

Speciale functies

door

Prof. Dr. B. Meulenbeld

1965

RW

Cursus "SPECIALE FUNCTIES"

door Prof.Dr. B. Meulenbeld

's-Gravenhage 1964

I

Orthogonale functiesystemen

Een functie kan beschouwd worden als een gegeneraliseerde vector, zodat de fundamentele eigenschappen van een verzameling vectoren overgebracht kunnen worden op de analoge eigenschappen van een verzameling functies.

g of $g(r)$ stelt een vector voor in R_3 met rechthoekige componenten $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$. De norm $N(g)$ is

$$N(g) = g^2(1) + g^2(2) + g^2(3) = \sum_{r=1}^3 g^2(r) .$$

Is $N(g) = 1$ (eenheidsvector), dan heet de vector genormaliseerd. De hoek θ tussen twee vectoren g_1 en g_2 is gegeven door

$$\cos \theta = \frac{g_1(1)g_2(1) + g_1(2)g_2(2) + g_1(3)g_2(3)}{\left[N(g_1)N(g_2) \right]^{1/2}}$$

De teller heet inwendig of scalair product van g_1 en g_2 :

$$(g_1, g_2) = \sum_{r=1}^3 g_1(r)g_2(r) = \sqrt{N(g_1)N(g_2)} \cos \theta .$$

Als $N(g_2) = 1$, dan heet (g_1, g_2) de projectie van g_1 in de richting van g_2 .

g_1 en g_2 heten orthogonaal als $(g_1, g_2) = 0$.

$$N(g) = (g, g) .$$

Door een orthogonaal stelsel van 3 vectoren g_n ($n=1,2,3$) te normaliseren, ontstaat een orthonormaal stelsel

$$(\phi_m, \phi_n) = \delta_{m,n} \quad (m,n=1,2,3) .$$

Elke vector f in R_3 kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van de vectoren ϕ_1 , ϕ_2 en ϕ_3 .

$$f(r) = c_1 \phi_1(r) + c_2 \phi_2(r) + c_3 \phi_3(r) \quad (r=1,2,3) .$$

$$c_n = (f, \phi_n) = \sum_{r=1}^3 f(r) \phi_n(r) \quad (n=1,2,3) .$$

Dus

$$f(r) = \sum_{n=1}^3 (f, \phi_n) \phi_n(r) .$$

Men kan deze theorie uitbreiden voor een willekeurig eindig, en zelfs voor een oneindig aantal dimensies.

Een andere uitbreiding verkrijgt men door de lengte-eenheden langs de coördinaat-assen verschillend te nemen en met "gewichtsgetallen" $p(1), p(2), p(3)$ te werken. Het inwendig product is dan

$$(g_1, g_2) = \sum_{r=1}^3 p(r) g_1(r) g_2(r) .$$

We brengen nu bovenstaande theorie over op functies.

De functie $g(r)$ zal een vector in R_k voorstellen als deze reële waarden aanneemt voor $r=1,2,\dots,k$. Deze worden dan als componenten van de vector beschouwd. Is $g(x)$ een functie gedefinieerd voor alle waarden van x in een interval $a \leq x \leq b$, dan beschouwen we deze als een vector in R_∞ .

$$N(g) = \int_a^b \{g(x)\}^2 dx .$$

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx .$$

Twee functies g_m en g_n heten orthogonaal als

$$(1) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 .$$

Een stelsel V van functies $\{g_n(x)\}$ ($n=1,2,\dots$) heet orthogonaal op (a,b) , als (1) geldt voor $m \neq n$ voor alle functies van V . De functies van V worden genormaliseerd door elke functie $g_n(x)$ te delen door

$[N(g_n)]^{1/2}$, en vormen dan een orthonormaal stelsel $\{\phi_n(x)\}$

$$(\phi_m, \phi_n) = \delta_{m,n} \quad (m, n=1, 2, \dots)$$

Het interval (a, b) zullen we fundamenteel- interval noemen. We beschouwen alleen functies, die begrensd en integreerbaar zijn in het fundamenteel-interval en waarvan de norm $\neq 0$ is. Functieruimte.

Gegeneraliseerde Fourierreeksen.

Gegeven is een aftelbare oneindige orthonormale rij van functies $\{\phi_n(x)\}$ ($n=1, 2, \dots$). We trachten een willekeurige functie $f(x)$ op een fundamenteel-interval (a, b) voor te stellen als een lineaire combinatie van de functies $\phi_n(x)$.

$$f(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \dots + c_n \phi_n(x) + \dots$$

$$c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

c_n heten de Fouriercoëfficiënten van $f(x)$ t.o.v. het orthonormale stelsel $\{\phi_n(x)\}$.

De formele reeks

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \int_a^b f(\xi) \phi_n(\xi) d\xi$$

heet de gegeneraliseerde Fourierreeks van $f(x)$.

Als er geen functie uit de beschouwde functieruimte bestaat die orthogonaal is t.o.v. elke $\phi_n(x)$, heet het systeem $\{\phi_n(x)\}$ volledig.

Het systeem $\{\sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}\}$ ($n=1, 2, \dots$) is orthonormaal op het interval $(0, L)$, maar niet volledig.

Niet elke functie kan voorgesteld worden als een lineaire combinatie van deze functies.

Het systeem $\{\sin n\pi x\}$ ($n=1, 2, \dots$) is orthogonaal, maar niet volledig op het interval $(-1, 1)$.

"Approximatie in het gemiddelde" (Approximation in the mean).

Laat $K_m(x)$ voorstellen een eindige lineaire combinatie van m functies van een orthonormaal systeem $\{\phi_n(x)\}$ ($n=1,2,\dots,m$; $a \leq x \leq b$), dus

$$K_m(x) = \gamma_1 \phi_1(x) + \gamma_2 \phi_2(x) + \dots + \gamma_m \phi_m(x) \quad .$$

We willen de waarden van de constanten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ zo bepalen, dat $K_m(x)$ de beste approximatie in het gemiddelde geeft van een gegeven functie $f(x)$.

Hiermede is bedoeld de approximatie in de zin van de methode van de kleinste kwadraten.

De waarde van de integraal

$$I = \int_a^b \{f(x) - K_m(x)\}^2 dx$$

moet zo klein mogelijk zijn.

Het resultaat is neergelegd in de volgende stelling:

De Fourier-coëfficiënten van een functie $f(x)$ t.o.v. een orthonormaal stelsel $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ zijn die coëfficiënten waarvoor een lineaire combinatie $K_m(x)$ van deze functies de beste approximatie in het gemiddelde is van $f(x)$ in het fundamenteel-interval (a, b) .

Uit het bewijs volgt de ongelijkheid:

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \quad .$$

Het rechterlid is onafhankelijk van n . De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ convergeert en

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \quad (\text{Ongelijkheid van Bessel}) \quad .$$

Bovendien volgt hieruit dat de Fourier-coëfficiënt van elke functie t.o.v. een orthonormaal systeem $\{\phi_n(x)\}$ tot nul nadert;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad .$$

Gesloten en volledige stelsels

Laat $S_m(x)$ zijn de partiële som van de gegeneraliseerde Fourier-reeks van $f(x)$ t.o.v. een orthonormaal stelsel functies $\{\phi_n(x)\}$, $n=1,2,\dots$. Men zegt dan dat $S_m(x)$ "gemiddeld" convergeert tot $f(x)$ indien

$$(1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \{f(x) - S_m(x)\}^2 dx = 0.$$

Notatie: L.i.m. $S_m(x) = f(x)$.

Als (1) geldt voor elke $f(x)$ van de functieruimte, dan noemt men het stelsel $\{\phi_n(x)\}$ gesloten.

Een rij $S_m(x)$ kan gemiddeld convergent zijn, zonder convergent te zijn in de gewone zin. Omgekeerd is een rij $S_m(x)$ die in (a,b) convergent is in de gewone zin niet noodzakelijk gemiddeld convergent. Echter geldt de stelling:

Als een reeks $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ in (a,b) uniform convergeert tot $f(x)$, dan is ook de reeks gemiddeld convergent met $f(x)$ tot som.

Voor elk gesloten systeem geldt de gelijkheid van Parseval:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx$$

of
$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)^2 = N(f).$$

Stelling: Als het stelsel $\{\phi_n(x)\}$ gesloten is, is dit ook volledig.

Ander type van orthogonaliteit

Een stelsel $\{g_n(x)\}$ ($n=1,2,\dots$) is orthogonaal op een interval (a,b) t.o.v. een gegeven gewichtsfunctie $p(x)$, indien

$$\int_a^b p(x) g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad \text{voor } m \neq n \quad (m,n=1,2,\dots).$$

Het linkerlid stelt in dit geval het inwendig product voor van $g_m(x)$ en $g_n(x)$

$$N(g_n) = (g_n, g_n) = \int_a^b p(x) g_n^2(x) dx \quad (n=1,2,\dots).$$

Door vermenigvuldiging van g_n met $\{Ng_n\}^{-\frac{1}{2}}$, kan men het orthonormale stelsel verkrijgen.

Voorbeeld. De Tschebichef polynomen

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad T_0(x) = 1 \quad (n=1,2,\dots)$$

$\{T_n(x)\}$ is orthogonaal op interval $(-1,1)$ t.o.v. de gewichtsfunctie $p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Een andere uitbreiding van het orthogonaliteitsbegrip vindt men bij complexe functies van een reële veranderlijke ($a \leq x \leq b$). Een stelsel $\{g_n(x)\}$ ($n=1,2,\dots$) met

$$g_n(x) = u_n(x) + i v_n(x)$$

heet orthogonaal in de zin van Hermite als

$$\int g_m(x) \overline{g_n(x)} dx = 0 \text{ voor } m \neq n,$$

waarin $\overline{g_n(x)} = u_n(x) - i v_n(x)$.

Genormeerd als

$$\int_a^b g_n(x) \overline{g_n(x)} dx = 1, \text{ d.w.z. als}$$

$$\int_a^b \{u_n^2(x) + v_n^2(x)\} dx = 1 \text{ voor elke } n.$$

Voorbeeld: $\{e^{inx}\}$, $n=1,2,\dots$.

Orthogonale functies voortgebracht door differentiaalvergelijkingen

Vergelijking van de trillende snaar: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

Door separatie van de veranderlijken komt men tot de gewone differentiaalvergelijking

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \text{ met}$$

randvoorwaarden $X(0) = 0, X(L) = 0$.

Men vindt $X = C \sin \sqrt{\lambda} x$. Oplossingen als

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (n=1,2,\dots), \text{ en de oplossingen zijn}$$

$$C_n \sin \frac{n\pi x}{L};$$

die een orthogonaal stelsel vormen.

Uitbreiding. Beschouw de d.v.

$$X'' + f_1(x)X' + [f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)] X = 0$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$ en $f_3(x)$ zijn gegeven functies, λ is een constante. Vermenigvuldigt men met

$$r(x) = e^{\int f_1(x) dx},$$

dan verkrijgt men de vorm

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \left[r(x) \frac{dX}{dx} \right] + [g(x) + \lambda p(x)] X = 0.$$

Verg. van Sturm-Liouville

Randvoorwaarden:

$$(3) \quad a_1 X(a) + a_2 X'(a) = 0, \quad b_1 X(b) + b_2 X'(b) = 0,$$

a_1, a_2, b_1, b_2 zijn constanten.

Onder vrij algemene voorwaarden voor de functies p, q en r kan aangetoond worden dat er een discrete rij van eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ bestaat, waarvoor het Sturm-Liouville probleem een oplossing $\neq 0$ heeft. Deze oplossingen heten eigenfuncties. Men kan bewijzen dat het stelsel van deze functies $\{X_n(x)\}$ ($n=1,2,\dots$) orthogonaal is op het interval (a,b) t.o.v. de gewichtsfunctie $p(x)$. Verder kan men aantonen, dat elke functie $f(x)$, gedefinieerd op (a,b) en voldoende aan bepaalde voorwaarden kan voorgesteld worden door zijn

gegeneraliseerde Fourierreeks, behorende bij dat orthogonaal stelsel. D.w.z. als $\{\phi_n(x)\}$ het ∞ orthonormale stelsel is van $\{X_n(x)\}$ dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ met

$$c_n = \int_a^b p(x) f(x) \phi_n(x) dx \quad \text{tot de functie } f(x).$$

Als $r(a) = r(b)$ zijn bovenstaande beweringen geldig als (3) wordt vervangen door de randvoorwaarden

$$X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b).$$

de periodieke randvoorwaarden genaamd.

We bewijzen nu de volgende stellingen

Stelling. Stel de coëfficiënten p, q en r in het Sturm-Liouville probleem zijn continu op $[a, b]$, en λ_m, λ_n zijn twee verschillende eigenwaarden met bijbehorende eigenfuncties $X_m(x)$ en $X_n(x)$, waarvan de afgeleiden $X_m'(x)$ en $X_n'(x)$ continu zijn. Dan zijn $X_m(x)$ en $X_n(x)$ orthogonaal op (a, b) t.o.v. de gewichtsfunctie $p(x)$. Bovendien: als $r(a) = 0$ kan de voorwaarde $a_1 X_1(a) + a_2 X_1'(a) = 0$ vervallen; als $r(b) = 0$ de voorwaarde $b_1 X_1(b) + b_2 X_1'(b) = 0$. Indien $r(b) = r(a)$ verkrijgt men de periodieke randvoorwaarden.

Stelling. Als bovendien $p(x)$ definitief is op (a, b) , dan is elke eigenwaarde van het St.L. probleem reëel.

III

Polynomen van Legendre

Als illustratie van de volgende theorie zal ik de polynomen van Legendre gebruiken. Daarom eerst de algemene eigenschappen van deze polynomen.

Uit de potentiaaltheorie is bekend dat de potentiaal in een punt P met bolcoördinaten (ρ, ϕ, ψ) in de vrije ruimte tengevolge van een eenheidsmassa in $Q(\rho', \phi', \psi')$ gelijk is aan

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho' \sqrt{1-2u\mu+\mu^2}}, \quad \text{waarin } r=PQ, \frac{\rho}{\rho'}=\mu, \cos \gamma=u. (\gamma = \angle POQ).$$

We gaan $\frac{1}{r}$ ontwikkelen in een machtreeks naar μ . Voor $|2u\mu-\mu^2| < 1$ vinden we

$$\frac{1}{\sqrt{1-2u\mu+\mu^2}} = \alpha_0 + \alpha_1(2u\mu-\mu^2) + \alpha_2(2u\mu-\mu^2)^2 + \dots$$

$$\text{waarin } \alpha_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}, \quad \alpha_0 = 1.$$

We maken hiervan een machtreeks in μ . Voor $|\mu| < \sqrt{2}-1$ geldt dan:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2u\mu+\mu^2}} = P_0(u) + P_1(u)\mu + P_2(u)\mu^2 + P_3(u)\mu^3 + \dots$$

waarin $P_n(u)$ de Legendre polynomen voorstellen

$$P_0(u) = 1; P_1(u) = u; P_2(u) = \frac{3}{2}(u^2 - \frac{1}{3}); P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u);$$

$$P_n(u) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1.3 \dots (2n-2k-1)}{2^k k! (n-2k)!} (-1)^k u^{n-2k}$$

$$= \frac{1.3 \dots (2n-1)}{n!} \left[u^n - \frac{n(n-1)}{(2n-1)^2} u^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3) \cdot 2 \cdot 4} u^{n-4} - \dots \right].$$

$P_n(u)$ is een veelterm van de n^{de} graad in u , even functies voor even graad, oneven functies voor oneven graad.

Voor $|\mu| < \mu_1 < \sqrt{2} - 1$, $-1 \leq u \leq 1$ geldt

$$\frac{u - \mu}{(1 - 2u\mu + \mu^2)^{3/2}} = P_1(u) + 2P_2(u)\mu + 3P_3(u)\mu^2 + \dots$$

Verder geldt

$$\frac{u - \mu}{(1 - 2u\mu + \mu^2)^{1/2}} = (u - \mu)\{P_0(u) + P_1(u)\mu + \dots\}$$

maar ook
$$= (1 - 2u\mu + \mu^2)\{P_1(u) + 2P_2(u)\mu + 3P_3(u)\mu^2 + \dots\}$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van μ^n levert de recurrente betrekking:

$$(2) \quad (n+1)P_{n+1}(u) - (2n+1)uP_n(u) + nP_{n-1}(u) = 0.$$

$$P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n; P_{2n-1}(0) = 0, P_{2n}(0) = (-1)^n \alpha_n.$$

Door differentiëren kan men afleiden de betrekking

$$(3) \quad nP_n(u) = uP'_n(u) - P'_{n-1}(u),$$

en uit (2) en (3) de differentiaalvergelijking voor de Legendre polynomen:

$$(1 - u^2)P''_n(u) - 2uP'_n(u) + n(n+1)P_n(u) = 0.$$

Uitdrukking van L-P als trigonometrische veeltermen

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2u\mu + \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu e^{i\gamma})(1 - \mu e^{-i\gamma})}} =$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 e^{i\gamma}\mu + \alpha_2 e^{2i\gamma}\mu^2 + \dots)(\alpha_0 + \alpha_1 e^{-i\gamma}\mu + \alpha_2 e^{-2i\gamma}\mu^2 + \dots)$$

met $u = \cos \gamma = \frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{2}.$

Deze reeksen convergeren voor $|\mu| < 1$.

Hieruit leidt men af.

$$P_n(u) = 2\alpha_0 \alpha_n \cos n\gamma + 2\alpha_1 \alpha_{n-1} \cos (n-2)\gamma + 2\alpha_2 \alpha_{n-2} \cos (n-4)\gamma + \dots$$

$|P_n(u)|$ bereikt het maximum voor $\gamma = 0$, dus voor reële u in het interval $(-1, 1)$ voor $u = 1$.

Dit maximum is gelijk aan 1.

De reeks in (1) is convergent en gelijk aan de gegeven functie; niet slechts voor $|\mu| < \sqrt{2} - 1$, maar voor alle $|\mu| < 1$.

Orthogonaliteit

Elke veelterm in x kan men in polynomen van Legendre uitdrukken.

Uit de d. verg. van Legendre kan men op eenvoudige wijze de orthogonaliteit van de L.P. bewijzen met als gewichtsfunctie $p(x) \equiv 1$ en interval $(-1, 1)$

$$\int_{-1}^1 P_m(u) P_n(u) du = 0 \quad (m \neq n).$$

IV

We vonden

$$P'_n(u) - uP'_{n-1}(u) = nP_{n-1}(u)$$

en uit (10, (3)) met $n-1$ i.p.v. n

$$uP'_{n-1}(u) - P'_{n-2}(u) = (n-1)P_{n-1}(u)$$

zodat

$$P'_n(u) = (2n-1)P_{n-1}(u) + P'_{n-2}(u)$$

$$P'_{n-2}(u) = (2n-5)P_{n-3}(u) + P'_{n-4}(u) \quad , \quad \text{enz.}$$

$$(1) \quad P'_n(u) = (2n-1)P_{n-1}(u) + (2n-5)P_{n-3}(u) + (2n-9)P_{n-5}(u) + \dots$$

De som breekt af met $3P_1$ als n =even en met P_0 als n =oneven.

Grootte van $\int_{-1}^1 P_n^2(u) du$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \{P_{n+1}(u)P_n(u)\} &= P'_{n+1}(u)P_n(u) + P_{n+1}(u)P'_n(u) = \\ &= P_n(u)\{(2n+1)P_n(u) + (2n-3)P_{n-2}(u) + \dots\} + \\ &+ P_{n+1}(u)\{(2n-1)P_{n-1}(u) + (2n-5)P_{n-3}(u) + \dots\} = \\ &= (2n+1)P_n^2(u) + \text{product van verschillende } P\text{'s} . \end{aligned}$$

Na integratie

$$P_{n+1}(u)P_n(u) \Big|_{-1}^1 = (2n+1) \int_{-1}^1 P_n^2(u) du \quad , \quad \text{waaruit volgt}$$

$$\int_{-1}^1 P_n^2(u) du = \frac{2}{2n+1}$$

Het systeem $\phi_n(x) = \sqrt{n+1} P_n(x)$ ($n=0,1,2,\dots$) is dus een orthonormaal systeem op het interval $(-1,1)$.

Deze orthogonaliteit op het interval karakteriseert volkomen de L.p. onder al de andere polynomia, zoals we zullen zien uit de volgende algemene beschouwing.

We merken op dat het systeem van de machten van x : $1, x, x^2, x^3, \dots$ in geen enkel interval een orthogonaal systeem vormt, zelfs niet met een gewichtsfunctie $p(x)$ erbij.

We beschouwen een systeem van orthogonale polynomia op het interval (a,b) :

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$$

waarvan de graad van $P_i(x)$ gelijk is aan i . De gewichtsfunctie zij $p(x)$.

Elke macht x^n kan lineair en eenduidig met behulp van $P_0(x) \dots P_n(x)$ uitgedrukt worden. Dus elk polynoom $\Pi_{n-1}(x)$ van een graad $\leq n-1$ kan eenduidig in de vorm gebracht worden:

$$\Pi_{n-1}(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots + c_{n-1} P_{n-1}(x)$$

met constante coëfficiënten $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$.

Dus voor $r \geq n$

$$\int_a^b p(x) \Pi_{n-1}(x) P_r(x) dx = c_0 \int_a^b p(x) P_0(x) P_r(x) dx + \dots + c_{n-1} \int_a^b p(x) P_{n-1}(x) P_r(x) dx = 0.$$

Elk van de veeltermen $P_0(x), \dots, P_n(x)$ is met elke veelterm van lagere graad orthogonaal.

Hieruit kan men de belangrijke stelling afleiden:

Stelling. Is $P_0(x), P_1(x), \dots$ een systeem van orthogonale polynomen met gewichtsfunctie $p(x)$ op het interval (a,b) , en is de graad van $P_n(x)$ gelijk aan n ($n=0,1,2,\dots$), dan is elke $P_n(x)$ op een constante factor $\neq 0$ na eenduidig bepaald.

$\{P_n(x)\}$ als een volledig orthogonaal stelsel.

Stelling. Op het interval $(-1,1)$ is het stelsel van L.p. $P_n(x)$ ($n=0,1,2,\dots$) volledig t.o.v. de klasse van alle functies die met hun eerste afgeleiden stuksgewijze continu zijn in $(-1,1)$.

Hieruit leiden we af:

De enige waarden van λ waarvoor de vergelijking

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right\} + \lambda y = 0$$

een niet-triviale oplossing heeft met een continue eerste afgeleide in het interval $-1 \leq x \leq 1$, zijn:

$$\lambda = n(n+1) \quad (n=0,1,2,\dots) .$$

De macht x^m kan men schrijven als

$$x^m = A_m P_m(x) + A_{m-2} P_{m-2}(x) + \dots + T ,$$

waarin T een constante A_0 is als m even is, en $T = A_1 P_1(x)$ als m oneven is.

Om de waarden van de constanten A_{m-2j} te vinden, vermenigvuldigen we met $P_{m-2j}(x)$ en integreren over $(-1,1)$. We vinden dan

$$\int_{-1}^1 x^m P_{m-2j}(x) dx = A_{m-2j} \int_{-1}^1 \{P_{m-2j}(x)\}^2 dx ,$$

waaruit volgt

$$(2) \quad A_{m-2j} = (2m-4j+1) \int_0^1 x^m P_{m-2j}(x) dx .$$

Men kan nu bewijzen

$$\int_0^1 x^r P_n(x) dx = \frac{r(r-1)\dots(r-n+2)}{(r+n+1)(r+n-1)\dots(r-n+3)} \quad (n=2,3,\dots)$$

geldig voor $r > -1$ als n = even

$r > -2$ als n = oneven.

De integraal in (2) heeft dus de waarde

$$\frac{m(m-1)\dots\dots\dots(2j+2)}{(2m-2j+1)(2m-2j-1)\dots(2j+3)} = \frac{m!}{1.3.5\dots(2m-2j+1).2^j.j!}.$$

De ontwikkeling voor x^m (m geheel ≥ 0) is dus

$$x^m = \frac{m!}{1.3.5\dots(2m+1)} \left[(2m+1)P_m(x) + (2m-3)\frac{2m+1}{2}P_{m-2}(x) + \right. \\ \left. + (2m-7)\frac{(2m+1)(2m-1)}{2.4}P_{m-4}(x) + \dots \right].$$

Voor de beginwaarden hebben we

$$1 = P_0(x), \quad x = P_1(x), \quad x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x), \\ x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x), \quad x^4 = \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{4}{7}P_2(x) + \frac{1}{5}P_0(x).$$

Voor $-1 \leq x \leq 1$ is reeds afgeleid $|P_n(x)| \leq 1$.

Hieruit en uit (1) volgt dan

$$|P'_{2n}(x)| \leq (4n-1) + (4n-5) + \dots + 3 = n(2n+1), \\ |P'_{2n+1}(x)| \leq (4n+1) + (4n-3) + \dots + 1 = (n+1)(2n+1).$$

$$\text{Dus } |P'_{2n}(x)| \leq (2n)^2, \quad |P'_{2n+1}(x)| \leq (2n+1)^2;$$

dus voor $-1 \leq x \leq 1$ geldt $|P'_n(x)| \leq n^2$ ($n=0,1,2,\dots$).

Op dezelfde manier leidt men af: $|P''_n(x)| \leq n^4$; $|P_n^{(k)}(x)| \leq n^{2k}$.

Stelling. Voor $-1 \leq x \leq 1$ zijn de waarden van de functies

$$|P_n(x)|, \frac{1}{n} |P'_n(x)|, \frac{1}{n^4} |P''_n(x)|, \dots \text{ nooit groter dan } 1.$$

V

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$,

waarin $P_n(x)$ de L-polynomen voorstellen, en

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (n=0,1,2,\dots)$$

heet de Legendre-reeks, behorende bij $f(x)$.

Stelling Is $f(x)$ begrensd en integreerbaar in het interval $-1 < x < 1$, dan geldt dat voor elk punt x dat inwendig punt is van een subinterval waarin $f(x)$ van begrensde variatie is, de Legendre-reeks, behorende bij $f(x)$, convergeert tot $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ d.w.z.

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x). \quad (-1 < x < 1)$$

Def. Een functie heet van begrensde variatie in een interval (a,b) , als er een constante A bestaat, zodanig dat voor elke willekeurige verdeling van het interval (a,b)

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

de volgende ongelijkheid geldt:

$$|f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(b)| < A.$$

Is $f(x)$ een even functie, dan geldt

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = A_0 + A_2 P_2(x) + A_4 P_4(x) + \dots$$

met

$$A_n = (2n+1) \int_0^1 f(x) P_n(x) dx \quad (n=0,2,4,\dots);$$

is $f(x)$ een oneven functie, dan geldt

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = A_1 P_1(x) + A_3 P_3(x) + \dots$$

met

$$A_n = (2n+1) \int_0^1 f(x) P_n(x) dx \quad (n=1,3,5,\dots).$$

V

We keren terug tot het algemene geval van orthogonale polynomen $P_n(x)$ op een interval (a,b) en met gewichtsfunctie $p(x)$, en bewijzen de

Stelling De nulpunten van $P_n(x)$ ($n=0,1,2,\dots$) zijn alle reëel, verschillend en liggen in het inwendige van (a,b) .

Stelling De n^{de} partiële som $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$ van de Fourierontwikkeling van een continue functie $f(x)$ t.o.v. het stelsel van orthogonale polynomen $P_n(x)$, heeft tenminste in $(n+1)$ punten dezelfde waarde als $f(x)$. Deze stelling vindt toepassing in de numerieke analyse, zoals we zullen zien.

We zullen bewijzen:

Elke interpolatieveelterm met $A(x_i) = B(x_i) = f(x_i)$ ($i=1,2,\dots,n$) van de graad $\leq 2n-1$, geeft dezelfde approximatie integraal $\int_a^b p(x)A(x)dx = \int_a^b p(x)B(x)dx$ als de eenduidig bepaalde veelterm van de graad $(n-1)$.

Recurrente betrekking voor de algemene orthogonale polynomen

Is k_n de coëfficiënt van $P_n(x)$

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots \quad (k_n \neq 0)$$

en k'_n de volgende coëfficiënt, en is

$$h_n = \int_a^b p(x) \{P_n(x)\}^2 dx \quad (n=0,1,2,\dots),$$

dan geldt de recurrente betrekking:

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \quad (n=1,2,\dots),$$

met constanten A_n , B_n en C_n gegeven door

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad B_n = A_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right), \quad C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}}.$$

V

Voor Legendre-polynomen volgt hieruit de recurrente betrekking (10,2).

We bewijzen de sommatieformule van Christoffel-Darboux:

$$(1) \sum_{i=0}^n \frac{1}{h_i} P_i(x) P_i(y) = \frac{1}{h_n} \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x-y} \quad (x \neq y)$$

Voor L-polynomen volgt hieruit:

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) P_i(x) P_i(y) = \frac{n+1}{x-y} \{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)\}.$$

Uit (1) kunnen we de ongelijkheid afleiden, door $x-y=z$ te stellen en daarna $z \rightarrow 0$ te nemen:

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} [P'_{n+1} P_n(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x)] > 0.$$

Met deze ongelijkheid bewijzen we de stelling:

Stelling De nulpunten van twee opvolgende orthogonale polynomen $P_n(x)$ en $P_{n+1}(x)$ scheiden elkaar.

VI Speciale functies

De formule van Rodriguez

We beschouwen de functies:

$$(1) \quad \begin{cases} F_n(x) = \frac{1}{p(x)} D^n \{p(x)X^n\} \quad (n=1,2,\dots) \\ F_0(x) \equiv 1. \end{cases}$$

X is een veelterm van de graad ≤ 2 , en in het geval van een eindig interval (a,b) gegeven door:

$$X=(b-x)(x-a) \quad (a,b \text{ reëel, } a < b).$$

In het algemeen is voor een willekeurige $p(x)$ de $F_n(x)$ geen veelterm. Is dit wel zo, bijv. als $p(x) \equiv 1$, en is $F_n(x)$ zelfs een veelterm in x van de n^{de} graad, dan zijn $F_n(x)$, afgezien van een constante factor, gelijk aan de orthogonale veeltermen $P_n(x)$ die behoren bij de gewichtsfunctie $p(x)$ en het interval (a,b) :

$$(2) \quad P_n(x) = \frac{1}{K_n} F_n(x) = \frac{1}{K_n p(x)} D^n [p(x)X^n] .$$

Dit is de algemene formule van Rodriguez.

Dat $F_n(x)$ een veelterm is, geldt voor alle klassieke orthogonale polynomen, d.z. de Jacobi (Legendre), Laguerre en Hermite-polynomen.

We willen eerst vaststellen onder welke veronderstellingen over de $p(x)$ de functies $F_n(x)$ veeltermen zijn, en wat er voor (1) in de plaats komt als niet beide van de uiteinden van het interval (a,b) eindig zijn.

Is $F_1(x)$ een lineaire veelterm, dus

$$\frac{1}{p(x)} D\{p(x)X\} = \frac{1}{p(x)} p'(x)X + X' = Ax+B, \text{ dan is}$$

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{Ax+B-X'}{X} = \frac{A^* + B^*}{(b-x)(x-a)} = -\frac{\alpha}{b-x} + \frac{\beta}{x-a}, \text{ en}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \ln p(x) &= \alpha \ln(b-x) + \beta \ln(x-a) + \ln(C) \\ p(x) &= C(b-x)^\alpha (x-a)^\beta, \end{aligned}$$

VI

waarin α, β en C reële constanten zijn. $p(x)$ moet integreerbaar zijn d.w.z. de integraal $\int_a^b p(x)dx$ moet bestaan, en dit is slechts het geval als $\alpha > -1, \beta > -1$.

Is omgekeerd een gegeven gewichtsfunctie $p(x)$ van de gedaante (3) met $\alpha > -1, \beta > -1$, dan is $F_n(x)$ een veelterm van de graad n , zoals men met de formule van Leibniz gemakkelijk kan bewijzen.

Bewijs van de formule van Rodriguez

Dit berust op het feit, dat de orthogonale polynomen, op een constante factor na, eenvoudig vastgelegd zijn door $p(x)$ en het interval (a, b) . We zullen bewijzen dat $F_n(x)$ orthogonaal is met alle veeltermen van lagere graad.

Zij $\Pi_{n-1}(x)$ zulk een veelterm, dan geldt

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) F_n(x) \Pi_{n-1}(x) dx &= \int_a^b \Pi_{n-1}(x) D^n \{p(x) X^n\} dx \\ &= (-1)^n \int_a^b \Pi_{n-1}^{(n)}(x) X^n dx = 0. \end{aligned}$$

Van de polynomen van Legendre is $p(x) \equiv 1$, $a \equiv -1, b \equiv +1$, en vinden we de formule van Rodriguez:

$$P_n(x) = \frac{1}{(-2)^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^n\}.$$

Zij nu $b = \infty$, dan stellen we $X = x - a$ op analoge wijze als boven vinden we dan

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{A^* x + B^*}{x - a} = A^* + \frac{\alpha}{x - a},$$

en

$$p(x) = e^{A^* x} (x - a)^\alpha,$$

waarin A^* en α reële constanten zijn en $\alpha > -1$. Ook hier is gemakkelijk in te zien dat $F_n(x)$ een veelterm in x is van de graad n . Zonder de algemeenheid te schaden kunnen we aannemen $|A^*| = 1$, daar we anders de transformatie $x \rightarrow \frac{x}{|A^*|}$ toepassen, en dit verandert niet

VI

essentiëel aan de vorm van $p(x)$. Voor positieve A^* is $p(x)$ geen gewichtsfunctie, daar de integraal $\int p(x)dx$ dan niet bestaat. Zij dus $A^* = -1$, dan is $p(x) = e^{-x}(x-a)^\alpha$.

Het bewijs van de formule Rodriguez verloopt dan geheel als bij een eindig interval.

Tenslotte zij $a=-\infty$, $b=\infty$. In dit geval stellen we $X \equiv 1$, en dus is

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = Ax+B, \quad p(x) = e^{\frac{1}{2}Ax^2+Bx+C}$$

met willekeurige C . $p(x)$ is slechts gewichtsfunctie als A negatief is, dus $A=-h^2$. We hebben dan $\frac{1}{2}Ax^2+Bx+C = -\frac{1}{2}(hx-\frac{B}{h})^2 + \frac{1}{2}(\frac{B}{h})^2 + C$.

Door de substitutie $(hx-\frac{B}{h}) \rightarrow x$, wordt $p(x)$ in de vorm gebracht:

$$p(x) = C^* e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

en we kunnen weer kiezen $C^*=1$.

Ook in dit geval is $F_n(x)$ weer een veelterm in x van de graad n , en is de formule van Rodriguez weer te bewijzen.

Samenvatting. De functie $F_n(x) = \frac{1}{p(x)} D^n\{p(x)X^n\}$

met

$$X = \begin{cases} (b-x)(x-a) & \text{voor } |a| < \infty, |b| < \infty \\ x-a & \text{voor } |a| < \infty, b = \infty \\ 1 & \text{voor } -a = b = \infty. \end{cases}$$

en een gewichtsfunctie $p(x)$ in het interval (a,b) , is dan en slechts dan een veelterm in x van de graad n , als $p(x)$, afgezien van multiplicatieve constanten óf eenvoudige x -transformaties, gegeven is door

$$p(x) = \begin{cases} (b-x)^\alpha (x-a)^\beta & \text{met } \alpha > -1, \beta > -1, \text{ voor } |a| < \infty, |b| < \infty \\ e^{-x}(x-a)^\alpha & \text{met } \alpha > -1, \text{ voor } |a| < \infty, b = \infty \\ e^{-\frac{1}{2}x^2} & , \text{ voor } -a = b = \infty. \end{cases}$$

Als dit het geval is, dan zijn de veeltermen $F_n(x)$ t.o.v. de gewichtsfunctie $p(x)$ orthogonaal.

VII Speciale functies

De Gammafunctie

We definiëren de Gammafunctie als

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt .$$

Deze oneigenlijke integraal bestaat voor $\operatorname{Re} z > 0$. We zullen ons voor-
eerst met reële z bezighouden. De betekenis van de Γ -functie berust
op de eenvoudige functionaalvergelijking

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Wegens $\Gamma(1)=1$ volgt hieruit dat de Γ -functie voor natuurlijke getal-
len de faculteits-functie voorstelt

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Met behulp hiervan is de Γ functie ook voor negatieve z te definieren.

Definitie. Is z een niet-positief getal $\neq 0, -1, -2, \dots$ en is n een
positief geheel getal met $-n < z < -n+1$, dan definiëren we $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} .$$

Ook hiervoor geldt $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

Men bewijst gemakkelijk de volgende eigenschappen van de Γ -functie:

$$\lim_{z \downarrow 0} \Gamma(z) = \infty, \quad \lim_{z \uparrow 0} \Gamma(z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = \infty.$$

Voor $z \neq 0, -1, -2, \dots$ gelden de betrekkingen

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{n}}}{1 + \frac{z}{n}}$$

(C is de constante van Euler).

VII

Een generalisatie van de Γ -functie voor reële waarden van z is de analytische voortzetting van deze functie voor complexe waarden van z . $\Gamma(z)$ is een analytische functie van z , en heeft alleen polen voor $z=0, -1, -2, -3, \dots$

Ook hiervoor geldt de functionaalvergelijking:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Verder geldt de functionaalvergelijking

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

voor $z=\frac{1}{2}$ vindt men $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Verdubbelingsformule (Legendre).

$$\Gamma(2z) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2z-1} \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$

De Bêtafunctie

De integraal $\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$ heeft betekenis voor $\text{Re } z > 0$,

$\text{Re } w > 0$. We definieren hiervoor

$$(1) \quad B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$$

(naam te danken aan Binet (1839)).

Betrekking tussen Γ en B-functie:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Uit (1) volgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\phi)^{2z-1} (\cos\phi)^{2w-1} d\phi = \frac{1}{2} B(z, w).$$

Toepassing $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 \phi \cos^5 \phi \, d\phi = \frac{1}{2} B(2\frac{1}{2}, 3) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2\frac{1}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(5\frac{1}{2})} = \frac{8}{315}.$

Van grote waarden van z heeft men de asymptotische betrekking:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} \, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$$

of

$$n! = n\Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi n} \, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

(formule van Stirling).

Hypergeometrische functies

a, b, c zijn willekeurige constanten, $c \neq 0, -1, -2, \dots$.

De volgende reeks heet de hypergeometrische reeks (Gauss):

$$(2) \quad 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} z^2 + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)n!} z^n + \dots$$

Voor $a=1$, $b=c$, verkrijgt men de meetkundige reeks. Voor afkorting gebruikt men de volgende notatie:

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z.$$

(n geheel positief)

De reeks (2) kan men schrijven als

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n.$$

Met het convergentiekenmerk van d'Alembert bewijst men dat de convergentiestraal van de reeks gelijk is aan 1. Convergentie voor $|z| < 1$, divergentie voor $|z| > 1$.

Stellen we $A_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!}$ en $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$

dan is

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} z^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n z^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) A_{n+1} z^{n-1},$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \text{ of } (a+n)(b+n) A_n = (c+n)(n+1) A_{n+1}.$$

Door vermenigvuldigen met z^n verkrijgen we:

$$ab A_n z^n + z(a+b) n A_n z^{n-1} + z^2 n^2 A_n z^{n-2} = c(n+1) A_{n+1} z^n + z n(n+1) A_{n+1} z^{n-1}$$

of

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} ab A_n z^n + z(a+b+1) \sum_{n=1}^{\infty} n A_n z^{n-1} + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n z^{n-2} \\ = c \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} z^n + z \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) A_{n+1} z^{n-1} \end{aligned}$$

of

$$aby + z(a+b+1)y' + z^2 y'' = cy' + zy'' \text{ of}$$

$$z(1-z)y'' + \{c - (a+b+1)z\} y' - aby = 0.$$

Dit is de hypergeometrische differentiaalvergelijking.

VIII Speciale functies

Substitueert men in de differentiaalvergelijking

$$y = z^{1-c} u,$$

dan gaat deze over in

$$z(1-z)u'' + \{2-c-(a+b+3-2c)z\}u' - \{(a+b-c+1)(1-c)+ab\}u = 0.$$

Stelt men $2-c=c'$, $a-c+1=a'$, $b-c+1=b'$, dan verkrijgt men

$$z(1-z)u'' + \{c'-(a'+b'+1)z\}u' - a'b'u = 0,$$

en dit is weer een hypergeometrische differentiaalvergelijking. We hadden verondersteld $c \neq 0, -1, -2, \dots$ als we nu bovendien eisen dat c geen natuurlijk getal is, dan is $2-c=c' \neq 0, -1, -2, \dots$, en is de hypergeometrische reeks, samengesteld met a', b', c' een oplossing van de vergelijking. Noemen we de functie die verkregen wordt door analytische voortzetting van de hypergeometrische reeks de hypergeometrische functie $F\{a, b; c; z\}$, dan zijn de functies $F\{a, b; c; z\}$ en $z^{1-c} F\{a', b'; c'; z\}$ twee oplossingen van de hypergeometrische vergelijking, welke lineair onafhankelijk zijn (laat $z \rightarrow 0!$). De algemene oplossing heeft dus de vorm

$$y = AF\{a, b; c; z\} + Bz^{1-c}F\{a', b'; c'; z\}, \text{ of}$$

$$(1) \quad y = AF\{a, b; c; z\} + Bz^{1-c}F\{a-c+1, b-c+1; 2-c; z\},$$

met willekeurige constanten A en B.

$F\{a, b; c; z\}$ verliest zijn betekenis als c een van de getallen $0, -1, -2, \dots$ is. Dit is niet het geval met het quotient (als limiet)

$$\frac{F\{a, b; c; z\}}{\Gamma(c)} = F^*\{a, b; c; z\}.$$

Stel $c \neq 1-m$ met $m=1, 2, 3, \dots$, dan is

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow 1-m} \frac{F\{a, b; c; z\}}{\Gamma(c)} &= \lim_{c \rightarrow 1-m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{\Gamma(n-m+1)n!} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{\Gamma(n-m+1)n!} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)z^n}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(n-m+1)n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m+n)\Gamma(b+m+n)z^{n+m}}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(n+1)(n+m)!} = \frac{(a)_m (b)_m}{m!} z^m F\{a+m, b+m; m+1; z\}.
\end{aligned}$$

Voor gehele c is (1) geen algemene oplossing meer, zelfs niet als men $F\{a, b; c; z\}$ door $F^*\{a, b; c; z\}$ vervangt, daar $F^*\{a, b; c; z\}$ en $z^{1-c}F\{a-c+1, b-c+1; 2-c; z\}$ niet langer lineair onafhankelijk zijn. Nu substitueren we in de hypergeometrische differentiaalvergelijking

$$y = (1-z)^{c-a-b} u,$$

dan verkrijgen we na berekening:

$$z(1-z)u'' + \{c - z(2c+1-a-b)\}u' - (c-b)(c-a)u = 0,$$

welke voor $a' = c-a, b' = c-b, c' = c$ overgaat in

$$z(1-z)u'' + \{c' - (a' + b' + 1)z\}u' - a'b'u = 0,$$

met oplossing

$$u = F\{a', b'; c'; z\} = F\{c-a, c-b; c; z\}.$$

Dus $(1-z)^{c-a-b} F\{c-a, c-b; c; z\}$ is een oplossing van de hyp. geom. d.v., en kan dus geschreven worden als

$$(1-z)^{c-a-b} F\{c-a, c-b; c; z\} = A_0 F\{a, b; c; z\} + B_0 z^{1-c} F\{a-c+1, b-c+1; 2-c; z\},$$

met geschikt gekozen constanten A_0 en B_0 .

De functie in het linkerlid heeft in punt $z=0$ de ontwikkeling

$$[1 - (c-a-b)z + \dots] [1 + \frac{(c-a)(c-b)}{c} z + \dots] = 1 + k_1 z + k_2 z^2 + \dots,$$

en de functie in het rechterlid

$$A_0 [1 + \frac{ab}{c} z + \dots] + B_0 z^{1-c} [1 + \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{2-c} z + \dots].$$

VIII

Hieruit volgt $A_0=1$ en $B_0=0$ en de belangrijke zelftransformatieformule voor de hypergeometrische functie

$$(2) \quad F\{a,b;c;z\} = (1-z)^{c-a-b} F\{c-a,c-b;c;z\}.$$

Om

continuïteitsredenen geldt (2) ook voor gehele $c > 0$. Voor $c=0,-1,-2,\dots$ worden beide leden oneindig.

De formule geldt als men de F vervangt door de corresponderende F^* .

Nu substitueren we $z=1-\xi$, $y=y$; waardoor de hyp. geom. d.v. overgaat in

$$\xi(1-\xi)y'' + [a+b-c+1-(a+b+1)\xi]y' - aby = 0.$$

Door nu te stellen $a'=a, b'=b, c'=a+b-c+1$, is de vergelijking weer een hyp. geom. vergelijking met oplossing $F\{a,b;a+b-c+1;1-z\}$.

De algemene oplossing wordt door de substitutie $\xi=1-z$

$$y = A_1 F\{a,b;a+b-c+1;1-z\} + B_1 (1-z)^{c-a-b} F\{c-b,c-a;c-a+b+1;1-z\} \quad \text{mits } c-a-b \neq \text{geheel getal.}$$

We substitueren eerst $z = \frac{1}{\xi}$ en daarna $y = \xi^a u$. De hyp. geom. d.v. wordt dan

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \{a-b+1-\xi(2a+2-c)\} \frac{du}{d\xi} - a(a-c+1)u = 0.$$

Door nu te stellen $c'=a-b+1$, $a'=a, b'=a-c+1$ komt men tot de oplossing

$$z^{-a} F\{a,a-c+1;a-b+1;\frac{1}{z}\} \quad \text{en}$$

de algemene oplossing wordt:

$$y = A_2 z^{-a} F\{a,a-c+1;a-b+1;\frac{1}{z}\} + B_2 z^{-b} F\{b,b-c+1;b-a+1;\frac{1}{z}\}.$$

Op soortgelijke wijze vindt men door te substitueren: $z = \frac{1}{1-\xi}$, $z = \frac{\xi}{\xi-1}$, $z = \frac{\xi-1}{\xi}$ drie andere voorstellingen van de algemene oplossing. Dus totaal 6 voorstellingen met 12 particuliere oplossingen. De eerste 6 zijn bijv. $F\{a,b;c;z\}$, $z^{1-c} F\{a-c+1,b-c+1;2-c;z\}$, $F\{a,b;a+b-c+1;1-z\}$, $(1-z)^{c-a-b} F\{c-b,c-a;c-a+b+1;1-z\}$, $z^{-a} F\{a,a-c+1;a-b+1;\frac{1}{z}\}$, $z^{-b} F\{b,b-c+1;b-a+1;\frac{1}{z}\}$.

Uit deze 12 oplossingen kan men er tenslotte 24 verkrijgen door de zelftransformatieformule toe te passen.

IX Speciale functies

Formules van Bolza

$$(1) F\{a, b; c; z\} = A_1 F\{a, b; a+b-c+1; 1-z\} + B_1 (1-z)^{c-a-b} F\{c-b, c-a; c-a-b+1; 1-z\},$$

waarin

$$A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Om dit te bewijzen maken we gebruik van de vergelijking:

$$(2) F\{a, b; c; 1\} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad \text{voor } \operatorname{Re}(c-a-b) > 0 \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$$

Deze formule zullen we laten bewijzen.

Door in (1) $z=1$ te substitueren en $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ te kiezen, vindt men onmiddellijk A_1 .

Pas daarna op het linkerlid van (1) de zelftransformatieformule toe, en vermenigvuldig met $(1-z)^{a+b-c}$, dan verkrijgt men:

$$F\{c-a, c-b; c; z\} = A_1 (1-z)^{a+b-c} F\{a, b; a+b-c+1; 1-z\} + B_1 F\{c-b, c-a; c-a-b+1, 1-z\}$$

Kies $\operatorname{Re}(a+b-c) > 0$ en substitueer weer $z=1$, dan vindt men B_1 .

De betekenis van de formules van Bolza berust o.a. op het feit, dat men met behulp daarvan de hypergeometrische reeks over de rand van de cirkel $|z| < 1$ analytisch kan voortzetten.

Integraalvoorstelling

Beschouw $\int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$, met $|z| < 1$.

Deze integraal heeft betekenis van $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$.

Ontwikkel $(1-zt)^{-a}$ volgens de binomiaalreeks ($|z| < 1$).

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (zt)^k = \left(1 + \frac{a}{1} zt + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} z^2 t^2 + \dots\right)$$

Termsgewijze integratie is geoorloofd:

$$\int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)z^k}{k!} \int_0^1 t^{b+k-1} (1-t)^{c-b-1} dt$$

IX

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!} z^k B(b+k, c-b) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!} \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)} z^k = \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F\{a, b; c; z\}.
 \end{aligned}$$

Dus

$$F\{a, b; c; z\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

De hypergeometrische reeks is convergent voor $|z| < 1$.

Men kan nu bewijzen dat op de rand van $|z|=1$ een voldoende voorwaarde voor absolute convergentie is.

$$\operatorname{Re}(c-a-b) > 0.$$

Volgens het theorema van Abel is dan als we $z \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
 F\{a, b; c; 1\} &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \lim_{z \rightarrow 1} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-a-1} dt = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} B(b, c-b-a) \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)}, \text{ zodat} \\
 F\{a, b; c; 1\} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)},
 \end{aligned}$$

waarmede (2) bewezen is.

In dit bewijs hebben we gebruik gemaakt van de veronderstellingen $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ en $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$.

Nu kan men bewijzen dat $F\{a, b; c; 1\}$ een analytische functie is van de parameters a, b en c als $c \neq 0, -1, -2, \dots$ en $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$. Beide leden van (2) zijn analytische functies van a, b en c , zonder de voorwaarden $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Dus geldt (2) voor $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$.

Verder kan men bewijzen:

IX

Voor $|z| < 1$ is de functie $F\{a,b;c;z\}$ analytisch in a, b en c voor alle eindige a, b en c , met als enkelvoudige polen $c=0, -1, -2, \dots$

Speciale gevallen

Past men (2) toe met $a=-n$ (n is een positief geheel getal) dan vindt men

$$\begin{aligned} F\{-n, b; c; 1\} &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+n)} \\ &= \frac{(c-b)(c-b+1)\dots(c-b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \quad (\text{gelijkheid van Vandermonde}) \end{aligned}$$

Voor $z=-1$ en bovendien $a=1+b-c$ vindt men voor de integraal in (2):

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} dt. \text{ Stelt men } 1-t^2=u, \text{ dan gaat deze integraal over in} \\ &\frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}b-1} u^{c-b-1} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}b, c-b\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-\frac{1}{2}b)}, \text{ dus} \end{aligned}$$

$$F\{1+b-c, b; c; -1\} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(c)\Gamma(\frac{1}{2}b)}{\Gamma(b)\Gamma(c-\frac{1}{2}b)}$$

Van $a=b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$ vinden we:

$$F\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right\} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-z^2t)}}, \text{ en hieruit met de substitutie:}$$

$$z^2 t = \sin^2 \phi:$$

$$F\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right\} = \frac{1}{z} \arcsin z$$

$$F\{a, b; b; z\} = 1 + \frac{az}{1!} + \frac{a(a+1)z^2}{2!} \dots = (1-z)^{-a}.$$

$$F\{1, 1; 2; z\} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} = \int_0^1 (1-zt)^{-1} dt = -\frac{\ln(1-z)}{z}.$$

De formules van Bolza stellen eenvoudige relaties voor tussen $F\{a, b; c; z\}$ en andere hyp. geom. functies met in de plaats van z , zekere lineaire

IX

functies van z (bijv. $1-z$, $\frac{1}{z}$, ...). Men noemt deze lineaire transformaties van de hypergeometrische functies. Als er zekere beperkingen aan a, b en c opgelegd worden, bestaan er ook soortgelijke relaties voor kwadratische transformaties.

Is bijv. $c = \frac{a+b+1}{2}$, dan hebben we de volgende formule

$$(3) \quad F\left\{a, b; \frac{a+b+1}{2}; z\right\} = A^* F\left\{\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b; \frac{1}{2}; (2z-1)^2\right\} \\ + B^* (2z-1) F\left\{\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}(b+1); \frac{3}{2}; (2z-1)^2\right\},$$

met

$$A^* = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}, \quad B^* = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

Het bewijs wordt uitgevoerd door in de hypergeometrische vergelijking te substitueren: $\xi = (2z-1)^2$, dan ontstaat er opnieuw een hyp. geom. verg., waaruit we concluderen dat $F\left\{\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b; \frac{1}{2}; (2z-1)^2\right\}$ en

$$(2z-1) F\left\{\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}(b+1); \frac{3}{2}; (2z-1)^2\right\}$$

oplossingen zijn van de hyp. geom. vergelijking.

Dus geldt (3) met geschikt gekozen coëfficiënten A^* en B^* .

Door te substitueren $z=0$ en $z=1$ volgen dan na wat berekening A^* en B^* .

$$F\{a, b; c; z\} = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} z^2 + \dots$$

(binnen de cirkel $|z| < 1$), dus is in hetzelfde gebied:

$$F'\{a, b; c; z\} = \frac{ab}{c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1) \cdot 1!} z + \dots \\ = \frac{ab}{c} \left\{ 1 + \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)1!} z + \frac{(a+1)(a+2)(b+1)(b+2)}{(c+1)(c+2)2!} z^2 + \dots \right\} \\ = \frac{ab}{c} F\{a+1, b+1; c+1; z\}.$$

Dus

$$\frac{dF\{a, b; c; z\}}{dz} = \frac{ab}{c} F\{a+1, b+1; c+1; z\}$$

X Speciale functies

Vervolg Hypergeometrische functies

De betrekkingen tussen "naburige" functies

Gauss definieerde als "naburige" functie van $F\{a,b;c;z\}$ elk van de zes functies die verkregen worden door één van de parameters met 1 te vermeerderen of te verminderen. Gemakshalve gebruiken we de notaties:

$$F = F\{a,b;c;z\}, \quad F(a^+) = F\{a+1,b;c;z\}, \\ F(a^-) = F\{a-1,b;c;z\},$$

en op dezelfde wijze $F(b^+)$, $F(b^-)$, $F(c^+)$ en $F(c^-)$.

Gauss bewees dat er tussen F en elk tweetal van de naburige functies een lineaire betrekking bestaat met als coëfficiënten functies van z van ten hoogste de eerste graad.

Er zijn 15 van dergelijke betrekkingen. We zullen er hier enkele afleiden.

Stellen we
$$\delta_n = \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \quad \text{dan is} \quad F = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n,$$

en
$$F(a^+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a+n}{a} \delta_n.$$

Evenzo
$$F(a^-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a-1}{a+n-1} \delta_n.$$

$$F(b^+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b+n)_n z^n}{(c)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b-1}{b-1+n} \delta_n,$$

$$F(c^+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c+n)_n z^n}{(c)_n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c-1+n}{c-1} \delta_n.$$

We voeren nu in de operator $\Theta = z\left(\frac{d}{dz}\right)$, dan is $\Theta z^n = n z^n$, zodat

$$(1) \quad (\Theta+a)F = \sum_{n=0}^{\infty} (a+n)\delta_n = aF(a^+),$$

$$(2) \quad (\Theta+b)F = bF(b^+),$$

$$(3) \quad (\Theta+c-1)F = (c-1)F(c^-).$$

Uit (1), (2) en (3) volgt:

$$\begin{aligned} (a-b)F &= aF(a^+) - bF(b^+) \\ (a-c+1)F &= aF(a^+) - (c-1)F(c^-), \end{aligned}$$

twee van de eenvoudigste van de bedoelde betrekkingen.

Beschouw nu

$$\begin{aligned} \Theta F &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1} z^n}{(c)_{n+1} n!} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n)(b+n)}{c+n} \delta_n \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n + (a+b-c) + \frac{(c-a)(c-b)}{c+n} \right\} \delta_n \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} n \delta_n + (a+b-c)z \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n + \frac{(c-a)(c-b)}{c} z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{c+n} \delta_n \end{aligned}$$

waaruit

$$(4) \quad (1-z)\Theta F = (a+b-c)zF + \frac{(c-a)(c-b)}{c} zF(c^+).$$

Volgens (1) is $\Theta F = -aF + aF(a^+)$, en dus is

$$(1-z)\Theta F = -a(1-z)F + a(1-z)F(a^+), \text{ en uit (4)}$$

$$\{a + (b-c)z\}F = a(1-z)F(a^+) - \frac{(c-a)(c-b)}{c} zF(c^+).$$

Confluent hypergeometrische functie

Deze functie ontstaat uit de hypergeometrische functie

$$F\{a, b; c; \frac{x}{b}\}$$

door de limietovergang $b \rightarrow \infty$, indien deze limiet bestaat. We gaan uit van de hypergeometrische differentiaalvergelijking, en vervangen x door $\frac{x}{b}$ en dus dx door $\frac{dx}{b}$.

$$b^2 \frac{x}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + b \left[c - (a+b+1) \frac{x}{b} \right] \frac{dy}{dx} - aby = 0.$$

Na deling door b en limietovergang $b \rightarrow \infty$, vinden we

$$(5) \quad \boxed{xy'' + (c-x)y' - ay = 0}.$$

Dit is de differentiaalvergelijking van de confl. h.g. functie.

We proberen als oplossing de machtreeks

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

en veronderstellen $c \neq 0, -1, -2, \dots$.

Na invulling en nulstellen der coëfficiënten vinden we

$$a_1 = \frac{a}{c} a_0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n(n+a)}{(n+1)(n+c)}.$$

We stellen $a_0 = 1$, dan is

$$a_n = \frac{a+n-1}{n(c+n-1)} \frac{a+n-2}{(n-1)(c+n-2)} \cdots \frac{a}{1 \cdot c} = \frac{(a)_n}{(c)_n n!}.$$

De oplossing is dus

$$\phi\{a, c; x\} = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

ook wel aangeduid door ${}_1F_1\{a, c; x\}$.

Het kenmerk van d'Alembert wijst uit dat de convergentiestraal van deze machtreeks oneindig groot is.

Voor $a = c$ heeft men

$$\phi\{a, a; x\} = e^x.$$

Bovendien

$$F\{a, b; c; \frac{x}{b}\} = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{b} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{b^2} + \dots$$

en we zien

$$\phi\{a, c; x\} = \lim_{b \rightarrow \infty} F\{a, b; c; \frac{x}{b}\}.$$

Door te substitueren in (5) $y = x^{1-c} z$, gaat deze d.v. over in

$$xz'' + z'(2-c-x) - z(a-c+1) = 0,$$

waarvan de oplossing dus is $\phi\{a-c+1, 2-c; x\}$.

De algemene oplossing van (5) is dus

$$y = A \phi\{a, c; x\} + B x^{1-c} \phi\{a-c+1, 2-c; x\},$$

met willekeurige constanten A en B ($c \neq$ geheel getal).

Substitueert men in (5) $y = e^x z$, dan gaat (5) over in

$$xz'' + (c+x)z' + (c-a)z = 0,$$

en daarna door de substitutie $x = -u$ over in

$$uz'' + (c-u)z' - (c-a)z = 0,$$

met als oplossing $\phi\{c-a, c; u\}$.

Dus $e^x \phi\{c-a, c; -x\}$ is een particuliere oplossing van (5), dus geldt

met geschikt gekozen constanten A_0 en B_0

$$\phi\{a,c;x\} = e^x \left[A_0 \phi\{c-a,c;-x\} + B_0 (-x)^{1-c} \phi\{1-a,2-c;-x\} \right]$$

($c \neq$ geheel getal).

Door ontwikkeling in machtreeksen en gelijkstelling vindt men $A_0 = 1$
en $B_0 = 0$, zodat

$$\phi\{a,c;x\} = e^x \phi\{c-a,c;-x\}$$

(Formule van Kummer).

Vanwege de consistentie van de analytische functies geldt deze formule
ook als c een natuurlijk getal is.

XI Speciale functies

Integraalvoorstelling van de confluyente h.g. functie

In de integraalvoorstelling van de h.g. functie vervangen we x door $\frac{x}{b}$:

$$F\{a, b; c; \frac{x}{b}\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \left(1 + \frac{xt}{-b}\right)^{-b} dt$$

$$(\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, |x| < |b|)$$

en na limietovergang $b \rightarrow \infty$ (als dit onder het integraalteken geoorloofd is)

$$(1) \quad \phi\{a; c; x\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$$

De geldigheid van (1) wordt bewezen door e^{xt} in een machtreeks te ontwikkelen, en de uniforme convergentie te gebruiken. Het rechterlid is dan

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} B(n+a, c-a) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (a)_n}{n! (c)_n} = \phi\{a; c; x\}.$$

Gemakkelijk vindt men door differentiëren

$$\phi'\{a; c; x\} = \frac{a}{c} \phi\{a+1; c+1; x\}$$

Polynomen van Jacobi

De orthogonale polynomen $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), bepaald door het interval $(-1, +1)$ en de gewichtsfunctie

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad \alpha > -1, \beta > -1$$

noemen we polynomen van Jacobi.

We zullen ze normaliseren door te stellen

$$(2) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

De algemene formule van Rodriguez:

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n p(x)} D^n \{p(x) X^n\} \quad \text{met } X = (x-a)(b-x)$$

wordt in dit geval

$$\begin{aligned} K_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} D^n \{ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \} = \\ &= (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k \end{aligned}$$

en wegens (2)

$$K_n \binom{n+\alpha}{n} = (-1)^n n! \binom{n+\alpha}{n} 2^n$$

of

$$K_n = (-2)^n n! , \quad \text{dus}$$

(3)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (x-1)^{n-k} (x+1)^k .$$

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1,$$

$$P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \binom{1+\alpha}{k} \binom{1+\beta}{1-k} (x-1)^{1-k} (x+1)^k = \frac{1}{2} [(\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta],$$

$$P_2^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{8} \{ [(\alpha+\beta)^2 + 7(\alpha+\beta) + 12]x^2 + 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)x + (\alpha-\beta)^2 - (\alpha+\beta) - 4 \}.$$

Als men in (3) x vervangt door $-x$ en k door $n-k$ verkrijgt men

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x).$$

Orthogonaliteitseigenschap:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

In de algemene theorie van de orthogonale polynomen stelden we

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots \quad (k_n \neq 0).$$

We willen nu deze k_n en k'_n in het geval van de polynomen van Jacobi berekenen.

Daartoe leiden we eerst twee betrekkingen tussen binomiaalcoëfficiënten af

$$(1+x)^\lambda = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\lambda}{h} x^h, \quad (1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k;$$

door vermenigvuldiging

$$(1+x)^{\lambda+\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{h=0}^n \binom{\lambda}{h} \binom{\mu}{n-h},$$

en daaruit volgt door n maal te differentiëren voor $x = 0$ de betrekking:

$$(4) \quad \binom{\lambda+\mu}{n} = \sum_{h=0}^n \binom{\lambda}{h} \binom{\mu}{n-h}.$$

Vermenigvuldigt men de afgeleide van de eerste ontwikkeling nl.

$$\lambda(x+1)^{\lambda-1} = \sum_{h=1}^{\infty} h \binom{\lambda}{h} x^{h-1} = \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} h \binom{\lambda}{h} x^h,$$

met de tweede, dan verkrijgt men

$$\lambda x(1+x)^{\lambda+\mu-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{h=1}^n h \binom{\lambda}{h} \binom{\mu}{n-h},$$

en daaruit door n maal te differentiëren voor $x = 0$:

$$(5) \quad \lambda \binom{\lambda+\mu-1}{n-1} = \sum_{h=1}^n h \binom{\lambda}{h} \binom{\mu}{n-h}.$$

Uit (4) en (5) volgt:

$$(x-1)^{n-k}(x+1)^k = x^n + (2k-n)x^{n-1} + \dots,$$

dus uit (3)

$$k_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} = \frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} \quad \text{en}$$

$$\begin{aligned} k'_n &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (2k-n) = \\ &= \frac{1}{2^n} \left[2(n+\alpha) \binom{2n+\alpha+\beta-1}{n-1} - n \binom{2n+\alpha+\beta}{n} \right] = \\ &= \frac{\alpha-\beta}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta-1}{n-1}. \end{aligned}$$

In de algemene theorie speelt de grootheid

$$h_n = \int_a^b p(x) \{P_n(x)\}^2 dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

een rol.

Met de formule van Rodriguez verkrijgt men

$$K_n h_n = K_n \int_a^b p(x) P_n^2(x) dx = \int_a^b D^n(pX^n) P_n(x) dx ,$$

en met behulp van partiële integratie vindt men hiervoor

$$D^{n-1} \{pX^n\} P_n(x) \Big|_a^b - \int_a^b D^{n-1}(pX^n) P_n'(x) dx , \quad \text{zodat}$$

$$K_n h_n = - \int_a^b D^{n-1}(pX^n) P_n'(x) dx .$$

Na herhaalde partiële integratie:

$$K_n h_n = (-1)^n \int_a^b pX^n P_n^{(n)}(x) dx , \quad \text{of}$$

$$h_n = (-1)^n \frac{n! k_n}{K_n} \int_a^b pX^n dx .$$

In het geval van de Jacobi polynomen is dit

$$h_n = \frac{(-1)^n n! k_n}{K_n} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx .$$

Substitueren we $1+x = 2\xi$, dan zien we

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx = 2^{2n+\alpha+\beta+1} \int_0^1 \xi^{\beta+n} (1-\xi)^{\alpha+n} d\xi =$$

$$= 2^{2n+\alpha+\beta+1} B(\beta+n+1, \alpha+n+1) = 2^{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} ,$$

Zodat wegens $K_n = (-1)^n 2^n n!$:

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} .$$

XII Speciale functies

De constanten in de recurrente betrekking zijn:

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad B_n = A_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right), \quad C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}}.$$

In ons geval

$$A_n = \frac{1}{2^{n+1}} \binom{2n+\alpha+\beta+2}{n+1} \frac{2^n}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)},$$

$$B_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)} \left[\frac{\alpha-\beta}{2^{n+1}} \binom{2n+\alpha+\beta+1}{n} \frac{2^{n+1}}{\binom{2n+\alpha+\beta+2}{n+1}} + \right. \\ \left. - \frac{\alpha-\beta}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta-1}{n-1} \frac{2^n}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} \right] = \\ = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(2n+\alpha+\beta+1)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}.$$

$$C_n = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}$$

De recurrente betrekking

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$$

wordt dus hier

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = (2n+\alpha+\beta+1) \{ (2n+\alpha+\beta+2) \cdot \\ \cdot (2n+\alpha+\beta)x + \alpha^2 - \beta^2 \} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$$

Differentiaalvergelijking van de Jacobi polynomen

We zullen eerst een algemene stelling bewijzen.

Stelling. Laat $p(x)$ aan een diff.verg.

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{D+Ex}{A+Bx+Cx^2} \quad (\text{diff.verg. van Pearson})$$

voldoen, waarin A, B, C, D en E constanten zijn, en laat $(A+Bx+Cx^2)p(x)$ nul worden in de eindpunten van het interval, dan voldoet $P_n(x)$ aan een diff.verg. van de gedaante:

$$\alpha(x)P_n''(x) + \beta(x)P_n'(x) + \gamma_n P_n(x) = 0 ,$$

waarin $\alpha(x) = A+Bx+Cx^2$, $\beta(x)$ een veelterm van de eerste graad is, en γ_n van n afhangt.

Bewijs. Zij $q_m(x)$ een willekeurige veelterm van de graad $m < n$. We passen op de integraal

$$(1) \quad I = \int_a^b q_m(x) \frac{d}{dx} \{ \alpha(x)p(x)P_n'(x) \} dx$$

partiële integratie toe:

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{\alpha(x)p(x)P_n'(x)q_m(x)}_{=0} \Big|_a^b - \int_a^b \alpha(x)p(x)P_n'(x)q_m'(x) dx = \\ &= - \underbrace{\alpha(x)p(x)P_n(x)q_m'(x)}_{=0} \Big|_a^b + \int_a^b P_n(x) \frac{d}{dx} \{ \alpha(x)p(x)q_m'(x) \} dx . \end{aligned}$$

Maar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \alpha(x)p(x)q_m'(x) \} &= (B+2Cx)p(x)q_m'(x) + \alpha(x)p'(x)q_m'(x) + \alpha(x)p(x)q_m''(x) = \\ &= p(x) \left[(B+2Cx)q_m'(x) + (D+Ex)q_m'(x) + \alpha(x)q_m''(x) \right]. \end{aligned}$$

De uitdrukking tussen [] is een veelterm $r_m(x)$ van de graad $\leq m$. Dus

$$\int_a^b P_n(x)p(x)r_m(x) dx = 0, \text{ en dus } I = 0.$$

In de oorspronkelijke uitdrukking in (1) is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \alpha(x)p(x)P_n'(x) \} &= (B+2Cx)p(x)P_n'(x) + \alpha(x)p'(x)P_n'(x) + \alpha(x)p(x)P_n''(x) = \\ &= p(x) \left[(B+2Cx)P_n'(x) + (D+Ex)P_n'(x) + \alpha(x)P_n''(x) \right], \end{aligned}$$

dus van de vorm $p(x)\Pi_n(x)$, waarin $\Pi_n(x)$ van een graad $\leq n$ is.

Voor een willekeurige veelterm $q_m(x)$ van de graad $m < n$ is dus

$$\int_a^b p(x)\Pi_n(x)q_m(x) dx = 0.$$

$\Pi_n(x)$ heeft dus de orthogonaliteitseigenschap met gewichtsfunctie $p(x)$, moet dus een constant aantal malen $P_n(x)$ zijn. Er bestaat dus een constante K_n zó dat

$$\Pi_n(x) = \alpha(x)P_n''(x) + \left[(B+D) + (2C+E)x \right] P_n'(x) = K_n P_n(x).$$

Door gelijkstelling van de coëfficiënten van x^n in beide leden vindt men

$$\begin{aligned} Cn(n-1)k_n + (2C+E)nk_n &= K_n k_n, \text{ of} \\ K_n &= Cn(n+1) + En, \end{aligned}$$

waarmede de stelling bewezen is.

In het geval van de Jacobi polynomen is $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, en dus

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta)x}{1-x^2},$$

die de gedaante van Pearson heeft met $A=1$, $B=0$, $C=-1$, $D=\beta-\alpha$, $E=-(\alpha+\beta)$, terwijl $(1-x^2)p(x)$ nul wordt in de eindpunten $x = \pm 1$ als $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

De differentiaalvergelijking wordt dus

$$(1-x^2)P_n''(x) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]P_n'(x) + n(\alpha+\beta+n+1)P_n(x) = 0$$

XIII Speciale functies

Substitueert men in de d.v. van de Jacobi polynomen $x = 1-2\xi$, dan verkrijgt men de hypergeometrische d.v.

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \{(\alpha+1) - (\alpha+\beta+2)\xi\} \frac{dy}{d\xi} + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$$

waarvan een oplossing is $y = F\{-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\}$.

Dit is een veelterm, en we vinden

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = A F\{-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\},$$

waarin de constante A bepaald wordt door $x=1$ te nemen.

We vinden wegens $P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$, dat $A = \binom{n+\alpha}{n}$.

$$(1) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} F\{-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\}.$$

Jacobi polynomen zijn dus hypergeometrische functies.

Uit $P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x)$ leidt men direct af

$$(1a) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n} F\{-n, n+\alpha+\beta+1; \beta+1; \frac{1+x}{2}\}.$$

Voor het geval $\alpha = \beta$ verkrijgen we de ultraspherische polynomen, die we later zullen behandelen.

In dit geval is $\frac{a+b+1}{2} = \frac{-n+n+\alpha+\beta+1}{2} = \alpha+1 = c$, en kunnen we de vroeger afgeleide formule gebruiken:

$$F\{a, b; \frac{a+b+1}{2}; x\} = A^* F\{\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b; \frac{1}{2}; (2x-1)^2\} + B^* (2x-1) F\{\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}(b+1); \frac{3}{2}; (2x-1)^2\}$$

met

$$A^{**} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1+a+b}{2})}{\Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(\frac{1+b}{2})} \quad \text{en} \quad B^{**} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1+a+b}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}.$$

Is n even $= 2m$, dan is $B^{**} = 0$ en

$$\begin{aligned} P_{2m}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \binom{2m+\alpha}{2m} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m)\Gamma(\alpha+1+m)} F\{-m, m+\alpha+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\} = \\ &= \binom{2m+\alpha}{2m} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m)\Gamma(\alpha+1+m)} \left(\frac{m-\frac{1}{2}}{m}\right)^{-1} P_m^{(-\frac{1}{2}, \alpha)}(1-2x^2). \end{aligned}$$

zodat

$$P_{2m}^{(\alpha, \alpha)}(x) = (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m)!} \binom{2m+\alpha}{m} P_m^{(-\frac{1}{2}, \alpha)}(1-2x^2),$$

of

$$P_{2m}^{(\alpha, \alpha)}(x) = \frac{(m!)^2}{(2m)!} \binom{2m+\alpha}{m} P_m^{(\alpha, -\frac{1}{2})}(2x^2-1).$$

Op soortgelijke wijze leidt men af voor $n = 2m+1$ (dan is $A^{**} = 0$)

$$P_{2m+1}^{(\alpha, \alpha)}(x) = \frac{m!(m+1)!}{(2m+1)!} \binom{2m+\alpha+1}{m+1} x P_m^{(\alpha, \frac{1}{2})}(2x^2-1).$$

Differentiëren van Jacobi polynomen

Uit (1) en $F^1\{a,b;c;x\} = \frac{ab}{c} F\{a+1,b+1;c+1;x\}$, leidt men af:

$$P_n^{(\alpha,\beta)'}(x) = \binom{n+\alpha}{n} \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)} F\{-n+1, n+\alpha+\beta+2; \alpha+2; \frac{1-x}{2}\},$$

waaruit volgt

$$P_n^{(\alpha,\beta)'}(-x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) .$$

Er zijn vele recurrente betrekkingen tussen de Jacobi polynomen, die we hier niet zullen afleiden. Enkele volgen hieronder:

$$\frac{1}{2}(1-x)(2n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = (n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) ,$$

$$\frac{1}{2}(1+x)(2n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = (n+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) ,$$

$$(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) + (1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = 2P_n^{(\alpha,\beta)}(x) ,$$

$$(\alpha+\beta+2n)P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = (\alpha+\beta+n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) ,$$

$$(\alpha+\beta+2n)P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) = (\alpha+\beta+n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) ,$$

$$P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) - P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) .$$

De integraalvoorstelling van de Jacobi polynomen

De integraalvoorstelling van de hypergeometrische functie (1) geeft geen interessant resultaat.

Een bruikbare voorstelling kan worden verkregen door de integraalformule van Cauchy voor de n^{de} afgeleide van een analytische functie toe te passen op de formule van Rodriguez. Volgens deze formule is

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i K_n p(x)} \int_C \frac{p(t)\{X(t)\}^n}{(t-x)^{n+1}} dt .$$

In ons geval

$$(2) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left\{ \frac{t^2-1}{2(t-x)} \right\}^n \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^\alpha \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^\beta \frac{1}{t-x} dt ,$$

waarin C een gesloten kromme die het punt $t=x$ omvat, maar niet de punten ± 1 .

Uit deze integraalvoorstelling kan men een voortbrengende functie afleiden, d.w.z. een in de omgeving van $z=0$ analytische functie met de eigenschap

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) z^n .$$

We stellen in (2):

$$\frac{t^2-1}{2(t-x)} = \frac{1}{z} ,$$

dus

$$t = -\frac{1}{z} \{ 1 \pm \sqrt{1-2xz+z^2} \} .$$

Kiest men het negatieve teken, dan vinden we

$$t = \frac{1-R}{z} \quad \text{met} \quad R = \sqrt{1-2xz+z^2} .$$

Ingevuld in het rechterlid van (2) geeft dit

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-z+R)^\alpha (1+z+R)^\beta} \frac{1}{z^{n+1}} dz .$$

waarbij C^* de overeenkomstige kromme van C na de transformatie is, die klaarblijkelijk weer gesloten is en nu om de oorsprong gaat.

Volgens de integraalformule van Cauchy is deze integraal gelijk aan

de n^{de} coëfficiënt in de reeksontwikkeling van de functie

$$F(z) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-z+R)^\alpha(1+z+R)^\beta}$$

naar machten van z ($|z| < 1$).

Dus

$$F(z) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-z+R)^\alpha(1+z+R)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) z^n$$

$$R = \sqrt{1-2xz+z^2}$$

$F(z)$ is de voortbrengende functie van de Jacobi polynomen.

Polynomen van Gegenbauer

Een speciaal geval van Jacobi polynomen ontstaat als $\alpha = \beta$, dan verkrijgt men de ultraspherische polynomen. Als polynomen van Gegenbauer definieert men:

$$(3) \quad C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x), \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\lambda > -\frac{1}{2}$$

Hieruit en uit (1) en (1a) leidt men af

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} F\{-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\}$$

en

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(-1)^n (2\lambda)_n}{n!} F\{-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1+x}{2}\}.$$

Voor $\lambda = 0$ is het rechterlid van (3) identiek gelijk aan 0.

In dat geval definiëren we:

$$\begin{aligned} c_n^0(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c_n^\lambda(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2(2\lambda+1) \dots (2\lambda+n-1)}{(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\frac{3}{2}) \dots (\lambda+n-\frac{1}{2})} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x) = \\ &= \frac{2(n-1)!}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2}} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = \frac{2}{ng_n} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) , \end{aligned}$$

$$\text{met } g_n = \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} , \quad g_0 = 1 .$$

XIV Speciale functies

We vinden dus

$$(1) \quad C_n^0(x) = \frac{2}{ng_n} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) .$$

Voor het vervolg veronderstellen we $\lambda \neq 0$. Voor $\lambda = 0$ gelden soortgelijke formules, die met (1) gemakkelijk zijn af te leiden.

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(-x) &= \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(-x) = \\ &= (-1)^n \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(x) = (-1)^n C_n^\lambda(x) . \end{aligned}$$

Evenzo

$$C_n^0(-x) = (-1)^n C_n^0(x) .$$

$C_{2m}^\lambda(x)$ bevat dus alleen even termen en $C_{2m+1}^\lambda(x)$ alleen oneven termen. Verder is

$$C_n^\lambda(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} , \quad C_{2m+1}^\lambda(0) = 0 .$$

Om $C_{2m}^\lambda(0)$ te vinden gebruiken we de formule

$$\begin{aligned} P_{2m}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \frac{(m!)^2}{(2m)!} \binom{2m+2}{m} P_m^{(\alpha, -\frac{1}{2})}(2x^2-1) . \\ C_{2m}^\lambda(x) &= \frac{(2\lambda)_{2m}}{(\lambda + \frac{1}{2})_{2m}} \frac{(m!)^2}{(2m)!} \binom{2m+\lambda-\frac{1}{2}}{m} P_m^{(\lambda-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(2x^2-1) = \\ &= \frac{(\lambda)_m}{m! g_m} P_m^{(\lambda-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(2x^2-1) \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} C_{2m}^{\lambda}(0) &= \frac{(\lambda)_m}{m!g_m} P_m^{(\lambda-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(-1) = \frac{(\lambda)_m}{m!g_m} (-1)^m P_m^{(-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(1) = \\ &= \frac{(\lambda)_m (-1)^m}{m!g_m} \binom{m-\frac{1}{2}}{m} = \frac{(-1)^m (\lambda)_m}{m!} . \end{aligned}$$

$$C_0^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_0}{(\lambda+\frac{1}{2})_0} P_0^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x) = 1 ,$$

$$C_1^{\lambda}(x) = 2\lambda x ,$$

$$C_2^{\lambda}(x) = 2\lambda(\lambda+1)x^2 - \lambda , \quad \text{enz.}$$

Recurrente betrekking

Stelt men in de recurrente betrekking tussen de Jacobi polynomen $\alpha = \beta$, dan vindt men

$$\begin{aligned} 2(n+1)(n+2\alpha+1)(2n+2\alpha)P_{n+1}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= (2n+2\alpha+1)(2n+2\alpha+2)(2n+2\alpha)xP_n^{(\alpha, \alpha)}(x) + \\ &- 2(n+\alpha)^2(2n+2\alpha+2)P_{n-1}^{(\alpha, \alpha)}(x) . \end{aligned}$$

Na deling door $4(n+\alpha)$ en $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2\lambda)P_{n+1}^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x) &= 2(n+\lambda)(n+\lambda+\frac{1}{2})xP_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x) + \\ &- (n+\lambda-\frac{1}{2})(n+\lambda+\frac{1}{2})P_{n-1}^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x) . \end{aligned}$$

waaruit men vindt met de definitie van $C_n^{\lambda}(x)$:

$$(n+1)C_{n+1}^{\lambda}(x) = 2(n+\lambda)x C_n^{\lambda}(x) - (2\lambda+n-1)C_{n-1}^{\lambda}(x)$$

Blijkt ook geldig te zijn voor $\lambda = 0$ ($n \geq 2$).

Orthogonaliteit

Uit de orthogonaliteitsrelaties van de Jacobi polynomen

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } n \neq m \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & \text{als } n=m \end{cases}$$

leiden we af met de definitie van $C_n^{\lambda}(x)$:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_m^{\lambda}(x) C_n^{\lambda}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ \frac{\pi 2^{1-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n! (n+\lambda)! \Gamma^2(\lambda)} & \text{als } m=n, \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Voor $\lambda=0$ vindt men

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} C_n^0(x) C_m^0(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ \frac{2\pi}{n^2} & \text{als } m=n. \end{cases}$$

Differentiaalvergelijking

Uit de d.v. van de Jacobi polynomen leidt men zonder moeite af, dat de Gegenbauer polynomen voldoen aan de d.v.:

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0$$

Formule voor de afgeleide

Op analoge wijze leidt men af:

$$D\{C_n^\lambda(x)\} = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(x)$$

Voortbrengende functie

Volgens de weg via de Jacobi polynomen vindt men de voortbrengende functie:

$$\frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}}}{R} (1-xz+R)^{\frac{1}{2}-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+\frac{1}{2})_n}{(2\lambda)_n} C_n^\lambda(x) z^n$$

$$R = \sqrt{1-2xz+z^2}$$

We zullen nog de volgende voortbrengende functie afleiden:

$$(2) \quad G_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) z^n = (1-2xz+z^2)^{-\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

Bewijs: $G'_\lambda(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n^\lambda(x) z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1}^\lambda(x) z^n,$

en wegens de recurrente betrekking:

$$\begin{aligned}
 G'_\lambda(z) &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n^\lambda(x) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+2\lambda-1) C_{n-1}^\lambda(x) z^n = \\
 &= 2xz \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^\lambda(x) z^{n-1} + 2\lambda x \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) z^n - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^\lambda(x) z^{n-1} + \\
 &\quad - 2\lambda z \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) z^n ,
 \end{aligned}$$

waaruit

$$G'_\lambda(z) = (2xz - z^2) G'_\lambda(z) + 2\lambda(x-z) G_\lambda(z) ,$$

$$\frac{G'_\lambda(z)}{G_\lambda(z)} = \frac{2\lambda(x-z)}{1-2xz+z^2} ,$$

$$G_\lambda(z) = C(1-2xz+z^2)^{-\lambda} .$$

Wegens $G_\lambda(0) = 1$ is $C = 1$, waaruit (2) volgt.

Opmerking. Men kan bewijzen dat voor $\lambda=0$ geldt

$$G_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^0(x) z^n = -\ln(1-2xz+z^2) .$$

XV Speciale functies

Integraalvoorstellingen

Uit de integraalvoorstelling voor de Jacobi polynomen volgt door omzetting:

$$C_n^\lambda(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_n} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{2\pi i} \int_C \frac{(1-t^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}}{(t-x)^{n+1}} dt ,$$

en met de ingevoerde voortbrengende functie $G_\lambda(z)$, door de integraalvoorstelling van Cauchy voor de afgeleide van analytische functies toe te passen:

$$C_n^\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1-2xz+z^2)^{-\lambda} z^{-n-1} dz .$$

C is een gesloten kromme in het complexe vlak om de oorsprong die niet de nulpunten van $1-2xz+z^2$ omsluit.

Met behulp van $G_\lambda(z)$ kunnen we $C_n^\lambda(\cos \theta)$ als een trigonometrische veelterm voorstellen. We veronderstellen weer $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(\cos \theta) z^n &= (1-2z \cos \theta + z^2)^{-\lambda} = (1-e^{-i\theta}z)^{-\lambda} (1-e^{i\theta}z)^{-\lambda} = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \binom{-\lambda}{h} e^{-ih\theta} z^h \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\lambda}{k} e^{ik\theta} z^k = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h e^{-ih\theta} z^h \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{ik\theta} z^k , \end{aligned}$$

als we stellen:

$$(-1)^m \binom{-\lambda}{m} = \frac{(\lambda)_m}{m!} = \alpha_m .$$

Door vergelijking van de coëfficiënten vindt men:

$$C_n^\lambda(\cos \theta) = \sum_{h+k=n} \alpha_h \alpha_k e^{i(k-h)\theta} =$$

$$= \sum_{h+k=n} \alpha_h \alpha_k \cos(k-h)\theta + i \sum_{h+k=n} \alpha_h \alpha_k \sin(k-h)\theta .$$

Het linkerlid is reëel, dus

$$C_n^\lambda(\cos \theta) = \sum_{h=0}^n \alpha_h \alpha_{n-h} \cos(n-2h)\theta .$$

Voor $\lambda = 0$ vindt men:

$$C_n^0(\cos \theta) = \frac{2}{n} \cos n\theta .$$

Al de coëfficiënten α_m zijn positief, dus

$$\left| C_n^\lambda(\cos \theta) \right| \leq \sum_{h=0}^n \alpha_h \alpha_{n-h} = \{C_n^\lambda(\cos \theta)\}_{\theta=0} , \text{ of}$$

$$\left| C_n^\lambda(x) \right| \leq C_n^\lambda(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} \quad (-1 \leq x \leq 1, \lambda > 0) .$$

Polynomen van Tschebyscheff

Uit $G_\lambda(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(\cos \theta) z^n = (1 - 2 \cos \theta z + z^2)^{-\lambda} ,$

volgt voor $\lambda = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^1(\cos \theta) z^n = (1 - 2 \cos \theta z + z^2)^{-1} .$$

Nu is

$$C_n^1(\cos \theta) = \sum_{h=0}^n (\alpha_h)_{\lambda=1} (\alpha_{n-h})_{\lambda=1} \cos (n-2h)\theta = \sum_{h=0}^n \cos (n-2h)\theta .$$

Is n even, dan is

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^n \cos (n-2h)\theta &= 2(\cos n\theta + \cos (n-2)\theta + \dots + \cos 2\theta) + 1 = \\ &= \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} . \end{aligned}$$

Is n oneven, dan is

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^n \cos (n-2h)\theta &= 2(\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos n\theta) = \\ &= \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} . \end{aligned}$$

$$\text{Dus } C_n^1(\cos \theta) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} .$$

We hebben dus de ontwikkeling:

$$(1 - 2z \cos \theta + z^2)^{-1} = 1 + \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} z + \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} z^2 + \dots .$$

$$\text{Voor } \lambda=0 \text{ is } G_0(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^0(\cos \theta) z^n = -\ln(1 - 2z \cos \theta + z^2),$$

$$C_n^0(\cos \theta) = \frac{2}{n} \cos n\theta, \quad \text{dus}$$

$$-\ln(1 - 2z \cos \theta + z^2) = 2\left\{\cos \theta z + \frac{\cos 2\theta}{2} z^2 + \frac{\cos 3\theta}{3} z^3 + \dots\right\} .$$

De polynomen van Tschebyscheff zijn nu die veeltermen in $\cos \theta$, die $\cos n\theta$ en $\frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta}$ voorstellen.

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= T_n(\cos \theta) , & \sin (n+1)\theta &= \sin \theta U_n(\cos \theta) \\ C_n^0(x) &= \frac{2}{n} T_n(x) , & C_n^1(x) &= U_n(x) \end{aligned}$$

De relatie met de Jacobi polynomen is gegeven door

$$\begin{aligned} C_n^0(x) &= \frac{2}{ng_n} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) , & \text{en dus} \\ P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) &= g_n T_n(x) . \end{aligned}$$

Verder is

$$\begin{aligned} C_n^1(x) &= \frac{(2)_n}{(\frac{3}{2})_n} P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) = \frac{1}{2g_{n+1}} P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) , & \text{en dus} \\ P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) &= 2g_{n+1} U_n(x) . \end{aligned}$$

In hypergeometrische functies:

$$T_n(x) = \frac{1}{g_n} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} F\{-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\} = F\{-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\} .$$

dus

$$T_n(x) = F\{-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\} .$$

$$U_n(x) = \frac{(2)_n}{n!} F\{-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\} \quad \text{en dus}$$

$$U_n(x) = (n+1) F\{-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\}$$

Betrekkingen tussen beide functies:

$$T_n = U_n - xU_{n-1} , \quad (1-x^2)U_{n-1} = xT_n - T_{n+1} .$$

Recurrente betrekkingen

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} , \quad U_{n+1} = 2xU_n - U_{n-1} ,$$

$$T_0(\cos \theta) = 1 ,$$

$$T_1(\cos \theta) = \cos \theta = x , \quad T_1(x) = x ,$$

$$T_2(\cos \theta) = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1 ,$$

$$T_3(\cos \theta) = \cos 3\theta = 4x^3 - 3x ,$$

met de recurrente betrekkingen:

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1 .$$

$$U_0 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1 ,$$

$$U_1 = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta = 2x ,$$

$$U_2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 4x^2 - 1 ,$$

$$U_3 = 8x^3 - 4x ,$$

$$U_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1 .$$

Orthogonaliteit

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} T_m T_n dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} U_m U_n dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } m = n \end{cases} .$$

Differentiaalvergelijkingen

Uit de differentiaalvergelijking voor C_n^λ volgt voor $\lambda = 0$

$$(1-x^2)D^2(C_n^0) - xD(C_n^0) + n^2 C_n^0 = 0, \text{ dus}$$

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0,$$

en voor $\lambda = 1$

$$(1-x^2)D^2(C_n^1) - 3xD(C_n^1) + n(n+2)C_n^1 = 0, \text{ dus}$$

$$(1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0$$

XVI Speciale functies

Polynomen van Legendre

Deze polynomen zijn bijzondere gevallen van die van Jacobi met $\alpha = \beta = 0$, of van de Gegenbauer polynomen met $\lambda = \frac{1}{2}$.

De gewichtsfunctie is identiek 1.

$$C_n^{\frac{1}{2}}(x) = P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x).$$

Enkele eigenschappen zijn vroeger reeds afgeleid of kunnen uit de voorgaande afgeleid worden.

Orthogonaliteit:
$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ n + \frac{1}{2} & \text{als } m = n \end{cases}.$$

Recurrente betrekking:
$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Formule van Rodriguez:
$$P_n(x) = \frac{1}{(-2)^n n!} D^n \{(1-x^2)^n\}.$$

Differentiaalvergelijking:
$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Hypergeometrische functie:
$$P_n(x) = F\{-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\}.$$

Differentiëren:
$$P_n'(x) = \frac{1}{2}(n+1)P_{n-1}^{(1,1)}(x),$$

$$P_n'(x) = C_{n-1}^{\frac{3}{2}}(x).$$

Voortbrengende functie:
$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Integraalvoorstelling: $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i \cdot 2^n} \int_{(x^+)} \frac{(1-t^2)^n}{(t-x)^{n+1}} dt$

(Formule van Schäfli)

of $P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0^+)} \frac{dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} z^{n+1}$.

Uit $C_n^\lambda(\cos \theta) = \sum_{h=0}^n \alpha_h \alpha_{n-h} \cos(n-2h)\theta$ volgt voor $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_n^{\frac{1}{2}}(\cos \theta)} &= \sum_{h=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_h}{h!} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n-h}}{(n-h)!} \cos(n-2h)\theta = \\ &= \sum_{h=0}^n g_h g_{n-h} \cos(n-2h)\theta \quad \text{als } g_h = \frac{1 \cdot 3 \dots 2h-1}{2 \cdot 4 \dots 2h} , \end{aligned}$$

zodat

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{h=0}^n g_h g_{n-h} \cos(n-2h)\theta .$$

Substitueert men in de formule van Schäfli:

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta , \quad t = \cos \theta + i \sin \theta e^{i\phi} , \quad \text{dan is} \\ t-x &= i \sin \theta e^{i\phi} , \quad dt = i \sin \theta e^{i\phi} d\phi , \\ 1-t &= 2 \sin \frac{1}{2}\theta \left(\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta e^{i\phi} \right) , \\ 1+t &= 2 \cos \frac{1}{2}\theta \left(\cos \frac{1}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta e^{i\phi} \right) , \\ 1-t^2 &= -2 \sin \theta (\cos \theta + i \sin \theta \sin \phi) e^{i\phi} , \quad \text{zodat} \end{aligned}$$

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \sin \phi)^n d\phi$$

Formule van Laplace .

Polynomen van Laguerre

Gegeven is het interval $(0, \infty)$ en de gewichtsfunctie

$$p(x) = e^{-x} x^{\alpha} \quad \text{met } \alpha > -1.$$

Het systeem van orthogonale polynomen, dat hierbij behoort, is dan volkomen bepaald (op een multiplicatieve factor na).

We zullen die aangeven door $L_0^{(\alpha)}(x)$, $L_1^{(\alpha)}(x)$, $L_2^{(\alpha)}(x)$, ... enz.

$L_n^{(0)}(x)$ wordt gewoonlijk geschreven als $L_n(x)$.

Om de polynomen vast te leggen, wordt de coëfficiënt van x^n gegeven:

$$(1) \quad k_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

De formule van Rodriguez:

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n p(x)} D^n \{p(x) X^n\}$$

wordt in dit geval met $X = x$:

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{K_n} e^x x^{-\alpha} D^n \{e^{-x} x^{n+\alpha}\} = \\ &= \frac{1}{K_n} e^x x^{-\alpha} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} (n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(k+\alpha+1) x^{k+\alpha} = \\ &= \frac{n!}{K_n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

De coëfficiënt van x^n is hierin $\frac{(-1)^n}{K_n}$, en dus in verband met (1)

$$\frac{(-1)^n}{K_n} = \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow K_n = n!,$$

zodat

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} \\ L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} D^n \{e^{-x} x^{n+\alpha}\}. \end{aligned}$$

Zo is bijv. $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$; $L_1^{(\alpha)}(x) = \binom{1+\alpha}{1} - x = -x + \alpha + 1$;
 $L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\alpha+2)x + \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)$.

De coëfficiënt $k_n^{(i)}$ van x^{n-1} in $L_n^{(\alpha)}(x)$ is $k_n^{(i)} = (-1)^{n-1} \frac{n+\alpha}{(n-1)!}$.

De normaliseringsfactor h_n is $h_n = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \left[L_n^{(\alpha)}(x) \right]^2 dx$.

We weten $h_n = (-1)^n \frac{n! k_n^{(n)}}{K_n} \int_a^b p x^n dx$,

zodat in ons geval $h_n = (-1)^n \frac{n! (-1)^n}{n! n!} \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+n} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

Orthogonaliteit

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} & \text{als } m = n \end{cases}.$$

De recurrente betrekking

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (A_n x + B_n) L_n^{(\alpha)}(x) - C_n L_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

wordt in ons geval:

$$(n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x) L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

Voor het bepalen van de differentiaalvergelijking passen we de formule van Pearson toe $\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{\alpha-x}{x}$, zodat $D = \alpha$, $E = -1$, $A = C = 0$, $B = 1$, waaruit volgt:

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0.$$

De d.v. van de confluyente hypergeometrische functie is

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0 ,$$

zodat Laguerre polynomen confluyente hypergeometrische functies zijn.

We kunnen zeggen: De functie $\phi(a;c;x)$ wordt een veelterm als $a = -n$.

Als dus a een negatief geheel getal is, is de ontstane veelterm (afgezien van een constante factor C) een Laguerre polynoom.

$$L_n^{(\alpha)}(x) = C \phi(-n; \alpha+1; x) = C \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n(n-1)\dots(n-m+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m)} \frac{x^m}{m!} .$$

Vergelijking van de coëfficiënten van x^n levert

$$\frac{(-1)^n}{n!} = C \frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)n!} \quad \text{of} \quad C = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!} = \binom{n+\alpha}{n} .$$

We vinden dus

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} \phi(-n; \alpha+1; x) .$$

Daar

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} F\{-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\} ,$$

is

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2\frac{x}{\beta}) = \binom{n+\alpha}{n} F\{-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{x}{\beta}\} .$$

Uit $\lim_{b \rightarrow \infty} F\{a, b; c; \frac{x}{b}\} = \phi(a; c; x)$ volgt

$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F\{-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{x}{\beta}\} = \phi(-n; \alpha+1; x)$, dus

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2\frac{x}{\beta}) .$$

Uit $\phi'(a; c; x) = \frac{a}{c} \phi(a+1; c+1; x)$ volgt

$$DL_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} \frac{-n}{\alpha+1} \phi(-n+1; \alpha+2; x) = - \binom{n+\alpha}{n-1} \phi(-n+1; \alpha+2; x) .$$

Dus

$$DL_n^{(\alpha)}(x) = - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) .$$

XVII Speciale functies

Uit de recurrente betrekking voor de Laguerre polynomen kan men de volgende relatie afleiden

$$L_n^{(\alpha)}(x) = D\{L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\}.$$

Een voortbrengende functie is

$$(1) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) z^n = e^{-\frac{xz}{1-z}} (1-z)^{-(\alpha+1)}.$$

Bewijs: Uit de recurrente betrekking volgt

$$\begin{aligned} F'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+\alpha+1-x) L_n^{(\alpha)}(x) z^n + \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) z^n \quad (\text{als men } L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0 \text{ stelt}) \\ &= (2z-z^2)F'(z) + \{\alpha+1-x-(\alpha+1)z\}F(z), \end{aligned}$$

zodat

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\alpha+1-x-(\alpha+1)z}{1-2z+z^2} = \frac{\alpha+1}{1-z} - \frac{x}{(1-z)^2} \quad (z \neq 1).$$

Hieruit leidt men gemakkelijk (1) af.

Een andere voortbrengende functie, afkomstig van Erdelyi, is

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x) z^n = e^{-xz} (1+z)^{\alpha} \quad (|z| < 1).$$

Integraalvoorstelling

Uit (1) volgt

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0^+)} e^{-\frac{xz}{1-z}} (1-z)^{-(\alpha+1)} z^{-(n+1)} dz .$$

Polynomen van Hermite

We kiezen nu als interval $(-\infty, \infty)$ en als gewichtsfunctie $p(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. De veeltermen hierdoor (op een multiplicatieve factor na) bepaald, worden aangegeven door

$$H_0(x), H_1(x), H_2(x), \dots .$$

Zij worden vastgelegd door de coëfficiënten van x^n gelijk 1 te kiezen. Volgens de formule van Rodriguez is

$$(2) \quad K_n H_n(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} D^n \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) .$$

Stellen we $p(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} = y$, dan wordt (2)

$$(3) \quad K_n H_n(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} y^{(n)} ,$$

$y' = -xy$, en verder

$$y^{(n+1)} = -xy^{(n)} - ny^{(n-1)} ,$$

zodat uit (3) volgt

$$(4) \quad K_{n+1} H_{n+1}(x) = -x K_n H_n(x) - n K_{n-1} H_{n-1}(x) .$$

Vergelijking van de coëfficiënten van x^{n+1} in beide leden levert

$$K_{n+1} = -K_n, \quad K_0 = 1. \quad \text{Dus} \quad K_n = (-1)^n.$$

$$(5) \quad H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} D^n \left(e^{-\frac{1}{2}x^2} \right).$$

Uit (4) volgt de recurrente betrekking

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \quad H_3(x) = x^3 - 3x, \quad H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

De normalizeringsfactor h_n is

$$h_n = (-1)^n \frac{n! K_n}{K_n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2n! \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n! \sqrt{2\pi}.$$

dus

Orthogonaliteit

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ n! \sqrt{2\pi} & \text{als } m = n \end{cases}.$$

Differentiaalvergelijking

$\frac{p'(x)}{p(x)} = -x$. Volgens de formule van Pearson met $D=B=C=0$, $E=-1$, $A=1$, is de differentiaalvergelijking

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

Afgeleide

Uit (5) volgt

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} D^n \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \\ &= -H_{n+1}(x) + xH_n(x) = nH_{n-1}(x), \end{aligned}$$

zodat

$H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$

 .

Voortbrengende functie

Als wij stellen $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}$, dan is

$$\begin{aligned} F'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) \frac{z^n}{n!} = \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} nH_{n-1}(x) \frac{z^n}{n!} = \\ &= (x-z)F(z), \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = x - z.$$

$$\ln F(z) = xz - \frac{1}{2} z^2 + C, \quad F(0) = H_0 = 1, \text{ dus } C = 0.$$

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{z^n}{n!} = e^{xz - \frac{1}{2} z^2}.$

Integraalvoorstelling

$$(6) \quad H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int^{(0^+)} e^{xz - \frac{1}{2}z^2} z^{-n-1} dz .$$

Als we $e^{xz - \frac{1}{2}z^2}$ ontwikkelen in (6) vinden we door termsgewijze integratie (dit is hier geoorloofd):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{n!} H_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \int^{(0^+)} z^{2k+m-n-1} dz = \\ &= 2\pi i \sum_k \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \sum_m \frac{x^m}{m!} . \end{aligned}$$

De som heeft alleen maar een waarde $2\pi i$ als $m = n-2k$, terwijl k loopt van 0 tot $\left[\frac{n}{2}\right]$. Dus

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{k! 2^k (n-2k)!} .$$

$H_n(x)$ heeft alleen maar even of oneven machten van x , al naar gelang n even of oneven is.

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) .$$

XVIII Speciale functies

Er is een nauwe betrekking tussen de Laguerre polynomen en de Hermite polynomen. Deze wordt aangegeven door de betrekkingen

$$(1) \quad H_{2m}(x) = (-2)^m m! L_m^{(-\frac{1}{2})}\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{en}$$

$$H_{2m+1}(x) = (-2)^m m! x L_m^{(\frac{1}{2})}\left(\frac{x^2}{2}\right) .$$

We zullen alleen de eerste bewijzen (de andere wordt op analoge wijze bewezen).

$$\begin{aligned} L_m^{(-\frac{1}{2})}\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m-\frac{1}{2}}{m-k} \frac{x^{2k}}{k! 2^k} = (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2m-2k}}{(m-k)! 2^{m-k}} = \\ &= \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 2^m} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{2m-2k}}{k! 2^k (2m-2k)!} \\ &= \frac{1}{m! (-2)^m} H_{2m}(x) , \end{aligned}$$

waaruit (1) volgt.

Deze formules laten zien dat er eigenlijk slechts twee soorten van klassieke orthogonale polynomen zijn: de Jacobi-polynomen met zijn speciale gevallen in een eindig interval en de Laguerre-polynomen met zijn speciale gevallen in een oneindig interval.

De vergelijking van Laplace

Is V een functie van één, twee of drie veranderlijken, dan verstaat men onder de notatie $\nabla^2 V$ de volgende functies:

$$\text{Voor één veranderlijke } x: \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ;$$

voor twee veranderlijken x en y: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$;

voor drie veranderlijken x, y en z: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

De operator $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ heet operator van Laplace,

de vergelijking $\nabla^2 V = 0$ de vergelijking van Laplace.

De vergelijking luidt in bolcoördinaten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 .$$

Voor het oplossen van deze vergelijking passen we de methode van het scheiden van de veranderlijken toe, en trachten te vinden particuliere oplossingen van de gedaante $V = R\Phi\Theta$, waarin R, Φ en Θ functies zijn van uitsluitend r, ϕ en θ .

Na substitutie en deling door $\frac{R\Phi\Theta}{r^2}$ volgt:

$$(2) \quad \frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \left(\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cotg \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0 .$$

De eerste term hangt alleen van r af en moet dus gelijk zijn aan een constante, bijv. $= -c$.

$$(3) \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + cR = 0 .$$

Dit is een gewone dv. van Euler. We stellen $r = e^u$, waardoor de vergelijking overgaat in

$$(4) \quad \frac{d^2 R}{du^2} + \frac{dR}{du} + cR = 0 .$$

De karakteristieke vergelijking van deze dv. met constante coëfficiënten is

$$t^2 + t + c = 0 .$$

We noemen de wortels van deze vergelijking m en $-(m+1)$. De oplossing van (4) is dus $R = C_1 e^{mu} + C_2 e^{-(m+1)u}$,

en dus die van (3) $R = C_1 r^m + C_2 r^{-m-1}$.

Daar $C = -m(m+1)$ gaat (2) over in

$$\frac{1}{\theta} \left(\frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + \cotg \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) \sin^2 \theta + m(m+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\phi^2}.$$

Stellen we de eis dat ϕ periodiek moet zijn in ϕ , dan kunnen we beide leden $= n^2$ stellen, zodat

$$\frac{d^2 \phi}{d\phi^2} + n^2 \phi = 0,$$

met als oplossingen $\phi = C_3 \cos n\phi + C_4 \sin n\phi$.

De vergelijking voor θ wordt dan

$$\frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + \cotg \theta \frac{d\theta}{d\theta} + \left\{ m(m+1) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right\} \theta = 0,$$

welke door de substitutie $x = \cos \theta$ overgaat in

$$(5) \quad (1-x^2) \frac{d^2 \theta}{dx^2} - 2x \frac{d\theta}{dx} + \left\{ m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2} \right\} \theta = 0.$$

Dit is de toegevoegde vergelijking van Legendre.

Geeft men de oplossing van deze vergelijking aan met $P_m^n(x)$, dan zijn de oplossingen van de vergelijking van Laplace in bolcoördinaten lineaire combinaties van uitdrukkingen van de vorm

$$P_m^n(\cos \theta) r^m \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases} \quad \text{en} \quad P_m^n(\cos \theta) r^{-1-m} \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases}.$$

Er zijn vele problemen waarvan de oplossingen gevraagd worden, welke onafhankelijk moeten zijn van ϕ . In deze gevallen moet dus $n=0$ zijn,

en (5) gaat over in

$$(1-x^2) \frac{d^2\theta}{dx^2} - 2x \frac{d\theta}{dx} + m(m+1)\theta = 0$$

de vergelijking van Legendre.

In cylindercoördinaten luidt de vergelijking van Laplace:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Voor het oplossen van deze vergelijking passen we weer de methode van het scheiden van de veranderlijken toe en trachten particuliere oplossingen te vinden van de gedaante $V = R\phi Z$, waarin R , ϕ en Z functies zijn van uitsluitend resp. r , ϕ en z .

Na substitutie en deling door $R\phi Z$ volgt:

$$(6) \quad \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\phi r^2} \frac{d^2 \phi}{d\phi^2} = - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

Elk van beide leden moet een constante zijn. Heeft Z bijv. een exponentiële vorm, dan kunnen we die constante $= -a^2$ stellen, zodat

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - a^2 Z = 0,$$

met oplossingen

$$Z = C_1 e^{az} + C_2 e^{-az}.$$

Uit (6) volgt dan

$$(7) \quad - \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\phi^2} = \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + a^2 r^2,$$

en weer is elk lid een constante. Eisen we nu dat ϕ periodiek moet zijn in ϕ , dan kan men die constante $= m^2$ stellen, zodat

$$\frac{d^2\phi}{d\phi^2} + m^2\phi = 0,$$

met als oplossingen

$$\phi = C_3 \cos m\phi + C_4 \sin m\phi.$$

(7) gaat dan over in

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + a^2 r^2 R = m^2 R,$$

welke door de substitutie $x = ar$ de vorm verkrijgt:

$$(8) \quad \boxed{x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2)R = 0}.$$

Dit is de vergelijking van Bessel.

Noemen we de oplossingen van deze vergelijking $J_m(x)$ (Bessel-functies van de orde m), dan zijn de oplossingen van de vergelijking van Laplace in cylindercoördinaten lineaire combinaties van uitdrukkingen van de vorm

$$e^{\pm az} J_m(ar) \begin{cases} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{cases}.$$

Besselfunctie van de orde 0

Stelt men in (8) $m = 0$ dan verkrijgt men de vergelijking:

$$(9) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

We trachten een oplossing te vinden van (9) in de vorm van een

machtreeks: $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Na substitutie vindt men voor de coëfficiënten de recurrente betrekking

$$(10) \quad c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)^2}.$$

Er komt echter een term voor, $\frac{c_1}{x}$, die niet teniet gedaan wordt door een andere term, en dus moet $c_1 = 0$ zijn. Uit (10) volgt dan dat $c_k = 0$ voor elke oneven k . Verder is

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}; \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2}; \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 4^2 6^2}; \quad \text{enz.}$$

Een formele oplossing van (9) is dus $c_0 J_0(x)$ met

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

en $c_0 J_0(x)$ met willekeurige c_0 is de meest algemene oplossing die men op deze manier kan verkrijgen; d.w.z. die men als een machtreeks in x kan uitdrukken.

XIX Speciale functies

Het punt $x=0$ is een regulier-singulier punt van de d.v.

Met het kenmerk van d'Alembert toont men aan dat de machtreeks convergeert voor elke eindige waarde van x .

$J_0(x)$ heet de Besselfunctie van de orde nul.

Orthogonaliteit

Laat λ een willekeurige constante zijn en $z = J_0(\lambda x)$. Stelt men $t = \lambda x$, dus $z = J_0(t)$, dan voldoet z aan de d.v.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \lambda^2 z = 0.$$

Daar $J_0(-\lambda x) = J_0(\lambda x)$ mogen wij ons tot niet-negatieve waarden van λ beperken.

Laat λ en μ twee reële verschillende getallen zijn, en $z_1 = J_0(\lambda x)$ en $z_2 = J_0(\mu x)$. Deze functies voldoen dan aan

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz_1}{dx} + \lambda^2 z_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 z_2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz_2}{dx} + \mu^2 z_2 = 0.$$

Hieruit leidt men af

$$z_1 \frac{d^2 z_2}{dx^2} - z_2 \frac{d^2 z_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \left(z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} \right) + (\mu^2 - \lambda^2) z_1 z_2 = 0,$$

of als we stellen: $w = z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx}$:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{w}{x} = (\lambda^2 - \mu^2) z_1 z_2,$$

$$\frac{d(wx)}{dx} = (\lambda^2 - \mu^2) x z_1 z_2.$$

Integratie tussen 0 en 1 levert:

$$(1) \quad \left[x \left(z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} \right) \right]_0^1 = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 x z_1 z_2 dx .$$

Nu is $z_1(1) = J_0(\lambda)$, $z_2(1) = J_0(\mu)$.

Als λ en μ nu verschillende positieve wortels zijn van de vergelijking $J_0(x) = 0$, dan geldt

$$(2) \quad \boxed{\int_0^1 x J_0(\lambda x) J_0(\mu x) dx = 0} .$$

Later zullen we aantonen dat de vergelijking inderdaad wortels λ en μ bezit.

(2) geeft aan dat $J_0(\lambda x)$ en $J_0(\mu x)$ orthogonaal zijn op $(0,1)$ t.o.v. de gewichtsfunctie x .

De waarden van $\frac{dz_1}{dx}$ en $\frac{dz_2}{dx}$ voor $x = 1$ zijn $\lambda J_0'(\lambda)$ en $\mu J_0'(\mu)$.

Het linkerlid van (1) wordt ook nul als λ en μ , i.p.v. de wortels van $J_0(x)$, zo zijn dat $J_0'(\lambda) = J_0'(\mu) = 0$. Dit geldt dus ook voor (2).

Meer algemeen: als $J_0(\lambda) \neq 0$, $J_0(\mu) \neq 0$, dan is

$$z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} \quad \text{voor } x = 1 :$$

$$J_0(\lambda) \mu J_0'(\mu) - J_0(\mu) \lambda J_0'(\lambda) = J_0(\lambda) J_0(\mu) \left[\frac{\mu J_0'(\mu)}{J_0(\mu)} - \frac{\lambda J_0'(\lambda)}{J_0(\lambda)} \right] ,$$

en dit is dus nul als $\frac{x J_0'(x)}{J_0(x)}$ gelijke waarden aanneemt voor $x = \lambda$ en $x = \mu$, m.a.w. als λ en μ wortels zijn van de vergelijking

$$\frac{x J_0'(x)}{J_0(x)} = h \quad (h = \text{constante}) .$$

(2) geldt dus als λ en μ verschillende niet-negatieve wortels zijn van de meer algemene vergelijking:

$$(3) \quad xJ_0'(x) - hJ_0(x) = 0.$$

Het bestaan van oneindig veel wortels van (3) voor elke waarde van h zal later bewezen worden.

Als (3) wordt vervangen door

$$g(x)J_0'(x) - hJ_0(x) = 0,$$

dan is het vroegere geval $J_0(x) = 0$ als speciaal geval met $g(x) \equiv 0$ hierin begrepen.

Om de waarde van het linkerlid van (2) voor $\lambda = \mu$ te berekenen, stellen we weer $\lambda x = t$, dus

$$\int_0^1 x \{J_0(\lambda x)\}^2 dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda t \{J_0(t)\}^2 dt.$$

$y = J_0(t)$ voldoet aan:

$$y'' + \frac{1}{t} y' + y = 0,$$

of

$$2t^2 y'' y' + 2t y'^2 + 2t^2 y y' = 0,$$

waaruit men afleidt:

$$\int_0^\lambda t y^2 dt = \frac{1}{2} \lambda^2 \{J_0^2(\lambda) + J_0'^2(\lambda)\},$$

dus

$$(3a) \quad \boxed{\int_0^1 x \{J_0(\lambda x)\}^2 dx = \frac{1}{2} \{J_0^2(\lambda) + J_0'^2(\lambda)\}},$$

geldig voor elke λ .

Integraalvoorstelling van $J_0(x)$

We zullen bewijzen:

(4)

$$J_0(x) = \pi \int_0^\pi \cos(x \cos \phi) d\phi$$

Een oplossing van de d.v. van Bessel in de vorm van een machtreeks in x met een constante term $= 1$, moet identiek zijn aan $J_0(x)$.

We zullen zien dat het rechterlid van (4) zulk een oplossing is.

Substitutie van de ontwikkeling van $\cos(x \cos \phi)$ in

$y = \int_0^\pi \cos(x \cos \phi) d\phi$ en termsgewijze integratie (hetgeen geoorloofd is) geeft:

$$\frac{y}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi - \frac{x^2}{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi + \dots = 1 - \frac{x^2}{4} + \dots$$

Het zou niet moeilijk zijn $\int_0^\pi \cos^{2k} \phi d\phi$ uit te rekenen en zo (4) te verifiëren. Wij doen het anders:

$$(5) \quad y' = - \int_0^\pi \cos \phi \sin(x \cos \phi) d\phi ,$$

$$y'' = - \int_0^\pi \cos^2 \phi \cos(x \cos \phi) d\phi .$$

Partiële integratie in (5) geeft:

$$y' = -x \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos(x \cos \phi) d\phi ,$$

zodat

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = \int_0^\pi (-\cos^2 \phi - \sin^2 \phi + 1) \cos(x \cos \phi) d\phi = 0 ,$$

zodat y een oplossing is van de d.v.

$\frac{y}{\pi}$ is dus identiek met $J_0(x)$.

Nulpunten van $J_0(x)$ en verwandte functies

Wegens symmetrie is

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \phi) d\phi.$$

Stelt men $t = x \cos \phi$, dan is

$$\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt.$$

De noemer van de integrand is 0 voor $t = x$, dus de integrand oneindig groot, terwijl de oneigenlijke integraal echter convergent is.

Is x een oneven veelvoud van $\frac{\pi}{2}$, dan is

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\cos t}{\sqrt{x^2 - t^2}} = 0.$$

Door de grafiek van de integrand als functie van t te beschouwen, kan men gemakkelijk aantonen dat $J_0(x)$ afwisselend positief en negatief is in de punten $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, enz., en dus nul wordt in elk interval tussen de opvolgende punten van deze rij. Ook ziet men dat $J_0'(x)$ oneindig veel positieve wortels heeft (naast de wortel $x = 0$).

$J_0(x)$ en $J_0'(x)$ kunnen niet in hetzelfde punt x gelijk aan nul worden, want dan zou vanwege de d.v. ook alle afgeleiden van $J_0(x)$ in dat punt 0 worden, en zou $J_0(x) \equiv 0$ zijn. Dit volgt ook uit (3a).

$J_0(x)$ wisselt van teken in elk nulpunt. Zijn $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de opvolgende positieve wortels van $J_0(x) = 0$, dan gaat $J_0(x)$ van positief tot negatief over in λ_1 , van negatief tot positief in λ_2 , enz., dus $J_0'(\lambda_1) < 0$, $J_0'(\lambda_2) > 0$. In een punt waar $J_0(x) = 0$ (x is positief) is het teken van de uitdrukking $xJ_0'(x) - hJ_0(x)$ dat van $J_0'(x)$.

Het linkerlid van (3) is dus afwisselend positief en negatief in de punten $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ en is tenminste één maal nul in elk interval van het ene punt tot het volgende.

XX Speciale functies

Ontwikkeling van een functie naar Besselfuncties

Als $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de positieve wortels zijn van de vergelijking $J_0(x) = 0$, gerangschikt in volgorde van grootte (of de niet-negatieve wortels van $J_0'(x) = 0$, of de positieve wortels van $xJ_0'(x) - hJ_0(x) = 0$), dan kan een willekeurige functie $f(x)$ op het interval $(0,1)$ formeel ontwikkeld worden in een reeks van functies $J_0(\lambda_1 x), J_0(\lambda_2 x), \dots$, geheel analoog aan een Fourierontwikkeling.

Laat de ontwikkeling de vorm hebben:

$$(1) \quad f(x) = a_1 J_0(\lambda_1 x) + a_2 J_0(\lambda_2 x) + \dots$$

dan is

$$a_k = \frac{2}{J_0^2(\lambda_k) + J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x) dx.$$

De noemer reduceert zich tot $J_0'^2(\lambda_k)$ als λ_k een wortel is van $J_0(x) = 0$, en tot $J_0^2(\lambda_k)$ als λ_k een wortel is van $J_0'(x) = 0$. We zullen hier niet ingaan op de geldigheidsvoorwaarden voor (1).

Singuliere punten van een differentiaalvergelijking

We beschouwen de homogene lineaire d.v. van de 2^e orde:

$$(2) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0,$$

waarin $a(x)$, $b(x)$ en $c(x)$ veeltermen zijn.

Elk punt x , waarvoor $a(x) \neq 0$ noemt men een gewoon punt van de d.v.

Elk punt x , waarvoor $a(x) = 0$ heet singulier punt van de d.v.

Deelt men (2) door $a(x)$, dan verkrijgt men de d.v.:

$$(3) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

waarin $p(x)$ en $q(x)$ rationale functies van x zijn.

Is $x = x_0$ een singulier punt, dus $a(x_0) = 0$, dan bevat minstens één (misschien beide) van de coëfficiënten $p(x)$ en $q(x)$ de factor $x - x_0$ in de noemer.

We definiëren nu:

Bevat de noemer van $p(x)$ de factor $x - x_0$ niet in een hogere macht dan één, en $q(x)$ in een niet hogere macht dan twee, dan noemt men x_0 een regulier-singulier punt van de d.v. (2).

Is x_0 een singulier punt, maar geen regulier-singulier punt, dan noemt men x_0 een irregulier-singulier punt van (2).

Oplossing in de omgeving van een regulier-singulier punt

Laat $x = 0$ een regulier-singulier punt zijn van (3). $p(x)$ bevat x in de noemer tot hoogstens de eerste macht, $q(x)$ tot hoogstens de tweede macht, zodat

$$(4) \quad p(x) = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2x + \dots$$

$$(5) \quad q(x) = \frac{q_0}{x^2} + \frac{q_1}{x} + q_2 + q_3x + \dots$$

We proberen nu een oplossing van (3) te vinden van de vorm:

$$(6) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = c_0 x^r + c_1 x^{1+r} + c_2 x^{2+r} + \dots,$$

met geschikt gekozen constanten c_n en r , en $c_0 \neq 0$.

Substitueert men (4), (5) en (6) in (3), dan vinden we:

$$\begin{aligned} & r(r-1)c_0 x^{r-2} + (1+r)rc_1 x^{r-1} + (2+r)(1+r)c_2 x^r + \dots + \\ & + \left(\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2x + \dots\right) \{rc_0 x^{r-1} + (1+r)c_1 x^r + (2+r)c_2 x^{1+r} + \dots\} + \\ & + \left(\frac{q_0}{x^2} + \frac{q_1}{x} + q_2 + \dots\right) (c_0 x^r + c_1 x^{1+r} + c_2 x^{2+r} + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Of ook geschreven:

$$\begin{aligned} & r(r-1)c_0x^{r-2} + (1+r)rc_1x^{r-1} + (2+r)(1+r)c_2x^r + \dots \\ & + p_0rc_0x^{r-2} + \{p_0(1+r)c_1 + p_1rc_0\}x^{r-1} + \dots \\ & + q_0c_0x^{r-2} + (q_0c_1 + q_1c_0)x^{r-1} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Door de coëfficiënt van de laagste macht van x (x^{r-2}) nul te stellen, verkrijgt men:

$$\{r(r-1) + p_0r + q_0\}c_0 = 0,$$

of daar $c_0 \neq 0$:

$$(7) \quad r(r-1) + p_0r + q_0 = 0.$$

De vergelijking (7), welke indexvergelijking genoemd wordt, is een vierkantsvergelijking in r met twee wortels r_1 en r_2 . In het algemeen heeft men dus twee oplossingen van de vorm (6), voor elke wortel één. De coëfficiënten c_n worden gevonden door de coëfficiënten van hogere machten x^{r-1} , x^r , ... nul te stellen. Men kan bewijzen dat de verkregen oplossingen verschillend zijn als het verschil $r_1 - r_2$ géén geheel getal is. We zullen dit hier niet bewijzen.

Voorbeeld: De d.v. van Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0.$$

Door weer de reeks (6) te substitueren verkrijgen we:

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1} + \\ + (x^2 - m^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0, \text{ of} \end{aligned}$$

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r-m)(n+r+m)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} = 0.$$

De laagste macht van x in (6) x^r komt alleen in de eerste reeks voor als $n = 0$. Door deze termen nul te stellen vindt men:

$$c_0(r-m)(r+m) = 0, \quad \text{of daar } c_0 \neq 0$$

$$(r-m)(r+m) = 0 \quad (\text{indexvergelijking}).$$

r heeft dus de waarden $r = m$ of $r = -m$.

De volgende macht x^{r+1} komt ook alleen in de eerste som voor als $n = 1$, zodat:

$$(9) \quad c_1(1+r-m)(1+r+m) = 0.$$

Door de coëfficiënt van x^{n+r+2} nul te stellen, vindt men uit (8):

$$c_{n+2}(n+2+r-m)(n+2+r+m) + c_n = 0,$$

of

$$(10) \quad c_{n+2} = - \frac{c_n}{(n+2+r-m)(n+2+r+m)}.$$

Voor $r = m$ vindt men uit (9) $c_1(1+2m) = 0$. Is $2m+1 \neq 0$ dan is $c_1 = 0$, en volgt uit (10)

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0,$$

en dat de reeks alleen even machtstermen bevat.

Stellen we $n = 2p$ ($p \geq 0$), dan wordt (10) voor $r = m$:

$$c_{2p+2} = - \frac{c_{2p}}{4(p+1)(p+1+m)}$$

Veronderstelt men nu dat $m \neq$ negatief geheel getal, dan worden de coëfficiënten:

$$c_2 = - \frac{c_0}{4 \cdot 1 \cdot (m+1)}; \quad c_4 = - \frac{c_2}{4 \cdot 2 \cdot (m+2)} = \frac{c_0}{4^2 2! (m+1)(m+2)};$$

$$c_6 = - \frac{c_4}{4 \cdot 3 \cdot (m+3)} = - \frac{c_0}{4^3 3! (m+1)(m+2)(m+3)}; \quad \text{enz.}$$

We verkrijgen dus als oplossing:

$$(11) \quad c_0 x^m \left\{ 1 - \frac{1}{(m+1) \cdot 1!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(m+1)(m+2) \cdot 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3) \cdot 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right\}.$$

Voor $r = -m$ kan men dezelfde redenering toepassen, waardoor we dan voor $m \neq$ positief geheel getal vinden:

$$c_0 x^{-m} \left\{ 1 - \frac{1}{(-m+1) \cdot 1!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(-m+1)(-m+2) \cdot 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(-m+1)(-m+2)(-m+3) \cdot 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right\}.$$

Noemt men de reeksen tussen accoladen resp. y_1, y_2 , dan is voor $m \neq$ geheel getal de algemene oplossing van de d.v. van Bessel

$$y = Ax^m y_1 + Bx^{-m} y_2,$$

met willekeurige constanten.

Men kan gemakkelijk nagaan dat beide reeksen convergeren voor alle waarden van x .

Door geschikte constanten A en B te kiezen vindt men hieruit de bekende functies $J_m(x)$ van Bessel van de orde m .

Is $m = 0$, dan zijn de reeksen identiek, en gelijk aan $J_0(x)$.

Voor c_0 kiest men $c_0 = \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)}$ en men definiëert dan

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot (2m+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2m+2)(2m+4)} - \dots \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(m+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2j} \\ J_{-m}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(-m+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2j}. \end{aligned}$$

Is nu m geheel $= 1, 2, 3, \dots$, dan is $\Gamma^{-1}(-m+j+1) = 0$ voor $j=0, 1, \dots, m-1$, zodat

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(-m+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2j} \\ &= (-1)^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+m)! \Gamma(j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2j} \\ &= (-1)^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(m+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2j}. \end{aligned}$$

Dus

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad \text{voor } m=1, 2, 3, \dots$$

XXI Speciale functies

Voortbrengende functie

We veronderstellen $n = 0$ of geheel positief of negatief.

We zullen dan bewijzen

$$e^{\frac{1}{2}x(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad t \neq 0 .$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}x(t - \frac{1}{t})} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j t^j}{j! 2^j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^k x^k}{2^k t^k} \quad (k = j-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j! 2^j (j-n)!} \frac{(-1)^{j-n} x^{j-n}}{2^{j-n}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n t^n J_{-n}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n . \end{aligned}$$

Integraalvoorstelling

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{2^{2j} j! \Gamma(n+j+1)} .$$

Nu is

$$\frac{1}{2^{2j} j! \Gamma(n+j+1)} = \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{(2j)! \Gamma(n+j+1) \Gamma(\frac{1}{2})} \quad (\text{verdubbelingsformule } \Gamma\text{-functie})$$

$$= \frac{B(n + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{(2j)! \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} = \frac{1}{(2j)! \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{j-\frac{1}{2}} dt$$

$$(t = \sin^2 \phi)$$

$$(n > -\frac{1}{2}, j > -\frac{1}{2}) = \frac{1}{(2j)! \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^{2n} \phi \cos^{2j} \phi d\phi.$$

Dus
$$J_n(x) = C_n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \int_0^\pi \sin^{2n} \phi \cos^{2j} \phi d\phi$$

met

$$(1) \quad C_n = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})}.$$

Voor $n \geq 0$ convergeert de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \sin^{2n} \phi \cos^{2j} \phi$ uniform in ϕ . Dus geldt

$$J_n(x) = C_n \int_0^\pi \sin^{2n} \phi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} (x \cos \phi)^{2j} d\phi.$$

of

$$J_n(x) = C_n \int_0^\pi \sin^{2n} \phi \cos(x \cos \phi) d\phi$$

 met C_n uit (1).

Integraalformule van Lommel.

De afleiding geldt voor $n \geq 0$, maar men kan bewijzen dat deze ook geldt voor $n > -\frac{1}{2}$.

Een andere integraalvoorstelling is

$$(2) \quad J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) d\phi \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Integraalformule van Bessel.

Bewijs: We moeten bewijzen:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\phi \cos (x \sin \phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin n\phi \sin (x \sin \phi) d\phi,$$

of te bewijzen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\phi \cos (x \sin \phi) d\phi \quad \text{als } n=0,2,4,\dots \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin n\phi \sin (x \sin \phi) d\phi \quad \text{als } n=1,3,5,\dots \end{array} \right.$$

Nu is

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x) t^{-n}.$$

Substitutie van $t = e^{i\phi}$ geeft, als we $n = k$ en $n = -k$ tezamen nemen:

$$J_n(x) e^{i\phi n} + J_{-n}(x) e^{-i\phi n} = J_n(x) \{e^{i\phi n} + (-1)^n e^{-i\phi n}\}$$

$$= 2J_n(x) \cos \phi n \quad \text{als } n \text{ even is,}$$

$$= 2iJ_n(x) \sin \phi n \quad \text{als } n \text{ oneven is,}$$

zodat we vinden

$$\cos (x \sin \phi) + i \sin (x \sin \phi) =$$

$$J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\phi + 2i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin (2n-1)\phi,$$

waaruit

$$\cos (x \sin \phi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\phi + J_0(x),$$

$$\sin (x \sin \phi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin (2n-1)\phi$$

en dus

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos n\phi \cos (x \sin \phi) d\phi &= \\
 &= 2 \int_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x) \cos n\phi \cos 2k\phi d\phi + \int_0^\pi J_0(x) \cos n\phi d\phi \\
 &= 2J_n(x) \cdot \frac{1}{2}\pi = \pi J_n(x),
 \end{aligned}$$

waarmede (3) bewezen is.

Op dezelfde wijze bewijst men (4), en dus (2).

Uit (2) volgt de eigenschap van de begrensdheid:

$$|J_n(x)| \leq 1 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

en tevens

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} J_n(x) \right| \leq 1 \quad (n=0,1,2,\dots, k=1,2,\dots).$$

In $J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2n\phi \cos (x \sin \phi) d\phi$ is het rechterlid juist $\frac{1}{2}a_{2n}$ ($n=1,2,\dots$), waarin a_n de coëfficiënt voorstelt in de Fourier cosinus reeks in ϕ van de functie $\cos (x \sin \phi)$. Evenzo is b_n de coëfficiënt in de Fourier sinus reeks in ϕ van $\sin (x \sin \phi)$, en dus $J_{2n-1}(x) = \frac{1}{2}b_{2n-1}$ ($n=1,2,\dots$).

Volgens het theorema van Riemann is dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = 0.$$

Wortels van $J_n(x)$

Op dezelfde wijze als voor $J_0(x)$ kan men bewijzen:

Voor elke gegeven reële n heeft de vergelijking $J_n(x) = 0$ een oneindig aantal positieve wortels $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ met $x_m \rightarrow \infty$ als $m \rightarrow \infty$.

Orthogonaliteit

Ook bewijst men op de manier als bij $J_0(x)$:

Als λ_j ($j=1,2,\dots$) de positieve wortels zijn van de vergelijking $J_n(\lambda c) = 0$, met vaste $n \geq 0$, dan vormen de functies $J_n(\lambda_1 x), J_n(\lambda_2 x), \dots$ een orthogonaal stelsel op het interval $(0, c)$ met de gewichtsfunctie x , zodat

$$\int_0^c x J_n(\lambda_j x) J_n(\lambda_k x) dx = 0 \quad k \neq j.$$

Denk er om dat n dezelfde is voor al de functies van het systeem. Er zijn dus oneindig veel systemen, voor elke n één.

Normalisering

We vermenigvuldigen de termen in de vergelijking van Bessel

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right] + \left(\lambda^2 x^2 - \frac{n^2}{x} \right) J_n(\lambda x) = 0$$

met de factor $2x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x)$.

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right]^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx} \left[J_n(\lambda x) \right]^2 = 0.$$

Na integratie en toepassing van partiële integratie in de tweede term vinden we:

$$\left[\left\{ x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right\}^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) \{ J_n(\lambda x) \}^2 \right]_0^c - 2\lambda^2 \int_0^c x \left[J_n(\lambda x) \right]^2 dx = 0.$$

Daar $rJ_n'(r) = nJ_n(r) - rJ_{n+1}(r)$

(dit zullen we nog bewijzen!), volgt

$$2\lambda^2 \int_0^c x [J_n(\lambda x)]^2 dx = \left[\{nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)\}^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) \{J_n(\lambda x)\}^2 \right]_0^c$$

of daar $n \geq 0$

$$\int_0^c x [J_n(\lambda x)]^2 dx = \frac{c^2}{2} \left\{ [J_n(\lambda c)]^2 + [J_{n+1}(\lambda c)]^2 \right\} - \frac{nc}{\lambda} J_n(\lambda c) J_{n+1}(\lambda c) .$$

Dus als λ_j een wortel is van $J_n(\lambda c) = 0$

$$\boxed{\int_0^c x [J_n(\lambda_j x)]^2 dx = \frac{c^2}{2} [J_{n+1}(\lambda_j c)]^2 \quad (j=1,2,\dots) .}$$

Recurrente betrekking

$$J_n(x) = c_n \int_0^\pi \sin^{2n} \phi \cos(x \cos \phi) d\phi = c_n v_n ,$$

$$\text{met } c_n = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = A x^n ,$$

$$\frac{dv_n}{dx} = - \int_0^\pi \sin^{2n} \phi \sin(x \cos \phi) \cos \phi d\phi = - \frac{x}{2n+1} v_{n+1} .$$

Nu is $c_{n+1} = \frac{x}{2n+1} c_n$, en $v_n = \frac{J_n(x)}{c_n} = \frac{J_n(x)}{A_n x^n}$, zodat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{J_n(x)}{A_n x^n} &= -n \frac{J_n(x)}{A_n x^{n+1}} + \frac{J_n'(x)}{A_n x^n} = -\frac{x}{2n+1} \frac{J_{n+1}(x)}{C_{n+1}} = -\frac{J_{n+1}(x)}{C_n} \\ &= -\frac{J_{n+1}(x)}{A_n x^n} , \end{aligned}$$

en dus

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \quad .$$

Hieruit kan men afleiden de recurrente betrekking:

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad .$$