi-x)\cos x}{2\pi i (s-i)} + \dots$$

Volgens (29.5) is dus na enig rekenen

$$(30.2) \quad u(x,t) = -\frac{t \sin x \cos t}{\pi} + \frac{\sin x \sin t + 2(\pi-x) \cos x \sin t}{2\pi} + \\ -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2-1}.$$

Als laatste toepassing van de Laplace transformatie beschouwen we het volgende resonantieprobleem. Een balk is ondersteund op de plaatsen $x=0$ en $x=a$. Op het tijdstip $t=0$ is nog alles in rust maar dan beweegt zich een sinusvormige uitwendige kracht met een zekere snelheid over de balk. We kunnen dit beschouwen als het mathematische model van een marcherende colonne of een trein over een brug. De vraag is onder welke omstandigheden resonantie kan optreden.

De differentiaalvergelijking voor de uitwijking u van een trillende balk is

$$(30.3) \quad \mu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(x,t),$$

waarbij μ een elasticiteitscoëfficiënt, ρ de dichtheid en F de uitwendige kracht is.

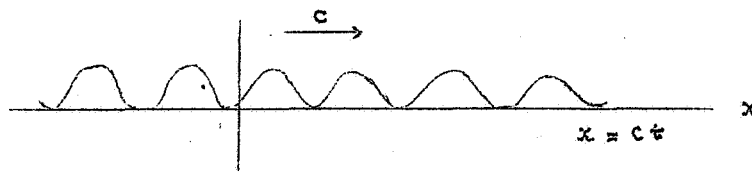
De randvoorwaarden zijn

$$(30.4) \quad u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{voor } x=0 \text{ en } x=a.$$

De beginvoorwaarde zijn $u=u_t=0$ voor $t=0$.

Voor F kunnen we het volgende model kiezen

$$(30.5) \quad F(x,t) = \left\{ 1 - \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \theta \left(t - \frac{x}{c} \right)$$



Laplace transformatie geeft

$$(30.6) \quad \mu \frac{d^4 \bar{u}}{dx^4} + \rho s^2 \bar{u} = e^{-\frac{sx}{c}} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

met de randvoorwaarden

$$(30.7) \quad \bar{u} = \bar{u}_{xx} = 0 \text{ voor } x=0 \text{ en } x=a.$$

Door proberen vinden we de volgende particuliere oplossing van (30.6)

$$(30.8) \quad \bar{u}_0 = C e^{-\frac{sx}{c}},$$

waarbij

$$(30.9) \quad C = \frac{c^2 \omega^2}{s^3 (s^2 + \omega^2) \left(\frac{\mu}{c^2} s^2 + \rho c^2 \right)}.$$

De algemene oplossing van (30.6) is van de vorm

$$(30.10) \quad \bar{u} = A \operatorname{sh} qx + A^* \operatorname{sh} q^* x + B \operatorname{sh} q(a-x) + B^* \operatorname{sh} q^*(a-x) + C \exp -\frac{sx}{c},$$

waarbij $q = i^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} (\rho/\mu)^{\frac{1}{4}}$ en $q = i^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} (\rho/\mu)^{\frac{1}{4}}.$

De randvoorwaarden bij $x=a$ geven

$$\begin{aligned} A \operatorname{sh} qa + A^* \operatorname{sh} q^* a &= -C \exp -\frac{as}{c} \\ q^2 (A \operatorname{sh} qa - A^* \operatorname{sh} q^* a) &= -\frac{s^2}{c^2} C \exp -\frac{as}{c} \end{aligned}$$

zodat bijv.

$$A = \frac{-1}{2 \operatorname{sh} qa} \left(1 + \frac{s}{ic^2 (\rho/\mu)^{\frac{1}{2}}} \right) C \exp - \frac{as}{c} .$$

Voor B vinden we een analoog resultaat.

De polen van (30.10) zijn bepaald door $\operatorname{sh} qa=0$, $\operatorname{sh} q^*a=0$ en $C = \infty$. Die afkomstig van de eerste voorwaarde zijn de eigenwaarden bepaald door $qa = \pm n\pi i$ en $q^*a = \pm n\pi i$ ($n=1,2,\dots$), dus

$$(30.11) \quad s = \pm (\mu/\rho) \frac{n^2 \pi^2}{a^2} i$$

De andere polen volgen uit (30.9) als

$$(30.12) \quad s=0, s = \pm \omega i, s = \pm (\rho/\mu)^{\frac{1}{2}} c^2 i .$$

Resonantie met de laagste eigenwaarde treedt dus op als

$$(30.13) \quad \omega = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^2}{a^2} \quad \text{of} \quad c^2 = \frac{\mu \pi^2}{\rho a^2} .$$

In de praktijk zullen dus deze kritische frequentie en snelheid vermeden moeten worden.