

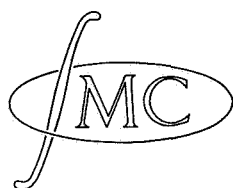
STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM  
AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Colloquium 1964-1965

Partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

onder leiding van

Prof.Dr. W. Eckhaus en Prof.Dr. H.A. Lauwerier



Deel I  
(2 delen)

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam, 49, 2nd Boerhaavestraat.  
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

Inhoudsopgave

Deel I

W. Eckhaus	Inleiding in de theorie van singuliere storingsproblemen	1
J. Nuis	Asymptotische problemen in verband met de vergelijking van Burgers	34
J. Nuis	Asymptotische problemen uit de ballistiek	54
H.A. Lauwerier	Grenslaagproblemen in de oceanografie	69
D. Dunnebier	Singuliere storingsproblemen van lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van elliptisch type	85

Deel II

W. Eckhaus	Parabolische grenslagen	121
J.F. Frankena	De methode van Poincaré, Lighthill en Kuo	151
E.M. de Jager	Asymptotische oplossingen van singuliere storingsproblemen voor differentiaalvergelijkingen van elliptisch type	185
J. Nuis	Methode van de "multiple-time-scales" en een toepassing op de vergelijking van Van der Pol	217
P.J. van der Houwen	Constructie van uniforme behaderingen volgens de theorie van Langer	236



## Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

### Inleiding in de theorie van singuliere storings-problemen

W. Eckhaus

#### Inleiding

In dit colloquium zullen wij ons bezig houden met het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen die een kleine parameter bevatten, waarbij wij veronderstellen dat de gegeven randvoorwaarden de oplossing eenduidig bepalen. In het bijzonder zullen wij ons interesseren in problemen waar de exacte expliciete oplossing buiten de praktische mogelijkheden ligt. Bij zulke problemen is het vaak mogelijk benaderingsoplossingen te construeren in de vorm van asymptotische reeksontwikkelingen naar de kleine parameter. Wij bestuderen dus de theorie van de asymptotische ontwikkelingen naar een parameter van functies van één of meerdere onafhankelijke variabelen en een parameter, welke functies impliciet zijn gedefinieerd door partiële differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden, en waarbij de expliciete uitdrukking voor de functie niet bekend is.

In deze inleidende voordrachten zullen wij trachten een overzicht te geven van de meest karakteristieke aspecten van deze problemen en tevens de methoden bespreken die bij de behandeling ervan efficiënt zijn gebleken. Vele kwesties die wij hier slechts vluchtig zullen aanroeren, zullen later in dit colloquium nog nader en uitvoeriger worden behandeld.

Als uitgangspunt van onze beschouwingen nemen wij de welbekende definitie en eigenschappen van de asymptotische reeksontwikkeling van functies van één variabele.

### 1. Definitie en eigenschappen van asymptotische ontwikkeling

Wij beschouwen een functie  $f(x)$  in de omgeving van  $x = 0$ .

Veronderstel dat wij kunnen aantonen dat

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n + F_N(x) \quad (1.1)$$

waarbij

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_N(x)}{x^{N+1}} \right| < \infty. \quad (1.2)$$

Het resultaat (1.2) duiden wij dan aan met

$$F_N(x) = O(x^{N+1}). \quad (1.3)$$

De uitdrukking

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n + O(x^{N+1}). \quad (1.4)$$

noemen wij de asymptotische benadering van orde  $N$  van de functie  $f(x)$  voor  $x \rightarrow 0$ .

Geldt (1.2) voor alle  $N$  dan heet de formele reeks

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \quad (1.5)$$

een oneindige asymptotische reeks.

Een asymptotische reeks kan zowel divergent als convergent zijn. Is de reeks divergent dan dient verg. (1.5) te worden geïnterpreteerd zoals in verg. (1.4) is aangegeven. Is de asymptotische reeks convergent, dan behoeft niet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \alpha_n x^n = f(x). \quad (1.6)$$

Zo kan bijvoorbeeld

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = A e^{-x^{-p}} ; p > 0. \quad (1.7)$$

Geldt relatie (1.6) wel, dan gaat de asymptotische ontwikkeling over in een convergente reeksontwikkeling.

Berekent men de functie  $f(x)$  uit een asymptotische benadering van orde  $N$ , dan kan de fout  $F_N$  willekeurig klein worden gemaakt door  $x$  voldoende klein te kiezen. Deze formele eigenschap heeft echter weinig betekenis in het praktische geval, dat men de functie  $f(x)$  voor een gegeven kleine waarde van  $x$  wil bepalen. Is de asymptotische reeks divergent dan blijkt in het algemeen de volgende fundamentele eigenschap te gelden, die wij hier zonder bewijs signaleren:

Voor iedere kleine waarde van  $x$  houdt de asymptotische benadering een onvermijdelijke fout in; deze kan niet willekeurig klein worden gemaakt. De fout  $F_N$  kan wel een minimale waarde bereiken voor een optimaal aantal termen  $N = N_0$ . Naarmate men kleinere waarden van  $x$  beschouwt wordt  $N_0$  groter en  $F_{N_0}$  kleiner.

De asymptotische ontwikkeling (1.4) is bijzonder eenvoudig van vorm. In de meeste gevallen zal de vorm veel ingewikkelder zijn, zoals bijv.:

$$f(x) = g(x) \left\{ \sum_{n=0}^N \beta_n x^{\nu n} + O(x^{\nu N + \nu}) \right\} \quad (1.8)$$

waarbij  $g(x)$  een functie is waarvan de structuur eenvoudiger is dan die van  $f(x)$ , en  $\nu$  een gegeven getal. In de volgende paragraaf zullen wij een meer algemene vorm van de asymptotische ontwikkeling geven.

## 2. Asymptotische ontwikkeling naar een parameter

Wij beschouwen thans een functie  $\phi$  van een willekeurig aantal onafhan-

kelijke variabelen  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . Deze functie bevat bovendien een kleine parameter  $\varepsilon$ . Symbolisch zullen wij schrijven  $\Phi(x_i, \varepsilon)$ . De asymptotische ontwikkelingen die in dit colloquium ter sprake zullen komen zijn ontwikkelingen van impliciet gedefinieerde functies  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  voor  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Om tot de meest algemene definitie van asymptotische ontwikkeling te komen voeren wij in een rij "orde functies"  $g_n(\varepsilon)$ . Deze bezitten de eigenschap

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_{n+1}(\varepsilon)}{g_n(\varepsilon)} = 0, \quad \forall n \quad (2.1)$$

De asymptotische benadering van orde N van de functie  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  voor  $\varepsilon \rightarrow 0$  is de uitdrukking

$$\Phi(x_i, \varepsilon) = \psi(x_i) \left\{ \sum_{n=0}^N g_n(\varepsilon) \phi_n(x_i) + O(g_{N+1}) \right\} \quad (2.2)$$

indien wij kunnen aantonen dat

$$\Phi(x_i, \varepsilon) = \psi(x_i) \left\{ \sum_{n=0}^N g_n(\varepsilon) \phi_n(x_i) + F_N(x_i, \varepsilon) \right\} \quad (2.3)$$

en

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_N(x_i, \varepsilon)}{g_{N+1}(\varepsilon)} \right| < \infty. \quad (2.4)$$

Nu is de functie  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  gedefinieerd in een bepaald gebied D van de variabelen  $x_i$ . Geldt (2.4) voor alle  $x_i$  van D dan is de asymptotische ontwikkeling uniform geldig. Geldt (2.4) slechts in een deelgebied  $D_*$  van D dan noemen wij  $D_*$  het geldigheidsgebied van de asymptotische ontwikkeling.

Vaak heeft men te maken met niet uniform geldige asymptotische ontwikkelingen en wel op de volgende wijze:



De ontwikkeling

$$\Phi(x_i, \varepsilon) = \psi^{(1)}(x_i) \left\{ \sum_{n=0}^N g_n^{(1)}(\varepsilon) \phi^{(1)}(x_i) + o(g_{N+1}^{(1)}) \right\} \quad (2.5)$$

is geldig in een deelgebied  $D_1$  van  $D$ , terwijl een andere ontwikkeling

$$\Phi(x_i, \varepsilon) = \psi^{(2)}(x_i) \left\{ \sum_{n=0}^N g_n^{(2)}(\varepsilon) \phi^{(2)}(x_i) + o(g_{N+1}^{(2)}) \right\} \quad (2.6)$$

geldig is in een deelgebied  $D_2$  van  $D$ . Buiten de gebieden  $D_1$  en  $D_2$  verliezen zowel (2.5) als (2.6) hun geldigheid. Grenzen  $D_1$  en  $D_2$  aan elkaar, dan verliezen in het bijzonder (2.5) en (2.6) hun geldigheid op de gemeenschappelijke grens  $x_i = x_i(s)$  van  $D_1$  en  $D_2$ .

Dit niet uniform gedrag van de asymptotische ontwikkeling is een weerspiegeling van een niet-uniformiteit van de functie  $\Phi(x_i, \varepsilon)$ . Veronderstellen wij  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  continu en begrensd voor alle  $x_i$  van  $D$  en voor  $\varepsilon \neq 0$ , dan kan  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x_i, \varepsilon)$  discontinu of singulier zijn. Wij zullen veronderstellen dat dit geschiedt op oppervlakken  $x_i = x_i(s)$  indien de ruimte van  $x_i$  driedimensionaal is, of op lijnen  $x_i = x_i(s)$  indien de ruimte van  $x_i$  tweedimensionaal is. Het is aldus mogelijk dat de functie  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  niet-uniformiteit zal vertonen; wij zullen in het bijzonder bestuderen het geval dat

$$\lim_{x_i \rightarrow x_i(s)} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x_i, \varepsilon) \right] \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{x_i \rightarrow x_i(s)} \Phi(x_i, \varepsilon) \right]. \quad (2.7)$$

Zoals wij later zullen zien, is deze niet-uniformiteit karakteristiek voor de zogenaamde singuliere storingsproblemen.

Wij merken nog op dat de lijn of het oppervlak van niet-uniformiteit niet noodzakelijk in het inwendige van  $D$  hoeft te liggen, het kan ook de rand van  $D$  zijn, of een gedeelte ervan.

In de omgeving van  $x_i = x_i(s)$  moet een andere representatie dan (2.5) en (2.6) van de functie  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  gelden; deze representatie moet de

niet-uniformiteit (2.7) weergeven. Laten wij veronderstellen dat de variabele  $x_n$  van  $x_i$  de afstand van een punt in het inwendige van  $D$  tot de lijn van niet-uniformiteit meet. (Is dit niet zo, dan moet een coördinaten transformatie eerst worden toegepast). Wij voeren nu in de variabele

$$\xi_n = \frac{x_n}{\varepsilon^v} \quad (2.8)$$

waarbij  $v > 0$  nog nader te bepalen is. Het is duidelijk dat een functie van  $\xi_n$  het gedrag van (2.7) moet vertonen. Wij noemen  $\xi_n$  de lokale coördinaat. In de nieuwe variabelen hebben wij de functie  $\phi(\xi_n, x_i, \varepsilon)$ ,  $i \neq n$ ; wij construeren thans een lokale asymptotische ontwikkeling

$$\phi(\xi_n, x_i, \varepsilon) = \psi^{(3)}(\xi_n, x_i) \left\{ \sum_{m=0}^M g_m^{(3)}(\varepsilon) \phi_m^{(3)}(\xi_n, x_i) + F_M \right\} \quad (2.9)$$

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{F_M(\xi_n, x_i, \varepsilon)}{g_{M+1}(\varepsilon)} \right\} \right| < \infty \quad (2.10)$$

Rest nog te bewijzen dat de ontwikkeling (2.9) een gemeenschappelijk geldigheidsgebied heeft zowel met (2.5) als met (2.6). Hiervoor is het nodig en voldoende dat (2.10) blijft gelden voor  $|\xi_n| \rightarrow \infty$ . (Immers ieder eindig  $x_n$  wordt voor  $\varepsilon \rightarrow 0$  afgebeeld op  $\xi_n \rightarrow \infty$ ).

Wij zullen later zien dat het mogelijk is uit de lokale asymptotische ontwikkeling (2.9) tezamen met de overige ontwikkelingen (2.5) en (2.6) een samengestelde ontwikkeling te construeren die uniform geldig is.

In enkele, eenvoudige, gevallen is het mogelijk een uniforme ontwikkeling direkt te construeren door de definitie (2.2) nog verder te generaliseren, dat wil zeggen vervangen door

$$\phi(x_i, \varepsilon) = \psi(x_i, \varepsilon) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\varepsilon) \phi_n(x_i) + o(g_{N+1}) \right\} \quad (2.11)$$

waarbij  $\psi(x_i, \epsilon)$  een functie is die de niet-uniformiteit van  $\phi(x_i, \epsilon)$  weergeeft en die voldoende eenvoudig is om expliciet te worden bepaald.

Wij zullen thans het voorafgaande met een eenvoudig voorbeeld toelichten.

Wij beschouwen de functie

$$\phi(x, \epsilon) = \tanh \frac{x}{\epsilon} \cdot \cos(x + \epsilon x^2) \quad (2.12)$$

op het interval  $-A \leq x \leq A$ ;  $|A| < \infty$ .

Deze functie heeft het niet-uniforme gedrag

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(x, \epsilon) \right] = \mp 1; \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x, \epsilon) \right] = 0. \quad (2.13)$$

Gemakkelijk kunnen wij asymptotische benaderingen van het type (2.5), (2.6) construeren.

Voor  $x > 0$  hebben wij bijvoorbeeld

$$\phi(x, \epsilon) = \cos x - \epsilon x^2 \sin x - \frac{1}{2!} \epsilon^2 x^4 \cos x + O(\epsilon^3). \quad (2.14)$$

Voor  $x < 0$  volgt

$$\phi(x, \epsilon) = -\cos x + \epsilon x^2 \sin x + \frac{1}{2!} \epsilon^2 x^4 \cos x + O(\epsilon^3).. \quad (2.15)$$

Men overtuigt zich zonder moeite dat

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \left\{ \phi(x, \epsilon) - \left[ \cos x - \epsilon x^2 \sin x - \frac{1}{2!} \epsilon^2 x^4 \cos x \right] \right\} = \frac{x^6}{3!} \quad (2.16)$$

voor alle  $x > 0$ . De asymptotische ontwikkeling (2.14) is dus geldig in het open interval  $0 < x < \infty$ . Analoog bewijst men dat de ontwikkeling (2.15) geldig is in open interval  $-\infty < x < 0$ .

Wij beschouwen nu de omgeving van  $x = 0$  en voeren in de lokale coördinaat

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (2.17)$$

Verg. (2.12) gaat over in

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \tanh \xi \cos \varepsilon \left[ \xi + \varepsilon^2 \xi^2 \right]. \quad (2.18)$$

De asymptotische ontwikkeling luidt:

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \tanh \xi \left[ 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \xi^2 + o(\varepsilon^3) \right]. \quad (2.19)$$

Men vindt nu dat

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \left\{ \frac{\Phi(\xi, \varepsilon)}{\tanh \xi} - \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \xi^2 \right) \right\} \right| = \xi^3 \quad (2.20)$$

zodat de asymptotische ontwikkeling (2.19) geldig is in het open interval  $-\infty < \xi < \infty$ . Voor ieder  $\varepsilon \neq 0$  is het geldigheidsgebied van (2.19) overlappend met die van (2.14) en die van (2.15). Immers, iedere eindige waarde van  $x$  wordt voor  $\varepsilon \neq 0$  afgebeeld op een grote maar eindige waarde van  $\xi$ .

Wij schrijven thans de asymptotische ontwikkeling (2.5), (2.6) in de vorm

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \phi_n(x) + o(\varepsilon^{N+1}); \quad 0 < |x| < \infty \quad (2.21)$$

en de lokale asymptotische ontwikkeling (2.19) in de vorm

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \psi_n(\xi) + o(\varepsilon^{M+1}) \quad |\xi| < \infty. \quad (2.22)$$

Wij beweren dat het mogelijk is m.b.v. de lokale ontwikkeling (2.22) tezamen met de andere ontwikkeling (2.21) term voor term een uniforme ontwikkeling te construeren. Wij zullen hier de demonstratie geven voor de eerste term.

Wij veronderstellen de ontwikkeling in de vorm:

$$\Phi(x, \varepsilon) = \phi_0(x) + \psi_0^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \quad (2.23)$$

waarbij  $\psi_0^*$  een nader te bepalen functie is; Wij beschouwen eerst

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x, \varepsilon) = \phi_0(x) + \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0^*(\xi), \quad x \neq 0. \quad (2.24)$$

Aangezien  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x, \varepsilon) = \phi_0(x)$  voor  $x \neq 0$ , moet gelden

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0^*(\xi) = 0. \quad (2.25)$$

Wij beschouwen thans de lokale limiet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\xi, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_0(\varepsilon\xi) + \psi_0^*(\xi). \quad (2.26)$$

Aangezien  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\xi, \varepsilon) = \psi_0(\xi)$ , volgt

$$\psi_0^*(\xi) = \psi_0(\xi) - \phi_0(0). \quad (2.27)$$

Hiermee is de functie  $\psi_0^*(\xi)$  eenduidig bepaald.

Men ziet gemakkelijk in dat aan conditie (2.25) inderdaad is voldaan.

Expliciet hebben wij voor bijvoorbeeld  $x > 0$

$$\Phi(x, \varepsilon) = \cos x + \tan h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1 + O(\varepsilon). \quad (2.28)$$

Men kan zich uiteindelijk nog overtuigen dat inderdaad

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \Phi(x, \varepsilon) - \left[ \cos x + \tan h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1 \right] \right\} \right| < \infty \quad (2.29)$$

uniform in het half open interval  $0 \leq x < \infty$ .

In het eenvoudige voorbeeld dat wij hier beschouwen is het overigens ook mogelijk uniform geldige ontwikkeling te geven van het gegeneraliseerde type (2.11). Deze is uiteraard

$$\Phi(x, \varepsilon) = \tan h \frac{x}{\varepsilon} \left\{ \cos x - \varepsilon x^2 \sin x - \frac{1}{2!} \varepsilon^2 x^4 \cos x + O(\varepsilon^3) \right\} \quad (2.30)$$

De eerste term van deze ontwikkeling is asymptotisch equivalent aan de benadering (2.28).

### 3. Asymptotische oplossingen

Wij beschouwen thans een functie  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  die gedefinieerd is als een oplossing van de partiële differentiaalvergelijking

$$L_0(\Phi) + \varepsilon L_s(\Phi) = 0 \quad (3.1)$$

welke aan de randen van het gebied  $D$  aan gegeven randvoorwaarden voldoet. Hierbij zijn  $L_0$  en  $L_s$  partiële differentiaaloperatoren in de onafhankelijke variabelen  $x_i$ ; wij veronderstellen dat  $L_0$  en  $L_s$  verder niet van  $\varepsilon$  afhangen. Voorts zullen wij aan de oplossing  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  van het bovengestelde probleem bepaalde continuïteits- en regulariteitsvoorwaarden opleggen.

Wij stellen ons tot doel de asymptotische benadering voor kleine waarden van  $\varepsilon$  van de functie  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  te construeren, zonder hierbij gebruik te maken van deze functie. Deze procedure is van zeer groot praktisch belang, immers in zeer veel gevallen is het ons niet mogelijk de expliciete vorm van de oplossing te vinden.

Laat de hoogste orde afgeleide van de operator  $L_0$   $\frac{\partial^p}{\partial x_i^p}$  zijn, ter-

wijl de hoogste orde afgeleide van  $L_s$   $\frac{\partial^q}{\partial x_i^q}$  is. Twee klassen problemen zijn te onderscheiden.

Klasse I :  $p \geq q$  voor alle  $i$ ;

Klasse II :  $p < q$  voor één of meerdere onafhankelijke variabelen  $x_i$ .

Wij noemen voorts de limiet voor  $\varepsilon \rightarrow 0$  van de verg. (3.1)

$$L_0(\phi_0) = 0 \quad (3.2)$$

de gereduceerde vergelijking.

In klasse I is de gereduceerde vergelijking van dezelfde orde als de complete vergelijking; in klasse II is de gereduceerde vergelijking van lager orde dan de complete vergelijking. Hiermee wordt het fundamentele verschil tussen de klassen I en II duidelijk, immers:

In klasse I is het in principe mogelijk oplossingen  $\phi_0$  van de gereduceerde vergelijking te vinden die aan alle randvoorwaarden van het probleem voldoen.

In klasse II is het niet mogelijk  $\phi_0$  aan alle randvoorwaarden te laten voldoen.

Men heeft de gewoonte problemen uit de klasse II singuliere storingsproblemen te noemen.

Het karakteristieke van de singuliere storingsproblemen is het niet-uniforme gedrag van de functie  $\phi(x_i, \epsilon)$ , dus het bestaan van  $x_i = x_i(s)$  waarvoor

$$\lim_{x_i \rightarrow x_i(s)} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(x_i, \epsilon) \right] \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{x_i \rightarrow x_i(s)} \phi(x_i, \epsilon) \right]. \quad (3.2)$$

Wij merken op dat problemen waarbij dit soort niet-uniformiteit optreedt ook in de klasse I aanwezig zijn, zoals wij later aan een voorbeeld zullen zien.

In dit colloquium zullen wij ons hoofdzakelijk bezig houden met singuliere storingsproblemen uit de klasse II. Alvorens deze nader te beschouwen zullen wij echter aan de klasse I een korte bespreking wijden.

#### 4. Asymptotische ontwikkelingen voor reguliere storings-problemen

Wij beschouwen hier het geval van lineaire vergelijking (3.1) met lineaire randvoorwaarden. Wij voeren formeel in de ontwikkeling

$$\Phi(x_i, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \epsilon^n \phi_n(x_i) + F_N(x_i, \epsilon) \quad (4.1)$$

waarbij  $\phi_0$  voldoet aan

$$L_0(\phi_0) = 0 \quad (4.2)$$

en de complete randvoorwaarden van het probleem.

Voorts

$$L_0(\phi_{n+1}) = -L_S(\phi_n) \quad (4.3)$$

$$L_0(F_N) + \epsilon L_S(F_N) = -\epsilon^{N+1} L_S(\phi_N). \quad (4.4)$$

$\phi_n$  en  $F_N$  moeten aan homogene randvoorwaarden voldoen.

Wij schrijven nog

$$F_N = \epsilon^{N+1} \bar{F}_N \quad (4.5)$$

waardoor verg. (4.4) overgaat in

$$L_0(\bar{F}_N) + \epsilon L_S(\bar{F}_N) = -L_S(\phi_N). \quad (4.6)$$

Opdat deze procedure inderdaad de asymptotische ontwikkeling zal leveren, moet gelden

- a) Het probleem voor  $\phi_0$  is oplosbaar en de oplossing voldoet aan alle continuïteits- en regulariteitsvoorwaarden.
- b)  $\phi_n$  voor  $n = 1, 2, \dots, N$  voldoen aan de continuïteits- en regulariteitsvoorwaarden.
- c) De oplossing van verg. (4.6) met homogene randvoorwaarden is



uniform begrensd in D.

In vele praktische gevallen leidt de bovenstaande procedure inderdaad tot succesvolle ontwikkelingen, alhoewel het onder c) vereiste vaak moeilijk is te bewijzen. Dat de procedure echter ook mis kan lopen tonen wij aan aan de hand van een tweetal eenvoudige voorbeelden.

Beschouw de vergelijking

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + [2\pi + \varepsilon]^2 \phi = 0 \quad (4.7)$$

met randvoorwaarden

$$\phi(0) = 0 \text{ en } \phi(1) = 1. \quad (4.8)$$

De oplossing van het probleem luidt

$$\phi(x, \varepsilon) = \frac{\sin(2\pi + \varepsilon) x}{\sin(2\pi + \varepsilon)}. \quad (4.9)$$

Echter  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(x, \varepsilon)$  bestaat niet, en het probleem

$$L_0(\phi_0) = 0$$

met randvoorwaarden  $\phi_0(0) = 0$   $\phi_0(1) = 1$  heeft geen oplossing.

Wij hebben hier te maken met een "resonantie storings-probleem". Wij merken op dat er wel een asymptotische ontwikkeling van de oplossing  $\phi(x, \varepsilon)$  bestaat. Deze is gegeven door

$$\phi(x, \varepsilon) = \frac{\sin 2\pi x}{\varepsilon} + x \cos 2\pi x - \frac{1}{2!} \varepsilon x^2 \sin 2\pi x + O(\varepsilon^2). \quad (4.10)$$

Als tweede voorbeeld beschouwen wij de vergelijking

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2\varepsilon \frac{d\phi}{dv} + \omega^2 \phi = 0 \quad (4.11)$$

waarbij de functies  $\phi$  en  $\frac{d\phi}{dx}$  voor  $x = 0$  gegeven zijn.

Gevraagd wordt de oplossing voor alle  $x > 0$ ;  $\omega$  wordt reëel verondersteld.

De exacte oplossing luidt

$$\Phi(x, \varepsilon) = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x} \quad (4.12)$$

$$\lambda_{1,2} = \mp i \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} - \varepsilon. \quad (4.13)$$

A en B zijn constanten die bepaald worden door toepassing van beginvoorwaarden. Wij constateren dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, \varepsilon) = 0. \quad (4.14)$$

Tevens merken wij op het niet-uniforme gedrag t.o.v.  $\varepsilon$ , immers

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, \varepsilon) \right] \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x, \varepsilon) \right]. \quad (4.15)$$

Deze niet-uniformiteit wordt weerspiegeld in de asymptotische ontwikkeling. Stellen wij

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \phi_n(x) + F_N(x, \varepsilon) \quad (4.16)$$

dan volgt

$$\frac{d^2 \phi_0}{dx^2} + \omega^2 \phi_0 = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2 \phi_{n+1}}{dx^2} + \omega^2 \phi_{n+1} = -2 \frac{d\phi_n}{dx}. \quad (4.18)$$

Wij vinden echter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_n \text{ bestaat niet voor alle } n > 0. \quad (4.19)$$

Het niet-uniforme gedrag voor  $x \rightarrow \infty$  wordt in dit probleem veroorzaakt door het feit dat wij te maken hebben met een singulier punt van de

vergelijking. Voeren wij in de coördinaten transformatie

$$z = \frac{1}{x} \quad (4.20)$$

dan gaat de vergelijking over in

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{2}{z} \frac{d\phi}{dz} + \frac{\omega^2}{z^4} \phi = \varepsilon \frac{1}{z^2} \frac{d\phi}{dz}. \quad (4.21)$$

Wij zien dus dat de "kleine storings-term" voor  $z \rightarrow 0$  een singuliere coëfficiënt heeft. Singuliere storings-problemen van dit type spelen een grote rol in de theorie van de niet-lineaire trillingen, zoals deze bijvoorbeeld door de vergelijking van van der Pol worden beschreven.

#### 5. Singuliere storings-problemen: een eenvoudig voorbeeld

Wij beschouwen nu de vergelijking

$$L_0(\phi) + \varepsilon L_s(\phi) = 0 \quad (5.1)$$

waarbij de gereduceerde vergelijking

$$L_0(\phi_0) = 0 \quad (5.2)$$

van lager orde is dan de complete vergelijking (5.1). Symboliseren wij de randvoorwaarde van het complete probleem met  $\Pi$ , dan is de verg. (5.2) met deze randvoorwaarden overbepaald. Wij nemen echter aan dat er een splitsing van de randvoorwaarden

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_s \quad (5.3)$$

mogelijk is, zodanig dat verg. (5.2) met randvoorwaarden  $\Pi_0$  oplosbaar is. De oplossing van (5.2) met randvoorwaarden  $\Pi_0$  noemen wij  $\phi_0$ .

Indien er deelgebieden  $D_0$  van  $D$  bestaan waarin  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon L_s(\phi) = 0$ , dan kunnen wij verwachten dat inderdaad

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x_i, \varepsilon) = \Phi_0 \text{ voor } x_i \in D_0. \quad (5.4)$$

Daar echter  $\Phi_0$  niet aan de complete randvoorwaarden  $\Pi$  voldoet moeten ook noodzakelijk deelgebieden  $D_s$  van  $D$  bestaan, waarin  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon L_s(\Phi) \neq 0$ . Onze taak is de deelgebieden  $D_0$  en  $D_s$  te bepalen, asymptotische benadering voor  $\Phi(x_i, \varepsilon)$  in  $D_s$  te construeren, en uiteindelijk de continuering van de verschillende asymptotische uitdrukkingen te bestuderen. Hierbij kunnen wij ons inspireren op de discussie van paragraaf 3; alvorens de algemene gedachtengang te ontwikkelen zullen wij echter een eenvoudig voorbeeld expliciet uitwerken.

Wij beschouwen de vergelijking

$$\varepsilon \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + 2 \frac{d\Phi}{dx} + \Phi = 0 \quad (5.5)$$

met randvoorwaarden

$$\Phi(0, \varepsilon) = 0 \quad (5.6)$$

$$\Phi(1, \varepsilon) = 1. \quad (5.7)$$

De exacte oplossing van het probleem luidt

$$\Phi = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}} \quad (5.8)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\varepsilon} \mp \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon}. \quad (5.9)$$

Wij zullen nu trachten een asymptotische benadering van de functie  $\Phi(x, \varepsilon)$  te construeren, zonder hierbij gebruik te maken van de kennis van de exacte oplossing (5.8), (5.9).

De gereduceerde vergelijking luidt

$$2 \frac{d\phi_0}{dx} + \phi_0 = 0. \quad (5.10)$$

Met de oplossing van deze vergelijking is het ons mogelijk aan één van de twee randvoorwaarden te voldoen.

Wij kiezen (5.7) en er volgt

$$\phi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-1)}. \quad (5.11)$$

Zeker kunnen wij verwachten dat  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(x, \epsilon) \neq \phi_0$  in de omgeving van  $x = 0$ , aangezien  $\phi_0$  aan de randvoorwaarde (5.6) niet voldoet.

In de omgeving van  $x = 0$  zal dus in verg. (5.5)  $\epsilon L_s(\phi)$  niet meer asymptotisch veel kleiner zijn dan  $L_0(\phi)$ . Wij onderzoeken thans de mogelijkheid van het bestaan van oplossingen van verg. (5.5) die met  $x$  zo snel variëren, dat  $\epsilon L_s(\phi)$  van dezelfde orde van grootte (in  $\epsilon$ ) is als  $L_0(\phi)$ . Hiertoe voeren wij in de lokale coördinaten

$$x = \epsilon^\nu \xi \quad (5.12)$$

waarmee verg. (5.5) overgaat in

$$\epsilon^{1-2\nu} \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + 2\epsilon^{-\nu} \frac{d\phi}{d\xi} + \phi = 0. \quad (5.13)$$

Kiezen wij nu

$$\nu = 1 \quad (5.14)$$

dan zijn inderdaad  $\epsilon L_s(\phi)$  en  $L_0(\phi)$  in de lokale coördinaten van dezelfde orde van grootte en er volgt

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + 2 \frac{d\phi}{d\xi} + \epsilon\phi = 0. \quad (5.15)$$

Door limiet-overgang  $\epsilon \rightarrow 0$  in verg. (5.15) verkrijgen wij de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten; de oplossing ervan,  $\psi_0(\xi)$ , is

$$\psi_0(\xi) = (C_0 e^{-2\xi} + C_1) \quad (5.16)$$

waarbij  $C_0$  en  $C_1$  twee nader te bepalen constanten zijn.  $\psi_0(\xi)$  is de eerste term van een lokale asymptotische ontwikkeling van de functie  $\Phi$ , indien geldt

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\xi, \varepsilon) - \psi_0(\xi)}{\varepsilon} \right| < \infty \quad (5.17)$$

in een zeker gebied van de variabele  $\xi$ .

Wij veronderstellen thans dat de oplossing  $\Phi(x, \varepsilon)$  van ons probleem een functie is van de klasse die wij in paragraaf 3 hebben beschouwd. Dat wil zeggen dat er een asymptotische ontwikkeling bestaat

$$\Phi(x, \varepsilon) = \Phi_0(x) + O(\varepsilon) \quad \text{voor } x \in D_0 \quad (5.18)$$

en tevens een lokale asymptotische ontwikkeling

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \psi_0(\xi) + O(\varepsilon) \quad \text{voor } \xi \in D_\varepsilon \quad (5.19)$$

waarbij  $D_0$  het half open interval is  $0 < x \leq 1$  en  $D_\varepsilon$  het half open interval is  $0 \leq \xi < \infty$ .

De randvoorwaarde (5.6) kan dan aan de functie  $\psi_0(\xi)$  worden opgelegd en er volgt

$$\psi_0(\xi) = C_0(e^{-2\xi} - 1) \quad (5.20)$$

waarbij  $C_0$  een constante is die bepaald moet worden door de aansluiting van de ontwikkelingen (5.18) en (5.19).

Langs een intuïtieve weg kunnen wij deze aansluiting als volgt verkrijgen:

Wij gaan in verg. (5.20) over op de coördinaat  $x$

$$\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = C_0\left(e^{-2\frac{x}{\varepsilon}} - 1\right) \quad (5.21)$$

en merken op dat de functie  $\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  voor kleine waarden van  $\varepsilon$  zeer snel tot de waarde  $-C_0$  nadert. Betrekkelijk dicht bij de rand  $x = 0$  zal  $\psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  reeds weinig van  $C_0$  verschillen. In hetzelfde gebied echter zal de functie  $\phi_0(x)$  weinig van de waarde  $\phi_0(0)$  verschillen. Dit suggereert dat wij voor de aansluiting zouden kunnen stellen

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0(\xi) = \lim_{x \rightarrow 0} \phi_0(x). \quad (5.22)$$

Wij zullen thans dit intuïtieve resultaat langs een meer formele weg afleiden.

Als in paragraaf 3 stellen wij ons tot doel uit (5.18) en (5.19) een uniform geldige asymptotische benadering af te leiden

$$\phi(x, \varepsilon) = \phi_0(x) + \psi_0^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + F_1(x, \varepsilon) \quad (5.23)$$

waarbij dus moet gelden

$$F_1(x, \varepsilon) = O(\varepsilon) \quad \text{uniform in het gesloten interval } 0 \leq x \leq 1. \quad (5.24)$$

Verg. (5.23) in lokale coördinaten luidt

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \phi_0(\varepsilon\xi) + \psi_0^*(\xi) + F_1(\varepsilon\xi, \varepsilon). \quad (5.25)$$

Kiezen wij nu

$$\psi_0^*(\xi) + \phi_0(0) = \psi_0(\xi) \quad (5.26)$$

dan volgt uit verg. (5.19) dat inderdaad

$$F_1(x, \varepsilon) = F_1(\varepsilon\xi, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5.27)$$

Beschouwen wij verg. (5.23) dan is, blijkens verg. (5.16),

$$F_1(x, \varepsilon) = O(\varepsilon) \quad (5.28)$$

indien

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi_0^* \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)}{\varepsilon} \right| < \infty. \quad (5.29)$$

Aan deze laatste vergelijking wordt voldaan indien

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0^*(\xi) = 0. \quad (5.30)$$

Wij zien dat (5.26) met conditie (5.30) identiek is aan de intuïtief afgeleide conditie (5.22). Expliciet hebben wij uit (5.26)

$$\psi_0^* = C_0 (e^{-2\xi} - 1) - e^{\frac{1}{2}}. \quad (5.31)$$

Conditie (5.30) bevat

$$C_0 = -e^{\frac{1}{2}}. \quad (5.32)$$

Uiteindelijk volgt dus

$$\Phi(x, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - e^{\frac{1}{2}} e^{-2\frac{x}{\varepsilon}} + o(\varepsilon). \quad (5.33)$$

Men kan zich nog overtuigen dat hiermee de eerste term van een uniform geldige benadering van de functie  $\Phi(x, \varepsilon)$  is verkregen, door resultaat (5.33) te vergelijken met de exacte oplossing (5.8).

## 6. Singuliere storings-problemen: algemene methode

De methode die wij in het voorgaand eenvoudig voorbeeld hebben gebruikt is in feite de methode die algemeen voor de constructie van asymptotische oplossingen van singuliere storings-problemen toegepast wordt. Wij hebben gezien dat in deze methode een aantal hypothesen en intuïtieve redeneringen de essentiële bouwstenen vormen; deze moeten à posteriori streng worden gerechtvaardigd. Beschikt men niet over de exacte oplossing, dan is deze rechtvaardiging, dat wil zeggen het uiteindelijk bewijs dat men inderdaad een asymptotische benadering van de



oplossing heeft geconstrueerd, in het algemeen niet gemakkelijk te geven. Later in dit colloquium zullen wij op deze kwestie uitvoerig terugkomen en de resultaten die op dit punt zijn geboekt bespreken. Wij willen hier echter de gedachtengang die wij bij het behandelen van het eenvoudige voorbeeld van paragraaf 5 hebben gebruikt in meer algemene termen vertalen. Wij beperken ons hierbij tot de gevallen waarbij zowel  $L_0(\phi)$  als  $L_s(\phi)$ , elk afzonderlijk, quasi-lineair zijn. Wij beschouwen dus het singuliere storings-probleem

$$L_0(\phi) + \epsilon L_s(\phi) = \sigma \quad (6.1)$$

met randvoorwaarden  $\Pi$  op de rand van het gebied  $D$ . Wij splitsen de randvoorwaarden in

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_s \quad (6.2)$$

en definiëren de functie  $\phi_0(x_i)$  als de oplossing van de gereduceerde vergelijking

$$L_0(\phi_0) = 0 \quad (6.3)$$

die aan de randvoorwaarde  $\Pi_0$  voldoet. Wij nemen aan dat er deelgebieden  $D_0$  van  $D$  bestaan, waarin geldt

$$\phi(x_i, \epsilon) = \phi_0(x_i) + O(\epsilon) \quad \text{voor } x_i \in D_0. \quad (6.4)$$

Het is echter duidelijk dat  $D_0$  niet met het geheel van  $D$  kan samenvallen. Niet-uniform gedrag van de functie  $\phi(x_i, \epsilon)$  is te verwachten langs de randen waarop  $\phi_0(x_i)$  niet aan alle randvoorwaarden  $\Pi$  voldoet; het niet-uniforme gedrag kan bovendien ook nog optreden langs oppervlakken of lijnen in het inwendige van  $D$ .

Wij beschouwen eerst de omgeving van een randkromme waarop  $\phi_0(x_i)$  niet aan alle randvoorwaarden  $\Pi$  voldoet.

Laat nu  $x_n$  de variabele zijn die de afstand vanuit een punt van  $D$  tot de randkromme meet. Wij onderzoeken de mogelijkheid van het bestaan van oplossingen  $\phi(x_i, \epsilon)$  van verg. (6.1) die met  $x_n$  zo snel variëren dat  $L_0(\phi)$  en  $\epsilon L_s(\phi)$  van dezelfde orde van grootte zijn.

Beschouw de som van de termen met de hoogste afgeleide naar  $x_n$ , voorkomende in  $L_0$  en  $\epsilon L_s$ :

$$S = \epsilon A(x_n, x_j) \frac{\partial^q \Phi(x_n, x_j, \epsilon)}{\partial x_n^q} + B(x_n, x_j) \frac{\partial^p \Phi(x_n, x_j, \epsilon)}{\partial x_n^p}. \quad (6.5)$$

Wij voeren in de lokale coördinaat

$$\xi_n = \frac{x_n}{\epsilon^v} \quad (6.6)$$

waarmee (6.5) overgaat in

$$S = \epsilon^{1-qv} A(\epsilon^v \xi_n, x_j) \frac{\partial^q \Phi}{\partial \xi_n^q} + \epsilon^{-pv} B(\xi_n, x_j) \frac{\partial^p \Phi}{\partial \xi_n^p}. \quad (6.7)$$

Veronderstellen wij dat de coëfficiënten A en B begrensd zijn, en voorts dat  $A(0, x_j) \neq 0$  en  $B(0, x_j) \neq 0$ , dan zijn de operatoren  $\epsilon L_s$  en  $L_0$  in de lokale coördinaten van dezelfde orde van grootte, indien

$$v = \frac{1}{q-p}. \quad (6.8)$$

Wij transformeren nu de complete vergelijking (6.1) in de lokale coördinaat (6.6) en vermenigvuldigen met  $\epsilon^{pv}$ ; er volgt

$$L_\epsilon^* \left[ \Phi(\xi_n, x_j, \epsilon) \right] = 0 \quad (6.9)$$

waarbij de operator  $L_\epsilon^*$  nog van  $\epsilon$  afhangt, en de vorm heeft

$$L_\epsilon^* = L_0^* + \epsilon^v L_1^* + \dots + \epsilon^{pv} L_p^* = 0. \quad (6.10)$$

Wij beschouwen de oplossingen  $\psi_0(\xi_n, x_j)$  van de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten

$$L_0^*(\psi_0) = 0 \quad (6.11)$$

en veronderstellen weer dat  $\psi_0$  de eerste term is van de asymptotische benadering

$$\Phi(\xi_n, x_j, \varepsilon) = \psi_0(\xi_n, x_j) + O(\varepsilon^v) \quad \text{voor } \xi_n \in D_s. \quad (6.12)$$

De functies  $\psi_0(\xi_n, x_j)$ , beschouwd in de variabele  $x_n$ , kunnen, als in voorbeeld van paragraaf 5, voor kleine  $\varepsilon$  zeer snel afnemende functies van  $x_n$  zijn. In dit geval zullen wij spreken van grenslaag-karakter. In sommige gevallen echter kunnen ook oplossingen  $\psi_0(\xi_n, x_j)$  bestaan die oscillerend zijn. Dit betekent dat  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x_i, \varepsilon)$  onbepaald is in een eindig deelgebied van  $D$  die ook het geheel van  $D$  kan zijn. Wij zullen later problemen waarin dit soort snelle oscillatie voorkomt nader beschouwen.

Is het mogelijk een functie  $\psi_0(\xi_n, x_j)$  te bepalen die aan alle randvoorwaarden  $\Pi_s$  voldoet en die het grenslaag-karakter heeft, dan heet het probleem "regulier ontaard". De functies  $\psi_0(\xi_n, x_j)$  zullen echter door de randvoorwaarden  $\Pi_s$  niet eenduidig zijn bepaald; supplementaire voorwaarden voor  $\psi_0(\xi_n, x_j)$  moeten worden afgeleid uit de aansluiting van de lokale ontwikkeling (6.12) en de overige ontwikkeling (6.4). De methode hierbij is die welke wij in paragraaf 2 en 5 hebben gebruikt en berust op het bestuderen van de twee limiet-overgangen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x_i, \varepsilon) \quad \text{en} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\xi_n, x_j, \varepsilon).$$

Dit leidt zeer veelvoudig tot een randvoorwaarde voor de functie  $\psi_0(\xi_n, x_j)$  in de vorm

$$\lim_{\xi_n \rightarrow \infty} \psi_0(\xi_n, x_j) = \lim_{x_n \rightarrow 0} \Phi_0(x_i). \quad (6.13)$$

Voor de praktische toepasbaarheid van de bovenbeschreven methode is het noodzakelijk dat zowel de gereduceerde vergelijking

$$L_0(\phi_0) = 0$$

als de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten

$$L_0^*(\psi_0) = 0$$

voldoende eenvoudig zullen zijn om expliciet geïntegreerd te worden.

Vooruitlopend op wat later in dit colloquium uitvoerig ter sprake zal komen, signaleren wij het volgende opmerkelijke feit.

Het blijkt dat:

Indien de randen van  $D$  niet samenvallen met de karakteristieken van de gereduceerde vergelijking  $L_0(\phi_0) = 0$ , de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten een gewone differentiaalvergelijking is. Op randen die wel met karakteristieken van  $L_0(\phi_0) = 0$  samenvallen is de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten een partiële differentiaalvergelijking en wel van parabolisch type.

Wij beschouwen uiteindelijk de mogelijkheid van het optreden van niet-uniform gedrag van  $\phi(x_i, \varepsilon)$  in het inwendige van het gebied  $D$ . Zeker zal deze optreden indien  $\phi_0(x_i)$  discontinu of singulier is langs lijnen of oppervlakken in  $D$ , terwijl wij van de oplossing  $\phi(x_i, \varepsilon)$  continu en regulier gedrag eisen. Echter, discontinuïteiten of singulariteiten van  $\phi_0$  kunnen slechts optreden langs de karakteristieken van  $L_0(\phi_0) = 0$ . Het is dus langs deze karakteristieken dat wij een niet-uniform gedrag van  $\phi(x_i, \varepsilon)$  kunnen verwachten. Wederom moeten wij lokale coördinaten invoeren en ~~een lokale asymptotische ontwikkeling construeren.~~ De randvoorwaarden voor de lokale ontwikkeling worden weer bepaald uit de aansluiting van deze ontwikkeling met de asymptotische ontwikkelingen die geldig zijn in de twee gebieden waarin  $D$  door de karakteristiek wordt verdeeld.

Niet-uniform gedrag in het inwendige van  $D$  treedt ook op in het geval dat wij tot nu toe buiten beschouwing hebben gelaten, namelijk indien  $\psi_0(\xi_n, x_j)$  een oscillerende functie van  $\xi_n$  is, in een deelgebied  $D_s$  van  $D$  dat niet met het geheel van  $D$  samenvalt. Wij zullen dit geval verderop, aan de hand van een voorbeeld, nader bestuderen.

Met nadruk wijzen wij nogmaals er op dat de hierboven beschreven methode een formele constructie is die à posteriori dient te worden gerechtvaardigd met een bewijs dat er inderdaad een asymptotische benadering

is verkregen. Deze laatste en essentiële stap stuit op aanzienlijke moeilijkheden en in vele praktische toepassingen van de methode, bekend uit de literatuur, wordt hij eenvoudig achterwege gelaten. Dit is vooral het geval bij niet-lineaire problemen. Voor lineaire problemen is de theorie van de asymptotische oplossingen in de laatste jaren meer gevorderd. De verkregen resultaten zullen later in dit colloquium uitvoerig worden bestudeerd.

Wij zullen in het vervolg, als illustratie van de voorgaande beschouwingen, enige klassieke singuliere storingsproblemen in het kort bespreken.

#### 7. Asymptotische theorie van visceuse stroming

Als toepassing van het voorgaande beschouwen wij nu de twee-dimensionale stroming van onsamendrukbare vloeistof of gas. Uit de vergelijkingen van Navier-Stokes leidt men in dit geval af de fundamentele vergelijking

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \varepsilon \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7.1)$$

waarbij  $\varepsilon$  de coëfficiënt van viscositeit is, en waarbij de componenten  $u$  en  $v$  van het snelheids-veld nog aan de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.2)$$

moeten voldoen.

Wij beschouwen stationnaire stromingen en voeren in de stroom-functie  $\Phi(x, y, \varepsilon)$ :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; \quad v = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7.3)$$

waarmee aan verg. (7.2) is voldaan. Voorts korten wij nog af

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} . \quad (7.4)$$

Verg. (7.1) gaat hiermee over in

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \Phi = \epsilon \nabla^2 (\nabla^2 \Phi) . \quad (7.5)$$

Voor kleine waarden van  $\epsilon$  hebben wij hier een singulier storingsprobleem van het type dat wij in het voorgaande hebben beschouwd. Echter, de vergelijking is niet lineair, en in tegenstelling met wat wij in paragraaf 6 hebben verondersteld, is  $L_0(\Phi)$  hier niet quasi-lineair. Zoals wij zullen zien heeft dit kleine wijzigingen in de methode ten gevolge.

Laat nu een oneindig dun lichaam gegeven zijn, gelegen op  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \infty$ . De randvoorwaarden zijn dan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{voor } y = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{voor } y = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty . \quad (7.7)$$

Voorts schrijven wij voor dat ver van het lichaam

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \rightarrow U_0 \quad \text{als } x \rightarrow -\infty \text{ en als } y \rightarrow \mp \infty \quad (7.8)$$

waarbij  $U_0$  een gegeven constante is.

Wij beschouwen eerst de gereduceerde vergelijking

$$\left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \Phi_0 = 0 . \quad (7.9)$$

Van het totaal van de randvoorwaarden moeten wij nu randvoorwaarden  $\Pi_0$  afsplitsen die  $\Phi_0$  zouden bepalen. Kiezen wij hiertoe de randvoorwaarden (7.6) en (7.8), dan is de oplossing

$$\Phi_0 = U_0 y . \quad (7.10)$$

Wij veronderstellen dat  $\Phi_0$  de eerste term is van een asymptotische ontwikkeling van  $\Phi(x, y, \epsilon)$

$$\Phi(x, y, \varepsilon) = \Phi_0(y) + O[g_1(\varepsilon)] \quad (7.11)$$

geldig in een zeker deelgebied  $D_0$  van het totale definitiegebied  $D$  van de functie  $\Phi$ .  $D_0$  zal echter zeker de randen  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq \infty$  niet bevatten, aangezien op deze randen de asymptotische ontwikkeling (7.11) niet aan de randvoorwaarde (7.7) voldoet.

Wij zoeken thans naar oplossingen van verg. (7.5) die met de variabele  $y$  snel variëren, zodat  $L_0$  en  $\varepsilon L_s$  van dezelfde orde van grootte zijn. Hiertoe voeren wij in de lokale coördinaat

$$\eta = \frac{y}{\varepsilon} \quad (7.12)$$

Verg. (7.5) gaat hiermee over in

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-3\nu} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{2\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = \\ & = \varepsilon^{1-4\nu} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{2\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \Phi. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Daar  $L_0(\Phi)$  niet quasi-lineair is, hangt de orde van grootte van het linker-lid van verg. (7.13) nog af van de orde van grootte van de functie  $\Phi(x, y, \varepsilon)$  zelf. Wat deze laatste moet zijn leert ons de volgende beschouwing:

Wij wensen de asymptotische ontwikkeling in de lokale coördinaten te bepalen, die een overlappend geldigheidsgebied zal hebben met de asymptotische ontwikkeling (7.11). Voorts zijn wij vooral geïnteresseerd in de afgeleiden van  $\Phi$  naar  $x$  en  $y$ . Zo moet dus in het gemeenschappelijk geldigheidsgebied gelden:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(x, y, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, y, \varepsilon)}{\partial y} \quad (7.14)$$

en tevens

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(x, y, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, y, \varepsilon)}{\partial y} . \quad (7.15)$$

Nu volgt uit de ontwikkeling (7.11) dat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, y, \varepsilon)}{\partial y} = o(1) \quad (7.16)$$

terwijl uit verg. (7.15) volgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, y, \varepsilon)}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\nu} \frac{\partial \Phi(x, y, \varepsilon)}{\partial y} . \quad (7.17)$$

Willen (7.16) en (7.15) equivalent zijn, dan moet

$$\frac{\partial \Phi(x, y, \varepsilon)}{\partial y} = o(\varepsilon^\nu) . \quad (7.18)$$

In het geldigheidsgebied van de lokale ontwikkeling stellen wij dus

$$\Phi(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^\nu \psi(x, y, \varepsilon) . \quad (7.19)$$

Verg. (7.13) gaat hiermee over in

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-\nu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{2\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \\ & = \varepsilon^{1-3\nu} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{2\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \psi . \end{aligned} \quad (7.20)$$

Linker en rechter lid van verg. (7.20) zijn van dezelfde orde van grootte als wij kiezen

$$\nu = \frac{1}{2} . \quad (7.21)$$

De gereduceerde vergelijking in de lokale coördinaten luidt

$$\left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \eta^4} . \quad (7.22)$$

Deze vergelijking kan één keer naar  $\eta$  worden geïntegreerd, terwijl uit een eenvoudige beschouwing van de vergelijkingen van Navier-Stokes kan



worden afgeleid dat de integratie-constante nul is. Uiteindelijk volgt dan

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \eta^3}. \quad (7.23)$$

Dit is de zogenaamde grenslaag vergelijking; inderdaad is de benaming "grenslaag", die wij reeds eerder hebben gebruikt, afkomstig uit het stromingsprobleem, dat wij hier beschouwen.

Aangezien de lokale asymptotische ontwikkeling in het deelgebied  $D_s$  moet gelden dat de rand bevat, moeten wij aan  $\psi_0$  de complete randvoorwaarden (7.6), (7.7) opleggen, d.w.z.

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} = 0 \quad \text{voor } \eta = 0; \quad 0 \leq x \leq \infty. \quad (7.24)$$

Uit de aansluiting van de lokale asymptotische ontwikkeling met de ontwikkeling (7.11) volgt nog de voorwaarde

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \psi_0}{\partial y}. \quad (7.25)$$

De grenslaag vergelijking is een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking. Er bestaan echter oplossingen van deze vergelijking in de vorm

$$\psi_0(x, y) = \sqrt{x} F(z) \quad (7.26)$$

$$z = \frac{\eta}{2\sqrt{x}}. \quad (7.27)$$

Door substitutie volgt dan voor de functie  $F(z)$  de gewone differentiaalvergelijking

$$F'''' + FF'' = 0 \quad (7.28)$$

terwijl de randvoorwaarden overgaan in

$$\left. \begin{aligned} F(0) = 0 ; \quad F'(0) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} F'(z) = 2 U_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Het probleem voor  $F$  kan worden opgelost met reeksontwikkelingen volgens Blasius, of met de iteratie-methode van H. Weyl.

De grenslaagtheorie in de stromingsleer heeft opmerkelijke successen geboekt en doorstaat glansrijk de vergelijking met experimentele resultaten. Uit mathematisch oogpunt echter ontbreekt er nog het bewijs dat de verkregen resultaten inderdaad een asymptotische benadering zijn.

### 8. Singuliere storingsproblemen met snel oscillerende oplossingen

Tot nu toe hebben wij buiten beschouwing gelaten het geval waarbij de oplossing in lokale coördinaten niet het grenslaag-karakter heeft, maar een snel oscillerende functie is. Laten wij als voorbeeld beschouwen de vergelijking

$$\epsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} + x\phi = 0. \quad (8.1)$$

De algemene oplossing kan worden uitgedrukt in Bessel-functies en er volgt

$$\phi(x, \epsilon) = \sqrt{x} \left\{ A I_{\frac{1}{3}} \left[ \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \right] + B I_{-\frac{1}{3}} \left[ \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \right] \right\}. \quad (8.2)$$

De constanten  $A$  en  $B$  kunnen zodanig gekozen worden dat voor  $x < 0$  en  $|\epsilon| \ll 1$ ,  $\phi(x, \epsilon)$  het grenslaag-karakter heeft, d.w.z. snel naar nul gaat voor  $x \rightarrow -\infty$ . Voor  $x > 0$  echter is  $\phi(x, \epsilon)$  een snel oscillerende functie van  $x$  en

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(x, \epsilon) \text{ is onbepaald voor alle } 0 \leq x \leq \infty. \quad (8.3)$$

Wij beschouwen nu een iets meer algemene vergelijking

$$\varepsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q(x)\phi = 0 \quad (8.4)$$

waarbij wij  $Q(x)$  continu en begrensd veronderstellen, en voorts

$$\left. \begin{array}{l} Q(x) > 0 \quad \text{voor } x > 0 \\ Q(x) < 0 \quad \text{voor } x < 0. \end{array} \right\} \quad (8.5)$$

Dit soort singuliere storingsproblemen treedt op in de quantum-mechanica waar verg. (8.4) de één-dimensionale vergelijking van Schrödinger is. De constructie van de asymptotische ontwikkeling van  $\phi(x, \varepsilon)$  naar  $\varepsilon$  stuit hier op moeilijkheden, wegens het oscillerend karakter van  $\phi(x, \varepsilon)$  voor  $x > 0$ . Passen wij toe de methode die wij in het voorgaande hebben gebruikt, dan volgt inderdaad voor  $x < 0$  een oplossing met grenslaag karakter, maar voor  $x > 0$  kan geen asymptotische ontwikkeling worden afgeleid.

Bij singuliere storingsproblemen met snel oscillerende oplossingen past men algemeen toe de zogenaamde W.K.B.J.-methode (naar Wentzel, Kramers, Brillouin en Jeffreys). Deze berust op de transformatie

$$\phi(x, \varepsilon) = \exp \left[ \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \psi(x, \varepsilon) \right]. \quad (8.6)$$

Door substitutie volgt dan uit verg. (8.4) de vergelijking

$$\left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + Q(x) + \sqrt{\varepsilon} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0. \quad (8.7)$$

Voeren wij nu in de formele asymptotische reeks

$$\phi(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{1}{2}n} \phi_n(x) \quad (8.8)$$

dan kunnen de functies  $\phi_n$  één voor één worden bepaald en er volgt

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= \frac{1}{2} i \int^x \sqrt{Q(x')} dx' \\ \phi_1 &= -\frac{1}{4} \log Q \\ \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Wij vinden dus

$$\phi(x, \varepsilon) = Q^{-\frac{1}{4}} \left\{ A \exp\left[-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x \sqrt{Q} d\xi\right] + B \exp\left[\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x \sqrt{Q} d\xi\right] \right\} \{1 + o(\sqrt{\varepsilon})\}. \quad (8.10)$$

Wij veronderstellen deze asymptotische ontwikkeling geldig voor  $0 < x \leq \infty$  en  $-\infty \leq x < 0$ . In de omgeving van  $x = 0$  heeft ontwikkeling (8.10) echter een singulier gedrag, hetgeen een weerspiegeling is van de niet-uniformiteit van de functie  $\phi(x, \varepsilon)$ . Om deze te onderzoeken passen wij wederom toe de methode van lokale coördinaten

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon} \quad (8.11)$$

waarbij wij tevens  $Q(x)$  in Tayler-reeks ontwikkelen

$$Q(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots \quad (8.12)$$

Er volgt

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + \varepsilon^\nu (\alpha_1 \xi + \varepsilon^\nu \xi^2 + \dots) \phi = 0. \quad (8.13)$$

Kiezen wij nu

$$\nu = \frac{1}{3} \quad (8.14)$$

dan volgt de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten

$$\frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + \alpha_1 \xi \psi_0 = 0. \quad (8.15)$$

De oplossingen kunnen wederom worden uitgedrukt in Bessel-functies.

Rest nog de aansluiting van de lokale ontwikkeling met de W.K.B.J.-ontwikkelingen te bepalen. Men gebruikt hierbij weer de methode die wij eerder hebben besproken.

Wij merken nog op dat de W.K.B.J.-methode ook van groot nut kan zijn in singuliere storingsproblemen waarbij geen snel oscillerende oplossingen optreden. Als voorbeeld beschouwen wij de vergelijking (8.4) in het interval  $-\infty \leq x \leq -1$  en leggen de randvoorwaarden op

$$\phi(-1, \varepsilon) = A ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi = 0. \quad (8.16)$$

De asymptotische oplossing volgens de methode die wij tot nu toe hebben gebruikt, luidt

$$\phi(x, \varepsilon) = A e^{\sqrt{-Q(-1)} \frac{x+1}{\sqrt{\varepsilon}}} + o(\sqrt{\varepsilon}). \quad (8.17)$$

Volgens de W.K.B.J.-methode volgt

$$\phi(x, \varepsilon) = A \left[ \frac{Q(x)}{Q(-1)} \right]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_1^x \sqrt{-Q} dx' \right] \{ 1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \}. \quad (8.18)$$

Gaan wij in verg. (8.18) over op de lokale coördinaat

$$\xi = \frac{x+1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (8.19)$$

en passen wij vervolgens de limiet-overgang  $\varepsilon \rightarrow 0$  toe dan volgt weer verg. (8.17), zodat (8.17) en (8.18) inderdaad asymptotisch equivalent zijn. In sommige gevallen echter kan het nuttig zijn de benadering (8.18) in plaats van (8.17) te gebruiken, daar deze een betere beschrijving levert van het gedrag van de functie  $\phi(x, \varepsilon)$  in het geheel van het interval  $-\infty \leq x \leq -1$ .



Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameterAsymptotische problemen in verband met  
de vergelijking van Burgers

J. Nuis

1. Inleiding

De vergelijking van Burgers luidt

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{Uv}{b} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (1.1)$$

Deze vergelijking kan worden opgevat als een mathematisch model voor het gedrag van de turbulentie  $v(y,t)$  van een in een kanaal stromende vloeistof. Het kanaal is oneindig lang ( $-\infty < x < \infty$ ) en heeft een breedte  $b$  ( $0 \leq y \leq b$ ). In dit model is  $U$  de primaire of gemiddelde snelheid van de vloeistof. In het navolgende nemen we  $U$  constant. De kleine parameter  $\varepsilon$  representeert de viscositeitscoëfficiënt.

De randvoorwaarden, die aan de oplossing  $v(y,t)$  worden opgelegd, zijn:

$$v(0,t) = 0 \quad \text{voor alle } t; \quad (1.2)$$

$$v(b,t) = 0 \quad \text{voor alle } t. \quad (1.3)$$

De vergelijking heeft een structuur, welke lijkt op die van de Navier-Stokes-vergelijking

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_j. \quad (1.4)$$

Schrijven we deze vergelijking op voor één dimensie:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho F - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1.5)$$

dan zien we, dat in (1.1)  $\rho F - \frac{\partial p}{\partial y}$  door  $\frac{Uv}{b}$  vervangen is.

Het volgende is een korte analyse van een artikel van Burgers ("A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence", Adv. Appl. Mech., I, 1948, 171 o/v. 199). Bij de beschouwing van het stationaire geval, dus  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , verdeelt Burgers het gebied  $0 \leq y \leq b$  in twee soorten deelgebieden,

a) waar  $\epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  kan worden verwaarloosd t.o.v. de andere termen.

Hier heeft  $v(y)$  dus een redelijk rustig verloop;

b) waar  $\frac{Uv}{b}$  kan worden verwaarloosd t.o.v. de andere termen.

Deze deelgebieden zijn zeer smal, met een sterk verloop van  $v(y)$ .

Burgers beschouwt dus respectievelijk de vergelijkingen

$$\frac{Uv}{b} - 2v \frac{dv}{dy} = 0 \quad (1.6)$$

en

$$\epsilon \frac{d^2 v}{dy^2} - 2v \frac{dv}{dy} = 0. \quad (1.7)$$

De oplossingen zijn respectievelijk

$$v = \frac{Uy}{2b} + C \quad (1.8)$$

en

$$v = -A \operatorname{tgh} \left\{ \frac{A(y - B)}{\epsilon} \right\}. \quad (1.9)$$

De constanten A, B en C moeten zo bepaald worden, dat de oplossingen (1.8) en (1.9) zonder discontinuïteiten aansluiten en dat aan de randvoorwaarden (1.2) en (1.3) voldaan is. Burgers geeft als belangrijke speciale oplossingen

$$v \cong \frac{U}{2} \left( \frac{y}{b} - \operatorname{tgh} \frac{Uy}{2\epsilon} \right) \quad (1.10)$$

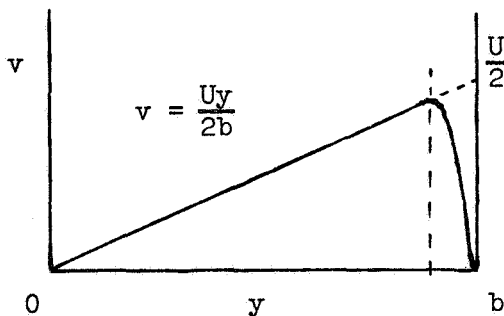


$$v \cong \frac{U}{2} \left( \frac{y}{b} - 1 + \operatorname{tgh} \frac{U(b-y)}{2\varepsilon} \right) \quad (1.11)$$

$$v \cong \frac{U}{4} \left( \frac{2y}{b} - 1 - \operatorname{tgh} \frac{Uy}{4\varepsilon} + \operatorname{tgh} \frac{U(b-y)}{4\varepsilon} \right). \quad (1.12)$$

(1.10) ontstaat op de volgende manier:

Voldoet (1.8) aan (1.2), dan  $C = 0$ . In een smal gebied, dicht bij  $y = b$ , is de oplossing  $v = -A \operatorname{tgh} \left\{ \frac{A(y-B)}{\varepsilon} \right\}$ . Voor kleine  $\varepsilon$  geldt dichtbij



$y = b$ :  $v = +A$ ; deze waarde moet juist de waarde van  $v = \frac{Uy}{2b}$  in  $y = b$ , dus  $v = \frac{U}{2}$ , zijn, zodat dus  $A = +\frac{U}{2}$ . De aansluiting van de beide oplossingen tot één oplossing is nu continu en voldoet in  $y = b$  aan de randvoorwaarde (1.3).

$v = \frac{Uy}{2b} - \frac{U}{2} \operatorname{tgh} \left\{ \frac{U}{2\varepsilon} (y - B) \right\}$  voldoet aan (1.2), als  $B = 0$ , zodat de oplossing wordt

$$v = \frac{U}{2} \left( \frac{y}{b} - \operatorname{tgh} \frac{Uy}{2\varepsilon} \right).$$

Op soortgelijke wijze ontstaan de andere twee oplossingen. Burgers bereikt deze resultaten door, met een enorme feeling en grote intuïtie, daarvoor in aanmerking komende termen te verwaarlozen t.o.v. de overigen. Wij zullen trachten in het volgende de oplossingen, die Burgers geeft, te bereiken via de methoden, welke eerder ontwikkeld zijn in de theorie van de asymptotische ontwikkeling naar een parameter.

## 2. Stationaire oplossingen van de vergelijking van Burgers

Eerder is de partiële differentiaalvergelijking in het algemeen genoteerd als

$$L_0(\phi) + \epsilon L_s(\phi) = 0. \quad (2.1)$$

De oplossing moest voldoen aan randvoorwaarden aan de randen van een gebied  $D$ . De hoogste orde afgeleide in  $L_0$  is  $\frac{\partial p}{\partial x_i^p}$ , in  $L_s$   $\frac{\partial q}{\partial x_j^q}$ .

Voor de vergelijking van Burgers (1.1) betekent dit, dat

$$L_0(v) = -\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{Uv}{b} - 2v \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$L_s(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$p = 1, \quad q = 2,$$

waarmee dit probleem tot klasse II van singuliere storingsproblemen behoort.

De gereduceerde vergelijking voor het stationaire geval ( $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ ) wordt

$$\frac{Uv_0}{b} - 2v_0 \frac{dv_0}{dy} = 0, \quad (2.2)$$

met de niet-triviale oplossing

$$v_0(y) = \frac{Uy}{2b} + c.$$

Kiezen we als randvoorwaarde, waaraan voldaan moet worden, (1.3), dan volgt

$$v_0(y) = \frac{Uy}{2b} - \frac{U}{2}. \quad (2.3)$$

Zeker geldt nu  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v(y, \epsilon) \neq v_0(y)$  in omgeving van  $y = 0$ , daar niet voldaan wordt aan de randvoorwaarde (1.2).

In de vergelijking van Burgers voor stationaire oplossingen

$$\frac{Uv}{b} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

voeren we in lokale coördinaten  $\xi = \frac{y}{v}$ , met  $v$  zo te kiezen, dat de oplossingen van deze vergelijking zo snel met  $y$  variëren, dat  $\varepsilon L_s(v)$  van dezelfde orde van grootte in  $\varepsilon$  is als  $L_0(v)$ :

$$\frac{Uv}{b} - 2v\varepsilon^{-v} \frac{dv}{d\xi} + \varepsilon^{1-2v} \frac{d^2 v}{d\xi^2} = 0. \quad (2.5)$$

Kies nu  $v$  zo, dat  $-v = 1 - 2v$  ofwel  $v = 1$ . (2.5) gaat dan over in

$$\varepsilon \frac{Uv}{b} - 2v \frac{dv}{d\xi} + \frac{d^2 v}{d\xi^2} = 0. \quad (2.6)$$

De gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) luidt

$$\frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} - 2\psi_0 \frac{d\psi_0}{d\xi} = 0, \quad (2.7)$$

de oplossing hiervan is

$$\psi_0(\xi) = -a \operatorname{tgh} ( a (\xi + d) ). \quad (2.8)$$

We veronderstellen, dat er asymptotische ontwikkelingen bestaan

$$v(y, \varepsilon) = v_0(y) + O(\varepsilon) \text{ voor } 0 < x \leq b \quad (2.9)$$

$$\text{en } \psi(\xi, \varepsilon) = \psi_0(\xi) + O(\varepsilon) \text{ voor } 0 \leq \xi < \infty. \quad (2.10)$$

De nog niet gebruikte randvoorwaarde (1.2) kan nu worden opgelegd aan

$$\psi_0(\xi) = -a \operatorname{tgh} ( a (\xi + d) )$$

$$0 = -a \operatorname{tgh} ad.$$

Voor  $a = 0$  ontstaat geen continue aansluiting met (2.3):

$$v_0(y) = \frac{Uy}{2b} - \frac{U}{2}, \text{ zodat } d = 0.$$

We nemen nu aan, dat er voor  $v(y, \varepsilon)$  een uniform geldige asymptotische ontwikkeling bestaat:

$$v(y, \varepsilon) = v_0(y) + \psi_0^* \left( \frac{y}{\varepsilon} \right) + o(\varepsilon). \quad (2.11)$$

Gevonden moet nog worden  $\psi_0^* \left( \frac{y}{\varepsilon} \right)$ . Uit (2.9) en (2.11) volgt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(y, \varepsilon) = v_0(y)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(y, \varepsilon) = v_0(y) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_0^* \left( \frac{y}{\varepsilon} \right) = v_0(y) + \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0^*(\xi)$$

$$\text{zodat dus } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0^*(\xi) = 0. \quad (2.12)$$

(2.11), herschreven in lokale coördinaten, luidt

$$v(\varepsilon\xi, \varepsilon) = \Phi(\xi, \varepsilon) = v_0(\varepsilon\xi) + \psi_0^*(\xi) + o(\varepsilon) \quad (2.13)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\varepsilon\xi, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\xi, \varepsilon) = v_0(0) + \psi_0^*(\xi),$$

terwijl uit (2.10) volgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\xi, \varepsilon) = \psi_0(\xi),$$

zodat dus  $\psi_0^*(\xi) = \psi_0(\xi) - v_0(0)$ . Hier wordt dit dus

$$\psi_0^*(\xi) = -a \operatorname{tgh} a\xi + \frac{U}{2}. \quad (2.14)$$

De bepaling van  $a$  gaat als volgt:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0^*(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0(\xi) - v_0(0) = 0, \text{ volgens (2.12).}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0(\xi) = v_0(0) = \lim_{y \rightarrow 0} v_0(y)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} -a \operatorname{tgh} a\xi = -a = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{Uy}{2b} - \frac{U}{2} \right) = -\frac{U}{2},$$

hieruit, uit (2.11) en (2.14) volgt

$$\begin{aligned} v(y, \epsilon) &= \left( \frac{Uy}{2b} - \frac{U}{2} \right) + \left( -\frac{U}{2} \operatorname{tgh} \frac{Uy}{2\epsilon} + \frac{U}{2} \right) + o(\epsilon) \\ &= \frac{U}{2} \left( \frac{y}{b} - \operatorname{tgh} \frac{Uy}{2\epsilon} \right) + o(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.15)$$

waarmee een door Burgers gegeven oplossing (1.10) gevonden is.

Beginnen we met randvoorwaarde (1.2),  $v(0) = 0$ , op te leggen aan de oplossing van de gereduceerde vergelijking, dan volgt voor  $c$  uit

$v_0(y) = \frac{Uy}{2b} + c$ ;  $c = 0$ , zodat geldt  $v_0(y) = \frac{Uy}{2b}$ . Nu dienen lokale coördinaten  $\xi$  gekozen te worden in de omgeving van  $y = b$ :  
 $\xi = \frac{y - b}{\epsilon}$ . De oplossing van de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten blijft

$$\psi_0(\xi) = -a \operatorname{tgh} ( a (\xi + d) ).$$

Ook nu wordt weer verondersteld, dat er asymptotische ontwikkelingen bestaan en wel

$$v(y, \epsilon) = v_0(y) + o(\epsilon) \quad \text{voor} \quad 0 \leq x < b \quad (2.16)$$

$$\text{en } \phi(\xi, \epsilon) = \psi_0(\xi) + o(\epsilon) \quad \text{voor} \quad \xi \leq b. \quad (2.17)$$

Nu moet dus  $\psi_0(\xi)$  voldoen aan (1.3), ofwel

$-a \operatorname{tgh} ( a ( \frac{b}{\epsilon} + d ) ) = 0$ . Voor  $a = 0$  ontstaat geen continue aansluiting, zodat  $d = -\frac{b}{\epsilon}$ .

Nemen we ook hier weer aan, dat er voor  $v(y, \epsilon)$  een uniform geldige ontwikkeling bestaat:

$$v(y, \epsilon) = v_0(y) + \psi_0^* \left( \frac{y}{\epsilon} \right) + o(\epsilon) \quad (2.18)$$

(2.12):  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0^*(\xi) = 0$  wordt op dezelfde manier gevonden.

(2.18), in lokale coördinaten, luidt

$$v(b + \epsilon\xi, \epsilon) = \phi(\xi, \epsilon) = v_0(b + \epsilon\xi) + \psi_0^*(\xi) + o(\epsilon). \quad (2.19)$$

Op de manier als eerder aangegeven, volgt hier

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_0(\xi) = \lim_{y \rightarrow b} v_0(y) \text{ en}$$

$$\psi_0^*(\xi) = \psi_0(\xi) - v_0(b), \text{ zodat}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} -a \operatorname{tgh} \left( a \left( \xi - \frac{b}{\varepsilon} \right) \right) = -a = \frac{U}{2} \text{ en}$$

$$\psi_0^*(\xi) = \frac{U}{2} \operatorname{tgh} \left( -\frac{U}{2} \left( \xi - \frac{b}{\varepsilon} \right) \right) - \frac{U}{2}.$$

Uit (2.18) volgt nu

$$v(y, \varepsilon) = \frac{U}{2} \left( \frac{y}{b} - 1 + \operatorname{tgh} \left( \frac{U}{2\varepsilon} (b - y) \right) \right) + o(\varepsilon). \quad (2.20)$$

Dit is juist de oplossing (1.11) van Burgers.

Om resultaten als (1.12) te krijgen, handelen we als volgt.

De oplossing van de gereduceerde vergelijking is

$$v_0(y) = \frac{Uy}{2b} + c. \quad (2.21)$$

Gaan we over op lokale coördinaten  $\xi_1 = \frac{y}{\varepsilon}$  in de omgeving van  $y = 0$ , dan wordt de oplossing van de gereduceerde vergelijking in deze lokale coördinaat

$$\psi_1(\xi_1) = -a \operatorname{tgh} \left( a (\xi_1 + d) \right). \quad (2.22)$$

Het overgaan op lokale coördinaten  $\xi_2 = \frac{y - b}{\varepsilon}$  in de omgeving van  $y = b$ , geeft een gereduceerde vergelijking, welke als oplossing heeft

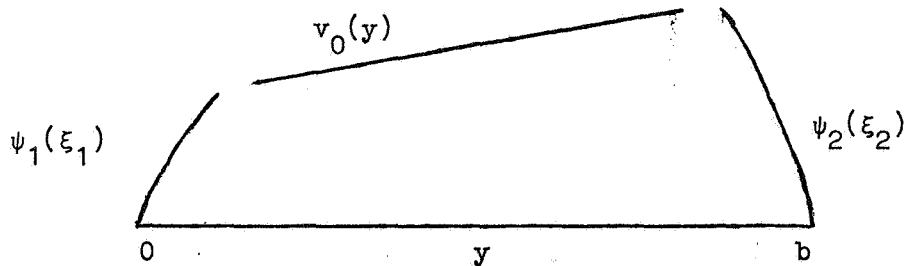
$$\psi_2(\xi_2) = -f \operatorname{tgh} \left( f (\xi_2 + e) \right). \quad (2.23)$$

Verondersteld wordt het bestaan van de volgende asymptotische ontwikkelingen

$$v(y, \varepsilon) = v_0(y) + o(\varepsilon) \quad \text{voor } 0 < y < b \quad (2.24)$$

$$\Phi_1(\xi_1, \varepsilon) = \psi_1(\xi_1) + o(\varepsilon) \quad \text{voor } 0 \leq y \quad (2.25)$$

$$\Phi_2(\xi_2, \varepsilon) = \psi_2(\xi_2) + o(\varepsilon) \quad \text{voor } y \leq b. \quad (2.26)$$



Als hypothese nemen we het bestaan van een uniform geldige asymptotische ontwikkeling van  $v(y, \varepsilon)$ :

$$v(y, \varepsilon) = v_0(y) + \psi_1^*(\xi_1) + \psi_2^*(\xi_2) + o(\varepsilon). \quad (2.27)$$

Nu moeten dus  $\psi_1(\xi_1)$ , resp.  $\psi_2(\xi_2)$  voldoen aan de randvoorwaarden (1.2), resp. (1.3), waaruit volgt, dat  $d = 0$  en  $e = 0$ .

Uit (2.27), resp. (2.24) volgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(y, \varepsilon) = v_0(y) + \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1) + \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(y, \varepsilon) = v_0(y),$$

zodat 
$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1) + \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2) = 0. \quad (2.28)$$

(2.27) herschrijvend in lokale coördinaten  $\xi_1 = \frac{y}{\varepsilon}$ , resp.  $\xi_2 = \frac{y-b}{\varepsilon}$  levert op het respectievelijke gemeenschappelijke gebied

$$v(\varepsilon \xi_1, \varepsilon) = \Phi_1(\xi_1, \varepsilon) = v_0(\varepsilon \xi_1) + \psi_1^*(\xi_1) + \psi_2^*\left(\xi_1 - \frac{b}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon); \quad (2.29)$$

$$v(\varepsilon\xi_2, \varepsilon) = \Phi_2(\xi_2, \varepsilon) = v_0(b + \varepsilon\xi_2) + \psi_1^*\left(\frac{b}{\varepsilon} + \xi_2\right) + \psi_2^*(\xi_2) + o(\varepsilon). \quad (2.30)$$

De combinatie (2.25), (2.29) levert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_1(\xi_1, \varepsilon) = \psi_1(\xi_1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_1(\xi_1, \varepsilon) &= v_0(0) + \psi_1^*(\xi_1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_2^*\left(\xi_1 - \frac{b}{\varepsilon}\right) \\ (\xi_1 \text{ vast}) &= v_0(0) + \psi_1^*(\xi_1) + \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2), \end{aligned}$$

$$\text{zodat } \psi_1^*(\xi_1) = \psi_1(\xi_1) - v_0(0) - \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2). \quad (2.31)$$

Combinatie (2.26), (2.30) levert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_2(\xi_2, \varepsilon) = \psi_2(\xi_2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_2(\xi_2, \varepsilon) &= v_0(b) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_1^*\left(\frac{b}{\varepsilon} + \xi_2\right) + \psi_2^*(\xi_2) \\ (\xi_2 \text{ vast}) &= v_0(b) + \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1) + \psi_2^*(\xi_2), \end{aligned}$$

$$\text{zodat } \psi_2^*(\xi_2) = \psi_2(\xi_2) - v_0(b) - \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1). \quad (2.32)$$

Limietovergangen in (2.31), resp. (2.32) leveren

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1) = \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1(\xi_1) - v_0(0) - \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2); \quad (2.33)$$

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2) = \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2(\xi_2) - v_0(b) - \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1). \quad (2.34)$$

Via (2.28) ontstaat uit (2.33)

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1(\xi_1) = v_0(0) + \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1) + \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2) = \lim_{y \rightarrow 0} v_0(y); \quad (2.35)$$



en uit (2.34)

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2(\xi_2) = v_0(b) + \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2) + \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1) = \lim_{y \rightarrow b} v_0(y). \quad (2.36)$$

Uit (2.21), (2.22) en (2.35) ontstaat, als  $a > 0$ ,

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} (-a \operatorname{tgh} a\xi_1) = -a = v_0(0) = c.$$

Uit (2.21), (2.23) en (2.36) ontstaat, als  $f > 0$ ,

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} (-f \operatorname{tgh} f\xi_2) = f = v_0(b) = \frac{U}{2} + c = \frac{U}{2} - a.$$

Substitutie van deze resultaten in  $v_0(y)$ ,  $\psi_1(\xi_1)$  en  $\psi_2(\xi_2)$  levert

$$v_0(y) = \frac{Uy}{2b} - a$$

$$\psi_1(\xi_1) = -a \operatorname{tgh} a\xi_1$$

$$\psi_2(\xi_2) = \left(a - \frac{U}{2}\right) \operatorname{tgh} \left(\left(\frac{U}{2} - a\right) \xi_2\right).$$

Optelling van (2.31) en (2.32) geeft

$$\begin{aligned} \psi_1^*(\xi_1) + \psi_2^*(\xi_2) &= \psi_1(\xi_1) + \psi_2(\xi_2) - v_0(0) - v_0(b) - \lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} \psi_2^*(\xi_2) \\ &\quad - \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \psi_1^*(\xi_1) = \\ &= \psi_1(\xi_1) + \psi_2(\xi_2) - v_0(0) - v_0(b), \end{aligned}$$

zodat (2.27) overgaat in

$$\begin{aligned} v(y, \varepsilon) &= \frac{Uy}{2b} - a - a \operatorname{tgh} a\xi_1 + \left(a - \frac{U}{2}\right) \operatorname{tgh} \left(\left(\frac{U}{2} - a\right) \xi_2\right) + a + \\ &\quad + \left(a - \frac{U}{2}\right) + o(\varepsilon) = \\ &= \frac{Uy}{2b} + a - \frac{U}{2} - a \operatorname{tgh} \frac{ay}{\varepsilon} + \left(a - \frac{U}{2}\right) \operatorname{tgh} \left(\left(\frac{U}{2} - a\right) \left(\frac{y-b}{\varepsilon}\right)\right) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Het resultaat van Burgers (1.12) ontstaat voor  $a = \frac{U}{4}$ . Uit bovenstaande berekeningen volgt  $0 < a < \frac{U}{2}$ . De gevallen  $a = 0$  en  $a = \frac{U}{2}$  zijn juist de gevallen (2.20) en (2.15), waar één grenslaag optreedt in tegenstelling tot het optreden van twee grenslagen in geval (2.37). Overigens is hier niet mee bewezen, dat er inderdaad een dergelijke familie van oplossingen is. We zijn er immers vanuit gegaan, dat er een uniform geldige asymptotische ontwikkeling van de oplossing  $v(y, \epsilon)$  van de vergelijking van Burgers bestaat. Dat er een dringende behoefte is aan een theorie, die uitsluitel geeft, welke van die gevonden ontwikkelingen asymptotische ontwikkelingen zijn van de oplossingen van een partiële differentiaalvergelijking, is aan de hand van het voorgaande, wel duidelijk aangetoond.

### 3. Het gedrag van de niet-stationaire oplossingen

Wij beschouwen de vergelijking van Burgers

$$\frac{Uv}{b} - \frac{\partial v}{\partial t} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

welke, zoals we eerder gezien hebben, behoort tot klasse II van singuliere storingsproblemen.

De gereduceerde vergelijking

$$\frac{Uv}{b} - \frac{\partial v}{\partial t} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

is een quasi-lineaire partiële differentiaalvergelijking van de eerste orde. De karakteristieken worden bepaald door

$$\frac{dy}{2v} = \frac{b \, dv}{Uv} = dt, \quad (3.3)$$

zodat de karakteristieken de snijlijnen zijn van de vlakken

$$v = c_1 e^{Ut/b} \quad (3.4)$$

$$\text{en } v = \frac{Uy}{2b} + c_2. \quad (3.5)$$

De subkarakteristieken zijn gegeven door

$$\frac{Uy}{2b} + c_2 = c_1 e^{Ut/b}. \quad (3.6)$$

Wij schetsen een deel van de subkarakteristieken, uitgaande van een gedeelte van een beginkromme  $v = v(y,0)$ , waarin stukken voorkomen

met  $\frac{dv}{dy} > 0$ ,  $\frac{dv}{dy} = 0$  en  $\frac{dv}{dy} < 0$ . Hierbij wordt uiteraard gebruik

gemaakt van één van de combinaties uit (3.3)

$$dy = 2v \, dt \quad (3.7)$$

terwijl een tweede combinatie

$$dv = \frac{Uv}{b} dt \quad (3.8)$$

de toename in  $v$  langs de subkarakteristiek voorschrijft. Hoe groter  $v$  is, hoe groter  $dv$  wordt.

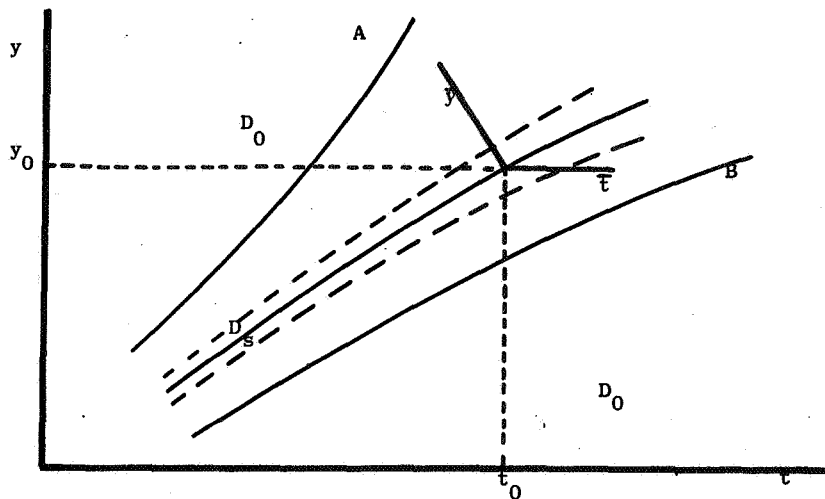
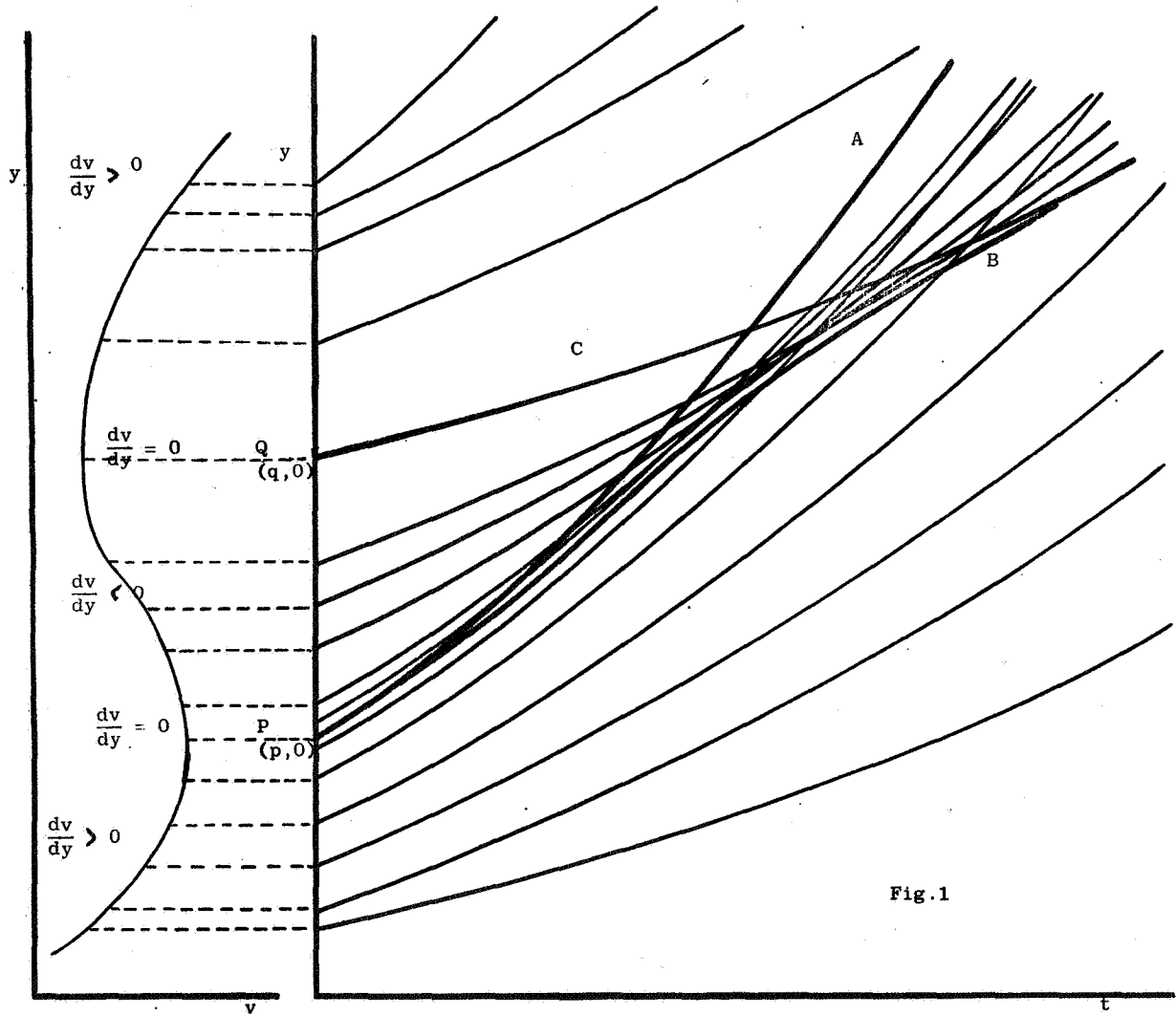
De subkarakteristieken, behorende bij dat deel van de beginkromme  $v = v(y,0)$ , waarvoor  $\frac{dv}{dy} < 0$ , neigen steeds meer naar elkaar toe, omdat, naarmate  $v$  kleiner wordt, ook de helling  $\frac{dy}{dt}$  van deze subkarakteristieken steeds kleiner wordt. Voor het stuk van  $v(y,0)$  met  $\frac{dv}{dy} > 0$  wijken zij steeds meer uit elkaar, de helling wordt immers groter bij toenemende  $v$ .

De subkarakteristieken, welke, in fig.1, uitgaan van punten  $(y,0)$ ,  $y < p$ , snijden elkaar niet. Hetzelfde geldt voor de subkarakteristieken uitgaande van punten  $(y,0)$ ,  $y > q$ . De subkarakteristieken, welke op  $t = 0$  beginnen tussen  $P$  en  $Q$  snijden elkaar tussen subkarakteristiek  $A$  en de omhullende  $B$ . Voor de punten  $(y,t)$  tussen  $A$  en  $B$  is de oplossing  $v(y,t)$  meerwaardig en continu. In verband met de aard van het probleem willen we echter een éénwaardige oplossing.

Het is wel mogelijk éénwaardige oplossingen te definiëren, maar deze worden echter discontinu. We merken op, dat de keuze van de lijn, waarlangs de oplossing discontinu wordt, niet éénvoudig is. Een discontinuïteitslijn van de oplossing van de gereduceerde vergelijking moet nu worden opgevat als een lijn van niet-uniformiteit van de oplossing  $v(y,t,\epsilon)$  van de vergelijking van Burgers.

Langs de zo ontstane lijn van niet-uniformiteit dient een lokale coördinaat te worden ingevoerd in een richting, welke de afstand tot die lijn meet. Daartoe wordt overal langs genoemde lijn een coördinatenstelsel  $(\bar{y}, \bar{t})$  ingevoerd (zie fig.2), zo dat als  $(y_0, t_0)$  de coördinaten zijn van een punt van die lijn

$$\bar{y} = y - c_1(t_0)(t - t_0) - y_0 \quad (3.9)$$



$$\bar{t} = t - t_0 . \quad (3.10)$$

De lokale coördinaat wordt ingevoerd in de richting van de  $\bar{y}$ -as

$$\xi = \frac{\bar{y}}{\varepsilon^v} . \quad (3.11)$$

Invoering van  $\xi = \frac{\bar{y}}{\varepsilon^v}$  en  $\bar{t} = t - t_0$  in de vergelijking van Burgers (3.1)

$$\frac{Uv}{b} - \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} - 2v \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

leidt tot

$$\frac{Uv}{b} - \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} + \varepsilon^{-v} (c_1 - 2v) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \varepsilon^{1-2v} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 . \quad (3.12)$$

De bijdrage van de oorspronkelijke  $\varepsilon L_s(v)$  in het linkerdeel is de laatste term, de overige termen zijn afkomstig van  $L_0(v)$ . Opdat  $L_0$  en  $\varepsilon L_s$  van dezelfde orde van grootte in  $\varepsilon$  worden, dient  $-v = 1 - 2v$  of  $v = 1$ , zodat (3.12) overgaat in

$$\varepsilon \frac{Uv}{b} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} + (c_1 - 2v) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 . \quad (3.13)$$

De gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten luidt dus

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = (2v - c_1) \frac{\partial v}{\partial \xi} . \quad (3.14)$$

De oplossing is

$$v = \frac{1}{2} c_1 - c_0 \operatorname{tgh}(\xi - \xi_1) c_0$$

$$\text{of } v = \frac{1}{2} c_1 - c_0 \operatorname{tgh} \frac{\bar{y} - y_1}{\varepsilon} c_0 \quad (3.15)$$

waarin  $c_0$  en  $\xi_1$ , respectievelijk  $c_0$  en  $y_1$  integratieconstanten zijn;  $y_1$  duidt aan een willekeurige verschuiving van de oorsprong van de

lokale coördinaten; daar we die oorsprong juist op de discontinuïteitslijn willen houden, stellen we  $y_1 = 0$ . Uit de aansluiting van deze oplossing (3.15) aan de oplossing van de gereduceerde vergelijking zijn  $c_0$  en  $c_1$  te bepalen.

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} v = \frac{1}{2} c_1 - c_0 = \lim_{y \rightarrow y_0} v = v^+$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} v = \frac{1}{2} c_1 + c_0 = \lim_{y \rightarrow y_0} v = v^- .$$

Hieruit volgt, dat  $c_1 = v^+ + v^-$   
 $c_0 = \frac{v^- - v^+}{2}$

waarmee (3.15) wordt

$$v = \frac{v^+ + v^-}{2} - \frac{v^- - v^+}{2} \operatorname{tgh} \frac{(v^- - v^+)(y - y_0 - (v^+ + v^-)(t - t_0)/2)}{2\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Deze oplossing stemt overeen met die, welke Burgers in zijn eerder genoemde artikel vindt na een meer intuïtieve redenering.

#### 4. Iets over de exacte oplossing van een speciale vergelijking van Burgers ( $U = 0$ )

De vergelijking van Burgers, met  $U = 0$ , luidt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Na overgaan van  $2u$  op  $v$  wordt deze vergelijking geschreven als

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} . \quad (4.1)$$

Deze vergelijking is exact op te lossen.

Is  $\theta(y,t)$  een willekeurige oplossing van de warmtevergelijking

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

dan is

$$v(y,t) = -2\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial y} / \theta \quad (4.3)$$

een oplossing van (4.1). Bewijs volgt door substitutie.

Als voorbeeld nemen wij een oplossing van de warmtevergelijking  
( $-\infty < y < \infty$ )

$$\theta(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y-\xi)^2}{4\varepsilon t} \right] \theta_0(\xi) d\xi. \quad (4.4)$$

Voor de berekening van  $\theta_0(\xi) = \theta(\xi,0)$  gaan we als volgt te werk.  
Integratie van (4.3) naar  $y$  levert

$$\begin{aligned} \theta(y,t) &= C(t) \exp \left( -\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^y v(\xi,t) d\xi \right) \\ \theta_0(\xi) &= \theta(\xi,0) = C(0) \exp \left( -\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\xi v(\eta,0) d\eta \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Is  $v(\eta,0) = v_0(\eta)$  gegeven als beginvoorwaarde voor vergelijking (4.1),  
dan is  $\theta_0(\xi)$ , op een multiplicatieve constante na, bepaald.

Substitutie van (4.4) en (4.5) in (4.3) levert als oplossing van de  
speciale Burgers-vergelijking (4.1)

$$v(y,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y-\xi)^2}{4\varepsilon t} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\xi v_0(\eta) d\eta \right] v_0(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y-\xi)^2}{4\varepsilon t} \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\xi v_0(\eta) d\eta \right] d\xi} \quad (4.6)$$



Nemen we ter illustratie voor de beginvoorwaarde de stapfunctie

$$\left. \begin{aligned} v_0(y) &= v_1 & (y < 0) \\ v_0(y) &= -v_1 & (y > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

dan volgt uit (4.5)

$$\left. \begin{aligned} \theta_0(y) &= C(0) \exp(-v_1 y / 2\varepsilon) & (y < 0) \\ \theta_0(y) &= C(0) \exp(v_1 y / 2\varepsilon) & (y > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Dit resultaat, gesubstitueerd in (4.4), levert

$$\begin{aligned} \theta(y,t) = \frac{C(0)}{2} \exp\left(\frac{v_1^2 t}{4\varepsilon}\right) & \left\{ 2 \cosh \frac{v_1 y}{2\varepsilon} + \exp\left(\frac{v_1 y}{2\varepsilon}\right) \operatorname{erf} \frac{y + v_1 t}{\sqrt{4\varepsilon t}} + \right. \\ & \left. - \exp\left(-\frac{v_1 y}{2\varepsilon}\right) \operatorname{erf} \frac{y - v_1 t}{\sqrt{4\varepsilon t}} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{met } \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du .$$

Met behulp van deze  $\theta$  en van (4.3) ontstaat de oplossing van (4.1), met beginvoorwaarde (4.7):

$$\begin{aligned} v(y,t) = -v_1 & \frac{2 \sinh(v_1 y / 2\varepsilon) + \left\{ \exp[v_1 y / 2\varepsilon] \operatorname{erf} \left[ (y + v_1 t) / \sqrt{4\varepsilon t} \right] + \right.}{2 \cosh(v_1 y / 2\varepsilon) + \left\{ \exp[v_1 y / 2\varepsilon] \operatorname{erf} \left[ (y + v_1 t) / \sqrt{4\varepsilon t} \right] + \right.} \\ & \left. + \exp[-v_1 y / 2\varepsilon] \operatorname{erf} \left[ (y - v_1 t) / \sqrt{4\varepsilon t} \right] \right\} \\ & \left. - \exp[-v_1 y / 2\varepsilon] \operatorname{erf} \left[ (y - v_1 t) / \sqrt{4\varepsilon t} \right] \right\} \end{aligned}$$

Dat deze oplossing aan de beginvoorwaarde (4.7) voldoet, is te controleren met behulp van  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$  en  $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$ .

Voor grote waarden van  $t/\varepsilon$  gaat  $v(y,t)$  snel naar

$$v = -v_1 \tanh v_1 y / 2\varepsilon .$$

We zien dus, dat de viscositeit zelfs een scherpe discontinuïteit afvlakt.

### Literatuur

- J.M. Burgers, A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, Adv.Appl.Mech. I, 1948, p. 171 °/. 199.
- J.D. Cole, On a Quasi-linear Parabolic Equation Occuring in Aerodynamics, Quart.of Appl.Math., Vol IX, 1951, p. 225 °/. 236.
- P. Germain, L'Equation de Burgers et ses applications à la théorie des ondes de choc, Cahier de Physique, 119, 1960, p. 285 °/. 300.
- S. Goldstein, On some Methods of Approximation in Fluid Mechanics, Proc.Intern.Congr.Math.Amsterdam, 1954, p. 277 °/. 298.

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

Asymptotische problemen uit de ballistiek

J. Nuis

1. Inleiding

De theorie van de asymptotische ontwikkeling naar een kleine parameter zal worden toegepast op het beperkte drielichamenprobleem. Onder dit laatste verstaat men een drielichamenprobleem, waaraan de volgende beperkingen zijn opgelegd:

- a) de drie lichamen bewegen in een ruimtevast vlak;
- b) één van de drie massa's is te verwaarlozen t.o.v. de andere twee;
- c) de twee lichamen met de niet-verwaarloosde massa's draaien op cirkelbanen rond hun gemeenschappelijk zwaartepunt.

Gemakshalve worden de lichamen, bedoeld onder c), "aarde" en "maan" genoemd. Hun massa's zijn resp.  $m_e$  en  $m_m$ . Een volgende beperking is dat de gereduceerde massa van de maan  $\mu = m_m (m_e + m_m)^{-1} \ll 1$ . (1.1)

Het derde lichaam wordt verder aangeduid met de naam "satelliet".

2. Formulering van het probleem

Het Cartesisch  $(x^{**}, y^{**})$ -coördinatenstelsel met het zwaartepunt van aarde en maan als oorsprong is een inertiaalstelsel. Introduceren we dimensieloze variabelen door lengten te delen door de afstand aarde-maan en tijden te vermenigvuldigen met de hoeksnelheid van het aarde-maan-systeem, dan worden de afstanden van de aarde, resp. de maan tot het gemeenschappelijk zwaartepunt, gezien eis c) van het beperkte drielichamenprobleem,  $\mu$  resp.  $1 - \mu$  en wordt de bewegingsvergelijking

van de satelliet

$$\frac{d^2 \vec{r}^*}{dt^2} = \text{grad}^* \left( \frac{1-\mu}{r_e^*} + \frac{\mu}{r_m^*} \right) \quad (2.1)$$

met  $\vec{r}^* = (x^*, y^*) =$  plaatsvector van de satelliet,

$$r_e^* = |\vec{r}^* - \vec{\xi}_e^*|, \text{ als } \vec{\xi}_e^* = \text{plaatsvector van de aarde,}$$

$$r_m^* = |\vec{r}^* - \vec{\xi}_m^*|, \text{ als } \vec{\xi}_m^* = \text{plaatsvector van de maan.}$$

Gaan we over op een met de aarde meebewegend, niet-roterend Cartesisch coördinatenstelsel, dan wordt de bewegingsvergelijking

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \text{grad} \left( \frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{r_m} \right) - \frac{d^2 \vec{\xi}_e^*}{dt^2} \quad (2.2)$$

waarin  $\vec{r} = (x, y) =$  plaatsvector van de satelliet,

$$r_m = |\vec{r} - \vec{\xi}_m|, \text{ als } \vec{\xi}_m = (\xi_m, \eta_m) = \text{plaatsvector van de maan.}$$

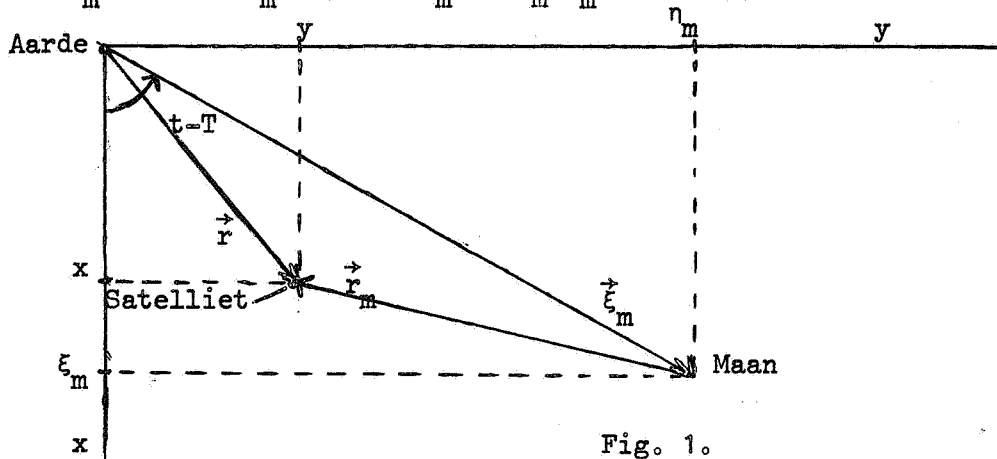


Fig. 1.

$$\text{Er geldt o.a. } \xi_m = \cos(t - T), \eta_m = \sin(t - T) \quad (2.3)$$

$$|\vec{\xi}_m| = 1$$

$$r_m^2 = (x - \xi_m)^2 + (y - \eta_m)^2. \quad (2.4)$$

De phaseconstante  $T$  is nog nader te bepalen.

In componentvorm wordt (2.2) geschreven als

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (1 - \mu) \frac{x}{r^3} = \mu f \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (1 - \mu) \frac{y}{r^3} = \mu g \quad (2.6)$$

$$\text{met } f = \frac{\xi_m - x}{r_m^3} - \xi_m, \quad g = \frac{\eta_m - y}{r_m^3} - \eta_m. \quad (2.7)$$

Als probleem stellen we ons die banen te bepalen, welke de maan passeren binnen een afstand van orde  $\epsilon$ . Daardoor worden de termen

$\mu(\xi_m - x) r_m^{-3}$  uit  $\mu f$  en  $\mu(\eta_m - y) r_m^{-3}$  uit  $\mu g$  van de orde  $\mu \epsilon^{-2}$ .

Voor  $\epsilon = \mu^\alpha$ , met  $\alpha > 1/2$ , ontstaat een singulier storingsprobleem.

Voor het vervolg nemen we  $\alpha = 1$  of  $\epsilon = \mu$ . Ingevoerd worden nieuwe afhankelijke variabelen  $\bar{\xi}$  en  $\bar{\eta}$  in de omgeving van de maan, in plaats van de onbekende functies  $x$  en  $y$ :

$$\xi_m - x = \mu \bar{\xi} \quad (2.8)$$

$$\eta_m - y = \mu \bar{\eta}, \quad (2.9)$$

$$\text{met } r^{-2} = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2.$$

(2.5), herschreven in deze functies, wordt

$$\mu^2 \frac{d^2 \bar{\xi}}{dt^2} - \mu^2 \bar{\xi}_m - \mu(1 - \mu) \frac{\xi_m - \mu \bar{\xi}}{\{(\xi_m - \mu \bar{\xi})^2 + (\eta_m - \mu \bar{\eta})^2\}^{3/2}} + \frac{\bar{\xi}}{r^3} = 0. \quad (2.10)$$

Een soortgelijke vergelijking ontstaat voor (2.6). Uit het feit, dat de hoogst voorkomende afgeleide als coëfficiënt de hoogste macht van  $\mu$  heeft, volgt, dat we te maken hebben met een singulier storingsprobleem, klasse II.

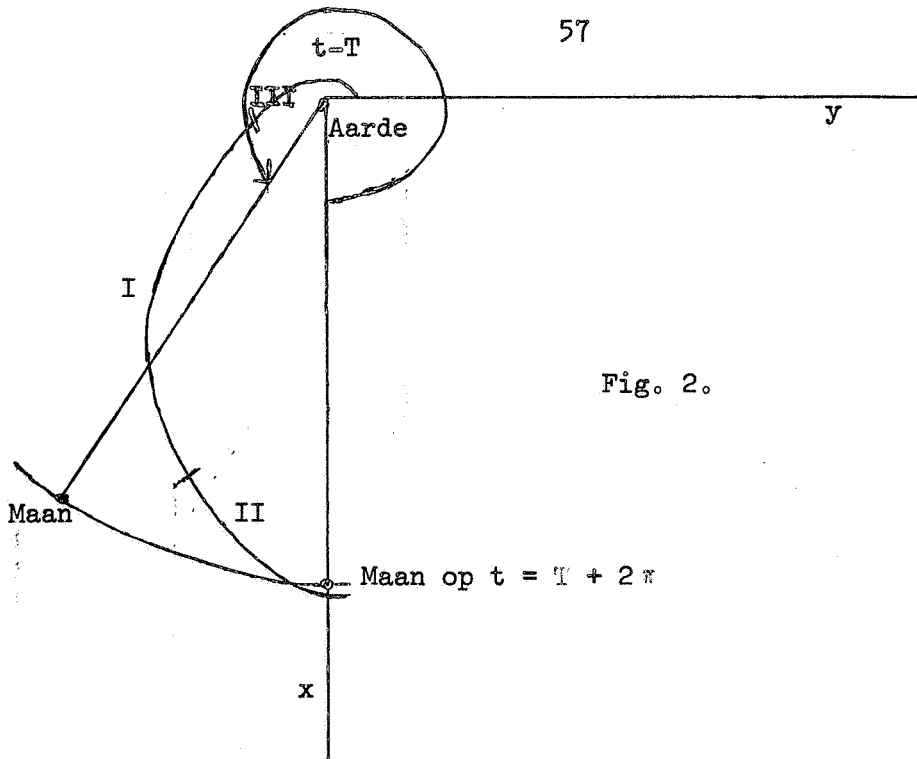


Fig. 2.

In de omgeving van de maan (II) hebben we dus een singulier storingsprobleem.

Een volgende beperking is, dat slechts die banen beschouwd worden, welke beginnen in een omgeving van orde  $\mu$  van de aarde. Willen we het gedrag van de oplossing beschouwen in die omgeving, dan dienen nieuwe afhankelijke variabelen  $\bar{x}$  en  $\bar{y}$  ingevoerd te worden i.p.v. de onbekenden  $x$  en  $y$ :

$$x = \mu \bar{x} \quad (2.11)$$

$$y = \mu \bar{y} \quad (2.12)$$

$$\text{met } \bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 .$$

In deze nieuwe onbekende functies geschreven, wordt (2.5)

$$\mu^3 \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + (1 - \mu) \frac{\bar{x}}{\bar{r}^3} - \mu^3 \frac{\xi_m - \mu \bar{x}}{\{(\xi_m - \mu \bar{x})^2 + (\eta_m - \mu \bar{y})^2\}^{3/2}} + \mu^3 \xi_m = 0.$$

Ook in de omgeving van de aarde (III) hebben we dus weer een singulier storingsprobleem.

### 3. Principe van de asymptotische ontwikkeling voor de maannaderingsbaan

De complete vergelijkingen luiden

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (1 - \mu) \frac{x}{r^3} = \mu \left( \frac{\xi_m - x}{r_m^3} - \xi_m \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (1 - \mu) \frac{y}{r^3} = \mu \left( \frac{\eta_m - y}{r_m^3} - \eta_m \right). \quad (3.2)$$

Door de substituties

$$\begin{aligned} x &= (1 - \mu) x^{**} \\ y &= (1 - \mu) y^{**} \\ t &= (1 - \mu) t^{**} \end{aligned} \quad (3.3)$$

gaan zij over in de complete vergelijkingen in  $x^{**}$ ,  $y^{**}$  en  $t^{**}$ :

$$\frac{d^2 x^{**}}{dt^{**2}} + \frac{x^{**}}{r^{**3}} = \mu(1 - \mu) \left[ \frac{\xi_m - (1 - \mu)x^{**}}{\{(\xi_m - (1 - \mu)x^{**})^2 + (\eta_m - (1 - \mu)y^{**})^2\}^{3/2}} - \xi_m \right] \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 y^{**}}{dt^{**2}} + \frac{y^{**}}{r^{**3}} = \mu(1 - \mu) \left[ \frac{\eta_m - (1 - \mu)y^{**}}{\{(\xi_m - (1 - \mu)x^{**})^2 + (\eta_m - (1 - \mu)y^{**})^2\}^{3/2}} - \eta_m \right] \quad (3.5)$$

De oplossingen van de uit (3.4) en (3.5) afgeleide gereduceerde vergelijkingen

$$\frac{d^2 x^{**}}{dt^{**2}} + \frac{x^{**}}{r^{**3}} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 y^{**}}{dt^{**2}} + \frac{y^{**}}{r^{**3}} = 0 \quad (3.7)$$

noemen we  $x_0^{**}(t^{**})$  en  $y_0^{**}(t^{**})$ . Wij veronderstellen, dat voor de oplos-

singen van (3.4) en (3.5) gelden de asymptotische ontwikkelingen

$$x^{**}(t^{**}, \mu) = x_0^{**}(t^{**}) + \mu x_1^{**}(t^{**}) + o(\mu) \quad (3.8)$$

$$y^{**}(t^{**}, \mu) = y_0^{**}(t^{**}) + \mu y_1^{**}(t^{**}) + o(\mu). \quad (3.9)$$

Over de bepaling van  $x_1^{**}(t^{**})$  en  $y_1^{**}(t^{**})$  zal worden gesproken, nadat er iets over het vastleggen van de beginvoorwaarden gezegd is.

In de omgeving van de aarde geldt, dat  $f_z = x$ ,  $g_z = y$ , zodat na de substitutie

$$\begin{aligned} x^{**} &= \bar{\mu} \bar{x} \\ y^{**} &= \bar{\mu} \bar{y} \\ t^{**} &= \bar{\mu}^{3/2} \bar{t} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.4) en (3.5) geschreven kunnen worden als

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{x}}{\bar{r}^3} = O(\bar{\mu}^4) \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{y}}{\bar{r}^3} = O(\bar{\mu}^4). \quad (3.12)$$

De oplossingen van de gereduceerde vergelijkingen

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{x}}{\bar{r}^3} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{y}}{\bar{r}^3} = 0 \quad (3.14)$$

worden aangegeven met  $\bar{x}_0(\bar{t})$  en  $\bar{y}_0(\bar{t})$ .

Verondersteld wordt, dat de asymptotische ontwikkelingen van de oplossingen van (3.11) en (3.12) zijn



$$\bar{x}(\bar{t}) = \bar{x}_0(\bar{t}) + O(\mu^4) \quad (3.15)$$

$$\bar{y}(\bar{t}) = \bar{y}_0(\bar{t}) + O(\mu^4). \quad (3.16)$$

Uit het feit, dat de gereduceerde vergelijkingen (3.6), (3.7) in gebied I en de gereduceerde vergelijkingen in lokale coördinaten (3.13), (3.14) hetzelfde zijn, volgt dat  $\bar{x}_0(\bar{t})$  en  $x_0^*(t^*)$  dezelfde functies zijn. Van het feit, dat  $\bar{x}(\bar{t}) - \bar{x}_0(\bar{t}) = O(\mu^4)$  maken wij gebruik door de beginvoorwaarden, die eigenlijk vastgelegd zijn voor  $x^* = O(\mu)$ , voor te schrijven voor de oplossing van de gereduceerde vergelijking in  $x = 0$ .

De bepaling van  $x_1^*(t^*)$  en  $y_1^*(t^*)$  gaat op de volgende manier. De veronderstelde oplossingen

$$x^* = x_0^* + \mu x_1^* + O(\mu) \text{ en} \quad (3.17)$$

$$y^* = y_0^* + \mu y_1^* + O(\mu) \quad (3.18)$$

worden in (3.4) en (3.5) ingevuld. Na ontwikkeling van de term  $r_m^{*3}$  vergelijkt men in de beide vergelijkingen de termen met coëfficiënt  $\mu$ . Op deze wijze ontstaan twee lineaire vergelijkingen in  $x_1^*$  en  $y_1^*$ , welke op te lossen zijn.

#### 4. Beginvoorwaarden

Voor de bewegingsconstanten worden gekozen

$$\text{specifieke energie} \quad h_e = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} - \frac{1-\mu}{r} \quad (4.1)$$

$$\text{specifieke draaiïmpuls} \quad l_e = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oriëntatie } \theta_0 \\ p_e = \varepsilon \sin \theta_0 = l_e \frac{dx}{dt} + (1-\mu) \frac{y}{r} \\ q_e = \varepsilon \cos \theta_0 = -l_e \frac{dy}{dt} + (1-\mu) \frac{x}{r} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

Kiezen we  $p_e = 0$ , dan is de door deze bewegingsconstanten vastgelegde baan symmetrisch t.o.v. de x-as.

De beginvoorwaarden worden dus vastgelegd in  $x = 0$ . We nemen daarvoor

$$\begin{aligned} h_e &= -\rho^2 & l_e &= \mu^{\frac{1}{2}} \lambda \\ p_e &= 0 & q_e &> 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hierbij zijn  $\rho$  en  $\lambda$  onafhankelijk van  $\mu$ . In het volgende wordt het geval van de hyperbool uitgesloten, hoewel op dezelfde manier gerekend kan worden als in het geval van de ellips ( $\rho \neq 0$ ) en de parabool ( $\rho = 0$ ).

Uit (4.5) volgt voor de beginvoorwaarden van de componenten en snelheden

$$\begin{aligned} x &= 0 & y &= -\mu \frac{\lambda |\lambda|}{1 - \mu} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1 - \mu}{\mu^{\frac{1}{2}} |\lambda|} & \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}} \lambda} \left[ (1 - \mu)^2 - 2\mu\rho^2\lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

##### 5. Asymptotische ontwikkeling voor de maannaderingsbaan

Ten behoeve van het oplossen van de voorkomende vergelijkingen gaan we van de van  $t^*$  afhankelijke variabelen  $x^*$  en  $y^*$  over op de onafhankelijk variabele  $x^*$  en de daarmee variërende functies  $y^*(x^*)$  en  $t^*(x^*)$ .

(3.4) en (3.5) gaan over in

$$-\frac{t^{**''}}{t^{**'}^3} + \frac{x^{**}}{r^{**3}} = \mu(1-\mu) \left[ \frac{\xi_m - (1-\mu)x^{**}}{\{(\xi_m - (1-\mu)x^{**})^2 + (\eta_m - (1-\mu)y^{**})^2\}^{3/2}} - \xi_m \right] \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{y^{**''}}{t^{**'}^2} - \frac{t^{**''}y^{**'}}{t^{**'}^3} + \frac{y^{**}}{r^{**3}} &= \\ &= \mu(1-\mu) \left[ \frac{\eta_m - (1-\mu)y^{**}}{\{(\xi_m - (1-\mu)x^{**})^2 + (\eta_m - (1-\mu)y^{**})^2\}^{3/2}} - \eta_m \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

waarbij de accenten differentiatie naar  $x$  aanduiden.

De gereduceerde vergelijkingen zijn

$$-\frac{t^{**''}}{t^{**'}^3} + \frac{x^{**}}{r^{**3}} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{y^{**''}}{t^{**'}^2} - \frac{t^{**''}y^{**'}}{t^{**'}^3} + \frac{y^{**}}{r^{**3}} = 0. \quad (5.4)$$

Na wederinvoering van  $x$ ,  $y$  en  $t$  via (3.3) ontstaan de met de eerste termen uit (3.8) en (3.9) overeenkomende oplossingen  $y_0(x, \mu)$  en  $t_0(x, \mu)$ .

Voor een parabool ( $\rho = 0$ ) geldt

$$y_0(x, \mu) = -\mu^{\frac{1}{2}}\lambda \left[ \frac{2x}{1-\mu} + \frac{\mu\lambda^2}{(1-\mu)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

$$t_0(x, \mu) = \frac{1-\mu}{2} \left\{ \frac{\mu\lambda^2}{(1-\mu)^2} \left[ \frac{2x}{1-\mu} + \frac{\mu\lambda^2}{(1-\mu)^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \left[ \frac{2x}{1-\mu} + \frac{\mu\lambda^2}{(1-\mu)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (5.6)$$

Voor een ellips ( $\rho \neq 0$ ) geldt

$$y_0(x, \mu) = -\frac{\mu \frac{1}{2} \lambda}{2 \rho^2} \left[ 1 - \left( \epsilon - \frac{2 \rho^2 x}{1 - \mu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

$$t_0(x, \mu) =$$

$$= \frac{1 - \mu}{2^{3/2} \rho^3} \left\{ b g \sin \left[ 1 - \left( \epsilon - \frac{2 \rho^2 x}{1 - \mu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \epsilon \left[ 1 - \left( \epsilon - \frac{2 \rho^2 x}{1 - \mu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.8)$$

met excentriciteit =

$$\epsilon = \left( 1 - \frac{2 \rho^2 \mu \lambda^2}{(1 - \mu)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

lengte halve grote as =

$$a = \frac{1 - \mu}{2 \rho^2} .$$

Worden in de met de tweede termen uit (3.8) en (3.9) overeenkomstige termen via de substitutie (3.3)  $x$ ,  $y$  en  $t$  weer ingevoerd, dan ontstaan de oplossingen

$$y_1(x) = (1 + U^2)^{-3/2} \log(1 - x) + \delta(\rho) + o(1) \quad (5.9)$$

$$t_1(x) = (1 + U^2)^{-3/2} \log(1 - x) + \gamma(\rho) + o(1) \quad (5.10)$$

waarin  $U = \left[ 2(1 - \rho^2) \right]^{1/2}$ , de  $x$ -component van de snelheid in  $x = 1$ , bepaald door  $t_{00}(x)$ , terwijl  $\delta$  en  $\gamma$  constanten zijn, welke van de gekozen  $\rho$  afhangen. Hierbij is  $t_{00}(x)$  een term uit de ontwikkeling naar  $\mu$  van  $t_0(x)$ :

$$t_0(x) = t_{00}(x) + \mu t_{01}(x) + O(\mu^2) \quad (5.11)$$

$$\text{met } t_{00}(x) = \frac{1}{2^{3/2} \rho^3} \left[ b g \sin 2\rho(x - \rho^2 x^2)^{\frac{1}{2}} - 2\rho(x - \rho^2 x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (5.12)$$

$$t_{01}(x) = -t_{00}(x) + \frac{2(1 - \rho^2 \lambda^2)x^2 + 3x\lambda^2}{2[2x(1 - \rho^2 x)]^{1/2}} \quad (5.13)$$

voor een ellips ( $\rho \neq 0$ ), terwijl voor een parabool ( $\rho = 0$ ) geldt

$$t_{00}(x) = \frac{2^{1/2}}{3} x^{3/2} \quad (5.14)$$

$$t_{01}(x) = -\frac{2^{1/2}}{3} x^{3/2} + \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} \left(x + \frac{3}{2} \lambda^2\right). \quad (5.15)$$

## 6. Iets over de phaseconstante T

We veronderstellen voor T een asymptotische ontwikkeling van de vorm

$$T = T_0 + \mu^{1/2} T_{1/2} + \mu T_1 + O(\mu^{3/2}) . \quad (6.1)$$

Voor  $T_0$  nemen we  $t_{00}(1)$ , de tijd op orde  $\mu$ , die de satelliet nodig heeft om in de omgeving van de plaats van ontmoeting met de maan te komen, d.w.z.

$$T_0 = \frac{2^{1/2}}{3} \quad (6.2)$$

voor de parabool en

$$T_0 = \frac{1}{2^{3/2} \rho^3} \left[ \operatorname{arcsin} 2\rho(1 - \rho^2)^{1/2} - 2\rho(1 - \rho^2)^{1/2} \right] \quad (6.3)$$

voor de ellips.

Voor  $T_{\frac{1}{2}}$  nemen we

$$T_{\frac{1}{2}} = -\lambda \left[ 2(1 - \rho^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.4)$$

$T_1$  kan willekeurig gekozen worden en is evenals  $\rho$  en  $\lambda$  een parameter van dit probleem. Voor de ongestoorde Kepler-baan hadden we de  $x$ -as als as van symmetrie gekozen. Deze keuze kon, gezien het probleem, slechts tot op orde  $\mu$  bepaald zijn.

### 7. Lokale ontwikkeling in de omgeving van de maan en de aansluiting van de beide ontwikkelingen

In de omgeving van de maan is de in het voorgaande bepaalde asymptotische ontwikkeling niet meer geldig, daar de aantrekkingskracht van de maan niet langer een storing van orde  $\mu$  is. We voeren dan ook in nieuwe variabelen  $\bar{\xi}$  en  $\bar{\eta}$  :

$$\xi_m - x = \mu \bar{\xi} \quad (7.1)$$

$$\eta_m - y = \mu \bar{\eta}. \quad (7.2)$$

Als lokale coördinaat treedt op  $\bar{t}$  met

$$t - T_0 = \mu(\bar{t} + \tau) \quad (7.3)$$

waarbij  $\tau$  het nieuwe nulpunt voor de tijd  $\bar{t}$  vastlegt.

Met deze substituties gaan de bewegingsvergelijkingen (2.5) en (2.6) over in

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{\xi}}{\bar{r}^3} = \mu(1 - \mu) \frac{x}{\bar{r}^3} + \mu^2 \xi_m \quad (7.4)$$

en een analoge voor  $\bar{\eta}$  .

De gereduceerde vergelijkingen in lokale coördinaten zijn

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{dt^2} + \frac{\bar{\xi}}{r^3} = 0 \quad (7.5)$$

$$\frac{d^2 \bar{\eta}}{dt^2} + \frac{\bar{\eta}}{r^3} = 0 \quad (7.6)$$

De oplossingen hiervan stellen weer Kepler-banen voor.

Aangezien voor willekeurig grote  $\bar{r}$  ( $= (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)^{\frac{1}{2}}$ ) de snelheid eindig is, zijn deze banen hyperbolen.

Wij nemen aan, dat er asymptotische ontwikkelingen bestaan van de vergelijkingen (7.4) voor een gebied rond de maan, dat met het gebied waar (3.17) en (3.18) gelden een deel gemeen heeft.

Ook nu weer gaan wij ten behoeve van het oplossen van de vergelijkingen over op de functies  $\bar{\eta}(\bar{\xi})$  en  $\bar{t}(\bar{\xi})$  in plaats van  $\bar{\xi}(\bar{t})$  en  $\bar{\eta}(\bar{t})$ , waardoor nu aangenomen wordt dat de asymptotische ontwikkelingen de vorm hebben:

$$\bar{\eta}(\bar{\xi}) = \bar{\eta}_0(\bar{\xi}) + o(\mu) \quad (7.7)$$

$$\bar{t}(\bar{\xi}) = \bar{t}_0(\bar{\xi}) + o(\mu). \quad (7.8)$$

Wat betreft de aansluiting van beide ontwikkelingen het volgende. Verondersteld wordt het bestaan van een uniform geldige asymptotische ontwikkeling

$$Y(x, \mu) = y_0(x, \mu) + \mu y_1(x) + \frac{\xi_m - x}{\eta_0} + o(\mu) \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} T(x, \mu) &= t_0(x, \mu) + \mu t_1(x) + \frac{\xi_m - x}{t_0} + o(\mu) = \\ &= t_{00}(x) + \mu(t_{01}(x) + t_1(x)) + \frac{\xi_m - x}{t_0} + o(\mu). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Nemen wij de limiet voor  $\mu \rightarrow 0$  van de veronderstelde asymptotische ontwikkeling (3.17) voor de maannaderingsbaan, dan ontstaat

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} Y(x, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} y_0(x, \mu).$$

Uit (7.9) volgt

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} Y(x, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} y_0(x, \mu) + \lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{\eta}_0^* \left( \frac{\xi_m - x}{\mu} \right),$$

zodat dus

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{\eta}_0^* \left( \frac{\xi_m - x}{\mu} \right) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow -\infty} \bar{\eta}_0^* (\bar{\xi}) = 0.$$

In lokale coördinaten, ingevoerd in de omgeving van de maan, luidt (7.9):

$$Y(\xi_m - \mu \bar{\xi}, \mu) = y_0(\xi_m - \mu \bar{\xi}, \mu) + \mu y_1(\xi_m - \mu \bar{\xi}) + \bar{\eta}_0^* (\bar{\xi}) + o(\mu).$$

In het gemeenschappelijke gebied geldt

$$Y(\xi_m - \mu \bar{\xi}, \mu) = \bar{\eta}(\bar{\xi}), \text{ zodat volgt}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} Y(\xi_m - \mu \bar{\xi}, \mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} y_0(\xi_m - \mu \bar{\xi}, \mu) + \bar{\eta}_0^* (\bar{\xi}) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{\eta}(\bar{\xi}) = \bar{\eta}_0(\bar{\xi}).$$

$$\text{Dus } \bar{\eta}_0^* (\bar{\xi}) = \bar{\eta}_0(\bar{\xi}) - y_0(\xi_m, 0) =$$

$$= \bar{\eta}_0(\bar{\xi}) - \left\{ \lim_{x \rightarrow \xi_m} y_0(x, 0) \right\}_{\xi_m \rightarrow 1} + o(\mu) = \bar{\eta}_0(\bar{\xi}).$$

De asymptotische ontwikkeling (7.9) wordt dus

$$Y(x, \mu) = y_0(x, \mu) + \mu y_1(x) + \bar{\eta}_0 \left( \frac{\xi_m - x}{\mu} \right) + o(\mu).$$

Voor ontwikkeling (7.10) geldt een analoge redenering.



Voor expliciete resultaten wordt verwezen naar onderstaand artikel.

Literatuur

P.A. Lagerstrom and J. Kevorkian, Earth-to-moon trajectories in the restricted three-body problem, Journal de Mécanique, Vol. II, No. 2, Juin 1963, p. 189-218.



Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameterGrenslaagproblemen in de oceanografie

H.A. Lauwerier

1. Inleiding

Het theoretisch onderzoek van de grote oceaanstromingen, i.h.b. de Golfstroom en de Kuroshio, is van betrekkelijk recente datum. In 1947 stelde als eerste Sverdrup een redelijk mathematisch model op. In dit model en in de na hem door anderen bestudeerde modellen wordt de oceaanstroming vergeleken met een stationnaire vlakke vloeistofstroming welke beweegt onder invloed van een stationnaire schuifkracht, het windveld. Sverdrup vond de zgn. wervelvergelijking welke verband legt tussen de rotatie van de stroomsnelheid, die van het windveld en de rotatie van de aarde, zich manifesterend in een plaatsafhankelijke Coriolis coëfficiënt. Onafhankelijk van hem gaf Stommel in 1948 een veel beter uitgewerkt model: stroming van een wrijvende vloeistof in een rechthoekig model. Hier tekenen zich al grenslaagverschijnselen af, maar de oplossing kan nog met eenvoudige middelen expliciet verkregen worden. In 1950 behandelde Munk een soortgelijk model waarbij viscositeit de wrijving vervangt. De schrijver komt tot een benaderde oplossing zij het ook met enige mathematische omwegen. In feite is dit een eerste voorbeeld van een singulier storingsprobleem. De hierbij gebruikelijke techniek leidt dan ook snel tot het doel. In een volgend artikel, eveneens in 1950, beschouwden Munk en zijn medewerker Carrier een soortgelijk model met een driehoekige of halfcirkelvormige begrenzing. In dit artikel passen de schrijvers expliciet de grenslaag-methode toe. In 1954 onderzocht Fofonoff als eerste het effect van de niet-lineaire stromingsterm. Met het door hem beschouwde model waarin wrijving, viscositeit en windkracht afwezig waren konden desondanks interessante resultaten verkregen worden. In een volgend artikel (1955) werkte Charney dit model nader uit waarbij als resultaat de Golfstroom als een grenslaagverschijnsel opgevat

kon worden. Een uitvoerige en mathematisch veel betere behandeling van de oceaanstromen wordt gegeven in het in 1962 verschenen artikel van Carrier en Robinson, On the theory of the wind driven ocean circulation (J. fluid mech. 12, 49-80, 1962). In dit artikel wordt de grenslaagtheorie op behoorlijke wijze toegepast.

Alle genoemde artikelen zijn samengevat in boekvorm: Wind-driven ocean circulation. Ed. A.R. Robinson, Blaisdell Publ. C. 1963.

## 2. Het mathematische model

We gaan uit van de Navier-Stokes vergelijking voor een incompressibele vloeistof,

$$(2.1) \quad \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}.$$

Hieraan kan de continuïteitsvergelijking toegevoegd worden

$$(2.2) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

De uitwendige kracht  $\vec{F}$  kan afkomstig zijn van de rotatie van de aarde. Hiervoor kunnen we schrijven

$$(2.3) \quad \vec{F} = - \vec{\Omega} \times \vec{v},$$

waarbij

$$(2.4) \quad \vec{\Omega} = 2\omega \sin \phi \vec{k}.$$

De vector  $\vec{k}$  is een eenheidsvector langs de aardas naar het noorden wijzend,  $\phi$  is de geografische breedte en  $\omega$  de omwentelingssnelheid van de aarde.

De kracht  $\vec{F}$  die gewoonlijk naar Coriolis genoemd wordt doet een stroom op het noordelijk halfrond naar rechts en op het zuidelijk halfrond naar links afbuigen. Dit zgn. Coriolis-effect is o.a. verantwoordelijk voor het rondlopen van het getij langs de kusten van de noordzee in tegenwijzerzin.

Een oceaan idealiseert men gewoonlijk als een zeer dunne vlakke plaat, bijv. een rechthoek met zijden van 10.000 km en 6.000 km. Ten opzichte hiervan is de diepte zeer gering. Bovendien beperkt men zich bij vele oceanografische problemen tot de bovenste laag van een 200 m diepte. Men neemt dan aan dat storingen aan het oceaanooppervlak niet verder dan deze diepte doordringen.

Bij een dergelijk model - te vergelijken met een velletje dun papier - kunnen we een twee-dimensionaal analogon van de Navier-Stokes toepassen waarbij de componenten  $(u, v)$  van  $\vec{v}$  de betekenis hebben van over de diepte gemiddelde west-oost en zuid-noord stroming. De uitwendige kracht bevat nu de door de wind aan het oceaanooppervlak uitgeoefende schuifkracht  $(U, V)$  en een analoge kracht bij de (fictieve) bodem, de zogenaamde bodemwrijving welke evenredig en tegengesteld aan de vector  $(u, v)$  genomen wordt. We beschouwen slechts stationnaire stromingen zodat de volgende vergelijkingen, uitgeschreven in componenten en met  $\rho = 1$ , ons ter beschikking staan.

$$(2.5) \quad \begin{cases} uu_x + vu_y + \lambda u - \Omega v + p_x - \mu \Delta u = U \\ uv_x + vv_y + \lambda v + \Omega u + p_y - \mu \Delta v = V, \end{cases}$$

en

$$(2.6) \quad u_x + v_y = 0.$$

Als gebied kunnen we de rechthoek

$$(2.7) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

kiezen waarbij  $x = 0$  en  $x = a$  kusten (meridianen) zijn. De grenzen  $y = 0$  en  $y = b$  zijn breedtegraden waar de stroming geheel oost-west is (bijv. de breedtegraden  $13^\circ$  en  $50^\circ$  NB). Meestal denken we bij dit model aan de noordelijke helft van de Atlantische of Stille Oceaan. De Coriolis coëfficiënt is slechts een functie van  $y$ . Men neemt meestal een lineaire afhankelijkheid aan

$$(2.8) \quad \Omega = \alpha + \beta y.$$

Toepassing van de rotatie-operator op (2.5) geeft de (scalaire) vergelijking

$$(2.9) \quad \left\{ (uv_x + vv_y)_x - (uu_x + vu_y)_y \right\} + \beta v + \lambda(v_x - u_y) - \mu\Delta(v_x - u_y) = R (= V_x - U_y)$$

waarbij R de zogenaamde rotatie van het windveld is.

Uit de continuïteitsvergelijking (2.6) volgt dat een stroomfunctie  $\psi$  ingevoerd kan worden waarbij

$$(2.10) \quad u = \psi_y, \quad v = -\psi_x.$$

Substitutie in (2.9) levert tenslotte de fundamentele vergelijking

$$(2.11) \quad \psi_x(\Delta\psi)_y - \psi_y(\Delta\psi)_x - \beta\psi_x - \lambda\Delta\psi + \mu\Delta^2\psi = R$$

welke het uitgangspunt voor alle volgende beschouwingen is. Deze vergelijking, in het Engels de "vorticity equation", vertoont een drievoudig rotationeel aspect. Er wordt namelijk verband gelegd tussen de rotatie van de stroming, de rotatie van het windveld en de rotatie van de aarde!

Het hier beschouwde mathematische model kan nog in velerlei opzicht verfijnd worden. Men kan bijv. de bolvorm van de aarde in aanmerking nemen maar kwalitatief maakt dit nauwelijks iets uit. Het is overigens juist de kunst het mathematische model zozeer te vereenvoudigen dat kwalitatief het beeld van een oceaanstroming nog net behouden blijft.

### 3. Het model van Stommel

In een in 1948 verschenen artikel beschouwt H. Stommel een lineair oceaamodel van zeer eenvoudige aard dat desondanks een Golfstroom-effect vertoont. In de woorden van de auteur

"An intense crowding of streamlines toward the western border of the ocean is discovered to be caused by the variation of the Coriolis parameter with latitude. It is suggested that this process is the main reason for the formation of the intense currents (Gulf stream and others) observed in the actual oceans".

Stommel kiest derhalve, met een geschikte keuze van eenheden, de rechthoek  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ , verwaarloost in (2.11) de niet-lineaire termen en de viscositeitsterm en beschouwt een oost-west wind van het type

$$U = -U_0 \cos y, \quad V = 0.$$

De differentiaalvergelijking (2.11) kan dus geschreven worden in de zeer eenvoudige vorm (met  $U_0 = \beta$ )

$$(3.1) \quad \epsilon \Delta \psi + \psi_x = -\sin y,$$

waarbij  $\epsilon = \lambda/\beta$  de rol van de "kleine parameter" speelt. De randvoorwaarde is uiteraard dat de begrenzing van het gebied een stroomlijn is:

$$(3.2) \quad \psi = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0, x = a, y = 0, y = \pi.$$

Dit randwaardeprobleem kan gemakkelijk exact opgelost worden door een oplossing te zoeken van de vorm

$$(3.3) \quad \psi = \epsilon^{-1} \left\{ 1 + A_1 e^{s_1 x} + A_2 e^{s_2 x} \right\} \sin y.$$

Aan (3.1) is voldaan voor

$$(3.4) \quad \epsilon s^2 + s - \epsilon = 0$$

zodat

$$(3.5) \quad \begin{cases} s_1 = \frac{1}{2\epsilon} (-1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2}) = \epsilon - \epsilon^3 + \dots, \\ s_2 = \frac{1}{2\epsilon} (-1 - \sqrt{1 + 4\epsilon^2}) = -\epsilon^{-1} - \epsilon + \dots. \end{cases}$$

De oplossing voldoet al aan de randvoorwaarden bij  $y = 0$  en  $y = \pi$ .  
Aan die bij  $x = 0$  en  $x = a$  is voldaan indien

$$A_1 + A_2 = -1 \quad \text{en} \quad e^{s_1 a} A_1 + e^{s_2 a} A_2 = -1.$$

Hieruit volgt

$$(3.6) \quad \begin{cases} (e^{s_1 a} - e^{s_2 a}) A_1 = -1 + e^{s_2 a}, \\ (e^{s_1 a} - e^{s_2 a}) A_2 = -e^{s_1 a} + 1. \end{cases}$$

Voor kleine  $\epsilon$  is

$$(3.7) \quad \begin{cases} A_1 = -1 + a\epsilon + O(\epsilon^2), \\ A_2 = -a\epsilon + O(\epsilon^2). \end{cases}$$

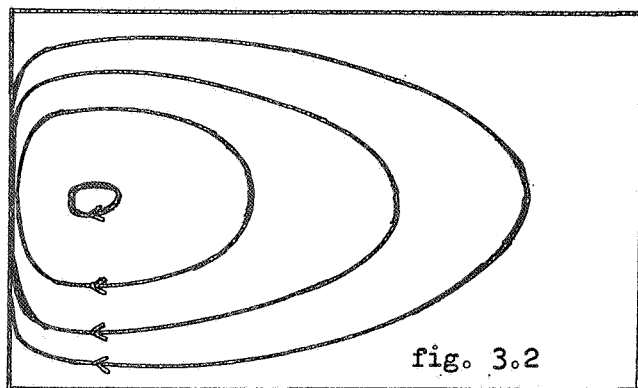
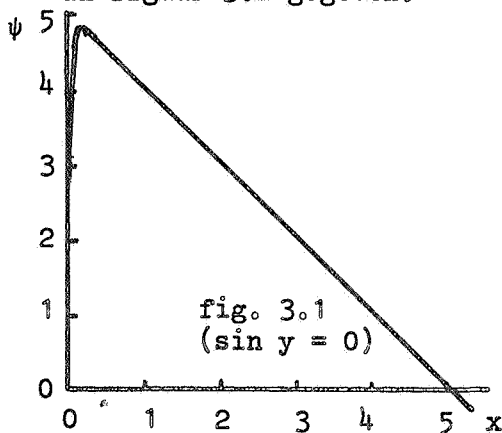
De oplossing (3.3) blijkt bij  $x = 0$  een grenslaagverschijnsel te vertonen. Buiten de grenslaag is blijkbaar

$$(3.8) \quad \psi = (a - x) \sin y + O(\epsilon).$$

In de grenslaag heeft men

$$(3.9) \quad \psi = a(1 - e^{-x/\epsilon}) \sin y + \dots$$

Een grafiek van  $\psi$  voor de realistische waarden  $a = 5$  en  $\epsilon = 0.05$  ziet men in figuur 3.1. Het desbetreffende stroomlijnenpatroon wordt in figuur 3.2 gegeven.





Uiteraard kan de oplossing heel eenvoudig met grenslaagtheorie verkregen worden. Als oplossing van de gereduceerde vergelijking  $\psi_x = -\sin y$  heeft men  $\psi_0 = (a - x)\sin y$  waarbij aan de randvoorwaarde bij  $x = a$  voldaan is. Voor de te verwachten grenslaag bij  $x = 0$  nemen we de lokale coördinaat  $x = \epsilon\xi$ . De grenslaagvergelijking wordt

$$(3.10) \quad \psi_{\xi\xi} + \psi_{\xi} = 0$$

waaruit met inachtneming van de randvoorwaarde bij  $\xi = 0$

$$(3.11) \quad \psi_1 = A(1 - e^{-\xi})$$

volgt.

Aanpassing van beide oplossingen geeft  $A = a \sin y$  zodat in overeenstemming met het boven gevondene de grenslaag beschreven wordt door

$$(3.12) \quad \psi_1 = a(1 - e^{-x/\epsilon})\sin y + \dots$$

#### 4. Het model van Munk

In een in 1950 gepubliceerd artikel bouwt W.H. Munk voort op het werk van Stommel en anderen. Deze schrijver maakt bezwaar tegen de door Stommel beschouwde bodemwrijving en gebruikt in plaats daarvan de viscositeitsterm waarbij  $\mu$  als een soort effectieve viscositeit verantwoordelijk is voor de door turbulentie verwekte wrijving tussen waterstromingen. Het model van Munk is in feite volkomen analoog aan dat van Stommel met slechts dat verschil dat (3.1) vervangen is door

$$(4.1) \quad \epsilon\Delta^2\psi - \psi_x = \sin y,$$

waarbij  $\epsilon = \mu/\beta$ .

Aangezien de vergelijking van de vierde orde is zijn er meer randvoorwaarden, t.w.

$$(4.2) \quad \psi = 0 \quad \text{op de rand van } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

$$(4.3) \quad \psi_x = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = a,$$

$$(4.4) \quad \psi_{yy} = 0 \quad \text{voor } y = 0 \text{ en } y = \pi.$$

T.a.v. deze randvoorwaarden merken we op dat de randen  $x = 0$  en  $x = a$  continenten voorstellen waarlangs de stroomvector nul is, en dat  $y = 0$  en  $y = \pi$  zogenaamde vrije randen zijn waar de stroming zuiver oost-west is. Voor  $\beta = 0$  is (4.1) de vergelijking van een vlakke elastische plaat die blijkens de randvoorwaarden bij de randen  $x = 0$  en  $x = a$  ingeklemd is en die bij de randen  $y = 0$  en  $y = \pi$  vrij opgelegd is. Hoewel hier juist  $\epsilon$  klein i.p.v. groot is blijft een zekere analogie met dit elasticiteitsprobleem bestaan. Doordat het rechterlid van (4.1) reeds aan de randvoorwaarden bij  $y = 0$  en  $y = \pi$  voldoet kan weer op gemakkelijke wijze een exacte oplossing afgeleid worden welke van het volgende type is

$$(4.5) \quad \psi = (A_0 + A_1 e^{s_1 x} + A_2 e^{s_2 x} + A_3 e^{s_3 x} + A_4 e^{s_4 x}) \sin y.$$

De exponenten  $s_j$  blijken de wortels te zijn van de vergelijking

$$(4.6) \quad \epsilon(s^2 - 1)^2 = s.$$

Deze wortels zijn tamelijk gecompliceerde functies van  $\epsilon$ .

Voor kleine  $\epsilon$  kunnen gemakkelijk benaderingen, beginstukken van reeksontwikkelingen, afgeleid worden.

Stellen we gemakshalve  $\epsilon = \omega^{-3}$  dan is

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = s_2^* = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\omega + \dots \\ s_3 = \omega + \dots, \quad s_4 = \omega^{-3} + \dots \end{array} \right.$$

Voor de coëfficiënten  $A_j$  vinden we als in de vorige paragraaf

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{a}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} + i)\omega^{-3} + \dots \\ A_2 = -\frac{a}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} - i)\omega^{-3} + \dots \\ e^{s_3 a} A_3 = \omega^{-4} + \dots, \quad e^{s_4 a} A_4 = -1 + \dots \end{array} \right.$$

en natuurlijk  $A_0 = \epsilon^{-1} \sin y$ .

Uiteindelijk vinden we na enig rekenen

$$(4.9) \quad \psi = \left\{ -\frac{2a}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\omega x\sqrt{3}\right) e^{-\frac{1}{2}\omega x} + \frac{1}{\omega} e^{-\omega(a-x)} + (a-x) \right\} \sin y + \\ + O(\epsilon).$$

Ter beoordeling van deze benadering merken we op dat in dit model van Munk  $a = 5$  en  $\omega = 20$  realistische waarden zijn.

In het middengebied  $0 \ll x \ll a$  blijft van (4.9) slechts de benadering

$$(4.10) \quad \psi_0 = (a-x) \sin y$$

over.

We laten nu zien dat de op deze wijze door Munk verkregen resultaten op veel eenvoudiger wijze met behulp van de grenslaagtheorie gevonden kunnen worden. Bovendien kunnen we i.p.v. (4.1) iets algemener de vergelijking

$$(4.11) \quad \epsilon \Delta^2 \psi - \psi_x = f(y)$$

nemen, waarbij dus de rotatie van het windveld op algemenere wijze van  $y$  kan afhangen.

De gereduceerde vergelijking levert onmiddellijk de inwendige oplossing

$$(4.12) \quad \psi_0 = (a-x) f(y),$$

waarbij al gezorgd is voor de stroomlijnvoorwaarde bij het oostelijk continent.

Voor de grenslaag bij  $x = 0$  moeten we  $x = \varepsilon^{1/3} \xi$  stellen waardoor de volgende grenslaagvergelijking ontstaat

$$(4.13) \quad \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0.$$

Iets precieser kunnen we zeggen dat het rechterlid  $O(\varepsilon^{-2/3})$  is. De algemene oplossing is

$$(4.14) \quad \psi = B_1 e^{\sigma_1 \xi} + B_2 e^{\sigma_2 \xi} + B_3 e^{\xi} + B_4$$

waarbij

$$(4.15) \quad \sigma_1 = \sigma_2^* = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}.$$

Aanpassing aan de inwendige oplossing levert vooreerst

$$(4.16) \quad B_3 = 0, \quad B_4 = \alpha f(y).$$

De randvoorwaarden bij  $x = 0$  geven vervolgens

$$B_{1,2} = \left( -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2\sqrt{3}} \right) \alpha f(y),$$

zodat (4.14) geschreven kan worden als

$$(4.17) \quad \psi = \left\{ -\frac{2\alpha}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \omega x \sqrt{3}\right) e^{-\frac{1}{2}\omega x} + \alpha \right\} f(y)$$

in overeenstemming met (4.9).

Op analoge wijze kan de grenslaag bij  $x = a$  bestudeerd worden. Evenwel is hier oceanografisch gesproken niets bijzonders te verwachten.

Ter illustratie geven we hieronder een grafiek van de uitdrukking tussen accolades in het rechterlid van (4.9) voor de waarden  $a = 5$  en  $\omega = 20$ .

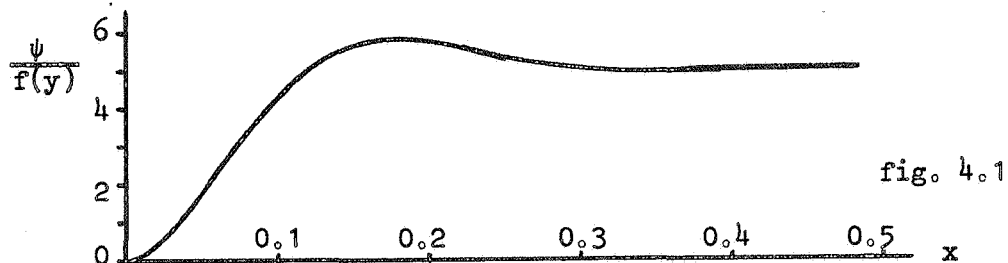


fig. 4.1

Ter vergelijking hiermede geven we de aan het artikel van Munk ontleende grafiek van de overeenkomstige functie zoals deze experimenteel uit oceanografische metingen volgt. De overeenkomst is inderdaad treffend.

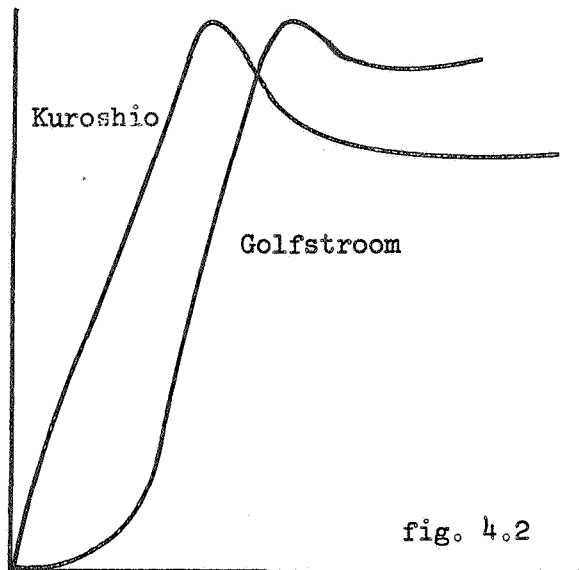


fig. 4.2

### 5. Het model van Fofonoff

In 1954 kwam deze auteur tot een andere "verklaring" van het Golfstroom-verschijnsel en wel door hiervoor de niet-lineaire termen van de hydrodynamische vergelijking (2.11) verantwoordelijk te stellen. Fofonoff verwaarloost wrijving en viscositeit en beschouwt voorts slechts het geval van een vrije stroming in afwezigheid van uitwendige aandrijvende kracht. Aldus reduceert (2.11) zich tot

$$(5.1) \quad \psi_x (\Delta\psi - \beta y)_y - \psi_y (\Delta\psi - \beta y)_x = 0.$$

De oceaan is wederom een rechthoek  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ . De rand is een stroomlijn zodat

$$(5.2) \quad \psi = 0 \quad \text{voor } x = 0, x = a, y = 0, y = \pi$$

de bijbehorende randconditie is.

Ter oplossing van (5.1) maken we gebruik van het volgende lemma.

Lemma. Nodig en voldoende voor de afhankelijkheid van twee functies  $\phi(x,y)$  en  $\psi(x,y)$  in de zin van  $F(\phi,\psi) \equiv 0$  is het identiek verdwijnen van de Jacobiaan

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)} = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x.$$

Passen we dit toe op (5.1) dan geldt

$$(5.3) \quad \Delta\psi - \beta y = g(\psi)$$

waarin  $g$  een willekeurige functie is.

Fofonoff onderzoekt in het bijzonder het speciale geval van een lineaire functie  $g$ , uiteraard omdat dan het randwaardeprobleem expliciet oplosbaar is. De vergelijking (5.3) wordt dan geschreven als

$$(5.4) \quad \varepsilon\Delta\psi - \psi = y - \pi$$

waarbij  $\varepsilon = \beta^{-1}$  de kleine parameter is.

Deze vergelijking kan exact opgelost worden. We schetsen even hoe dit gaat. We zoeken eerst een eenvoudige particuliere oplossing  $\psi_0(y)$  die slechts van  $y$  afhangt en aan de randvoorwaarden bij  $y = 0$  en  $y = \pi$  voldoet. Deze oplossing voldoet aan de gewone differentiaal-vergelijking

$$(5.5) \quad \varepsilon \frac{d^2\psi_0}{dy^2} - \psi_0 = y - \pi.$$

Standaardmethoden leveren de oplossing

$$(5.6) \quad \psi_0 = \pi - y - \pi \operatorname{sh} \frac{\pi-y}{\sqrt{\varepsilon}} / \operatorname{sh} \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}},$$

of benaderd

$$(5.7) \quad \psi_0 \approx \pi(1 - e^{-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}) - y.$$

Hierbij manifesteert zich weer een grenslaag-verschijnsel en wel bij  $y = 0$ . De gezochte oplossing kan nu geschreven worden als

$$(5.8) \quad \psi(x,y) = \psi_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \sin ny.$$

De coëfficiënten  $c_n(x)$  voldoen aan de gewone differentiaal vergelijking

$$(5.9) \quad \varepsilon \frac{d^2 c_n}{dx^2} = (1 + n^2 \varepsilon) c_n$$

zodat

$$(5.10) \quad c_n(x) = a_n e^{-\mu_n x} + b_n e^{-\mu_n (a-x)},$$

met

$$\mu_n = \left( \frac{1}{\varepsilon} + n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De Fourier coëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$  kunnen gemakkelijk uit de randvoorwaarden bij  $x = 0$  en  $x = a$  bepaald worden.

Onderzoeken we de grenslaag bij  $y = 0$  rechtstreeks met behulp van de grenslaagtechniek door in (5.4) de bekende substitutie  $y = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \eta$  uit te voeren dan geraken we meteen tot de oplossing (5.7). De beschouwingen van Fofonoff vinden hun voortzetting en uitbreiding in het volgende werk van Carrier en Robinson.

## 6. Het model van Carrier en Robinson

In 1962 publiceerden deze auteurs een uitvoerige en gedetailleerde studie over de stroming in een aan twee zijden door continenten begrensde oceaan ten gevolge van een windveld. De waterbeweging wordt bestudeerd in een door twee breedtecirkels begrensde zone waar de rotatie van het windveld verdwijnt en er binnen een enkel extremum bereikt. Als merkwaardigheid in dit model treedt een zgn. vrije grenslaag op, een nauw begrensde krachtige stroom waarbij de as met

die van de maximale windveld-rotatie samenvalt.

Het mathematische model is nu a.v.

$$(6.1) \quad \varepsilon(\psi_x \Delta \psi_y - \psi_y \Delta \psi_x) - \psi_x + \sin y = 0$$

binnen de rechthoek  $0 < x < a$ ,  $0 < y < \pi$

met de randvoorwaarde

$$(6.2) \quad \psi = 0 \quad \text{op} \quad x = 0, x = a, y = 0, y = \pi.$$

De gereduceerde vergelijking

$$(6.3) \quad \psi_x = \sin y$$

heeft een oplossing die of aan de randvoorwaarde bij  $x = 0$  of aan die bij  $x = a$  kan voldoen. We treffen de keuze

$$(6.4) \quad \psi_0 = -(a - x) \sin y.$$

Voor het te verwachten grenslaagverschijnsel bij  $x = 0$  stellen we als gebruikelijk  $x = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi$ . Dit leidt tot de grenslaagvergelijking

$$(6.5) \quad \psi_\xi \psi_{\xi\xi y} - \psi_y \psi_{\xi\xi\xi} - \psi_\xi = 0.$$

Hierop kunnen we weer het lemma van de vorige paragraaf toepassen.

We vinden dan

$$(6.6) \quad \psi_{\xi\xi} - y = g(\psi),$$

waarbij  $g(\psi)$  een nader te bepalen functie is. Teneinde de grenslaagoplossing  $\psi_1$  van (6.6) aan de inwendige oplossing  $\psi_0$  aan te passen stellen we

$$(6.7) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_1(\xi, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi_0(x, y) = -a \sin y.$$

Aangezien  $\psi_{\xi\xi} \rightarrow 0$  voor  $\xi \rightarrow \infty$  vinden we uit (6.6) en (6.7) de equivalenten betrekkingen

$$-y = g(\psi), \quad \psi = -a \sin y.$$

Voor  $g(\psi)$  resulteert hieruit het tweewaardige resultaat (!)



$$(6.8) \quad g(\psi) = \arcsin \psi/a \quad \text{voor} \quad 0 < y < \frac{1}{2}\pi$$

$$g(\psi) = -\arcsin \psi/a + \pi \quad \text{voor} \quad \frac{1}{2}\pi < y < \pi.$$

Substitutie van (6.3) in (6.6) geeft voor het zuidelijk vak  $0 < y < \frac{1}{2}\pi$

$$(6.9) \quad \psi_{\xi\xi} - \arcsin \psi/a = y.$$

Voor kleine waarden van  $\psi$ , dus dicht bij  $y = 0$ , kunnen we deze differentiaal-vergelijking benaderen door

$$(6.10) \quad \psi_{\xi\xi} - \psi/a = y.$$

Inderdaad bezit deze differentiaal-vergelijking de grenslaagoplossing

$$(6.11) \quad \psi = -ay(1 - \exp - a^{-\frac{1}{2}}\xi).$$

Dicht bij de zuidelijke rand  $y = 0$  is de volledige oplossing in de gebruikelijke benadering

$$(6.12) \quad \psi = -y \left\{ (a - x) - a \exp - \frac{x}{\sqrt{a\epsilon}} \right\}.$$

Blijkens (2.10) is de stroom hoofdzakelijk gericht van oost naar west.

Voor het noordelijke vak  $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$  vinden we analoog

$$(6.13) \quad \psi_{\xi\xi} + \arcsin \psi/a = y + \pi.$$

Voor kleine waarden van  $\psi$ , dus dicht bij  $y = \pi$ , heeft de lineaire benadering uitsluitend oscillerende oplossingen in tegenspraak tot het verwachte grenslaageffect. Blijkbaar hadden we voor het noordelijke vak een andere inwendige oplossing moeten kiezen, namelijk

$$(6.14) \quad \psi_0 = x \sin y,$$

met een grenslaag bij  $x = a$ . Stellen we analoog  $x = a - \epsilon^{\frac{1}{2}}\xi$  dan vinden we wederom de vergelijkingen (6.5) en (6.6). In plaats van (6.9) voor het zuidelijke vak vinden we

$$(6.15) \quad \psi_{\xi\xi} = \arcsin \psi/a = y - \pi,$$

voor het noordelijke vak.

Dicht bij de noordelijke rand  $y = \pi$  is analoog

$$(6.16) \quad \psi = (\pi - y) \left\{ x - a \exp - \frac{a - x}{\sqrt{a\xi}} \right\}.$$

Ook hier is de stroom hoofdzakelijk van oost naar west.

We onderzoeken de stroming in het zuidelijke vak  $0 < y < \frac{1}{2}\pi$  nu wat nauwkeuriger. We beschikken over de inwendige oplossing (6.4) en de grenslaagvergelijking (6.9). Van deze vergelijking kunnen we een eerste integraal vormen, namelijk

$$(6.17) \quad \frac{1}{2} \psi_{\xi}^2 = \int^{\psi} \arcsin \frac{t}{a} dt = y \psi.$$

Bedenken we dat voor  $\xi \rightarrow \infty$  enerzijds  $\psi_{\xi} \rightarrow 0$  en anderzijds  $\psi \rightarrow -a \sin y$  dan volgt hieruit

$$(6.18) \quad \frac{1}{2} \psi_{\xi}^2 = \psi \arcsin \psi/a + \sqrt{a^2 - \psi^2} + y \psi - a \cos y.$$

Voeren we gemakshalve even nieuwe variabelen  $x = \xi \sqrt{2/a}$  en  $z = -\psi/a$  in zodat  $z(x)$  een positieve functie is dan kunnen we de vergelijking (6.18) schrijven als

$$(6.19) \quad \frac{dz}{dx} = F^{\frac{1}{2}}(z, y),$$

met

$$(6.20) \quad F(z, y) = z \arcsin z + \sqrt{1 - z^2} - yz - \cos y.$$

Aangezien

$$(6.21) \quad \frac{dF}{dz} = \arcsin z - y$$

daalt  $F(z, y)$  als functie van  $z$  monotoon van  $F(0, y) = 1 - \cos y$  tot nul voor  $z = \sin y$  en stijgt vervolgens monotoon tot  $F(1, y) = \frac{1}{2}\pi - y - \cos y$  als geschetst in figuur 6.1.

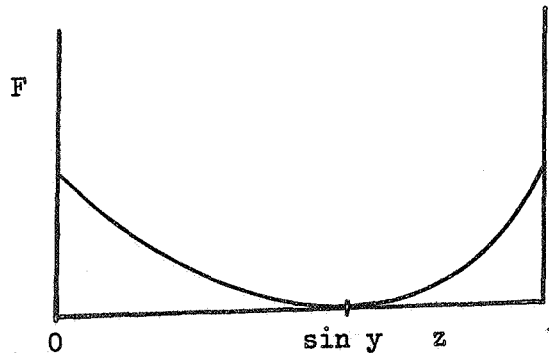


fig. 6.1

De vergelijking (6.19) heeft de oplossing

$$(6.22) \quad x = \int_0^z F^{-\frac{1}{2}}(t, y) dt.$$

Het hangt van het gedrag van  $F$  bij het nulpunt  $z = \sin y$  af hoe het karakter van de grenslaagoplossing wordt. In het algemeen heeft  $F$  een tweevoudig nulpunt voor  $z = \sin y$  zodat (6.19) kwalitatief van de vorm

$$(6.23) \quad \frac{dz}{dx} = c - z$$

is. De oplossing hiervan welke verdwijnt voor  $x = 0$

$$(6.24) \quad z = c(1 - e^{-x})$$

vertoont inderdaad het gewenste grenslaagkarakter.

Bij  $y = \frac{1}{2}\pi$  treedt er evenwel een anomalie op. Voor  $z$  dicht bij 1 is namelijk

$$F(z, 1) \approx 2^{3/2} 3^{-1} (1 - z)^{3/2}$$

zodat (6.19) nu kwalitatief van de vorm

$$(6.25) \quad \frac{dz}{dx} = (1 - z)^{3/4}$$

is. De oplossing met  $z(0) = 0$  is nu echter

$$(6.26) \quad z = 1 - (1 - x/4)^4,$$

waaraan het grenslaagkarakter vreemd is.

De enige uitweg uit deze impasse is het aannemen van een vrije grenslaag langs  $y = \frac{1}{2}\pi$ . Aangezien zowel in de noordelijke als in de zuidelijke helft de stroming hoofdzakelijk van oost naar west gericht is zal langs deze grenslaag een compenserende stroming van west naar oost gaan optreden.

Ter illustratie geven we in figuur 6.2 een aan het artikel van Carrier en Robinson ontleend plaatje waarin dit fenomeen duidelijk tot uitdrukking komt.

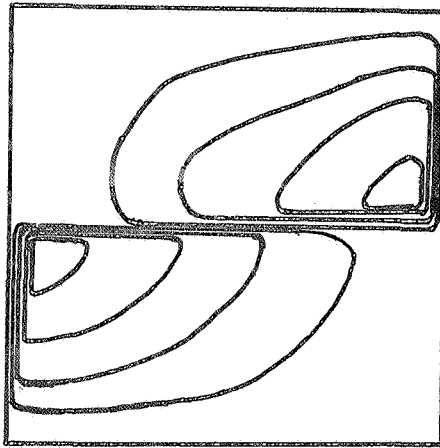


fig. 6.2

In het artikel van Carrier en Robinson wordt het bestaan van de grenslaag bij  $y = 0$  uit meer algemene en hoofdzakelijk oceanografische beschouwingen afgeleid. De schrijvers behandelen nog het algemenere model waarbij de continentale grenzen kromlijng kunnen zijn en waarbij de rotatie van het windveld een willekeurige functie is. Veel verder dan een schematische opzet komen zij evenwel niet. Een kenmerkende eigenschap van dit model is het gebrek aan eenduidigheid. Pas na invoering van dissipatieve termen ( $\lambda$  en  $\mu$ ) kan eenduidigheid bereikt worden. Voor nadere bijzonderheden zij naar het genoemde artikel verwezen.

#### Literatuur

Ed. Allan R. Robinson, Wind-driven ocean circulation, Blaisdell Publ.C., 1963.

Singuliere storingsproblemen van lineaire partiële differentiaal  
vergelijkingen van elliptisch type

D. Dunnebier

1. Inleiding

In een publicatie (I) heeft de Amerikaanse geleerde Norman Levinson een bewijs gegeven van een asymptotische ontwikkeling van functies, die voldoen aan de volgende vergelijking:

$$(1.1) \quad \varepsilon \Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y);$$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$  (de operator van Laplace) gedefiniëerd op een verzameling van bepaalde structuur, waar de oplossing aan bepaalde gegeven randvoorwaarden moet voldoen.

Onder bepaalde voorwaarden en hypothesen bewees hij, dat voor oplossingen  $u(x,y,\varepsilon)$  de volgende asymptotische ontwikkeling gold:

$$(1.3) \quad u(x,y,\varepsilon) = U(x,y) + z(x,y,\varepsilon) + \varepsilon Z(x,y,\varepsilon) + w(x,y,\varepsilon),$$

waarbij  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  en  $Z(x,y,\varepsilon) = O(1)$ .

Vergelijken en klassificeren geeft het volgende resultaat

1e) De vergelijking is van het type  $(L_0 + \varepsilon L_1)u = 0$ .

2e) De vergelijking behoort tot klasse II, dus een singulier storingsprobleem.

3e)  $U(x,y)$  is de oplossing van de gereduceerde vergelijking

$$Au_x + Bu_y + Cu - D = 0 \dots (1.2) \text{ die voldoet aan een deel der randvoorwaarden.}$$

4e)  $z(x,y,\varepsilon)$  is een grenslaagterm.

Deze asymptotische ontwikkeling vertoont grote overeenkomst met de ontwikkeling weergegeven in formule (5.23) blz. 19 van de inleiding gehouden door prof. Eckhaus en is eveneens op een bepaalde verzameling uniform geldig.

Het bepalen van een asymptotische ontwikkeling van oplossingen van de vergelijking (1.1) is echter niet nieuw, want W. Wasow (II) heeft in een publicatie het geval:

$$\Delta u + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda f(x, y) \quad \text{voor grote } \lambda$$

behandeld volgens methoden ad hoc.

Opgemerkt dient te worden, dat dit een speciaal geval is van vergelijking (1.1).

De beperkingen, die in acht genomen moeten worden, wil het bewijs geldig zijn, vallen in 2 delen uiteen:

- H1: De verzameling  $R$  waarop oplossingen beschouwd worden moet tenminste deelverzameling zijn van een compacte verzameling  $R_0$  met voldoende continu differentieerbare randen  $S$ .
- H2: De coëfficiënten van (1.1) moeten zodanig zijn dat
- De subkarakteristieken van de gereduceerde vergelijking (1.2) in de beschouwde verzameling geen "limit cycles" vormen.
  - Er een deelverzameling van deze subkarakteristieken bestaat, die minstens 2 verschillende stukken uit de verzameling randkrommen snijden en niet raken of samenvallen.
  - De subkarakteristieken mogen geen singulariteiten vertonen, noch elkaar snijden op de verzameling waar de asymptotische ontwikkeling wordt beschouwd.

ad H1: Deze beperking is noodzakelijk voor het bestaan van diverse maxima die in het bewijs voorkomen, bovendien wil de auteur complicaties op de randen, bijv. in de vorm van singuliere punten, uitsluiten.

ad H2-a: Het is mogelijk, dat de subkarakteristieken, of een deel ervan, niet "buiten" een deelverzameling van de beschouwde verzameling komen.

Voorbeeld:

$$\epsilon \Delta u + \{y + x(1 - x^2 - y^2)\}u_x + \{-x + y(1 - x^2 - y^2)\}u_y + u = 0.$$

De subkarakteristieken zijn

$$x = \frac{\cos t}{(1 + ce^{-2t})^{\frac{1}{2}}} ; \quad y = - \frac{\sin t}{(1 + ce^{-2t})^{\frac{1}{2}}} .$$

Dit zijn twee stelsels spiralen.

Voor  $c > 0$  blijven deze spiralen binnen een cirkel en naderen deze als  $t$  gaat van  $-\infty$  naar  $+\infty$ .

Voor  $c < 0$  blijven de spiralen buiten de cirkel en naderen eveneens deze cirkel.

Voor deze vergelijking geldt de asymptotische ontwikkeling (1.3) niet voor een ringvormig gebied.

ad H2-b: Snijden van een deel der randkrommen door subkarakteristieken is een conditio sine qua non voor de geldigheid van het bewijs, daar o.a. essentieel gebruik gemaakt wordt van het zgn. probleem van Cauchy die slechts een unieke oplossing van een lineaire 1e orde partiële differentiaalvergelijking toelaat als de gegeven kromme niet raakt of samenvalt met de subkarakteristieken.

Het bewijs van Norman Levinson geldt niet op de gehele verzameling  $R$  doch op een deel ervan, nl. met uitzondering van omgevingen van raakpunten van subkarakteristieken met randkrommen; hetgeen niet zeggen wil, dat daar geen asymptotische ontwikkeling mogelijk is.

ad H2-c: Singulariteiten bij de subkarakteristieken en snijpunten van subkarakteristieken onderling geven aanleiding tot niet uniform gedrag en weer een grenslaag hetgeen we vermijden willen (zoals bij de vergelijking van Burgers bijv.).

## 2. De Hypothesen

Hypothese H1.

a) Oplossingen  $u(x,y,\epsilon)$  van (1.1) worden beschouwd op de verzameling  $R$  met de volgende eigenschappen:

a1)  $R$  is een gebied, enkelvoudig of meervoudig verbonden (simply connected en multiply connected) met een eindig dimensionale basis.

- a2) Er is een compacte verzameling  $R_0$ ,  $R \subset R_0$ .
- b) De verzameling randpunten  $S$  van  $R$  bestaat uit een (uiteeraard) eindig aantal gesloten Jordan krommen.
- c) De functies, die elk element  $S$  in (boog) parameter voorstelling geven behoren tot  $C^{VI}$ .
- d)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$  behoren tot  $C^{VI}$ .
- e) De gegeven randvoorwaarden waaraan oplossingen van (1.1) moeten voldoen (op  $S$ ) behoren eveneens tot  $C^{VI}$ .

Hypothese H2.

Er is een functie  $\Gamma(x,y)$  behorende tot  $C^{II}$  zodanig dat op  $R_0$  geldt

$$A\Gamma_x + B\Gamma_y > 0.$$

Hypothese H2 heeft de volgende consequenties:

- 1)  $A^2 + B^2 > 0$  ; de raaklijnenvector aan elke subkarakteristiek die in  $R_0$  ligt bestaat.
- 2) De subkarakteristieken bezitten in  $R_0$  geen singulariteiten.
- 3) De subkarakteristieken snijden elkaar niet in  $R_0$ .
- 4) Er zijn geen "limit cycles" in  $R_0$ .

Dit volgt uit het theorema van Poincaré-Bendixon (III).

Stelling 2.1.

Een voldoende voorwaarde voor H2 is dat  $R_0$  enkelvoudig verbonden is. (Voor  $R$  is dit niet nodig!)

### 3. De hoofdstelling

Definitie 3.1.

Onder de positieve richting op een kromme van  $S$  verstaan we de richting van de raaklijn-vector in een willekeurig punt zodanig gekozen, dat een rotatie in (goniometrisch) positieve zin van  $\frac{\pi}{2}$ , deze vector doet samenvallen met de normaal in  $R$ .



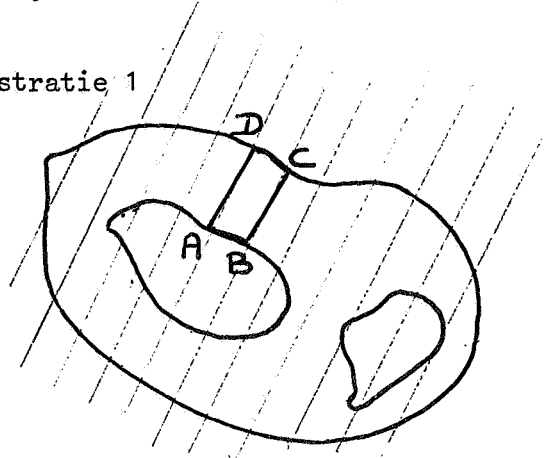
De booglengte parameter neemt toe in positieve richting.

Definitie 3.2.

Onder een "regular quadrilateral" verstaan we een puntverzameling, die als volgt gevormd wordt:

- a)  $S_1$  is een stuk van een Jordankromme, behorende tot  $S$  met eigenschappen:
- 1e Alle punten van  $S_1$  liggen op subkarakteristieken.
  - 2e Geen enkele subkarakteristiek raakt  $S_1$ .
- b) De verzameling van alle karakteristieken die  $S_1$  bepalen snijdt van een (andere) Jordankromme van  $S$  een stuk  $S_2$  af met eigenschappen:
- 1e Alle punten van  $S_2$  liggen op subkarakteristieken.
  - 2e Geen enkele subkarakteristiek raakt  $S_2$ .
  - 3e De puntverzameling, die door de subkarakteristieken en  $S_1$  en  $S_2$  bepaald is, is een enkelvoudig verbonden gebied.

Illustratie 1



ABCD is een voorbeeld van een regular quadrilateral (r.q.).

Opmerking 3.1.

Als de subkarakteristieken een stuk  $S_1$  van een element van  $S$  snijden, dan volgt uit het feit dat er geen "limit cycles" zijn noodzakelijk het bestaan van een andere doorsnijding  $S_2$ .  $S_1$  en  $S_2$  kunnen behoren tot één en dezelfde Jordankromme, in dit geval echter mogen de segmenten  $S_1$  en  $S_2$  geen gemeenschappelijk eindpunt bezitten, daar dit punt een raakpunt is.

Uit H1 en H2 volgt echter niet, dat er überhaupt een r.q. bestaat.

Opmerking 3.2.

De fundamenteel belangrijke kenmerken van een r.q. zijn:

A: De subkarakteristieken waaruit een r.q. is opgebouwd snijden de randen  $S_1$  en  $S_2$  en raken deze dus niet.

B: De subkarakteristieken van een r.q. bezitten op dit r.q. geen snijpunten onderling en geen singulariteiten.

Stelling 3.1.

Voor  $S_1$  geldt:  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} > 0$ ,

Voor  $S_2$  geldt:  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} < 0$  of omgekeerd.

$s$  is de boogparameter zowel van de krommen van  $S$  als van de subkarakteristieken.

Bewijs:

Daar er geen raakpunten zijn van de subkarakteristieken op  $S_1$  en  $S_2$  is dus  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} \neq 0$ . Wegens continuïteit heeft dit tot gevolg dat

$B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds}$  tekenvast is op  $S_1$  en op  $S_2$ .

Gevolg is echter dat als  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds}$  op  $S_1 > 0$  is, op  $S_2 < 0$  moet zijn t.g.v. de definitie van positieve richting op  $S$ .

Stelling 3.2. Lichtenstein (IV).

Als H1 en H2 beide gelden, dan heeft (1.1) precies één oplossing  $u(x,y,\epsilon)$ , die voldoet aan de gegeven randvoorwaarden.

Voor elke kleine  $\epsilon > 0$  op  $R \cup S$  is deze oplossing 2x continu differentieerbaar, dus  $u$  behoort tot  $C^{II}$  op  $R$ .

Norman Levinson formuleert en bewijst nu de volgende hoofdstelling:

Stelling 3.3.

Onder voorwaarde, dat H1 en H2 beide gelden, bestaat in elk regular quadrilateral van  $R \cup S$  de volgende asymptotische ontwikkeling:

$$u(x,y,\varepsilon) = U(x,y) + z(x,y,\varepsilon) + \varepsilon Z(x,y,\varepsilon) + w(x,y,\varepsilon)$$

met de eigenschappen:

- a)  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$   $\varepsilon \rightarrow +0$ .
- b)  $U(x,y)$  is de oplossing van de gereduceerde vergelijking (1.2) die op  $S_1$  aan de op  $S$  gegeven randvoorwaarden voldoet.
- c) In een zekere omgeving van  $S_2$  geldt

$$z = e^{-g(x,y)/\varepsilon} \cdot h(x,y) \dots \dots \dots (3.1)$$

waarbij:

- 1:  $g = 0$  op  $S_2$  en  $g > 0$  in alle andere punten van een omgeving van  $S_2$ .
- 2:  $g$  en  $h \in C^{II}$ .
- 3:  $\exists \delta > 0$ ;  $z = O(e^{-\delta/\varepsilon})$  voor  $\varepsilon \rightarrow 0$  voor al die punten van het r.q. waar (3.1) niet meer geldt.
- d)  $U \in C^{II}$ .
- e)  $w = 0$  op  $S_1$  en  $S_2$ .
- f)  $Z = O(1)$  als  $\varepsilon \rightarrow +0$  uniform op  $R \cup S$ .

#### 4. Het maximum principe

Stelling 4.1. (hulpstelling)

Geg.:  $\Delta u + \alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y + \gamma(x,y)u = 0$ ,  $u(x,y)$  voldoet aan deze vergelijking op een open verzameling  $R_1$ ;  $u \in C^{II}$ .

Verder  $\alpha, \beta, \gamma$  continu op  $R_1$ ;  $\gamma < 0$  op  $R_1$ .

Het is niet mogelijk, dat  $u$  hetzij een positief maximum, hetzij een negatief minimum op  $R_1$  bezit.

Bewijs:

Stel  $u(x_0, y_0) = u_0$  (p.d.) is een positief maximum.

Dan geldt  $u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = 0$ . Dus  $\Delta u_{x_0 y_0} = -\gamma u_0$ , dus rechterlid  $> 0$ .

Hieruit volgt linkerlid  $> 0$ ; dit is bij een maximum niet mogelijk.

M.M. een negatief minimum.

Stelling 4.2. (hulpstelling, uitbreiding van de voorafgaande hulpstelling)

Geg.:  $\Delta u + \alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y + \gamma(x,y)u = \rho$ .

$u(x,y)$  voldoet aan deze vergelijking op een open verzameling  $R_1$ ;  $u \in C^{II}$ .

Verder  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  continu op  $R_1$ . Bovendien geldt op  $R_1$ :

$\gamma \leq -k < 0$  en  $|\rho| \leq M$ .

Het is niet mogelijk, dat  $u$  een positief maximum of een negatief minimum bezit groter, resp. kleiner dan  $M/k$  resp.  $-M/k$ ; bovendien, als tevens gegeven is dat  $|u| \leq M/k$  op  $S$  dan is  $|u| \leq M/k$  op  $R_1$ .

Bewijs:

1e deel ongeveer analoog aan stelling 4.1.

2e deel: Stel dat in  $(x_0, y_0)$  gold  $u(x_0, y_0) > M/k$  (resp.  $-M/k$ ) en op de rand dus  $|u| \leq M/k$  dan is er een maximum van  $u > M/k$ , wegens  $u \in C^{II}$  tegenspraak.

Stelling 4.3. Het maximum principe.

Onder voorwaarde dat H1 en H2 beide gelden en  $|D| \leq m$  op  $R \cup S$  en als bovendien  $|u| \leq m$  op  $S$  dan geldt het volgende:

$\exists K > 0$ ; Konafhankelijk van  $\epsilon$ , als  $\epsilon > 0$  en klein is, zodanig dat op  $R$  geldt:  $|u| \leq K\epsilon$ .

Dit principe blijft gelden als  $D(x,y,\epsilon)$ .

Bewijs:

Stel  $v = e^{a\Gamma(x,y)} \cdot u \dots \dots (4.1)$

$a > 0$  en zodanig gekozen, dat geldt:

$$a(A\Gamma_x + B\Gamma_y) - C > 0 \dots \dots (4.2) \text{ op } R \cup S.$$

Dit is altijd mogelijk; immers:

$$A\Gamma_x + B\Gamma_y \text{ is continu en } R \cup S \text{ is compact.}$$

Van het feit dat  $c < 0$  is eventueel, wordt geen gebruik gemaakt.

Substitutie van (4.1) in (1.1) levert op:

$$\varepsilon \Delta v + (A - 2\varepsilon a \Gamma_x) v_x + (B - 2\varepsilon a \Gamma_y) v_y + [C - a(A \Gamma_x + B \Gamma_y) + \varepsilon a^2(\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2) + \varepsilon a \Delta \Gamma] v = D e^{a\Gamma}.$$

We passen nu stelling 4.3 toe.

R is open.

De coëfficiënten van  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v$  zijn allen continu op R.

Het rechterlid is continu.

Als  $a$  voldoende groot is, is bij voldoende kleine  $\varepsilon$  onafhankelijk van het teken van  $c$  de coëfficiënt van  $v < 0$  i.v.m. (4.2).

Dus  $\exists k$ , coëfficiënt van  $v \leq -k < 0$  mits  $\varepsilon$  voldoende klein is, dus  $k$  is onafhankelijk van  $\varepsilon$  bij voldoende kleine  $\varepsilon$ . We kiezen  $k \leq 1$ .

Stellen we  $|D| \leq m$  op  $R \cup S$  en  $e^{+a\Gamma} \leq M_1$  op  $R \cup S$  dan geldt voor het rechterlid:  $|\text{rechterlid}| \leq m M_1 = M$  (p.d.).

In het geval van een positief maximum hebben we  $v_{\max} \leq \frac{M}{k}$ .

Dus  $v_{\max} \leq \frac{m M_1}{k}$ ,  $v_{\max} = M_1 u_{\max}$ . Dus  $u_{\max} \leq \frac{m}{k}$  voor een positief maximum.

Als nu gegeven is  $|u| \leq m$  op  $S$ , dan geldt ook  $|u| \leq \frac{m}{k}$  op  $S$ .

Dus  $|v| \leq \frac{m M_1}{k}$  op  $S$ , dus  $|v| \leq \frac{M}{k}$  op  $S$ .

Hieruit volgt  $|v| \leq \frac{m M_1}{k}$  op  $R$ . Dus  $|u| e^{a\Gamma} \leq \frac{m M_1}{k}$  op  $R$ .

Als  $M_2 = \max e^{-a\Gamma}$  op  $R \cup S$  en  $K = \frac{M_1 M_2}{k}$ , dan is op  $R$ ,  $|u| \leq K m$ ,  $K$  onafhankelijk van  $\varepsilon$ .

## 5. De grenslaag term

In een omgeving van  $S_2$  bepalen we nu de grenslaag term  $z(x, y, \varepsilon)$ .

Men kan nu 2 methoden volgen:

A: Overgaan op lokale coördinaten. Men vindt dan, gebruik makende van de terminologie en methoden uit de Inleiding (V):

$$S = \varepsilon u_{yy}(x, y, \varepsilon) + B(x, y) u_y(x, y, \varepsilon).$$

Overgang op de lokale coördinaat  $\xi (\xi = \frac{y}{\epsilon})$ ,

$$S = \epsilon^{1-2\nu} u_{\xi\xi}^*(x, \xi, \epsilon) + \epsilon^{-\nu} \cdot B(x, \xi \epsilon^\nu) \cdot u_\xi^*(x, \xi, \epsilon).$$

Dit geeft  $\nu = 1$ .

De getransformeerde vergelijking wordt:

$$\epsilon^2 u_{xx}^*(x, \xi, \epsilon) + u_{\xi\xi}^*(x, \xi, \epsilon) + \epsilon A u_x^*(x, \xi, \epsilon) + B u_\xi^*(x, \xi, \epsilon) + \epsilon(cu^*(x, \xi, \epsilon) - D) = 0.$$

De gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten levert op

$$u_{\xi\xi}^* + B u_\xi^* = 0.$$

Deze methode wordt door Norman Levinson niet gevolgd.

B: De W.K.B. methode.

Transformeer de vergelijking (1.1) d.m.v. de transformatie

$u(x, y, \epsilon) = \exp[\epsilon^\nu \phi(x, y, \epsilon)]$ . Dit geeft:

$$\epsilon \Delta \phi + \epsilon^{\nu+1} (\phi_x^2 + \phi_y^2) + A \phi_x + B \phi_y + \epsilon^{-\nu} (C - D \exp - [\epsilon^\nu \phi(x, y, \epsilon)]) = 0.$$

Voor  $\nu = -1$  geeft dit:

$$\epsilon \Delta \phi + \{ \phi_x^2 + \phi_y^2 + A \phi_x + B \phi_y \} + \epsilon (C - D \exp - [\epsilon^{-1} \phi(x, y, \epsilon)]) = 0.$$

Voeren we nu in de formele asymptotische reeks  $\phi(x, y, \epsilon) = \phi_0(x, y) + \epsilon \phi_1(x, y) + \epsilon^2 \phi_2(x, y)$  waarbij  $\phi_0(x, y)$  volgt uit de gereduceerde vergelijking

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 + A \phi_x + B \phi_y = 0,$$

dan vinden we formeel

$$u = \exp \frac{\phi_0}{\epsilon} \cdot \exp \phi_1 \cdot \exp \epsilon \phi_2 \cdot \exp \epsilon^2 \phi_3 \cdot \dots$$

Dus  $u(x, y, \epsilon) = e^{-\frac{g}{\epsilon}} \cdot h \cdot e^{\text{Rest}}$ , waarbij p.d.  $\phi_0(x, y) = -g(x, y)$  en  $\exp[\phi_1(x, y)] = h(x, y)$ .

Dus  $u(x, y, \epsilon) = e^{-g/\epsilon} h(1 + \epsilon \text{Rest}^0)$ ,

dus  $u(x, y, \epsilon) = e^{-g/\epsilon} h + \epsilon Z(x, y, \epsilon) \dots (5.1)$ ,

en dit is precies dezelfde vorm, die de auteur ook gebruikt.

Substitutie van  $u = e^{-g/\epsilon} h + \epsilon Z$  in (1.1) levert op

$$\frac{e^{-g/\epsilon} \cdot h}{\epsilon} [g_x^2 + g_y^2 - Ag_x - Bg_y] + e^{-g/\epsilon} [(A - 2g_x)h_x + (B - 2g_y)h_y + (C - \Delta g)h] + \epsilon e^{-g/\epsilon} \Delta h + \epsilon(\epsilon \Delta Z + AZ_x + BZ_y + CZ) = D \dots (5.2)$$

We bepalen  $g$  nu zodanig, dat

$$g_x^2 + g_y^2 - Ag_x - Bg_y = 0 \dots (5.3)$$

Evenzo  $h$  uit

$$(A - 2g_x)h_x + (B - 2g_y)h_y + (C - \Delta g)h = 0 \dots (5.4)$$

Als eerste oplossing voor  $g$  die aan (5.3) voldoet vinden we  $g \equiv 0$ .

lim  $\epsilon \rightarrow 0$  vergelijking (5.2) geeft  $Ah_x + Bh_y + Ch = D$ . Dit geeft  $U(x,y)$  als oplossing.

Voor andere oplossingen voor  $g$  kunnen we ons nu beperken tot de homogene vergelijking (5.2<sup>a</sup>).

Het probleem is nu een oplossing te vinden van de vergelijking

$$p^2 + q^2 - Ap - Bq = 0 \dots (5.6),$$

waarbij per definitie  $p = g_x$ ;  $q = g_y$ , met als speciale randvoorwaardeprobleem

A.  $u = \theta(s)$  op  $S_2$ ;

$u = 0$  op  $S - S_2$ ;

$\theta(s)$  is 2× differentieerbaar;

$s$  is de boogparameter;

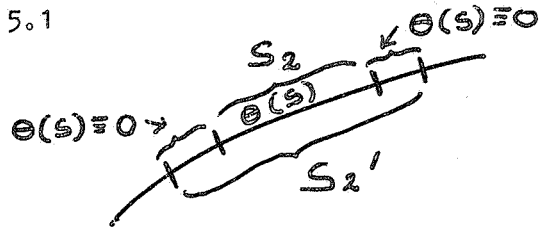
$\theta(s)$ ,  $\theta'(s)$ ,  $\theta''(s)$  zijn nul voor de beide eindpunten van  $S_2$ .

B.  $S_2$  wordt gekenmerkt speciaal door het feit dat  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} > 0$  is (5.5) (dus één der randen van een r.q. is). Nu is  $S_2$  een "gesloten" segment

en (5.5) continu op  $S$ ; er is dus een eveneens "gesloten" segment  $S_2'$ ,  $S_2 \subset S_2'$  met de volgende eigenschappen

- 1:  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} > 0$ ;
- 2:  $\theta(s) \equiv 0$  op  $S_2' - S_2$ ;
- 3:  $\theta^*(s) = \theta(s)$  op  $S_2$ ,  $\equiv 0$  op  $S_2' - S_2$ .

Illustratie 5.1



Voor het gemak noemen we  $S_2'$  voortaan  $S_2$  en  $\theta^*(s)$ ,  $\theta(s)$ .

$C$ .  $g$  en  $h$  zijn oplossingen van respectievelijk (5.3) en (5.4) met als speciale randvoorwaardeprobleem  $g = 0$  op  $S_2$ ;  $h = \theta(s)$  op  $S_2$ .

De karakteristieke strookvoorwaarden van (5.6) luiden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2p - A; & \frac{dp}{dt} &= A_x p + B_x q; \\ \frac{dy}{dt} &= 2q - B; & \frac{dq}{dt} &= A_y p + B_y q; \\ & & \frac{dg}{dt} &= p^2 + q^2. \end{aligned}$$

Het probleem van Cauchy voor  $g$  met deze speciale randvoorwaarde is oplosbaar mits  $\frac{dx}{ds} \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{ds} \frac{dx}{dt} \neq 0$ , d.w.z. de subkarakteristieken van (5.6) mogen niet raken aan  $S_2$ .

We zullen nu bewijzen, dat dit inderdaad zo is:

$$\frac{dx}{ds} \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{ds} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} (2q - B) - \frac{dy}{ds} (2p - A) \dots \dots (5.7)$$

Uit het feit, dat  $g = 0$  op  $S_2$  is volgt dat  $S_2$  ligt op het integraaloppervlak, dus aangezien de gradientvector van  $g$  ⊥ het raakvlak is



$\overrightarrow{(p,q)} \perp \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$ . Dus  $p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds} = 0$ .

We bepalen nu  $p$  en  $q$  uit

$$p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$p^2 + q^2 - Ap - Bq = 0,$$

$$p \text{ en } q \text{ niet } \equiv 0.$$

Dit geeft

$$p = - \left( B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} \right) \frac{dy}{ds}, \quad (5.8)$$

$$q = \left( B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} \right) \frac{dx}{ds}. \quad (5.9)$$

Substitutie in (5.7) geeft

$$\frac{dx}{ds} \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{ds} \frac{dx}{dt} = B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} > 0.$$

Bekijken we nu het verloop van de subkarakteristieken van (5.6) in een omgeving van  $S_2$ .

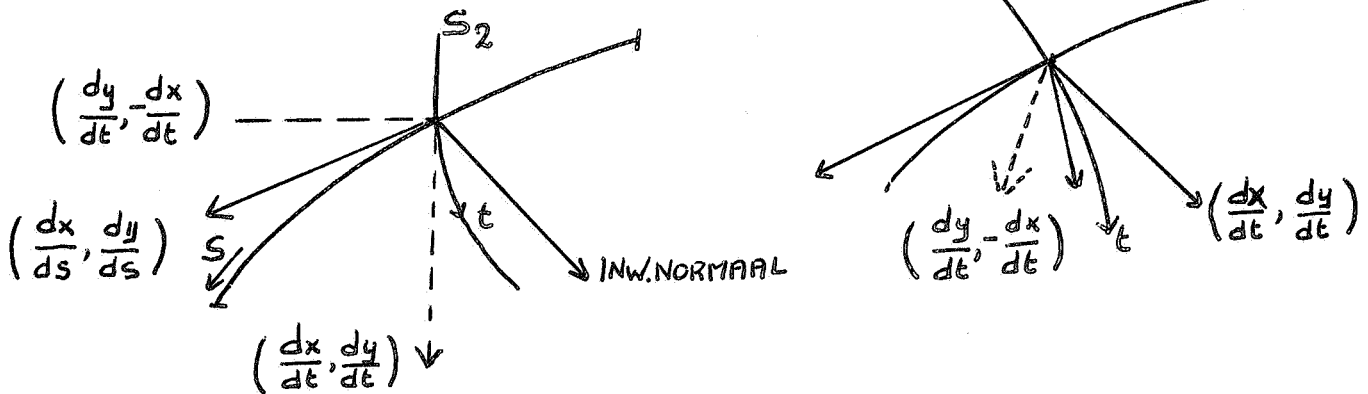
Uit het feit, dat  $\frac{dx}{ds} \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{ds} \frac{dx}{dt} > 0$  volgt dat de cosinus van de hoek tussen de raaklijnenvector van  $S_2$   $\left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$  en de normaal van een subkarakteristiek die  $S_2$  snijdt in het snijpunt nl.  $\left( \frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt} \right)$

positief is. Dit heeft ten gevolge, dat de hoek tussen de vectoren

$\left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$  en  $\left( \frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt} \right)$  scherp is of tot het 4e quadrant behoort.

In beide gevallen heeft dit ten gevolge, dat bij toenemende  $t$  de raaklijnenvector  $\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  "in  $R$  wijst" en scherpe hoeken maakt met de inwendige normaal van  $S_2$  in het desbetreffende punt.

Illustratie 5.2



Op  $S_2$  geldt nu, dat  $p^2 + q^2 > 0$ . Immers (5.5), (5.8) en (5.9) zou in het geval  $p = q = 0$  volgen  $\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = 0$  op  $S_2$  en dit is onmogelijk.

Wegens de continuïteit is  $p^2 + q^2 > 0$  in een zekere omgeving  $\Omega_1$  van  $S_2$ . Doch dit betekent bij toenemende  $t$  dat  $g$  monotoon stijgend is in  $R \cap \Omega_1$  langs de subkarakteristiek van (5.6).

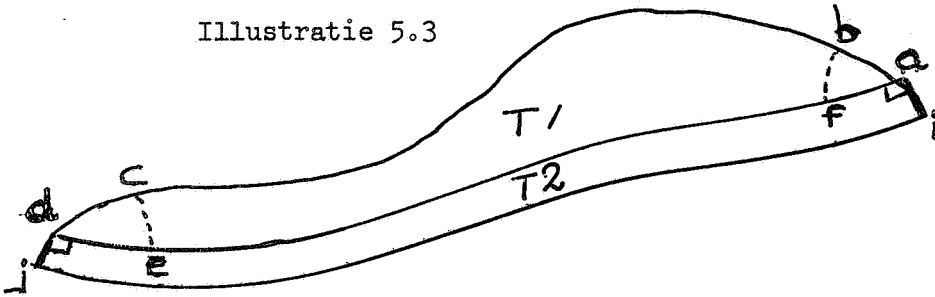
Bovendien geldt dat er een unieke oplossing van het Cauchy probleem betreffende vergelijking (5.6) bestaat in een zekere omgeving  $\Omega_2$ ; waarbij  $g \in C^{IV}$  en  $\partial(x,y)/\partial(s,t) \neq 0$ .

We kiezen nu een gesloten verzameling  $T_1$  met de volgende eigenschappen:

- 1:  $T_1 \subset (\Omega_1 \cap \Omega_2)$ ;
- 2: De randkromme van  $T_1$  wordt gevormd door  $S_2$  enerzijds en door een kromme afed anderzijds zodanig, dat
  - a) afed in boogparametervoorstelling behoort tot  $C^{III}$ ;
  - b) De uitwendige normalen t.o.v.  $T_1$  in alle punten van afed "in  $R$  wiizen".

Dit is speciaal van belang voor de beide snijpunten a en d.

Illustratie 5.3



ad is de "nieuwe"  $S_2$ ;

bc is de "oude"  $S_2$ ;

ce en bf zijn de subkarakteristieken van (5.6).

Conclusie:

A:  $\exists \delta > 0$ , zodanig, dat  $g(x,y) > \delta t$  op  $T_1$ ,  $t > 0$ ;

B:  $g(x,y) = 0$  op  $S_2$ .

We gaan nu over tot de bepaling van de  $h$  uit (5.4) en de speciale randvoorwaarde  $h = \theta(s)$  op  $S_2$ .

De vergelijkingen der subkarakteristieken van  $h$  volgen uit

$$\frac{dx}{A - 2g_x} = \frac{dy}{B - 2g_y} \quad \text{waarbij} \quad \frac{dh}{dt} = (C - \Delta g)h.$$

Zij hebben dus precies dezelfde vorm als de subkarakteristieken van de vergelijking (5.6).

Dus er is in  $T_1$  tevens een unieke oplossing van (5.4), zodat  $h \in C^{II}$  daar  $g \in C^{IV}$  op  $ba$  en  $dc$  is  $\theta(s) = 0$ .

Langs de karakteristieken geldt

$$\frac{dh}{h} = (C(t) - \Delta g) dt.$$

Dus  $h = ke^{\int (C - \Delta g) dt}$ .

Echter op  $ba$  en  $cd$  is  $h = 0$ .

Dus  $h = 0$  op alle subkarakteristieken in de curvilineaire driehoekjes  $abf$  en  $cde$ ; dus  $h = 0$  in alle punten van  $\Delta abf$  en  $\Delta cde$ .

Stellen we nu  $e^{-g/\epsilon}$ .  $h = z$  (dit is niet de  $z(x,y,\epsilon)$  die voorkomt in de hoofdstelling), dan geldt het volgende:

1e:  $z \in C^{II}$ ;

2e:  $z = 0$  op  $af$  en  $ed$ ;

3e:  $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} = 0$  op  $af$  en  $ed$ ;

4e:  $z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$  zijn allen  $O(e^{-\delta_1/\epsilon})$  voor  $\epsilon \rightarrow +0$  op  $ef$ .

Nu geldt speciaal op  $ef$  dat er een constante  $\delta_1 > 0$  bestaat, zodanig dat  $g(x,y) \geq 2\delta_1$  op  $ef$ . Dus  $e^{-g(x,y)/\epsilon} \leq e^{-\delta_1/\epsilon}$  voor alle  $\epsilon > 0$ .

Dus  $e^{-g(x,y)/\epsilon} |h| \leq e^{-\delta_1/\epsilon} M$ , waarbij  $M = \max |h|$  op  $ef$ ; deze bestaat want  $h \in C^{II}$ .

Dus  $|z| \leq M e^{-\delta_1/\epsilon}$  voor alle  $\epsilon > 0$ .

Kiezen we  $\epsilon$  binnen een zekere kleine omgeving van  $\epsilon = 0$  dan blijft deze betrekking gelden voor alle  $\epsilon \neq 0$ ,  $\epsilon > 0$ .

Dus op  $ef$  geldt  $z = O(e^{-\delta_1/\epsilon})$  voor  $\epsilon \rightarrow +0$ . M.M voor alle partiële afgeleiden van  $z$  tot en met de 2e orde.

We definiëren nu een nieuwe  $z$  als volgt:

A)  $\sigma$  is de boogparameter van  $afed$ ;

B) Beschouw een verzameling  $V$  van orthogonale trajectoriën met boogparameter  $\tau$  van  $ad$ . De parameter voorstelling van deze krommen familie is nu

$$x = x(\sigma) - y'(\sigma)\tau,$$

$$y = y(\sigma) + x'(\sigma)\tau.$$

$\sigma$  en  $\tau$  worden zodanig steeds gekozen dat bij toenemende  $\tau$  de raaklijnen-vector van de orthogonale trajectoriën "niet in  $T_1$  wijst" dus uitwendige normaal van  $T_1$  is.

C) Op  $afed$  geldt  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\sigma,\tau)} = 1 \neq 0$ , immers

$$\left( \frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma} \right) \perp \left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right) \text{ op } afed,$$

Wegens de continuïteit van deze Jacobiaan is er een omgeving  $T_2^*$  van afed, zodanig dat  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\sigma,\tau)} \neq 0$  is.

D) Beschouwen we een gesloten verzameling  $T_2 \subset T_2^*$  met als randkrommen

1e: afed;

2e: 2 orthogonale trajectoriën;

3e: een voldoende differentieerbare kromme ij (zie illustratie 5.3),  
corresponderend met  $\tau_1$ .

$$E) z^*(\tau, \sigma) = \frac{(\tau_1 - \tau)^3}{\tau_1^3} [z_1(\sigma) + \tau z_2(\sigma) + \tau^2 z_3(\sigma)] \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1 ;$$

$$z^*(\tau, \sigma) = 0 \quad \text{op } (R \cup S) - T_1 - T_2 ;$$

$$z^*(\tau, \sigma) = z(x, y) \quad \text{op } T_1 .$$

$$z_1(\sigma) = z(\sigma) \quad \text{voor } \tau = 0 ;$$

$$z_2(\sigma) = \left( \frac{\partial z}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} + \frac{3}{\tau_1} z_1(\sigma) \quad \text{voor } \tau = 0 ;$$

$$z_3(\sigma) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} \right)_{\tau=0} - \frac{3}{\tau_1^2} z_1(\sigma) + \frac{3}{\tau_1} z_2(\sigma) \quad \text{voor } \tau = 0 .$$

Eigenschappen van  $z^*(\tau, \sigma)$ :

- 1)  $z^*(0, \sigma) = z(\sigma)$  (op ad);
- 2)  $z^*(\tau_1, \sigma) = 0$  (op ij);
- 3) alle 1e en 2e orde partiële afgeleiden zijn 0 op ij;
- 4)  $z^*(\tau, \sigma) = 0$  op ai en dj.

Deze laatste eigenschap verdient enige aandacht.

De punten, die liggen op afed liggen ook op de orthogonale trajectoriën

$$x = x(\sigma) - y^v(\sigma)\tau$$

$$y = y(\sigma) + x^v(\sigma)\tau, \quad \text{en corresponderen met } \tau = 0 .$$

Dus voor de punten op afed geldt dus

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} = -z_x y'(\sigma) + z_y x'(\sigma)$$

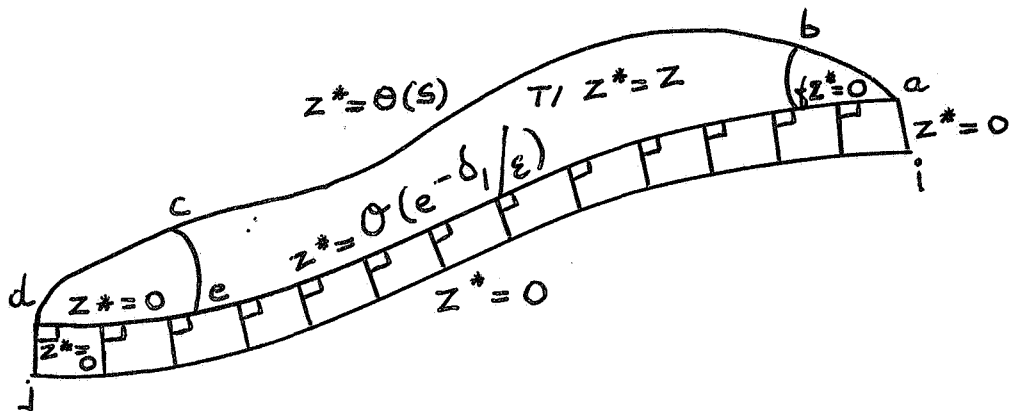
$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2}\right)_{\tau=0} = \{y'(\sigma)\}^2 z_{xx} - 2x'(\sigma) y'(\sigma) z_{xy} + \{x'(\sigma)\}^2 z_{yy}.$$

Gegeven is echter dat op af en cd  $z$ , en alle partiële afgeleiden = 0 zijn.

Dus  $z^*(\sigma, \tau) = 0$  op ai en dj.

Op dezelfde manier vinden we, dat ook alle partiële afgeleiden van  $z^*$  tot en met de 2e orde = 0 zijn op ai en dj.

Illustratie 5.4



5) op  $T_2$  geldt  $z^* = O(e^{-\delta_1/\epsilon})$ . Hetzelfde voor alle partiële afgeleiden tot en met de 2e orde. Dit is het gevolg van het feit, dat voor  $z(0, \sigma)$  en alle partiële afgeleiden van  $z(\tau, \sigma)$  voor  $\tau = 0$  geldt  $O(e^{-\delta_1/\epsilon})$ .

Dus  $z^*(x, y) = O(e^{-\delta_1/\epsilon})$  op  $((R \cup S) - T_1) \cup ad$ . Dit geldt ook voor alle partiële afgeleiden tot en met de 2e orde.

6)  $z^* \in C^{II}$ .

We beschouwen nu de substitutie  $u = z^{**} + \epsilon Z$  op  $R \cup S$  voor de homogene vergelijking  $\epsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = 0$ .

Voor  $T_1$  vinden we dus

$$\epsilon \Delta Z + AZ_x + BZ_y + CZ = -e^{-g/\epsilon} \Delta h.$$

Voor  $((R \cup S) - T_1) \cup \partial$  vinden we

$$-(\epsilon \Delta Z + AZ_x + BZ_y + CZ) = \frac{1}{\epsilon} (\epsilon z_{xx}^{**} + \epsilon z_{yy}^{**} + Az_x^{**} + Bz_y^{**} + Cz^{**}).$$

Dus Rechterlid =  $O(e^{-\delta_1/\epsilon} \cdot \epsilon^{-1})$  voor  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Dus Linkerlid =  $O(e^{-\delta_1/\epsilon} \cdot \epsilon^{-1})$  voor  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Dus  $|\text{Linkerlid}| \leq \frac{k}{\epsilon \cdot e^{\delta_1/\epsilon}} \quad \forall \epsilon \neq 0; \epsilon < \epsilon_1$ .

Daar echter  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon e^{\delta_1/\epsilon} = \infty$  kunnen we zeggen

$$\epsilon \Delta Z + AZ_x + BZ_y + CZ = O(1) \text{ voor } \epsilon \rightarrow +0,$$

en dit geldt ook op  $T_1$ , want  $-e^{-g/\epsilon} \Delta h = O(1)$  wegens de continuïteit van  $\Delta h$  op  $T_1$ , voor  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Resultaat  $\epsilon \Delta Z + AZ_x + BZ_y + CZ = O(1)$  voor  $\epsilon \rightarrow +0$  op  $R \cup S$ .

Het speciale randvoorwaardeprobleem heeft ten gevolge, dat  $Z = 0$  op  $S$  want op  $S_2$  is  $z^{**} = u$  ( $z^{**} = z = \theta(s)$  en  $u = \theta(s)$  op  $S_2$ ), op  $S - S_2$  waren zowel  $z^{**}$  als  $u = 0$ .

We kunnen nu het maximum principe toepassen, want  $|\text{Rechterlid}| \leq m$  en  $z = 0$  op  $S$  dus  $|z| \leq m$ .

Voor  $R$  geldt dus  $|Z| \leq Km$ , m.a.w.  $Z(x,y) = O(1)$  voor  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Samenvattend resultaat.

Voor het speciale randvoorwaardeprobleem

$$\left. \begin{array}{l} u = \theta(s) \text{ op } S_2 \\ u = 0 \text{ op } S - S_2 \end{array} \right\}$$

geldt voor de homogene partiële differentiaalvergelijking van elliptisch type  $\varepsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = 0$  de uniform geldige asymptotische ontwikkeling

$$u(x,y) = z(x,y) + O(\varepsilon) \quad \text{op } RUS.$$

### 6. De ordeterm $w(x,y,\varepsilon)$

De subkarakteristieken van (1.2) worden in deze § aangeduid door subkarakteristieken zonder meer.

We beschouwen een regular quadrilateral;  $s$  is de boogparameter van  $S_2$ . Elke subkarakteristiek in het r.q. wordt eenduidig bepaald door een waarde van  $s$ , daar de karakteristieken elkaar niet snijden op de rand. Stel  $s = s_1$  en  $s = s_2$  de beide subkarakteristieken die tot de rand van het r.q. behoren. Wegens de continuïteit van  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds}$  op  $S$  geldt  $B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} > 0$  resp.  $< 0$  niet alleen voor  $S_2$  resp.  $S_1$  doch voor een wat groter segment  $S_2^*$  en  $S_1^*$ .

Het nieuwe regular quadrilateral wordt gekenmerkt door

$$s_1 - 3\delta \leq s \leq s_2 + 3\delta.$$

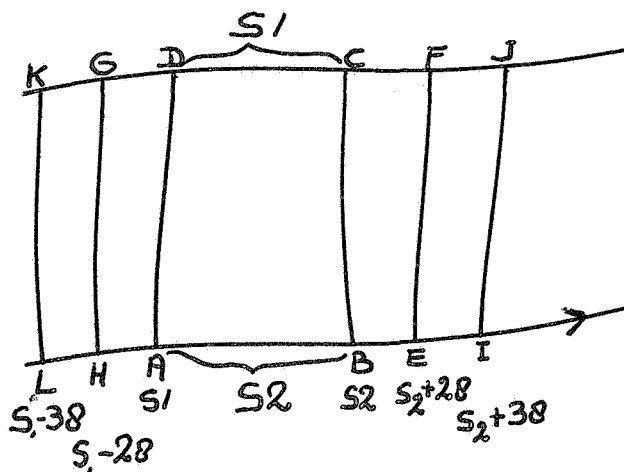
We beschouwen nu 3 r.q.'s, nl.

$$s_1 \leq s \leq s_2 \quad \text{symbool } \phi,$$

$$s_1 - 2\delta \leq s \leq s_2 + 2\delta \quad \text{symbool } \bar{\phi},$$

$$s_1 - 3\delta \leq s \leq s_2 + 3\delta \quad \text{symbool } \phi^*.$$

Illustratie 6.1



r.q.  $\phi$ : ABCD  
 r.q.  $\bar{\phi}$ : HEFG  
 r.q.  $\phi^*$ : LIJK  
 AB :  $S_2$   
 DC :  $S_1$   
 HE :  $S_2$   
 GF :  $S_1^*$   
 LI :  $S_2^*$   
 KJ :  $S_1$



We beschouwen de vergelijking

$$\epsilon \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$$

met gegeven randvoorwaarden  $u$  op  $S$ .

$U(x,y)$  is de (unieke) oplossing van de gereduceerde vergelijking

$$Au_x + Bu_y + Cu = D \text{ met de gegeven randvoorwaarde } u \text{ op } \bar{S}_1.$$

Klaarblijkelijk behoort  $U$  tot  $V$  in  $\bar{\phi}$ .

$$\text{Stel nu } \begin{cases} \theta(s) = u - U \text{ op } \bar{S}_2 \\ \text{continu op } [s_1 - 3\delta, s_1 - 2\delta] \text{ en } [s_2 + 2\delta, s_2 + 3\delta] \\ \theta(s) \equiv 0 \text{ op } [s_1 - 3\delta, s_1 - 3\delta + \delta_1] \text{ en } [s_2 + 3\delta - \delta_2, s_2 + 3\delta] \end{cases}$$

$z^* + \epsilon Z$  is de oplossing van de homogene vergelijking met speciale randwaardeprobleem

$$\begin{aligned} z^* + \epsilon Z &= \theta(s) \text{ op } S_2^* \\ z^* + \epsilon Z &= 0 \text{ op } S - S_2^*. \end{aligned}$$

Definiëer  $w(x,y,\epsilon)$  nu als volgt

$$u = U + z^* + \epsilon Z + w(x,y,\epsilon).$$

Daar zowel  $u$ ,  $U$ ,  $z^*$  en  $Z$  uniform begrensd zijn op  $\bar{\phi}$  is  $w$  ook uniform begrensd op  $\bar{\phi}$  als  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Substitutie levert op

$$\begin{aligned} \epsilon \Delta U + \{AU_x + BU_y + CU - D\} + \{\epsilon \Delta(z + \epsilon Z) + A(z + \epsilon Z)_x + B(z + \epsilon Z)_y + \\ + C(z + \epsilon Z)\} + \{\epsilon \Delta w + Aw_x + Bw_y + Cw\} = 0. \end{aligned}$$

Daar  $U$  aan de gereduceerde vergelijking voldeed en  $z + \epsilon Z$  aan de homogene elliptische vergelijking vinden we

$$\epsilon \Delta w + Aw_x + Bw_y + Cw = -\epsilon \Delta U \dots \dots \dots (6.2)$$

met als randvoorwaarde

$$w = 0 \text{ op } \bar{S}_1 \text{ en op } \bar{S}_2,$$

$$\text{want op } \bar{S}_1 \text{ is } u = U \text{ en } z + \epsilon Z = 0,$$

$$\text{en op } \bar{S}_2 \text{ is } z + \epsilon Z = u - U.$$

De auteur tracht nu te bewijzen, dat  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  door te bewijzen, dat de volgende aanname tot een tegenstrijdigheid voert:

Er is een punt  $P \in \phi$ , zodanig dat voor voldoende grote  $k_1 > 0$  geldt  $|w| > k_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  voor een aantal kleine  $\varepsilon$ . (6.1)

Voor het gemak nemen we  $w > 0$  op  $\phi$ .

Het bewijs verloopt als volgt:

Is  $k$  de constante, die een belangrijke rol speelt in het Maximum Principe dan geldt voor voldoende kleine  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon |\Delta U| < \frac{k_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{k}.$$

Het enige wat daarvoor nodig is, is  $\varepsilon^{\frac{1}{2}} < \frac{k_1}{kM}$  te kiezen als

$$M = \max |\Delta u| \text{ op } \bar{\phi}.$$

Stel nu dat op één of andere subkarakteristiek ( $s$ ), waarvoor geldt  $s_1 - 2\delta \leq s \leq s_1$  en evenzo op één of andere subkarakteristiek ( $s$ ), waarvoor geldt  $s_2 \leq s \leq s_2 + 2\delta$  voor alle punten  $P$  op deze twee subkarakteristieken geldt:

$$|w(P, \varepsilon)| < \frac{k_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{k} \quad \text{voor die } \varepsilon,$$

waarvoor (6.1) geldt.

Dan volgt eruit, dat  $|w| < k_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  in het gehele r.q. dat o.a. door deze 2 subkarakteristieken begrensd wordt.

Dit is in tegenspraak met de veronderstelling dat in minstens één punt  $|w| > k_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ .

De conclusie is dus, dat bijv. voor alle subkarakteristieken ( $s$ ), waarvoor geldt  $s_1 - 2\delta \leq s \leq s_1$  er altijd minstens één punt is waar

$$w \geq \frac{k_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{k} \quad \text{voor die } \varepsilon\text{'s waarvoor 6.1 geldt.}$$

We gaan nu de volgende coördinaten transformatie toepassen:

$$\sigma = \sigma(x, y) \quad (\text{deze } \sigma \text{ en deze } \tau \text{ hebben niets uit te staan}$$

$$\tau = \tau(x, y) \quad \text{met de } \sigma \text{ en } \tau \text{ van de grenslaag),}$$

met de volgende eigenschap:

$\sigma(x,y)$  en  $\tau(x,y)$  voldoen aan de respectievelijke vergelijkingen

$$A \frac{\partial \sigma}{\partial x} + B \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad B \frac{\partial \tau}{\partial x} - A \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Er bestaan oplossingen van deze twee vergelijkingen met de volgende eigenschappen:

- De oplossingen  $\sigma(x,y)$  en  $\tau(x,y) \in C^{VI}$ ;
- $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 > 0$ ,  $\tau_x^2 + \tau_y^2 > 0$ ; dus andere oplossing dan de triviale 0 oplossing;
- In  $\bar{\phi}$  geldt  $\frac{\partial(\sigma, \tau)}{\partial(x,y)} \neq 0$ ;
- De subkarakteristieken van (1.2) gaan door deze transformatie over op de krommen  $\sigma = \text{constant}$ ;
- De curvilineaire coördinaten zijn orthogonaal;
- $A\tau_x + B\tau_y \neq 0$ , want  $= 0$  betekent dat de vectoren  $(A,B)$  en  $(\tau_x, \tau_y)$  orthogonaal waren en dit heeft ten gevolge dat

$$\begin{vmatrix} A & \tau_x \\ B & \tau_y \end{vmatrix} \neq 0, \text{ hetgeen een tegenstrijdigheid oplevert.}$$

Deze transformatie voert de vergelijking (6.2) over in

$$\begin{aligned} \epsilon W_{\sigma\sigma}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \epsilon W_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) + \epsilon W_{\sigma} \Delta \sigma + W_{\tau}(A\tau_x + B\tau_y + \epsilon \Delta \tau) + Gw = \\ = - \epsilon \Delta U. \dots \dots (6.3) \end{aligned}$$

Een tweede transformatie  $w = e^{k\tau}$ .  $W$  voert (6.3) over in

$$\begin{aligned} \epsilon W_{\sigma\sigma}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \epsilon W_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) + \epsilon W_{\sigma} \Delta \sigma + [A\tau_x + B\tau_y + 2\epsilon k(\tau_x^2 + \tau_y^2) + \\ + \epsilon \Delta \tau] W_{\tau} + [C + k(A\tau_x + B\tau_y) + \epsilon k^2(\tau_x^2 + \tau_y^2)] W = - \epsilon \Delta U e^{-k\tau} \dots (6.4) \end{aligned}$$

$k$  is een constante die zodanig gekozen wordt, dat

$$C + k(A\tau_x + B\tau_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (A\tau_x + B\tau_y) < 0 \text{ op } \bar{\phi}, \dots \dots (6.5)$$

Het is altijd mogelijk zo'n k te kiezen wegens het feit dat

- 1e)  $A\tau_x + B\tau_y \neq 0$  is op  $\bar{\phi}$  en
- 2e) alle termen continu zijn op  $\bar{\phi}$ .

We delen links en rechts van (6.4) door  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$  en vinden

$$\epsilon W_{\sigma\sigma} + \epsilon P W_{\tau\tau} + \epsilon A_2 W_\sigma + (B_1 + \epsilon B_2) W_\tau + (C_1 + \epsilon C_2) W = \epsilon D_2 \dots \dots \dots (6.6)$$

waarbij

$$P = \frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} > 0,$$

$$C_1 = \frac{C + k(A\tau_x + B\tau_y)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

$$A_2 = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

$$C_2 = \frac{k^2(\tau_x^2 + \tau_y^2)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} > 0,$$

$$B_1 = \frac{A\tau_x + B\tau_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \neq 0,$$

$$C_2 = k^2 P.$$

$$B_2 = \frac{2k(\tau_x^2 + \tau_y^2) + \Delta\tau}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

Alle coëfficiënten zijn zeker van klasse  $C^{II}$ ; verder geldt

$$C_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau} = \left\{ C + k(A\tau_x + B\tau_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (A\tau_x + B\tau_y) \right\} \frac{1}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} < 0 \dots \dots \dots (6.7)$$

We definiëren nu de volgende functie

$$\phi(\sigma): \phi(\sigma) = \int_{\tau_1(\sigma)}^{\tau_2(\sigma)} W^2(\sigma, \tau) d\tau \dots \dots \dots (6.8)$$

langs een subkarakteristiek  $\sigma = \text{constant}$  t $\bar{\phi}$  van  $\bar{S}_1 \rightarrow \bar{S}_2$  waarbij:

- a)  $\bar{S}_1$  correspondeert met  $\tau = \tau_1(\sigma)$ ;
- b)  $\bar{S}_2$  correspondeert met  $\tau = \tau_2(\sigma)$ ;

c) de integraal wordt zodanig genomen, dat  $\phi(\sigma)$  positief is.

Deze integraal bestaat, want  $W \in C^{II}$  is continu.

$\bar{\phi}$ ,  $\bar{S}_1$  en  $\bar{S}_2$  worden hier uiteraard in de getransformeerde situatie beschouwd.

Daar  $w = 0$  op  $\bar{S}_1$  en  $\bar{S}_2$  volgt er uit dat  $W$  eveneens  $= 0$  op  $\bar{S}_1$  en  $\bar{S}_2$ .

Verder  $W \in C^{II}$  en  $W$  gedefiniëerd op een compacte verzameling.

Men kan nu  $\phi$   $2 \times$  differentiëren. Langs een subkarakteristiek geldt dus:

$$\frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} WW_{\sigma\sigma} d\tau + 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_{\sigma}^2 d\tau \dots \dots (6.9)$$

Dus  $\phi \in C^{II}$ .

Vermenigvuldig de linker en de rechterzijde van de vergelijking (6.6)

met  $W$  en integreer langs een subkarakteristiek. Het resultaat is

derhalve

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} WW_{\sigma\sigma} d\tau + \epsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} PWW_{\tau\tau} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} B_1 WW_{\tau} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} C_1 W^2 d\tau + \\ & + \epsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} (A_2 WW_{\sigma} + B_2 WW_{\tau} + C_2 W^2 - D_2 W) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Deze vergelijking gaan we wat eenvoudiger maken.

$$PWW_{\tau\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} (PWW_{\tau}) - PW_{\tau}^2 - P_{\tau} WW_{\tau}.$$

Substitutie geeft

$$\epsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} WW_{\sigma\sigma} d\tau = \epsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} PW_{\tau}^2 d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (C_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau}) W^2 d\tau + \epsilon J \dots \dots (6.10)$$

$$J = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial \tau} (PWW_\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} P_\tau WW_\tau d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} A_2 WW_\sigma + B_2 WW_\tau + C_2 W^2 +$$

$$- D_2 W) d\tau \dots \dots (6.11)$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} B_1 WW_\tau d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} B_1 \partial W^2 = \frac{1}{2} B_1 W^2 \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 \frac{\partial B_1}{\partial \tau} d\tau =$$

$$= - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 \frac{\partial B_1}{\partial \tau} d\tau .$$

Nu is  $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial \tau} (PWW_\tau) d\tau = \left( PWW_\tau \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0, \text{ want } W = 0 \text{ op } \bar{S}_1 \text{ en op } \bar{S}_2 .$

Dus  $|J| \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} |W| \cdot \{ |P_\tau - B_2| |W_\tau| + |A_2| |W_\sigma| + C_2 |W| + |D_2| \} d\tau .$

Wegens de continuïteit van  $P_\tau, A_2, B_2, C_2$  en  $D_2$  op  $\bar{\Phi}$ , is er een  $k_2 > 0$  zodanig dat

$$|J| \leq k_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |W| (1 + |W| + |W_\sigma| + |W_\tau|) d\tau .$$

$$k_2 = \max \{ \max |P_\tau - B_2|, \max |A_2|, \max C_2, \max |D_2| \}, \text{ dit alles op } \bar{\Phi} .$$

Uit (6.10) volgt:

$$2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} WW_{\sigma\sigma} d\tau = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} PW_\tau^2 d\tau - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( C_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau} \right) W^2 d\tau + 2J \dots \dots (6.13) .$$

Uit (6.9) volgt:

$$2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} WW_{\sigma\sigma} d\tau = \frac{d^2 \Phi}{d\sigma^2} - 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\sigma^2 d\tau \dots \dots (6.14) .$$

Uit (6.13) en (6.14) volgt:

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\sigma^2 d\tau + 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} P W_\tau^2 d\tau - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( C_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau} \right) W^2 d\tau + 2J \dots \quad (6.15)$$

Daar  $P > 0$  op  $\bar{\phi}$  en  $C_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau} < 0$  op  $\bar{\phi}$  zijn de eerste drie termen  $\geq 0$ .

Wegens de continuïteit van  $P$  en  $C_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau}$  op  $\bar{\phi}$  geldt de volgende formule:

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} \geq 2 \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\sigma^2 d\tau + m_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\tau^2 d\tau + m_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau \right\} + 2J \dots \dots \dots (6.16)$$

waarbij  $m_1 = \text{minimum van } P \text{ op } \bar{\phi}$ ,

$m_2 = \text{minimum van } - \left( C_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial B_1}{\partial \tau} \right) \text{ op } \bar{\phi}$ .

Dus:

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} \geq 2m_1^* \int_{\tau_1}^{\tau_2} (W_\sigma^2 + W_\tau^2) d\tau + 2m_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau + 2J,$$

waarbij  $m_1^* \leq 1$ , immers als  $m_1 \geq 1$  dan kunnen we  $m_1 = 1$  stellen;

is  $m_1 < 1$  dan krijgen we

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} \geq 2m_1 \left( \frac{1}{m_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\sigma^2 d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\tau^2 d\tau \right) + 2m_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau + 2J.$$

We kunnen nu de  $m_1$  in de noemer weglaten.

Stel nu  $3k_1 = 2m_1$ . Dit geeft  $k_1 = \frac{2}{3} m_1$ .

Stel vervolgens  $4k_1 = 2m_2$ . Dit geeft  $k_1 = \frac{1}{2} m_2$ .

Kies  $k_1 = \text{minimum} \left( \frac{2}{3} m_1, \frac{1}{2} m_2 \right)$ ;  $k_1 < 1$  zodat nu geldt:

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} \geq 3k_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (W_\sigma^2 + W_\tau^2) d\tau + \frac{4k_1}{\varepsilon} \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau + 2J \dots \dots \dots (6.17)$$

Uit (6.12) volgt door toepassing van de integraal ongelijkheid van Schwarz:

$$|J| \leq k_2 (\tau_2 - \tau_1)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + k_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau + k_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |W| (|W_\sigma| + |W_\tau|) d\tau \dots \dots \dots (6.18)$$

Voor zeer kleine  $\varepsilon$  geldt nu

$$|J| \leq k_2 (\tau_2 - \tau_1)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{\varepsilon} \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau + k_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |W| (|W_\sigma| + |W_\tau|) d\tau$$

Voor voldoende kleine  $\varepsilon$  is de 2e term van een dusdanige grootte dat de andere twee termen door eventueel veel kleinere vervangen kunnen worden zonder dat er gevaar bestaat voor het "omklappen" van het teken  $\leq$ .

Dus:

$$|J| \leq k_2 (\tau_2 - \tau_1)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{\varepsilon} \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau + k_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (W_\sigma^2 + W_\tau^2) d\tau \quad (6.19)$$

Uit (6.17) volgt nu i.v.m. (6.8)

$$\frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} \geq \left\{ k_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (W_\sigma^2 + W_\tau^2) + \frac{2k_1}{\varepsilon} \phi \right\} + 2 \left\{ k_2 (\tau_2 - \tau_1)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{\varepsilon} \int_{\tau_1}^{\tau_2} W^2 d\tau + k_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (W_\sigma^2 + W_\tau^2) d\tau + J \right\} - 2k_2 (\tau_2 - \tau_1)^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (6.20)$$

Uit (6.19) en (6.20) volgt nu dat de 2e term tussen accolades weggelaten kan worden, immers als  $J > 0$  dan is dit triviaal, als  $J < 0$  dan staat tussen de accolades een positief getal of nul.



Is  $k_2^{**} = \max (\tau_2(\sigma) - \tau_1(\sigma))^{\frac{1}{2}}$  en stellen we  $k_3 \geq 2 \frac{k_2 k_2^{**}}{k_1}$ , dan volgt uit (6.20)

$$\frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} \geq k_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\tau^2 d\tau + \frac{2k_1}{\varepsilon} \phi - k_1 k_3 \phi^{\frac{1}{2}} \dots (6.21)$$

$W_\sigma^2$  kan weggelaten worden.

Door  $k_3$  voldoende groot te kiezen, volgt uit (6.21)

$$\frac{d^2 \phi}{d\sigma^2} \geq k_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\tau^2 d\tau + \frac{k_1}{\varepsilon} \phi - \frac{k_1 k_3^2}{4} \varepsilon \dots (6.22)$$

Deze semi-ongelijkheid noemt de auteur de karakteristieke integraal ongelijkheid, (6.22) geldt echter alleen bij voldoende kleine  $\varepsilon$ .

De subkarakteristieken  $s = s_1$  en  $s = s_2$  in het  $xy$ -vlak corresponderen met resp.  $\sigma = \sigma_1$  en  $\sigma = \sigma_2$ . We veronderstellen  $\sigma_2 > \sigma_1$  voor het gemak. Het feit, dat op elke subkarakteristiek waarvoor geldt  $s_1 - 2\delta \leq s \leq s_1$  er minstens één punt is waarvoor geldt  $w \geq \frac{1}{k} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  correspondeert in het  $\sigma, \tau$ -vlak met het volgende.

Er bestaat een  $\delta_1 > 0$ , zodanig dat op elke getransformeerde subkarakteristiek die voldoet aan  $\sigma_1 - 2\delta_1 \leq \sigma \leq \sigma_1$  geldt  $W \geq K_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ .

Immers  $w = e^{\frac{k\tau}{k_1}} W_\sigma$ .

Dus als  $w > \frac{1}{k} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  voor een of ander punt in het  $(xy)$ -vlak in  $\bar{\phi}$ , dan is voor het corresponderende punt in het  $\sigma, \tau$ -vlak

$$W(\sigma, \tau, \varepsilon) > \frac{k_1}{k} e^{-k\tau} \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Dus } W(\sigma, \tau, \varepsilon) > K_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \dots (6.23) \text{ als } K_2 = \frac{K_1}{K} e^{-k\tau}.$$

Nu is

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau} W_\tau(\sigma, \tau, \varepsilon) d\tau.$$

$$\text{Dus } W^2 = \left( \int_{\tau_1}^{\tau} W_{\tau} d\tau \right)^2 \leq \int_{\tau_1}^{\tau} W_{\tau}^2 d\tau \cdot (\tau - \tau_1) \quad \tau \leq \tau_2.$$

$$\text{Dus } \frac{W^2}{(\tau - \tau_1)} \leq \int_{\tau_1}^{\tau} W_{\tau}^2 d\tau \quad \text{voor alle punten van } \bar{\phi}.$$

Dus i.v.m. (6.23) geldt voor het speciale punt  $(\sigma, \tau)$

$$\frac{K_2^2 \varepsilon}{\tau_2 - \tau_1} \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_{\tau}^2 d\tau \dots \dots (6.24)$$

Uit (6.22) en (6.24) volgt

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} > \frac{k_1 K_2^2 \varepsilon}{\tau_2 - \tau_1} + \frac{k_1}{\varepsilon} \phi - \frac{k_1 k_3^2 \varepsilon}{4} \dots \dots (6.25)$$

Dus als we  $K_1$  voldoende groot nemen, dan geldt

$$\frac{k_1 K_2^2}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{k_1 k_3^2}{4} > 1,$$

en dus

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} > \frac{k_1}{\varepsilon} \phi + \varepsilon \dots \dots (6.26)$$

$(\sigma_1 - 2\delta_1 \leq \sigma \leq \sigma_1).$

Daar het rechterlid positief is en  $\phi \in C^{II}$  is  $\frac{d\phi}{d\sigma}$  monotoon stijgend.

Stel nu  $\sigma_0 = \sigma_1 - \delta_1$ . Indien  $\left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)_{\sigma = \sigma_0} \geq 0$ , dan beschouwen we (6.26) van  $\sigma_0$  naar  $\sigma_0 + \delta_1$ .

Is  $\left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)_{\sigma = \sigma_0} < 0$  dan van  $\sigma_0$  naar  $\sigma_0 - \delta_1$ .

In het eerste geval is dus wegens de monotonie  $\phi'(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma;$

$\sigma_0 < \sigma \leq \sigma_0 + \delta_1$ .

Dus we kunnen (6.26) links en rechts met  $\phi'(\sigma)$  vermenigvuldigen.

$$\phi''\phi' \geq \frac{k_1}{\varepsilon} \phi \phi' + \varepsilon\phi'.$$

$$\text{Dus } (\phi')^2 \geq \frac{k_1}{\varepsilon} \phi^2 + 2\varepsilon\phi - \frac{k_1}{\varepsilon} \phi_0^2 - 2\varepsilon\phi_0.$$

Stellen we  $\phi(\sigma) = \phi(\sigma) - \frac{\varepsilon}{k_1}$ ;  $\phi_0 = \phi(\sigma_0)$ ,  $\phi_0 = \phi(\sigma_0)$ ,

dan vinden we dat

$$(\phi')^2 \geq \frac{k_1}{\varepsilon} \left(\phi - \frac{\varepsilon}{k_1}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\phi - \frac{\varepsilon}{k_1}\right) - \frac{k_1}{\varepsilon} \left(\phi_0 - \frac{\varepsilon}{k_1}\right)^2 - 2\varepsilon\left(\phi_0 - \frac{\varepsilon}{k_1}\right).$$

$$\text{Dus } (\phi')^2 \geq \frac{k_1}{\varepsilon} (\phi^2 - \phi_0^2) - 2\varepsilon(\phi - \phi_0) + \frac{\varepsilon^3}{k_1} - \frac{\varepsilon^3}{k_1} + 2\varepsilon(\phi - \phi_0) - \frac{2\varepsilon^3}{k_1} + \frac{2\varepsilon^3}{k_1}.$$

$$\text{Dus } (\phi')^2 \geq \left(\frac{k_1}{\varepsilon}\right)(\phi^2 - \phi_0^2).$$

Hieruit volgt:

$$\phi'(\sigma) \geq \left(\frac{k_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} (\phi^2 - \phi_0^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Dus: } \phi + \sqrt{\phi^2 - \phi_0^2} \geq \phi_0 e^{(\sigma - \sigma_0) \cdot k_1^{\frac{1}{2}} / \varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Dus daar  $\phi_0 \geq \frac{\varepsilon}{k_1}$  als  $\varepsilon$  voldoende klein is, geldt nu:

$$\phi(\sigma) \geq \frac{\varepsilon^2}{2k_1} e^{(\sigma - \sigma_0) \cdot k_1^{\frac{1}{2}} / \varepsilon^{\frac{1}{2}}};$$

als  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dan gaat het rechterlid naar  $\infty$  vanwege de  $e$ -macht.

Dus  $\phi(\sigma_0 + \delta_1) = \phi(\sigma_1) \rightarrow \infty$  als  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Dit betekent dat  $\Phi(\sigma_1) \rightarrow \infty$  als  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Dus  $W(\sigma_1, \tau, \varepsilon)$  is niet begrensd als  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Dus  $w(\sigma_1, \tau, \varepsilon)$  is niet begrensd als  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Dus  $w(x, y, \varepsilon)$  is niet begrensd op  $\bar{\phi}$  en dit is in tegenspraak met het feit dat  $w$  op  $\bar{\phi}$  begrensd is.

Conclusie:

In elk punt van  $\phi$  geldt dat voor voldoende grote  $k_1$  geldt  $|w| \leq k_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ . Dus  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  volgens de auteur.

### 7. Opmerkingen

A. Gaat men het bewijs dat  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  na, dan doet zich het merkwaardige feit voor, dat het bewijs met kleine wijzigingen ook geldt voor  $w = O(\varepsilon^{\nu})$   $\nu \leq 1$ . Immers:

D1) Er is een punt  $P \in \phi$ , zodanig, dat voor voldoende grote  $k_1$  geldt, dat in elke rechter omgeving van  $\varepsilon = 0$ , hoe klein ook, er altijd een  $\varepsilon > 0$  te vinden is, zodanig dat  $|w| > k_1 \varepsilon^{\nu}$ .

D2) Er geldt nu op  $\bar{\phi}$   $\varepsilon \Delta u < \frac{k_1}{k} \varepsilon^{\nu}$  voor voldoende grote  $k_1$ .

Hier blijkt ook dat  $\nu$  niet groter dan 1 kan zijn want stel  $\nu > 1$ , dan is dus  $\varepsilon^{1-\nu} \Delta u < \frac{k_1}{k}$  en dit is onmogelijk voor elke nulrij  $\varepsilon$ .

Toepassing van het Maximum Principe leidt tot  $|w| < K\varepsilon$  op  $\phi$  hetgeen een tegenspraak met (D1) oplevert.

D3) Het verdere verloop van het bewijs is geheel analoog aan dat in het geval  $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  tot formule 6.22.

Formule (6.22) wordt

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} \geq k_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_{\tau}^2 d\tau + \frac{k_1}{\varepsilon} - \frac{k_1 k_3}{4} \varepsilon^2.$$

$k_3$  is zo groot gekozen, dat dit blijft gelden voor elke nulrij  $\varepsilon$ .

D4) Als  $w \geq \frac{K_1}{K} \varepsilon$  in het  $(x, y)$ -vlak dan correspondeert in het  $(\sigma, \tau)$ -vlak de uitdrukking  $W(\sigma, \tau, \varepsilon) > K_2 \varepsilon$  in een punt  $(\sigma, \tau)$  waarbij  $K_1 \rightarrow \infty$  dan ook  $K_2 \rightarrow \infty$ .

D5) (6.24) wordt:  $\frac{K_2^2 \varepsilon^2}{\tau_2 - \tau_1} \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} W_\tau^2 d\tau.$

D6) Dus  $\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} \geq \frac{k_1 K_2^2 \varepsilon^2}{\tau_2 - \tau_1} + \frac{k_1}{\varepsilon} \phi - \frac{k_1 k_3^2 \varepsilon^2}{4}.$

D7) Voor voldoende grote  $K_2$  geldt

$$\frac{k_1 K_2^2}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{k_1 k_3^2}{4} > 1.$$

D8) (6.26) wordt

$$\frac{d^2\phi}{d\sigma^2} \geq \frac{k_1}{\varepsilon} \phi + \varepsilon^2.$$

D9) Dus  $\phi''\phi' \geq \frac{k_1}{\varepsilon} \phi\phi' + \varepsilon^2\phi'.$

D10) Dus  $(\phi')^2 \geq \frac{k_1}{\varepsilon} \phi^2 + 2\varepsilon^2\phi - \frac{k_1}{\varepsilon} \phi_0^2 - 2\varepsilon^2\phi_0.$

D11) Stel  $\phi(\sigma) = \phi(\sigma) - \frac{\varepsilon^3}{k_1}.$

D12) Dus ook in dit geval volgt na substitutie

$$(\phi')^2 \geq \left(\frac{k_1}{\varepsilon}\right) (\phi^2 - \phi_0^2).$$

D13) Dus  $\phi + \sqrt{\phi^2 - \phi_0^2} \geq \phi_0 \exp \left[ (\sigma - \sigma_0) \cdot \frac{k_1^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right].$

D14) Echter  $\phi_0 \geq \frac{\varepsilon^3}{k_1}.$

D15)  $\phi(\sigma) \geq \frac{\varepsilon^3}{2k_1} \exp \left[ (\sigma - \sigma_0) \frac{k_1^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right].$

De conclusie hieruit is dus precies dezelfde, nl.  $w$  niet begrensd op  $\phi$ .

B. Kennelijk geldt dus voor  $w$ :  $w = O(\varepsilon^\nu)$ , waarbij  $\nu \leq 1$ .

Doch dit wordt een "violence" van het symbool  $O$ .

Definitie van het symbool  $O$ .

$f(x^1 \dots x^n, \lambda_1 \dots \lambda_m) = O(g(\lambda_1 \dots \lambda_m))$  voor  $\Lambda \rightarrow \Lambda_0$  betekent het volgende in  $R_n$ :

a) Op een verzameling  $V$  geldt

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_0} \frac{|f(P, \Lambda)|}{g(\Lambda)} = L \neq 0 \text{ als deze limiet bestaat.}$$

b)  $g(\Lambda) \geq 0$  op een zekere omgeving  $\Omega$  van  $\Lambda_0$ .

Bestaat deze limiet niet, doch geldt dat voor alle  $\Lambda \in$  omgeving  $\Omega^*$  van  $\Lambda_0$ ,  $\Omega^* \subset \Omega$   $\frac{|f(P, \Lambda)|}{g(\Lambda)} < M$  met dien verstande, dat in elke omgeving  $\Omega^+$ , waarbij  $\Omega^* \subset \Omega^+ \subset \Omega$  er een  $\Lambda$  te vinden is, waarbij deze ongelijkheid niet geldt,

bovendien als voor een aantal  $\Lambda \in \Omega^*$  geldt  $\frac{|f(P, \Lambda)|}{g(\Lambda)} < M_1 < M$  dan bestaat er tenminste één  $\Lambda \in \Omega^*$  waarbij

$$M_1 \leq \frac{|f(P, \Lambda)|}{g(\Lambda)} < M.$$

Stelling:

Als  $f(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon^\nu)$  dan geldt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|f(x, y, \varepsilon)|}{\varepsilon^\mu} = 0 ; 0 < \mu < \nu .$$

Bewijs:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{|f(x, y, \varepsilon)|}{\varepsilon^\mu} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{|f(x, y, \varepsilon)|}{\varepsilon^\nu} \cdot \frac{\varepsilon^\nu}{\varepsilon^\mu} \right) = L \cdot 0 = 0.$$

De consequentie van deze stelling is nu dat het foutief is te beweren dat als  $f(x,y,\varepsilon) = O(\varepsilon^\nu)$  ook zou gelden  $f(x,y,\varepsilon) = O(\varepsilon^\mu)$  waarbij  $0 < \mu < \nu$ .

Passen we bovenstaande uiteenzetting toe op de orde functie  $w(x,y,\varepsilon)$  dan merken we het volgende op:

a) Hoewel niet expliciet vermeld wordt voor de omkering van het symbool  $O$  nl.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|w(x,y,\varepsilon)|}{\varepsilon^\nu} = \infty$  essentieel gebruik gemaakt van de werkelijke

definitie in het bewijs; anders zouden de "punten" D6) en D7) niet gelden.

b) Aangezien echter het bewijs geldig is voor  $\nu \leq 1$  en  $\nu > 1$  niet mogelijk is, is de uitspraak  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$  in dit kader niet juist.

Hetgeen in wezen exact bewezen is, is het volgende.

De aanname dat in een punt  $P \in \phi$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|w(P,\varepsilon)|}{\varepsilon^2} = \infty$  tot een tegenspraak voert.

De conclusie is derhalve dat de volgende twee mogelijkheden kunnen optreden:

a:  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ ;

b:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|w|}{\varepsilon^2} = 0$ .

Het blijkt dan dat mogelijkheid (b) zich voordoet.

Evenzo is in dit kader  $z$  geen  $O(e^{-\delta_1/\varepsilon})$  en  $Z$  geen  $O(1)$ .

Immers bij  $z$  bijvoorbeeld

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|z|}{e^{-\delta_1/\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-g/\varepsilon} |h|}{e^{-\delta_1/\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{(\delta_1 - g)/\varepsilon} |h|.$$

Echter  $g > \delta_1$  dus  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|h|}{e^{(g - \delta_1)/\varepsilon}} = 0$ .

Bibliografie

- I) The first boundary value problem for  $\epsilon \Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$  FOR SMALL  $\epsilon$ , by Norman Levinson.  
"Annals of Mathematics", vol. 51, No. 2, March 1950.
- II) Asymptotic solution of boundary value problems for differential equation  $\Delta u + \lambda \partial u / \partial x = \lambda f(x,y)$ , by W. Wasow.  
"Duke Math. J.", 11 (1944), 405-415.
- III) Nonlinear Mathematics, by T.L. Saaty and J. Bram.  
blz. 214 e.v.
- IV) Randwert aufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typus I: Die erste Randwertaufgabe, Allgemeine ebene Gebiete, L. Lichtenstein.  
"J. Reine Angew. Math.", 142 (1913), 1-40.
- V) Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter, Inl. in de theorie der singuliere storingsproblemen, door W. Eckhaus.  
M.C.-Amsterdam.



Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

ERRATA DEEL I

Er staat:

Lees:

p.4, (2.4)

$$\frac{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\phantom{x}}}{\varepsilon_{N+1}^{(1)}}$$

$$\frac{\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\phantom{x}}}{\varepsilon_{N+1}^{(2)}}$$

p.5, (2.5)

$$\dots g_n^{(1)}(\varepsilon)\phi^{(1)}(x_i) \dots$$

$$\dots g_n^{(1)}(\varepsilon)\phi_n^{(1)}(x_i) \dots$$

p.5, (2.6)

$$\dots g_n^{(2)}(\varepsilon)\phi^{(2)}(x_i) \dots$$

$$\dots g_n^{(2)}(\varepsilon)\phi_n^{(2)}(x_i) \dots$$

p.7, (2.16)

$$\dots = \frac{x^6}{3!}$$

$$\dots = \frac{x^6}{3!} \sin x$$

p.8, (2.19)

$$\dots + o(\varepsilon^3)]$$

$$\dots + o(\varepsilon^4)]$$

p.8, (2.20)

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \{ \dots \right|$$

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^4} \{ \dots \right|$$

p.8, (2.20)

$$\dots = \xi^3$$

$$\dots = \left| \xi^3 - \frac{1}{4!} \xi^4 \right|$$

p.8, r. 16 v.b.

\dots (2.19) \dots

\dots (2.9) \dots

## Section 2.1: The Language of Mathematics

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

### Section 2.1

Er staat:

Lees:

p.12, (4.4)

$$\dots = -\epsilon^{N+1} L_S(\phi_N)$$

$$\dots = -\epsilon^{N+1} L_S(\phi_N)$$

p.13, (4.11)

$$\dots + 2\epsilon \frac{d\phi}{dv} + \dots$$

$$\dots + 2\epsilon \frac{d\phi}{dx} + \dots$$

p.19, r. 2 v.o.

\dots verg. (5.16),

\dots verg. (5.18),

p.22, (6.7)

$$\dots B(\xi_n, x_j) \dots$$

$$\dots B(\epsilon^v \xi_n, x_j) \dots$$

p.28, (7.15)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(x, y, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, y, \epsilon)}{\partial y}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(x, \eta, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, \eta, \epsilon)}{\partial y}$$

p.28, (7.17)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, y, \epsilon)}{\partial y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-v} \frac{\partial \Phi(x, y, \epsilon)}{\partial y}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi(x, \eta, \epsilon)}{\partial y} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-v} \frac{\partial \Phi(x, \eta, \epsilon)}{\partial \eta}$$

p.28, (7.18)

$$\frac{\partial \Phi(x, y, \epsilon)}{\partial y} = \dots$$

$$\frac{\partial \Phi(x, \eta, \epsilon)}{\partial \eta} = \dots$$

p.28, (7.19)

$$\Phi(x, y, \epsilon) = \epsilon^v \psi(x, y, \epsilon)$$

$$\Phi(x, \eta, \epsilon) = \epsilon^v \psi(x, \eta, \epsilon)$$

p.29, (7.26)

$$\psi_0(x, y) = \dots$$

$$\psi_0(x, \eta) = \dots$$



Er staat:

Lees:

p.30, (8.2)

$$\dots AI \frac{1}{3} [\dots] + BI - \frac{1}{3} [\dots] \dots$$

$$AJ \frac{1}{3} [\dots] + BJ - \frac{1}{3} [\dots] \dots$$

p. 32, (8.13)

$$\dots + \epsilon^v \xi^2 + \dots$$

$$\dots + \alpha_2 \epsilon^v \xi^2 + \dots$$

p. 37, r. 3 v.b.

$$\dots \frac{\partial p}{\partial x_i^p}, \dots \frac{\partial q}{\partial x_i^q} .$$

$$\dots \frac{\partial p}{\partial x_i^p}, \dots \frac{\partial q}{\partial x_i^q} .$$

p. 66, r. 6 v.b.

... van de vergelijkingen ...

... van de oplossingen van de vergelijkingen ...

