

TW

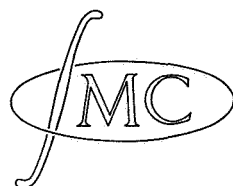
STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Colloquium 1964-1965

Partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

onder leiding van

Prof.Dr. W. Eckhaus en Prof.Dr. H.A. Lauwerier



TW

Deel II
(2 delen)

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam, 49, 2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

Inhoudsopgave

Deel I

W. Eckhaus	Inleiding in de theorie van singuliere storingsproblemen	1
J. Nuis	Asymptotische problemen in verband met de vergelijking van Burgers	34
J. Nuis	Asymptotische problemen uit de ballistiek	54
H.A. Lauwerier	Grenslaagproblemen in de oceanografie	69
D. Dunnebier	Singuliere storingsproblemen van lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van elliptisch type	85

Deel II

W. Eckhaus	Parabolische grenslagen	121
J.F. Frankena	De methode van Poincaré, Lighthill en Kuo	151
E.M. de Jager	Asymptotische oplossingen van singuliere storingsproblemen voor differentiaalvergelijkingen van elliptisch type	185
J. Nuis	Methode van de "multiple-time-scales" en een toepassing op de vergelijking van Van der Pol	217
P.J. van der Houwen	Constructie van uniforme benaderingen volgens de theorie van Langer	236

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameterParabolische grenslagen

W. Eckhaus

1. Inleiding

Wij beschouwen singuliere storingsproblemen van het type

$$\varepsilon L_s(\Phi) + L_0(\Phi) = 0 \quad (1.1)$$

waarbij L_s een tweede orde operator is, terwijl L_0 van de eerste orde is. Op de rand van S van het definitiegebied leggen wij de randvoorwaarde op

$$\Phi = \phi_0 \quad (1.2)$$

Stel nu dat de gereduceerde vergelijking

$$L_0(\Phi_0) = 0 \quad (1.3)$$

reële karakteristieken bezit. In de problemen die tot nu toe in dit colloquium zijn behandeld werd steeds verondersteld dat de rand S geen stukken bevat die met de karakteristieken van (1.3) samenvallen. In het nu volgende onderzoeken wij problemen waarbij dit juist het geval is.

Problemen van dit type zijn behandeld door Višik en Lyusternik, en tevens door Knowles en Messick (zie bibliografie). De behandeling die wij hier zullen geven verschilt in vele aspecten van de theorie die door de bovengenoemde auteurs is ontwikkeld.

2. Elementair voorbeeld van parabolische grenslagen

Wij beschouwen de vergelijking

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

voor $x \geq 0$ en $y \geq 0$. De randvoorwaarden zijn

$$\phi = 0 \quad \text{voor} \quad y = 0 \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (2.2)$$

$$\phi = \phi(y) \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq \infty. \quad (2.3)$$

Wij veronderstellen continuïteit van de randvoorwaarden, d.w.z.

$$\phi(0) = 0. \quad (2.4)$$

De gereduceerde vergelijking tezamen met randvoorwaarde (2.2) laat slechts de triviale oplossing $\phi \equiv 0$ toe. Daar deze triviale oplossing niet aan de randvoorwaarde (2.3) voldoet, ligt het voor de hand om het bestaan van een oplossing met grenslaag-karakter in de omgeving van $x = 0$ te veronderstellen. Wij merken op dat de lijn $x = 0$ een karakteristiek is van de gereduceerde vergelijking.

Wij voeren nu in de lokale coördinaat

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (2.5)$$

Verg. (2.1) gaat hiermee over in

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (2.6)$$

De operatoren εL_s en L_0 zijn van dezelfde orde van grootte, indien wij kiezen

$$\nu = \frac{1}{2}. \quad (2.7)$$

Er volgt dan

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \quad (2.8)$$

Wij merken op dat de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten een partiële differentiaalvergelijking is.

Schrijf nu:

$$\phi(x,y) = v_0 \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon} y} \right) + \varepsilon z_0(x,y) \quad (2.9)$$

waarbij de functie v_0 gedefiniëerd wordt door

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

met randvoorwaarden

$$v_0 = 0 \quad \text{voor } y = 0 \quad 0 \leq \xi \leq \infty \quad (2.11)$$

$$v_0 = \phi \quad \text{voor } \xi = 0 \quad 0 \leq y \leq \infty. \quad (2.12)$$

De functie z_0 moet dan voldoen aan

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial z_0}{\partial y} = - \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

met randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} z_0(x,0) &= 0 & 0 \leq x \leq \infty \\ z_0(0,y) &= 0 & 0 \leq y \leq \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Wij bepalen eerst de functie v_0 . Vergelijking (2.10) is de klassieke warmte-vergelijking (en dus van parabolisch type). De oplossing, die aan voorwaarden (2.11) en (2.12) voldoet is de volgende:

$$v_0(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{\xi}{\sqrt{2y}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \phi \left[y - \frac{\xi^2}{2t^2} \right] dt. \quad (2.15)$$

De functie $v_0(\xi, y)$ is uniform begrensd indien de functie $\phi(y)$ begrensd is. Stel

$$\text{Max } |\phi(y)| = M. \quad (2.16)$$

Dan volgt

$$\left| v_0(\xi, y) \right| \leq M \operatorname{erfc} \left[\frac{\xi}{2\sqrt{y}} \right]. \quad (2.17)$$

Het gedrag van de functie $v_0(\xi, y)$ voor grote waarden van ξ volgt nu uit de bekende asymptotiek van de complementaire error-functie.

Wij vinden:

$$|v_0(\xi, y)| \approx \sqrt{\frac{y}{\pi \xi^2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4y}\right] \quad \text{voor } \xi \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

De functie v_0 heeft dus duidelijk het grenslaag-karakter; oplossingen van het type v_0 zullen wij dan ook parabolische grenslagen noemen.

Wij merken op dat ook de afgeleiden van v_0 het grenslaag-karakter hebben. Zo vinden wij achtereenvolgens:

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{\xi}{\sqrt{2y}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \phi' \left[y - \frac{\xi^2}{2t^2} \right] dt \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\xi}{(2y)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{2y}} \phi'(0) + \int_{\frac{\xi}{\sqrt{2y}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \phi'' \left[y - \frac{\xi^2}{2t^2} \right] dt \right\}. \quad (2.20)$$

Deze afgeleiden zijn uniform begrensd indien de eerste en tweede afgeleiden van de functie $\phi(y)$ bestaan en uniform begrensd zijn.

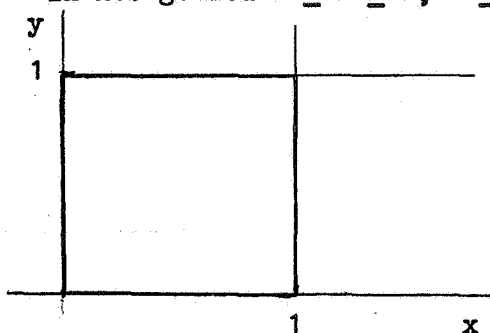
Beschouwen wij nu het probleem voor de rest-term z_0 , vergelijkingen (2.13) en (2.14), dan is het duidelijk dat het rechterlid van verg. (2.13) uniform is begrensd voor alle $x \geq 0$ en $y \geq 0$, en dit onafhankelijk van ϵ . Om te bewijzen dat de functie v_0 de eerste asymptotische benadering is van de functie ϕ voor $\epsilon \rightarrow 0$ moet worden aangetoond dat de functie z_0 uniform is begrensd. Het is langs deze gedachtengang dat wij bewijzen van asymptotiek zullen leveren bij randwaardeproblemen die in het nu volgende zullen worden behandeld, en waarin parabolische grenslagen van het type (2.15) een belangrijke rol spelen.

3. Een randwaarde probleem met karakteristieke randen

Wij zullen nu het volgende randwaarde-probleem onderzoeken: de functie $\Phi(x,y)$ voldoet aan

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

in het gebied $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. De randvoorwaarden zijn:



$$\Phi(x,0) = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2)$$

$$\Phi(x,1) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

$$\Phi(0,y) = g_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.4)$$

$$\Phi(1,y) = g_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (3.5)$$

Wij veronderstellen continuïteit van de randvoorwaarden, d.w.z.:

$$\left. \begin{aligned} f_1(0) = g_1(0) & \quad ; \quad g_1(1) = f_2(0) \\ f_2(1) = g_2(1) & \quad ; \quad f_1(1) = g_2(0). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Beschouw eerst de formele limiet $\epsilon \rightarrow 0$ van verg. (3.1).

Aan de resulterende gereduceerde vergelijking wordt voldaan door een functie $\Phi_0(x)$. Deze functie kan aan één van de vier randvoorwaarden voldoen, bijvoorbeeld aan randvoorwaarde (3.2) of (3.3). Dit suggereert dat de asymptotische benadering van de functie $\Phi(x,y,\epsilon)$ zal bestaan uit de functie Φ_0 , plus drie grenslaag-functies, die voor het voldoen aan de overblijvende randvoorwaarden moeten zorgen. Zoals er uit het vervolg zal blijken, bestaan er, voor het gebied $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$, oplossingen van het grenslaag-type langs de randen $x = 0$, $x = 1$ en $y = 1$, maar niet langs de rand $y = 0$.

Het is daarom dat wij kiezen:

$$\Phi_0(x) = f_1(x). \quad (3.7)$$

Wij schrijven nu:

$$\bar{\Phi} = \Phi - f_1(x)$$

en verkrijgen voor de functie $\bar{\Phi}$ het volgende randwaarde-probleem:

$$\varepsilon \left[\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = -\varepsilon f_1'' \quad (3.8)$$

met randvoorwaarden

$$\bar{\Phi}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.9)$$

$$\bar{\Phi}(x, 1) = f_2(x) - f_1(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.10)$$

$$\bar{\Phi}(0, y) = g_1(y) - f_1(0) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.11)$$

$$\bar{\Phi}(1, y) = g_2(y) - f_1(1) \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (3.12)$$

Vergelijking (3.8) met randvoorwaarden (3.9) en (3.11) vertoont veel analogie met het probleem dat wij in paragraaf 2 hebben beschouwd. Wij voeren daarom in de parabolische grenslaag:

$$v_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon y}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \phi^{(1)}\left[y - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2}\right] dt \quad (3.13)$$

waarbij

$$\phi^{(1)}(y) = g_1(y) - f_1(0) \quad \text{voor} \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (3.14)$$

Laten wij nu aantonen dat er langs de rand $x = 1$ eveneens een oplossing van het parabolische grenslaag-type geconstrueerd kan worden. Wij voeren hiertoe in de lokale coördinaat

$$\xi = \frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.15)$$

Vergelijking (3.8) gaat hiermee over in:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = -\varepsilon f_1'' - \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2}. \quad (3.16)$$

Het is duidelijk dat de gereduceerde vergelijking in de lokale coördinaten identiek is aan verg. (2.10).

Wij definiëren dus een tweede parabolische grenslaag:

$$v_0^{(2)} \left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}, y \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{1-x}{\sqrt{2\epsilon y}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \phi^{(2)} \left[y - \frac{(1-x)^2}{2\epsilon t^2} \right] dt \quad (3.17)$$

waarbij $x \leq 1$ en

$$\phi^{(2)}(y) = \varepsilon_2(y) - f_1(1). \quad (3.18)$$

Schrijf thans:

$$\bar{\bar{\Phi}} = \Phi - \left[f_1(x) + v_0^{(1)} + v_0^{(2)} \right]. \quad (3.19)$$

Er volgt:

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 \bar{\bar{\Phi}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\bar{\Phi}}}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \bar{\bar{\Phi}}}{\partial y} = -\epsilon \left[f_1'' + \frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0^{(2)}}{\partial y^2} \right] \quad (3.20)$$

met randvoorwaarden

$$\bar{\bar{\Phi}}(x, 0) = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.21)$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(x, 1) = f_2 - f_1 - v_0^{(1)} \left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}, 1 \right) - v_0^{(2)} \left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}, 1 \right) ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.22)$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(0, y) = -v_0^{(2)} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, y \right] \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.23)$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(1, y) = -v_0^{(1)} \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, y \right] \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (3.24)$$

Wij merken op dat de randwaarden door verg. (3.23) en (3.24) voorgeschreven, gezien het karakter van de parabolische grenslagen, asymptotisch zeer klein zijn.

Laten wij nu aantonen dat er langs de rand $y = 1$, voor $y \leq 1$ een gewone grenslaag oplossing kan worden geconstrueerd die aan de randvoorwaarde (3.22) voldoet. Laten wij hiertoe beschouwen het nu volgende elementaire probleem:

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial \phi^{**}}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

voor $y \leq 1$, met randvoorwaarde

$$\phi^{**}(x, 1) = \psi(x). \quad (3.26)$$

Wij voeren in de lokale coördinaat

$$\eta = \frac{1-y}{\epsilon}. \quad (3.27)$$

Verg. (3.25) wordt getransformeerd in

$$\frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \phi^{**}}{\partial \eta} = -\epsilon^2 \frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial x^2}. \quad (3.28)$$

Door limiet-overgang $\epsilon \rightarrow 0$ verkrijgen wij de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten, door de randvoorwaarde (3.26) op te leggen volgt de grenslaag-oplossing

$$u_0 = \psi(x) \exp \left[-\frac{1-y}{\epsilon} \right]. \quad (3.29)$$

Schrijven wij nu

$$\phi^{**} = u_0 + z_0^{**} \quad (3.30)$$

dan volgt

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 z_0^{**}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0^{**}}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial z_0^{**}}{\partial y} = -\epsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2} \exp \left[-\frac{1-y}{\epsilon} \right]. \quad (3.31)$$

Indien de functie $\psi(x)$ niet snel met x varieert, dan is het rechterlid van vergelijking (3.31) van orde ϵ of kleiner. Stel echter dat ψ lokaal een functie is van $\epsilon^{-\frac{1}{2}}x$; dan zou het rechterlid van vergelijking (3.31) lokaal van orde één zijn. Om deze mogelijkheid te ondervangen construeren wij de tweede benadering voor de grenslaag. Wij schrijven

$$\phi^{**}(x, y, \epsilon) = u_0 \left(x, \frac{1-y}{\epsilon} \right) + \epsilon^2 u_1 \left(x, \frac{1-y}{\epsilon} \right) + z_1^{**}(x, y, \epsilon) \quad (3.32)$$

waarbij wij definiëren

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad (3.33)$$

met de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, 0) &= 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} u_1(x, \eta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Een eenvoudige berekening levert:

$$u_1\left(x, \frac{1-y}{\epsilon}\right) = \frac{1-y}{\epsilon} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \exp\left[-\frac{1-y}{\epsilon}\right]. \quad (3.35)$$

Voor z_1^{**} volgt dan

$$\epsilon \left[\frac{\partial^2 z_1^{**}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1^{**}}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial z_1^{**}}{\partial y} = - \epsilon^2 \frac{d^4 \psi}{dx^4} (1-y) \exp\left[-\frac{1-y}{\epsilon}\right]. \quad (3.36)$$

Het rechterlid van vergelijking (3.36) is uniform klein, zelfs als ψ lokaal een functie is van $x/\sqrt{\epsilon}$. Expliciet kunnen wij stellen, voor $y \leq 1$:

$$\left| \epsilon^2 \frac{d^4 \psi}{dx^4} (1-y) e^{-\frac{1-y}{\epsilon}} \right| \leq \epsilon c \quad (3.37)$$

waarbij c een constante is, onafhankelijk van ϵ .

Wij keren thans terug naar het probleem voor $\bar{\Phi}$, en definiëren, voor $y \leq 1$, de grenslaag-oplossing

$$u_0^{**} = \left[\psi(x) + \epsilon(1-y) \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right] \exp\left[-\frac{1-y}{\epsilon}\right] \quad (3.38)$$

waarbij

$$\psi(x) = f_2(x) - f_1(x) - v_0^{(1)} \left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}, 1\right) - v_0^{(2)} \left(\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}, 1\right). \quad (3.39)$$

Wij kunnen nu onze resultaten samenvatten door te stellen

$$\Phi(x, y, \varepsilon) = f_1(x) + v_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) + v_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) + u_0^*\left(x, \frac{1-y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon Z_0. \quad (3.40)$$

Voor de restterm Z_0 verkrijgen wij dan

$$\varepsilon \left[\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial Z_0}{\partial y} = R_0 \quad (3.41)$$

$$R_0 = - \left\{ \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0^{(2)}}{\partial y^2} + \varepsilon(1-y) \frac{d^4 \psi}{dx^4} \exp \left[-\frac{1-y}{\varepsilon} \right] \right\}. \quad (3.42)$$

De randvoorwaarden zijn

$$Z_0(x, 0) = -\frac{1}{\varepsilon} \left[\psi(x) + \varepsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad (3.43)$$

$$Z_0(x, 1) = 0 \quad (3.44)$$

$$Z_0(0, y) = -\frac{1}{\varepsilon} v_0^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) - \frac{1}{\varepsilon} u_0^*\left(0, \frac{1-y}{\varepsilon}\right) \quad (3.45)$$

$$Z_0(1, y) = -\frac{1}{\varepsilon} v_0^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) - \frac{1}{\varepsilon} u_0^*\left(1, \frac{1-y}{\varepsilon}\right). \quad (3.46)$$

Wij onderzoeken eerst de orde van grootte van R_0 . Het is duidelijk dat in het gehele definitie-gebied

$$\frac{\partial^2 f_1}{dx^2} = o(1) \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial y^2} = o(1) \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^2 v_0^{(2)}}{\partial y^2} = o(1). \quad (3.49)$$

In het bijzonder de relaties (3.48) en (3.49) volgen direct uit de eigenschappen van de parabolische grenslagen. Ten aanzien van de laatste term van R_0 merken wij op dat $\frac{d^4 \psi}{dx^4}$ lokaal, dat is in de omgeving

van $x = 0$ en $x = 1$, van de orde ϵ^{-2} is. Echter

$$\left| \frac{1-y}{\epsilon} e^{-\frac{1-y}{\epsilon}} \right| \leq c_0 \quad (3.50)$$

waarbij c_0 een constante is onafhankelijk van ϵ . Er volgt dat

$$R_0 = o(1) \quad (3.51)$$

dat wil zeggen

$$\left| R_0 \right| \leq m \quad (3.52)$$

waarbij m een constante is onafhankelijk van ϵ .

Wij onderzoeken nu de randvoorwaarden van Z_0 . Uit verg. (3.43) volgt

$$Z_0(x, 0) = o(\epsilon^N) \quad (3.53)$$

waarbij N een willekeurig positief getal is. Ten aanzien van de randvoorwaarden (3.45), (3.46) merken wij op dat

$$\frac{1}{\epsilon} v_0^{(1,2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, y \right) = o(\epsilon^N). \quad (3.54)$$

Rest dus te onderzoeken

$$\frac{1}{\epsilon} u_0^* \left(0, \frac{1-y}{\epsilon} \right) \text{ en } \frac{1}{\epsilon} u_0^* \left(1, \frac{1-y}{\epsilon} \right).$$

Wij schrijven

$$\frac{1}{\epsilon} u_0^* \left(0, \frac{1-y}{\epsilon} \right) = \left\{ \frac{1}{\epsilon} \psi(0) + (1-y) \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)_{x=0} \right\} e^{-\frac{1-y}{\epsilon}}. \quad (3.55)$$

Uit de definitie van de functie $\psi(x)$ volgt:

$$\frac{1}{\epsilon} \psi(0) = -\frac{1}{\epsilon} v_0^{(2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, 1 \right) = o(\epsilon^N). \quad (3.56)$$

Voorts hebben wij

$$\left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)_{x=0} = o(\epsilon^{-1}). \quad (3.57)$$

Gebruik makend van de relatie (3.50) vinden wij dus

$$\frac{1}{\varepsilon} u_0^*(0, \frac{1-y}{\varepsilon}) = o(1). \quad (3.58)$$

Op dezelfde wijze kan worden aangetoond dat

$$\frac{1}{\varepsilon} u_0^*(1, \frac{1-y}{\varepsilon}) = o(1). \quad (3.59)$$

De randvoorwaarden aan Z_0 opgelegd zijn dus maximaal orde één. Wij kunnen, bijgevolg, de constante m uit relatie (3.52) zodanig kiezen dat

$$\left| Z_0 \right| \leq m \quad \text{op de rand.} \quad (3.60)$$

Op het probleem voor Z_0 is nu van toepassing het maximum-principe dat door Levinson is bewezen. (Zie ook bijdrage van Dunnebier tot dit colloquium). Uit (3.41), met (3.52) en (3.60) volgt dat

$$\left| Z_0 \right| \leq Km \quad (3.61)$$

in het gehele definitie gebied. Hier is K wederom een constante die onafhankelijk is van ε . Wij hebben aldus bewezen dat

$$Z_0 = o(1) \quad (3.62)$$

uniform in $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Terugkerend naar formule (3.40) hebben wij

$$\begin{aligned} \phi(x, y, \varepsilon) = & f_1(x) + v_0^{(1)} \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) + v_0^{(2)} \left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) \\ & + \left[\psi(x) + \varepsilon(1-y) \frac{d^2\psi}{dx^2} \right] \exp \left[-\frac{1-y}{\varepsilon} \right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Wij merken nog op, door inspectie van verg. (3.39), dat

$$\varepsilon(1-y) \frac{d^2\psi}{dx^2} e^{-\frac{1-y}{\varepsilon}} = o(\varepsilon) \quad (3.64)$$

uniform in $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Er volgt dus uiteindelijk

$$\begin{aligned} \phi(x, y, \varepsilon) = & f_1(x) + v_0^{(1)} \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) + v_0^{(2)} \left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) \\ & + \psi(x) \exp \left[-\frac{1-y}{\varepsilon} \right] + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.65)$$

uniform in $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Hiermee is ons randwaarde-probleem opgelost.

Het is interessant om op te merken dat de constructie van de tweede benadering van de grenslaag u_0^{**} slechts nodig was om het bewijs van asymptotiek met gebruikmaking van het maximum-principe te kunnen leveren. Naderhand kan deze tweede benadering uit de asymptotische oplossing weer worden weggelaten. Deze opmerking werpt licht op de moeilijkheden die andere auteurs bij het bewijs van asymptotiek hebben ondervonden.

Višik en Lyusternik bestuderen een analoog probleem zonder de tweede benadering van de grenslaag u_0^{**} te construeren. Bij het beschouwen van de restterm is het dan noodzakelijk de omgeving van $x = 0$, $y = 1$ en $x = 1$, $y = 1$ uit te sluiten. De asymptotiek wordt daar slechts (schetsmatig) bewezen voor het gebied waarin de omgeving van deze hoekpunten is uitgesloten.

Knowles en Messick, in een analoog maar eenvoudiger probleem, construeren evenmin de tweede benadering van de grenslaag u_0^{**} . Zij bewijzen de asymptotiek door gebruik te maken van de expliciet gegeven, maar zeer gecompliceerde, exacte oplossing van het probleem. Deze werkwijze kan uiteraard niet worden gebruikt bij meer algemene randwaardeproblemen, waarvan de exacte oplossing buiten de praktische mogelijkheden ligt.

4. Parabolische grenslagen bij algemene partiële differentiaalvergelijkingen van tweede orde

Wij zullen thans beschouwen de algemene vergelijking

$$\varepsilon \left\{ a(x,y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b(x,y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + e(x,y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + f(x,y) \phi \right\} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + g(x,y) \phi = 0. \quad (4.1)$$

De vergelijking wordt elliptisch verondersteld en $a > 0$. In analogie met paragraaf 2 bestuderen wij eerst een eenvoudig randwaarde-probleem met definitie-gebied $x \geq 0, y \geq 0$ en met randvoorwaarden

$$\phi(x,0) = 0; \quad \phi(0,y) = \phi(y). \quad (4.2)$$

Wij voeren in de lokale coördinaat

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (4.3)$$

Verg. (4.1) gaat dan over in

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + g\phi = -\sqrt{\varepsilon} \left\{ b \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial y} + d \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right\} - \varepsilon \left\{ c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f\phi \right\}. \quad (4.4)$$

Het is duidelijk dat de asymptotische ontwikkeling van de parabolische grenslaag nu termen van de orde $\sqrt{\varepsilon}$ zal bevatten. In het algemeen zouden wij kunnen stellen

$$\phi(\xi, y, \varepsilon) \cong \sum_{n=0}^N \varepsilon^{\frac{1}{2}n} v_n(\xi, y). \quad (4.5)$$

In problemen van paragraaf 2 en 3 waren termen van de orde van grootte $\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \varepsilon^{3/2}$ etc. niet aanwezig.

Wij zullen ons hier beperken tot het bepalen van de eerste benadering v_0 , en zullen in principe aangeven hoe de volgende term $\sqrt{\varepsilon} v_1$ kan worden geconstrueerd.

Schrijf dus nu:

$$\phi = v_0(\xi, y) + \sqrt{\epsilon} z_0(\xi, y, \epsilon) \quad (4.6)$$

en bovendien

$$a(0, y) = a_0(y); \quad g(0, y) = g_0(y). \quad (4.7)$$

Wij definiëren de functie v_0 als oplossing van de vergelijking

$$a_0(y) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v_0}{\partial y} + g_0(y) v_0 = 0 \quad (4.8)$$

met randvoorwaarden

$$v_0(\xi, 0) = 0; \quad v_0(0, y) = \phi(y). \quad (4.9)$$

Voor de restterm z_0 volgt dan

$$\epsilon \left\{ a \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + d \frac{\partial z_0}{\partial x} + e \frac{\partial z_0}{\partial y} + f z_0 \right\} - \frac{\partial z_0}{\partial y} + g z_0 = -R_0 \quad (4.10)$$

met

$$R_0 = b \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial y} + d \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \frac{a - a_0}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \frac{g - g_0}{\sqrt{\epsilon}} v_0 + \sqrt{\epsilon} \left\{ c \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + e \frac{\partial v_0}{\partial y} + f v_0 \right\} \quad (4.11)$$

en met randvoorwaarden

$$z_0(x, 0) = 0; \quad z_0(0, y) = 0. \quad (4.12)$$

Laten wij eerst aantonen dat de functie v_0 zonder moeite expliciet kan worden bepaald. Wij voeren hiertoe in de transformatie

$$v_0(\xi, y) = \bar{v}_0(\xi, y) \exp \left[\int_0^y g_0(y') dy' \right] \quad (4.13)$$

en vervolgens

$$\eta = \int_0^y a_0(y') dy' \quad (4.14)$$

Er volgt

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} = 0 \quad (4.15)$$

met randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_0(\xi, 0) &= 0; \\ \bar{v}_0(0, \eta) &= \bar{\phi}(\eta); \\ \bar{\phi}(\eta) &= \phi(\eta) \cdot \exp \left[- \int_0^\eta g_0(y') dy' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

De functie \bar{v}_0 is dus de parabolische grenslaag-functie die in paragraaf 2 was bepaald. Wij herhalen hier de voornaamste eigenschappen van deze grenslaag-functie: is de functie $\bar{\phi}(\eta)$ en haar eerste en tweede afgeleide uniform begrensd, dan bestaan er constanten $c_{n,m}$ zodanig dat

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \frac{\partial^m}{\partial \eta^m} \bar{v}_0 \right| \leq c_{n,m} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2 \sqrt{\epsilon \eta}} \right] \quad (4.17)$$

voor $n + m = 0$, $n + m = 1$ en $n + m = 2$.

Met deze eigenschappen kan het rechterlid van de vergelijking voor z_0 zonder moeite worden afgeschat. Als de coëfficiënten $a(x,y)$ en $g(x,y)$ analytisch zijn in de omgeving van $x = 0$, dan volgt onmiddellijk dat R_0 uniform begrensd is in ieder deelgebied waarin a , b , c , d , e en f uniform zijn begrensd. Wij merken op dat $R_0 = O(\sqrt{\epsilon})$ in het bijzondere geval dat $b = 0$, $d = 0$ terwijl a en g niet van x afhangen.

Wij geven nog in het kort aan hoe de volgende term van de reeks (4.5) kan worden bepaald. Definiëer hiertoe

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha_0(y) ; \quad \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0} = \gamma_0(y) \quad (4.18)$$

en voorts

$$b(0,y) = b_0(y); \quad d(0,y) = d_0(y). \quad (4.19)$$

Er volgt dan

$$a_0(y) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v_1}{\partial y} + g_0(y)v_1 = - \left\{ b_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial y} + d_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \epsilon \alpha_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \epsilon \gamma_0 v_0 \right\} \quad (4.20)$$

met de randvoorwaarden

$$v_1(\xi,0) = 0; \quad v_1(0,y) = 0. \quad (4.21)$$

Door transformaties analoog aan (4.13), (4.14) wordt het probleem voor v_1 teruggebracht tot een inhomogene warmte-vergelijking met homogene randvoorwaarden. De expliciete oplossing kan uiteraard worden bepaald, maar is gecompliceerd en wordt hier achterwege gelaten.

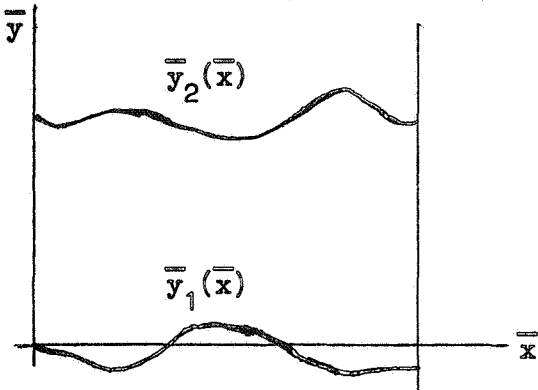
5. Een algemene klasse randwaarde-problemen met parabolische grenslagen

Wij beschouwen nu de vergelijking

$$\epsilon \left\{ A \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} + E \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} + F \phi \right\} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} + G \phi = H \quad (5.1)$$

waarbij de coëfficiënten A, B, \dots, H functies zijn van \bar{x} en \bar{y} , $A > 0$.

De vergelijking wordt elliptisch verondersteld; de randvoorwaarden zijn:



$$\begin{aligned} \phi &= f_1(\bar{x}) \text{ voor } \bar{y} = \bar{y}_1(\bar{x}) \\ \phi &= f_2(\bar{x}) \text{ voor } \bar{y} = \bar{y}_2(\bar{x}) \\ \phi &= g_1(\bar{y}) \text{ voor } \bar{x} = 0 \\ \phi &= g_2(\bar{y}) \text{ voor } \bar{x} = 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wij veronderstellen continuïteit van de randvoorwaarden in de hoekpunten, voorts voldoende differentiëerbaarheid van de functies $\bar{y}_1(\bar{x})$ en $\bar{y}_2(\bar{x})$, en in het bijzonder $\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \bar{x}}$ en $\frac{\partial \bar{y}_2}{\partial \bar{x}}$ begrensd in de hoekpunten, tevens $\bar{y}_1(\bar{x}) < \bar{y}_2(\bar{x})$ voor $0 \leq \bar{x} \leq 1$.

Višik en Lyusternik wijden aan bovenstaand probleem een zeer korte beschouwing, zonder op het bewijs van asymptotiek in te gaan. In het nu volgende zullen wij trachten een meer complete behandeling van het probleem te geven.

Wij voeren eerst in de transformatie

$$y = \frac{\bar{y} - \bar{y}_1(\bar{x})}{\bar{y}_2(\bar{x}) - \bar{y}_1(\bar{x})} \quad \bar{x} = x. \quad (5.3)$$

Hierdoor wordt het definitie-gebied afgebeeld op het vierkant $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Vergelijking (5.1) gaat over in

$$\varepsilon \left\{ a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi \right\} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + g \phi = h. \quad (5.4)$$

De vergelijking blijft elliptisch; $a > 0$ waaruit volgt dat ook $c > 0$.

De randvoorwaarden zijn:

$$\phi = f_1(x) \quad \text{voor} \quad y = 0 \quad (5.5)$$

$$\phi = f_2(x) \quad \text{voor} \quad y = 1 \quad (5.6)$$

$$\phi = g_1(y) \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad (5.7)$$

$$\phi = g_2(y) \quad \text{voor} \quad x = 1. \quad (5.8)$$

Door limiet-overgang $\varepsilon \rightarrow 0$ in verg. (5.4) verkrijgen wij de gereduceerde vergelijking waarvan de oplossing, die aan de randvoorwaarde (5.5) voldoet, is:

$$\phi_0(x,y) = \left\{ f_1(x) - \int_0^y h(x,y'') \exp \left[- \int_0^{y''} g(x,y') dy' \right] dy'' \right\} \exp \left[\int_0^y g(x,y') dy' \right]. \quad (5.9)$$

Analoog met paragraaf 3 zullen wij de asymptotische benadering van de functie $\phi(x, y, \varepsilon)$ opbouwen uit de functie ϕ_0 , plus drie grenslaag-termen. Alvorens deze laatsten te construeren merken wij echter nog op dat met ϕ_0 als uitgangspunt hogere benaderingen kunnen worden gedefiniëerd door middel van de asymptotische reeks

$$\phi(x, y, \varepsilon) \approx \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \phi_n(x, y) \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial y} - g \phi_n = \left\{ a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f \right\} \phi_{n-1} \quad (5.11)$$

$$\phi_n(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5.12)$$

De functie

$$\bar{\phi}(x, y, \varepsilon) = \phi(x, y, \varepsilon) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \phi_n(x, y) \quad (5.13)$$

moet dan voldoen aan de randvoorwaarden

$$\bar{\phi}(x, 0, \varepsilon) = 0 \quad (5.14)$$

$$\bar{\phi}(x, 1, \varepsilon) = f_2(x) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \phi_n(x, 1) \quad (5.15)$$

$$\bar{\phi}(0, y, \varepsilon) = g_1(y) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \phi_n(0, y) \quad (5.16)$$

$$\bar{\phi}(1, y, \varepsilon) = g_2(y) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \phi_n(1, y). \quad (5.17)$$

Wij zullen ons, in wat volgt, beperken tot de benadering $N = 0$. Wij merken echter op dat de asymptotische ontwikkeling van de parabolische grenslagen, verg. (4.5), termen van de orde $\varepsilon^{\frac{1}{2}n}$ bevat. Wil men, bijvoorbeeld, behalve de parabolische grenslaag v_0 ook de term $\sqrt{\varepsilon} v_1$ bepalen, dan volgt uit het bovenstaande dat aan de functie v_1 homogene randvoorwaarden moeten worden opgelegd. Voortgaand zouden er voor de term εv_2 inhomogene randvoorwaarden van de orde ε voorgeschreven worden, terwijl er voor $\varepsilon^{3/2} v_3$ weer homogene randvoorwaarden zouden volgen. Wegens de gecompliceerdheid van de uitdrukkingen beperken wij ons hier

tot v_0 ; de boven beschreven bijzondere verdeling van de randvoorwaarden voor de ontwikkeling van de parabolische grenslaag leek ons echter vermeldenswaard.

In overeenstemming met paragraaf 4 definiëren wij nu de parabolische grenslaag

$$v_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\eta_1}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \bar{\phi}^{(1)}\left[\eta_1 - \frac{x^2}{2\varepsilon t^2}\right] dt \cdot \exp\left[\int_0^y g_0(y') dy'\right], \quad (5.18)$$

waarbij

$$g_0(y) = g(0, y); \quad a_0(y) = a(0, y) \quad (5.19)$$

$$\eta_1 = \int_0^y a_0 dy' \quad (5.20)$$

$$\text{en } \bar{\phi}^{(1)}(y) = \left[g_1(y) - f_1(0) \right] \cdot \exp\left[-\int_0^y g_0(y') dy'\right]. \quad (5.21)$$

Zonder moeite overtuigt men zich dat er langs $x = 1$ een analoge parabolische grenslaag kan worden gedefiniëerd.

Deze is gegeven door

$$v_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{1-x}{\sqrt{2\varepsilon\eta_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \bar{\phi}^{(2)}\left[\eta_2 - \frac{(1-x)^2}{2\varepsilon t^2}\right] dt \cdot \exp\left[\int_0^y g_1(y') dy'\right]. \quad (5.22)$$

Waarbij

$$g_1(y) = g(1, y); \quad a_1(y) = a(1, y) \quad (5.23)$$

$$\eta_2 = \int_0^y a_1 dy' \quad (5.24)$$

$$\bar{\phi}^{(2)}(y) = \left[g_2(y) - f_1(1) \right] \cdot \exp\left[-\int_0^y g_1 dy'\right]. \quad (5.25)$$

Rest ons nu te construeren een grenslaag-functie voor de omgeving van $y = 1$ voor $y \leq 1$. Wij beschouwen hiertoe het elementaire probleem

$$\varepsilon \left[a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f \right] \phi^{**} - \frac{\partial \phi^{**}}{\partial y} + g \phi^{**} = 0 \quad (5.26)$$

voor $y \leq 1$ en met de randvoorwaarde

$$\phi^{**}(x, 1) = \psi(x). \quad (5.27)$$

Wij voeren in de lokale coördinaat

$$\eta = \frac{1-y}{\varepsilon} \quad (5.28)$$

en definiëren voorts

$$e(x, 1) = \frac{1}{\omega(x)}. \quad (5.29)$$

Er volgt dan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \phi^{**}}{\partial \eta} = -\varepsilon \left\{ -b \frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial x \partial \eta} - e \frac{\partial \phi^{**}}{\partial \eta} + \frac{c - \omega = 1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial \eta^2} + g \phi^{**} \right\} \\ - \varepsilon^2 \left\{ a \frac{\partial^2 \phi^{**}}{\partial x^2} + d \frac{\partial \phi^{**}}{\partial x} + f \phi^{**} \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Door limiet-overgang $\varepsilon \rightarrow 0$ verkrijgen wij de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaaten; de grenslaag-oplossing die aan de randvoorwaarde (5.27) voldoet is

$$u_0 = \psi(x) e^{-\omega \eta}. \quad (5.31)$$

Zoals in paragraaf 3 moeten wij echter hogere benaderingen voor de grenslaag-functie construeren om later in staat te zijn een bewijs van asymptotiek te leveren. Wij schrijven thans

$$\phi^{**}(x, y, \varepsilon) = u_0(x, \eta) + \varepsilon u_1(x, \eta, \varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, \eta, \varepsilon) + z_0^{**}. \quad (5.32)$$

En definiëren

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = - \left\{ -b \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \eta} - e \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{c - \omega^{-1}}{\epsilon} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + g u_0 \right\} \quad (5.33)$$

met randvoorwaarden

$$[u_1]_{\eta=0} = 0 ; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} u_1 = 0. \quad (5.34)$$

Voorts

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = - & \left\{ -b \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial \eta} - e \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{c - \omega^{-1}}{\epsilon} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + g u_1 \right\} \\ & - \left\{ a \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + d \frac{\partial u_0}{\partial x} + f u_0 \right\} \end{aligned} \quad (5.35)$$

met randvoorwaarden

$$[u_2]_{\eta=0} = 0 ; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} u_2 = 0. \quad (5.36)$$

De functies u_1 en u_2 kunnen nu expliciet worden bepaald, maar de uitdrukkingen zijn nogal gecompliceerd, terwijl het voor ons doel voldoende is een aantal eigenschappen van deze functies te kennen. Wij volstaan dus met de algemene vorm van deze functies; deze is als volgt:

$$u_1 = n \left\{ G_0^{(1)}(x, \eta, \epsilon) \cdot \psi(x) + G_1^{(1)}(x, \eta, \epsilon) \frac{d\psi}{dx} \right\} e^{-\omega \eta} \quad (5.37)$$

$$u_2 = n \left\{ G_0^{(2)}(x, \eta, \epsilon) \cdot \psi(x) + G_1^{(2)}(x, \eta, \epsilon) \frac{d\psi}{dx} + G_2^{(2)}(x, \eta, \epsilon) \frac{d^2\psi}{dx^2} \right\} e^{-\omega \eta} \quad (5.38)$$

waarbij de functies $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$ etc. uniform zijn begrensd in het gebied van de variabelen x, η corresponderend met het gebied van de variabelen x, y waarin de coëfficiënten a, b, \dots, g uniform zijn begrensd. In het bijzonder zijn de functies $G_0^{(1)}$, $G_1^{(1)}$ uniform begrensd voor $\epsilon \rightarrow 0$ en voor $\eta \rightarrow 0$. Voorts is $G_1^{(1)} = 0$ in het bijzondere geval dat $b = 0$.

Met deze gegevens kunnen wij het probleem voor de restterm z_0^* analyseren; deze is geformuleerd door

$$\varepsilon \left[a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f \right] z_0^* - \frac{\partial z_0^*}{\partial y} + g z_0^* = -R_0^* \quad (5.39)$$

waarbij

$$R_0^* = \varepsilon^2 \left[-b \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial \eta} - e \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{c - \omega^{-1}}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + g u_2 \right] + \\ + \varepsilon^2 \left[a \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + d \frac{\partial u_1}{\partial x} + f u_1 \right] + \varepsilon^3 \left[a \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + d \frac{\partial u_2}{\partial x} + f u_2 \right]. \quad (5.40)$$

Als in paragraaf 3 moeten wij de mogelijkheid toelaten dat $\psi(x)$, die door de randvoorwaarde is gegeven, lokaal een functie is van de variabele $x/\sqrt{\varepsilon}$. Gebruik makend van resultaten (5.37), (5.38) verkrijgen wij nu de volgende afschattingen:

$$|R_0^*| \leq \sqrt{\varepsilon} C_b \quad \text{als } b \neq 0 \quad (5.41)$$

$$|R_0^*| \leq \varepsilon C_a \quad \text{als } b = 0. \quad (5.42)$$

Wij keren nu terug naar ons randwaarde-probleem en voeren in de grenslaag-functie

$$u_0^* = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2. \quad (5.43)$$

Waarbij u_0 , u_1 en u_2 gedefiniëerd zijn als hierboven aangegeven, terwijl

$$\psi(x) = f_2(x) - f_1(x) - v_0^{(1)} \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, 1 \right) - v_0^{(2)} \left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, 1 \right). \quad (5.44)$$

Schrijf nu de oplossing van het randwaarde-probleem in de vorm

$$\Phi(x, y, \varepsilon) = \phi_0(x) + v_0^{(1)} \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) + v_0^{(2)} \left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y \right) + u_0^* \left(x, \frac{1-y}{\varepsilon} \right) + Z_0. \quad (5.45)$$

Dan volgt voor de restterm Z_0 het volgende probleem.

$$\epsilon \left[a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f \right] Z_0 - \frac{\partial Z_0}{\partial y} + g Z_0 = -\rho_0 \quad (5.46)$$

met de randvoorwaarden

$$Z_0(x, 0) = -u_0^*(x, \frac{1}{\epsilon}) \quad (5.47)$$

$$Z_0(x, 1) = 0 \quad (5.48)$$

$$Z_0(0, y) = -v_0^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, y\right) - u_0^*\left(0, \frac{1-y}{\epsilon}\right) \quad (5.49)$$

$$Z_0(1, y) = -v_0^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, y\right) - u_0^*\left(1, \frac{1-y}{\epsilon}\right). \quad (5.50)$$

Waarbij het rechterlid ρ_0 gegeven is door

$$\rho_0 = \epsilon \bar{R}_0 + \sqrt{\epsilon} R_0^{(1)} + \sqrt{\epsilon} R_0^{(2)} + R_0^* \quad (5.51)$$

$$\bar{R}_0 = \left[a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f \right] \phi_0. \quad (5.52)$$

De termen $R_0^{(1)}$, $R_0^{(2)}$ en R_0^* hebben wij reeds geanalyseerd, met name is

$$R_0^{(1,2)} = R_0 \quad (5.53)$$

waarbij R_0 gedefiniëerd is in verg. (4.11) toegepast op $v_0^{(1)}$, resp. $v_0^{(2)}$. R_0^* was in (5.40) gedefiniëerd en in (5.41), (5.42) afgeschat.

Ten aanzien van \bar{R}_0 merken wij op dat, gezien de definitie van ϕ_0 in verg. (5.9), deze term onafhankelijk is van ϵ en voorts uniform is begrensd.

Ten aanzien van $R_0^{(1,2)}$ hebben wij in paragraaf 4 gevonden dat deze term uniform is begrensd, en dat in het bijzonder als $b = d = 0$, $a(x, y) = a_0(y)$, $g(x, y) = g_0(y)$, geldt $R_0^{(1,2)} = O(\sqrt{\epsilon})$. Tezamen met de afchatting (5.41), (5.42) van R^* hebben wij dus het volgend resultaat:

$$\text{Is } b = d = 0, a(x,y) = a_0(y), g(x,y) = g_0(y) \quad (5.54)$$

$$\text{dan is } |p_0| \leq \varepsilon m_1 \quad (5.55)$$

waarbij m_1 een constante is, onafhankelijk van ε .

Is aan één van de condities (5.54) niet voldaan dan is

$$|p_0| \leq \sqrt{\varepsilon} m_2 \quad (5.56)$$

waarbij m_2 een constante is onafhankelijk van ε .

Rest ons de voorgeschreven randvoorwaarden van Z_0 af te schatten. Gebruik makend van de expliciete uitdrukkingen voor $v_0^{(1,2)}$ en u_0^* vindt men zonder moeite dat op de rand geldt:

$$|Z_0| \leq \varepsilon m_1 \quad \text{als } b = 0 \quad (5.57)$$

$$|Z_0| \leq \sqrt{\varepsilon} m_2 \quad \text{als } b \neq 0. \quad (5.58)$$

Door toepassing van het maximum principe (zie Levinson) en analoog aan paragraaf 3 volgt nu:

$$|Z_0| = o(\varepsilon) \quad (5.59)$$

als aan condities (5.54) is voldaan, terwijl

$$|Z_0| = o(\sqrt{\varepsilon}) \quad (5.60)$$

als aan één van de condities (5.54) niet is voldaan.

Wij merken wederom op dat de hogere benaderingen van de grenslaag-term u_0^* slechts nodig waren om het bewijs van asymptotiek te kunnen leveren. Uit inspectie van formules (5.43), (5.37), (5.38) volgt immers dat

$$\left. \begin{aligned} u_0^* &= u_0 + o(\sqrt{\varepsilon}) & \text{als } b \neq 0 \\ u_0^* &= u_0 + o(\varepsilon) & \text{als } b = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Samenvattend hebben wij dus het volgende resultaat:

De oplossing van het randwaarde-probleem (5.4) ... (5.8) is gegeven door:

$$\phi(x,y,\varepsilon) = \phi_0(x,y) + v_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) + v_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}, y\right) + \psi(x) e^{-\frac{1-y}{\varepsilon}} + Z_0 \quad (5.62)$$

waarbij ϕ_0 de oplossing is van de gereduceerde vergelijking, $v_0^{(1)}$ en $v_0^{(2)}$ zijn parabolische grenslagen en $\psi(x)$ is gedefiniëerd in verg. (5.44). Voorts geldt, uniform in het definitie-gebied

$$Z_0 = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (5.63)$$

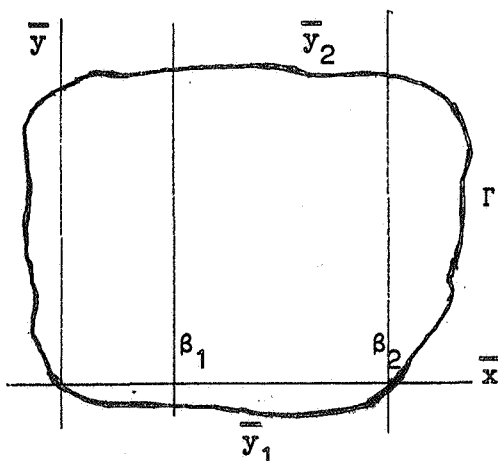
Een speciaal geval doet zich voor indien de coëfficiënten van verg. (5.4) voldoen aan de condities

$$b = 0; \quad d = 0; \quad a(x,y) = a_0(y); \quad g(x,y) = g_0(y) \quad (5.64)$$

In dat geval is, uniform in het definitie-gebied

$$Z_0 = O(\varepsilon). \quad (5.65)$$

6. Bewijs van de stelling van Levinson met behulp van de theorie van parabolische grenslagen



Beschouw weer de vergelijking

$$\varepsilon \left\{ A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + G \phi = H \quad (6.1)$$

met randvoorwaarde

$$\phi = 0 \quad \text{op } \Gamma. \quad (6.2)$$

Een "regular quadrilateral" wordt gedefiniëerd als het deelgebied begrensd door $\bar{y} = \bar{y}_1$, $\bar{y} = \bar{y}_2$ en de karakteristieken $\bar{x} = \beta_1$ en $\bar{x} = \beta_2$. Levinson toonde aan dat in zulk een "regular quadrilateral" de oplossing kan worden geschreven als volgt

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \varepsilon) = U + \xi + z_0 \quad (6.3)$$

waarbij U de oplossing is van de gereduceerde vergelijking die langs $\bar{y} = \bar{y}_1$ aan de randvoorwaarde voldoet, terwijl ξ een grenslaag-functie is die langs $\bar{y} = \bar{y}_2$ voldoet aan

$$\xi = \theta - U \quad \text{op} \quad \bar{y} = \bar{y}_2. \quad (6.4)$$

Ten aanzien van z_0 toonde Levinson aan dat er een constante m_0 kan worden gevonden, onafhankelijk van ε voor ε voldoende klein, zodanig dat

$$|z_0| \leq \sqrt{\varepsilon} m_0 \quad (6.5)$$

uniform in de "regular quadrilateral".

Dunnebier (zie bijdrage tot dit colloquium) toonde aan dat de stelling van Levinson kan worden verscherpt en dat in werkelijkheid $z_0 = O(\varepsilon)$. Prof. de Jager, tenslotte, in zijn bijdrage tot dit colloquium, toonde aan dat het voor de constructie van de grenslaag-term niet nodig was de gecompliceerde methode van Levinson te volgen; deze kan worden geconstrueerd uit de vergelijking in lokale coördinaten, langs de weg die wij in het voorgaande hebben bewandeld. Prof. de Jager gaf eveneens een bijzonder eenvoudig en elegant bewijs van asymptotiek.

Het is amusant te constateren dat ook de theorie van de parabolische grenslagen tot een bijzonder eenvoudig bewijs van de stelling van Levinson leidt. Beschouw hiertoe het probleem voor z_0 ,

$$L_\varepsilon(z_0) = -\varepsilon R_0 \quad (6.6)$$

waarbij L_ε de operator is in het linkerlid van vergelijking (6.1).

Van de functies U en ξ weten wij dat zij uniform zijn begrensd en voorts zodanig dat R_0 uniform is begrensd. Tevens zijn U en ξ zodanig dat

$$z_0 = 0 \quad \text{op} \quad \bar{y} = \bar{y}_1 \quad \text{en} \quad \bar{y} = \bar{y}_2. \quad (6.7)$$

De waarde van z_0 op $\bar{x} = \beta_1$ en $\bar{x} = \beta_2$ is uiteraard onbekend. Schrijf nu

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 = z_0 = \phi - U - \xi \quad \text{op} \quad \bar{x} = \beta_1 \\ \phi_2 = z_0 = \phi - U - \xi \quad \text{op} \quad \bar{x} = \beta_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Uit het maximum-principe (zie colloquium-bijdrage van de Jager) volgt dat de oplossing ϕ van het randwaarde probleem (6.1), (6.2) uniform begrensd is in het gehele gebied omsloten door Γ . Er volgt dus dat ϕ_1 en ϕ_2 uniform zijn begrensd.

Wij kunnen nu, met behulp van de theorie van parabolische grenslagen, het probleem voor z_0 in de regular quadrilateral symbolisch gaan oplossen.

Schrijf eerst

$$z_0 = z_0^{(1)} + z_0^{(2)} \quad (6.9)$$

waarbij

$$L_\epsilon(z_0^{(1)}) = -\epsilon R_0 \quad (6.10)$$

met randvoorwaarden

$$z_0^{(1)} = 0 \quad (6.11)$$

op de randen van de regular quadrilateral.

Voorts

$$L_\epsilon(z_0^{(2)}) = 0 \quad (6.12)$$

met de randvoorwaarden

$$\left. \begin{aligned} z_0^{(2)} &= 0 & \text{op } \bar{y} = \bar{y}_1 & \text{ en } \bar{y} = \bar{y}_2 \\ z_0^{(2)} &= \phi_1 & \text{op } \bar{x} = \beta_1 & \\ z_0^{(2)} &= \phi_2 & \text{op } \bar{x} = \beta_2 & . \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Toepassing van het maximum-principe op het probleem voor $z_0^{(1)}$ levert onmiddellijk

$$z_0^{(1)} = o(\epsilon).$$

Voor $z_0^{(2)}$ hebben wij de expliciete asymptotische oplossing van paragraaf 5:

$$\begin{aligned} z_0^{(2)} &= v_0^{(1)} \left[\frac{\bar{x} - \beta_1}{\sqrt{\epsilon}}, \frac{\bar{y} - \bar{y}_1}{\bar{y}_2 - \bar{y}_1} \right] + v_0^{(2)} \left[\frac{\beta_2 - \bar{x}}{\sqrt{\epsilon}}, \frac{\bar{y} - \bar{y}_1}{\bar{y}_2 - \bar{y}_1} \right] - \\ &- \left[v_0^{(1)} + v_0^{(2)} \right]_{\bar{y}=\bar{y}_2} \cdot \exp \left[-\frac{\omega}{\epsilon} \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}}{\bar{y}_2 - \bar{y}_1} \right] + o(\sqrt{\epsilon}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Waarbij de grootheid ω in paragraaf 5 gedefiniëerd is.

Beschouw nu, binnen de regular quadrilateral, het gebied begrensd door $\bar{y} = \bar{y}_2$, $\bar{y} = \bar{y}_1$; $\bar{x} = \beta_1 + \delta$, $\bar{x} = \beta_2 - \delta$. Uit de eigenschappen van de parabolische grenslagen volgt dat in dit gebied

$$v_0^{(1)} = o(\epsilon^N); \quad v_0^{(2)} = o(\epsilon^N). \quad (6.15)$$

Waarbij N een willekeurig positief getal is.

Wij vinden, bijgevolg,

$$z_0^{(2)} = o(\sqrt{\epsilon}) \quad (6.16)$$

en dus

$$z_0 = o(\sqrt{\epsilon}). \quad (6.17)$$

Waarmee de stelling van Levinson is bewezen.

Om tot de verscherping van de stelling van Levinson te komen zouden wij de theorie van de parabolische grenslagen moeten uitbreiden met de tweede term $\sqrt{\varepsilon} v_1$, zoals in paragraaf 4 aangegeven. Een uitzondering dient nog te worden gemaakt voor het bijzondere geval dat aan condities (5.64) is voldaan. In dit geval, zoals gemakkelijk is na te gaan, levert de voorgaande theorie ook het bewijs voor de verscherpte stelling.

Bibliografie

- Višik, M.I. en Lyusternik, L.A.: "Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter", American Math. Soc. Translations, Series 2, Vol. 20.
- Knowles, J.K. en Messick, R.E.: "On a class of singular Perturbation Problems", Journ. Math. Analysis and Applications, Vol. 9, No. 1, Aug. 1964.
- Levinson, N.: "The first boundary value problem...", Annals of Mathematics, Vol. 51, No. 2, 1950.
- Dunnebier, D.: Bijdrage tot dit colloquium.
- de Jager, E.M.: Bijdrage tot dit colloquium.

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameterDe methode van Poincaré, Lighthill en Kuo

J.F. Frankena

1. Historische ontwikkeling

In 1892 publiceerde Henri Poincaré [2] een aantal studies over hemelmechanica: "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", waarin hij o.a. een stelsel gewone eerste-orde differentiaalvergelijkingen bestudeerde van het type

$$(1.1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \varepsilon f_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Hierin zijn $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ functies van de onafhankelijk variabele t en ε een kleine parameter.

De term $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ stelt het lineaire deel van de vergelijking voor, $f_i(x)$ is een niet-lineaire ("storings"-)term, welke analytisch verondersteld wordt in het beschouwde gebied.

Het doel van Poincaré was om een periodieke oplossing van het gestoorde, niet-lineaire probleem te vinden. Daartoe ging hij uit van de periodieke oplossingen van het ongestoorde probleem, de z.g.n. genererende oplossingen. Deze volgen gemakkelijk m.b.v. de eigenwaarde-vergelijking van de matrix $A = (a_{ij})$, en Poincaré beschouwde deze oplossingen als de nulde orde termen van een machtreeks-ontwikkeling naar ε van de gestoorde oplossingen,

$$(1.2) \quad x_i = x_i^{(0)} + \varepsilon x_i^{(1)} + \varepsilon^2 x_i^{(2)} + \dots = x_i^{(0)} + \beta_i(\varepsilon).$$

Bovendien paste hij hetzelfde procédé toe op de periode $T^{(0)}$ van de ongestoorde oplossing $x^{(0)}$, door ook deze aan "storings" te onderwerpen in de vorm van een machtreeks naar ε ,

$$(1.3) \quad T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots = T^{(0)} + \tau(\varepsilon).$$

De verlangde periodiciteit van de oplossing van het gestoorde probleem komt tot uitdrukking door de conditie

$$(1.4) \quad x_i(T+\tau, \varepsilon) = x_i(0, \varepsilon).$$

In het geval van vergelijkingen van het type (1.1) leidt substitutie van de ontwikkelingen (1.2) en (1.3) onder de periodiciteits- en niet-seculariteits-condities inderdaad tot de gewenste resultaten, t.w. de periode van de gestoorde oplossingen.

Later bleek dat in sommige gevallen, waarin de nulde-orde oplossing een singulariteit binnen het beschouwde interval bezit, deze singulariteit in de hogere-orde oplossingen mede van hogere orde werd, en de machtreeks-ontwikkeling in de buurt van de singulariteit zijn zin verloor.

In 1949 publiceerde Lighthill zijn studie over een reeks van dergelijke vergelijkingen en gaf een methode aan, die naar hij aanvankelijk meende, in al deze gevallen een asymptotiek met uniforme nauwkeurigheid waarborgde. Zijn methode bestond hieruit, dat hij naast de reeds door Poincaré ingevoerde machtreeks-ontwikkeling van de periode ook de onafhankelijk variabele in andere en meer algemene vergelijkingen naar machten van de kleine parameter ε ontwikkelde,

$$(1.5) \quad \begin{cases} t = \tau + \varepsilon t^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 t^{(2)}(\tau) + \dots \\ x_i = x_i^{(0)}(\tau) + \varepsilon x_i^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 x_i^{(2)}(\tau) + \dots \quad (i = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

(Wegens de onafhankelijkheid van x is invoering van een parameter noodzakelijk. Deze parameter wordt later geëlimineerd).

In 1953 behandelde Kuo [4] een stromingsprobleem waarin echter met Lighthill's recept geen uniform geldige asymptotische ontwikkeling was te vinden. Kuo nu voegde de laatste initiaal aan de naam van de onderhavige techniek toe door, zoals we nog zullen zien, de nulde-orde oplossing met behulp van de ons reeds bekende grenslaag-methode te construeren.

De huidige stand van zaken overziende kunnen we de volgende opmerkingen maken:

- 1) De volledige PLK methode, dus ontwikkeling van afhankelijk- en onafhankelijk variabelen naar machtreeksen van ε , benevens zo nodig de grenslaag techniek geeft ons een methode om voor bepaalde klassen van gewone- en partiële differentiaalvergelijkingen met niet-lineaire storingstermen een uniform geldige asymptotische ontwikkeling te construeren. Er zijn ook klassen van problemen die niet met de PLK methode kunnen worden behandeld, en in de gevallen waar dit wel mogelijk is, zijn er vaak ook nog andere methoden beschikbaar.
- 2) De problemen die we zullen behandelen zijn niet-lineair, zulks in tegenstelling tot vele problemen, die hiervoor in dit colloquium aan de orde zijn gekomen. In verband met deze complicatie zal men nog tevergeefs naar wiskundige strengheid zoeken; bewijzen dat de gevonden uitdrukkingen inderdaad asymptotische oplossingen van de differentiaalvergelijkingen zijn heeft de ontwikkeling van de PLK methode nog nauwelijks opgeleverd. Uiteraard is dit een probleem dat in een later stadium de volle aandacht verdient.
- 3) De te behandelen vergelijkingen behoren, het geval van de Blasius-stroming uitgezonderd, tot de klasse I van de reguliere storingsproblemen.

Tenslotte zij opgemerkt dat de meeste informatie in deze voordrachten over de PLK methode afkomstig is uit een artikel van H.S. Tsien: "The Poincaré-Lighthill-Kuo Method", gepubliceerd in "Advances in Applied Mechanics", vol IV, pp. 281-349.

2. Afbakening van het toepasbaarheidsgebied; een poging tot inventarisering

Afgaande op de informatie uit voornoemd artikel van Tsien zullen we in deze paragraaf een overzicht geven van enkele van de voornaamste klassen van problemen, welke tot nu toe al dan niet met succes met de PLK methode zijn behandeld.

Gewone differentiaalvergelijkingen

A. Eerste-orde vergelijkingen

Lighthill [3] beschouwde de volgende differentiaalvergelijking

$$(2.A.1) \quad (x + \varepsilon u) \frac{du}{dx} + q(x)u = r(x).$$

Deze vergelijking, waarin $q(x)$ en $r(x)$ regulier worden verondersteld bij $x = 0$, is een betrekkelijk algemeen voorbeeld waarop de techniek van Lighthill met succes kan worden toegepast. Wasow [5] heeft voor dit eenvoudige geval de geldigheid der asymptotiek bewezen. Zoals zal blijken is het van belang de gevallen $q(0) > 0$, $q(0) = 0$ en $q(0) < 0$ te onderscheiden.

Indien $q(x)$ en/of $r(x)$ singulier zijn in $x = 0$ is de Lighthill methode onbruikbaar; de grenslaag-techniek kan dan gebruikt worden om een oplossing te vinden. Een voorbeeld hiervan is door Carrier [6], [7] onderzocht:

$$(2.A.2) \quad (z^2 + \varepsilon u) \frac{du}{dz} + u = 2z^3 + z^2,$$

of in standaardvorm (2.A.1),

$$(x + \varepsilon u) \frac{du}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} u = (x + \frac{1}{2}\sqrt{x}),$$

zoals na substitutie van $x = z^2$ direct blijkt. Kennelijk voldoen $q(x)$ en $r(x)$ niet aan de eis van regulariteit in de oorsprong.

B. Tweede-orde vergelijkingen met een gewoon singulier punt

Als standaardtype voor deze klasse van vergelijkingen welke met de PLK methode opgelost kunnen worden beschouwen we

$$(2.B.1) \quad (x + \varepsilon \frac{dv}{dx} + \varepsilon av) \frac{d^2v}{dx^2} + q(x) \frac{dv}{dx} + S(x)v = r(x).$$

Het hiermee equivalente systeem van eerste-orde vergelijkingen luidt

$$(2.B.2) \begin{cases} (x + \epsilon u + \epsilon av) \frac{du}{dx} + q(x)u + S(x)v = r(x), \\ \frac{dv}{dx} = u, \end{cases}$$

waarin we onmiddellijk het type (2.A.1) herkennen. De behandeling van vergelijking (2.B.1) verloopt dan ook geheel analoog aan die van (2.A.1) door u , v en x te ontwikkelen naar machten van ϵ .

C. Tweede-orde vergelijkingen met een essentieel singulier punt

Hiervoor haalt Tsien het volgende voorbeeld aan

$$(2.C.1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + u = \epsilon f\left(u, \frac{du}{dx}\right).$$

De nulde-orde vergelijking van de klassieke storingsrekening

$$u = u^{(0)}(x) + \epsilon u^{(1)}(x) + \epsilon^2 u^{(2)}(x) + \dots$$

luidt

$$\frac{d^2 u^{(0)}}{dx^2} + u^{(0)} = 0,$$

met $x = \infty$ als essentieel singulier punt. Het blijkt dat de storingen $u^{(1)}(x)$, $u^{(2)}(x)$, ... zich gedragen als $x e^{ix}$, waardoor de reeks van storingstermen divergeert als $x \rightarrow \infty$. Met behulp van de PLK methode is het mogelijk een oplossing met een eindige oscillatie te vinden, de z.g.n. "limit cycle". Met t i.p.v. x als (tijd-)variabele komt men deze vergelijking tegen bij elektrische of mechanische trillingen met kleine niet-lineariteiten.

Een zeer bekend en belangrijk voorbeeld is de vergelijking van Van der Pol,

$$(2.C.2) \quad \ddot{x} - \epsilon(1 - x^2) \dot{x} + x = 0,$$

welke o.a. zowel met de methode van Lighthill als met de grenslaag-techniek behandeld kan worden.

Voorts behandelt Tsien nog het geval van de compressibele stroming

naar een put, waarbij toepassing van de grenslaag-techniek nodig blijkt. Wegens de omvang van dit probleem moet de behandeling ervan in dit verband achterwege blijven.

Partiële differentiaalvergelijkingen

De PLK methode is reeds veelvuldig toegepast op hyperbolische differentiaalvergelijkingen ([8], [9]), en met minder succes in het probleem van dunne draagvlakken. Wij zullen ons in het kader van dit colloquium speciaal bezig houden met parabolische differentiaalvergelijkingen, en wel uit de theorie der grenslaag-stromingen. Het gaat hier om de reeds eerder ([10]) behandelde Blasius-stroming, d.i. de stroming van een incompressibele visceuze vloeistof langs een half-oneindige plaat. In het bijzonder zullen we hierbij dieper ingaan op het werk van S. Kaplun [11]. Overigens blijken de PLK methode en de parabolische coördinaten van Kaplun voor een eindige plaat aan de voorkant (leading edge) dezelfde asymptotiek, doch aan de achterkant (trailing edge) verschillende resultaten te geven ([13]).

3. De PLK methode voor gewone eerste-orde vergelijkingen

De techniek van Lighthill bestaat in essentie uit de ontwikkeling der afhankelijk- en onafhankelijk variabelen in machtreeksen naar de kleine parameter. Door substitutie van deze ontwikkelingen in de oorspronkelijke vergelijking(en) en samennemen der coëfficiënten van gelijke ε -machten ontstaat een stelsel geneste differentiaalvergelijkingen. Het voordeel van de Lighthill methode boven de klassieke storingsrekening is dat men de (nog onbepaalde) coëfficiënten in de ontwikkeling der onafhankelijk variabelen kan gebruiken om eventuele singulariteiten of seculariteiten in dit stelsel differentiaalvergelijkingen onder controle te houden.

We lichten dit nu eerst toe aan de hand van enkele voorbeelden met één onafhankelijk variabele x . Meestal is men slechts geïnteresseerd in het gebied $x \geq 0$.

De eerste-orde vergelijking

$$(3.1) \quad (x + \varepsilon u) \frac{du}{dx} + u = 0$$

in een speciaal geval van het type (2.A.1). Na deling door $\frac{du}{dx}$ kan men (3.1) gemakkelijk integreren en verkrijgt de oplossing

$$xu = -\frac{\varepsilon}{2} u^2 + c,$$

of, met de randvoorwaarde $u(1) = 1$,

$$(3.2) \quad u = -\frac{x}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{2}{\varepsilon} + 1}.$$

Klassieke storingsrekening

$$u(x) = u^{(0)}(x) + \varepsilon u^{(1)}(x) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x) + \dots,$$

toegepast op (3.1) geeft het stelsel vergelijkingen voor $u^{(n)}$

$$(3.3) \quad \begin{cases} x \frac{du^{(0)}}{dx} + u^{(0)} = 0, \\ x \frac{du^{(1)}}{dx} + u^{(1)} = -u^{(0)} \frac{du^{(0)}}{dx}, \\ x \frac{du^{(2)}}{dx} + u^{(2)} = -u^{(0)} \frac{du^{(1)}}{dx} - u^{(1)} \frac{du^{(0)}}{dx}. \end{cases}$$

Met de randvoorwaarde $u(1) = 1$ is de oplossing van de eerste vergelijking

$$u^{(0)}(x) = \frac{1}{x}.$$

Wegens de nu nodige voorwaarden $u^{(n)}(1) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) vinden we vervolgens voor de hogere ordes

$$u^{(1)}(x) = \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

$$u^{(2)}(x) = \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{1}{4x}\right),$$

etc.,

en we zien dat de pool $x = 0$ in de opvolgende termen van steeds hogere orde wordt. Buiten een omgeving van $x = 0$ is

$$(3.4) \quad u(x) = \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon}{2x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{\varepsilon^2}{2x^3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + O(\varepsilon^3),$$

maar bij $x = 0$ is de fout bij afkappen na de tweede orde veel groter dan $O(\varepsilon^3)$.

Bij ontwikkeling van u en x naar machten van ε ,

$$(3.5) \quad \begin{cases} u = u^{(0)}(\xi) + \varepsilon u^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 u^{(2)}(\xi) + \dots \\ x = \xi + \varepsilon x^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 x^{(2)}(\xi) + \dots, \end{cases}$$

vinden we na substitutie van deze ontwikkelingen in

$$(x + \varepsilon u) \frac{du}{d\xi} + u \frac{dx}{d\xi} = 0$$

en samennemen van gelijke machten van ε

$$(3.6) \quad \begin{cases} \xi \frac{du^{(0)}}{d\xi} + u^{(0)} = 0, \\ \xi \frac{du^{(1)}}{d\xi} + u^{(1)} = - (x^{(1)} + u^{(0)}) \frac{du^{(0)}}{d\xi} - u^{(0)} \frac{dx^{(1)}}{d\xi}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Stellen we $x^{(i)}(1) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$), dus $x = 1$ als $\xi = 1$, dan is $u(1) = 1$ en wordt de oplossing van de eerste vergelijking

$$u^{(0)}(\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

De tweede vergelijking is nu te schrijven als

$$(3.7) \quad \frac{d}{d\xi} (\xi u^{(1)}) = -\frac{1}{\xi} \frac{dx^{(1)}}{d\xi} + \frac{1}{\xi^2} x^{(1)} + \frac{1}{\xi^3}.$$

We benutten nu de vrijheid in de keuze van $x^{(1)}(\xi)$ door te stellen

$$\frac{1}{\xi} \frac{dx^{(1)}}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2} x^{(1)} = \frac{1}{\xi^3},$$

met, zoals boven,

$$x^{(1)}(1) = 0.$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking met randvoorwaarde is

$$x^{(1)}(\xi) = \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right).$$

Aangezien alleen $u^{(1)} \equiv 0$ aan (3.7) met de randvoorwaarde $u^{(1)}(1) = 0$ voldoet hebben we tot zover

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{\xi}, \\ x = \xi + \epsilon \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right). \end{array} \right.$$

Door de voorgaande handelwijze is voorkomen dat $u^{(1)}$ een singulariteit van hogere orde dan die van $u^{(0)}$ zou hebben. Overigens levert eliminatie van de parameter ξ uit (3.8) precies de exacte oplossing (3.2)!

4. Een meer algemene eerste-orde vergelijking

We zullen ons nu bezig houden met de iets meer algemene vergelijking (2.A.1)

$$(x + \epsilon u) \frac{du}{dx} + q(x)u = r(x),$$

waarin de functies $q(x)$ en $r(x)$ regulier bij $x = 0$ worden verondersteld.

Deze vergelijking is, wat de PLK methode betreft, equivalent met de vergelijking

$$[p(x) + \epsilon p_1(x,u) + \dots] \frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) + \epsilon r_1(x,u) + \dots,$$

waarin $p(x)$ voor zekere $x = x_0$ een enkelvoudig nulpunt heeft. Deling door $p(x)/(x - x_0)$ en verschuiving van de oorsprong naar $x = x_0$ levert een kopterm $x \frac{du}{dx}$, en deze vergelijking blijkt van het type (2.A.1) te zijn, afgezien van termen van orde ϵ en hoger in x en u . In essentie levert (2.A.1) bij toepassing van de PLK methode reeds de mogelijkheden en moeilijkheden welke eveneens optreden bij gewone differentiaalvergelijkingen van hogere orde, en bij partiële differentiaalvergelijkingen.

De vergelijking (2.A.1) heeft een lijn essentiële singuliere punten $x + \epsilon u = 0$ in het (u,x) -vlak. Aangezien i.h.a. $r(x) - q(x)u \neq 0$ is op deze lijn zal de oplossing $u(x)$ van (2.A.1) aldaar een verticale helling hebben. Aangezien in het snijpunt van deze oplossing met de lijn $x + \epsilon u = 0$ (dat alleen eindig is voor de onderste oplossing in fig. 1) $u(x)$ eindig is, zal het snijpunt een vertakkingspunt zijn.

N.B. Op de betekenis van de twee in fig. 1 geschetste oplossingen komen we nog nader terug. Het geval dat $\epsilon < 0$ gaat door de overgang van u op $-u$ als afhankelijk variabele in het geval $\epsilon > 0$ over.

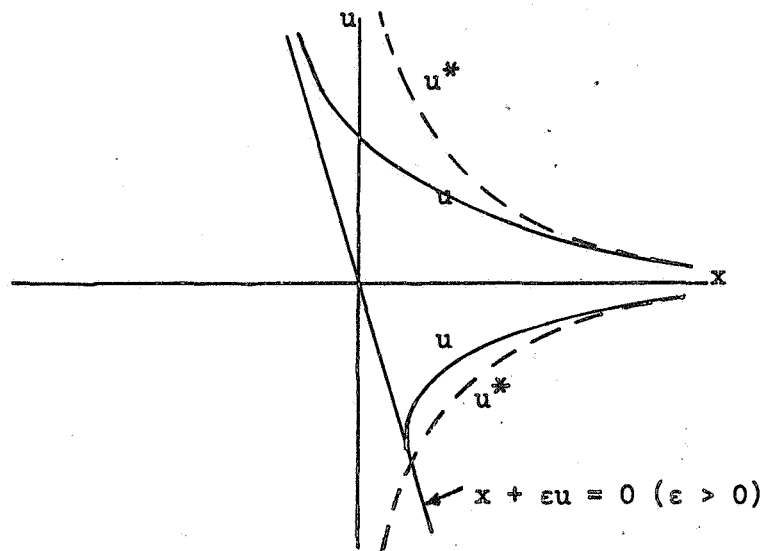


fig. 1

Bij toepassing van klassieke storingsrekening zal de nulde-orde oplossing, en dientengevolge ook de gehele gestoorde oplossing, onbegrensd zijn voor $x \rightarrow 0$, aangezien het singuliere gedrag $\frac{du^{(0)}}{dx} \rightarrow \infty$ nu op de u-as i.p.v. op de lijn $x + \epsilon u = 0$ plaats vindt. Deze afwijking van de werkelijke oplossing is klassiek niet meer te corrigeren. Om deze moeilijkheden te vermijden voeren we de Lighthill-ontwikkelingen (3.5) in

$$\begin{cases} u = u^{(0)}(\xi) + \epsilon u^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 u^{(2)}(\xi) + \dots, \\ x = \xi + \epsilon x^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 x^{(2)}(\xi) + \dots. \end{cases}$$

Vatten we de tweede reeks op als $x = \xi + \Delta\xi$ en ontwikkelen we $q(x)$ en $r(x)$ in Taylor-reeksen naar $\Delta\xi$, dan gaat (2.A.1) over in

$$(4.1) \begin{cases} \left\{ (\xi + \epsilon x^{(1)} + \epsilon^2 x^{(2)} + \dots) + (\epsilon u^{(0)} + \epsilon^2 u^{(1)} + \dots) \right\} \cdot \\ \cdot (u^{(0)'} + \epsilon u^{(1)'} + \epsilon^2 u^{(2)'} + \dots) = (1 + \epsilon x^{(1)'} + \epsilon^2 x^{(2)'} + \dots) \cdot \\ \cdot \left\{ (r + \epsilon x^{(1)} r' + \epsilon^2 x^{(2)} r' + \frac{1}{2} \epsilon^2 x^{(1)2} r'' + \dots) - \right. \\ \left. - (q + \epsilon x^{(1)} q' + \epsilon^2 x^{(2)} q' + \frac{1}{2} \epsilon^2 x^{(1)2} q'' + \dots) \right\} \cdot \\ \cdot (u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots) \cdot \end{cases}$$

De nulde-orde vergelijking

$$\xi u^{(0)'}(\xi) + q(\xi) u^{(0)}(\xi) = r(\xi)$$

heeft als oplossing

$$u^{(0)}(\xi) = \exp\left(-\int \frac{q d\xi}{\xi}\right) \left[\int \frac{r}{\xi} \exp\left(\int \frac{q d\xi}{\xi}\right) d\xi + c \right].$$

Wegens de regulariteit van $q(x)$ is $q_0 = q(0)$ eindig en

$\exp \int \frac{q d\xi}{\xi} = \xi^{q_0} R(\xi)$, waar $R(\xi)$ evenals verderop een in $\xi = 0$ reguliere functie voorstelt. Ook $r(\xi)$ is regulier in $\xi = 0$ en een eenvoudige beschouwing leert dat

$$(4.2) \quad u^{(0)}(\xi) = R(\xi) + O(\xi^{-q_0}) \quad \text{als } \xi \rightarrow 0,$$

en als q_0 een niet-positief geheel getal is,

$$(4.3) \quad u^{(0)}(\xi) = R(\xi) + O(\xi^{-q_0} \log \xi) \quad \text{als } \xi \rightarrow 0.$$

Uit (4.1) volgt voor de eerste storing $u^{(1)}(\xi)$ de differentiaalvergelijking

$$(4.4) \quad \frac{d}{d\xi} \left[u^{(1)}(\xi) \exp \int \frac{q d\xi}{\xi} \right] = \frac{1}{\xi} \left[(r - qu^{(0)})x^{(1)'} + (r' - q'u^{(0)} - u^{(0)''})x^{(1)} - u^{(0)'} u^{(0)'} \right] \cdot \exp \int \frac{q d\xi}{\xi}.$$

Klassieke storingsrekening zou nu de volgende resultaten geven:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(1)} \equiv 0, \\ u^{(1)}(\xi) = R(\xi) + O(\xi^{-q_0-1}) + O(\xi^{-2q_0-1}) \quad \text{als } \xi \rightarrow 0, q_0 \neq 0, -1, -2, \dots \\ u^{(1)}(\xi) = R(\xi) + O(\xi^{-q_0-1} \log \xi) \quad \text{als } \xi \rightarrow 0, q_0 \text{ niet positief geheel,} \\ \varepsilon \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} = O(\varepsilon \xi^{-q_0-1}) \quad \text{als } \xi \rightarrow 0, \text{ evenals voor hogere-orde termen,} \\ \varepsilon \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} = O(\varepsilon \xi^{-1}) \quad \text{als } \xi \rightarrow 0 \text{ en } q_0 \leq 0, \text{ evenals voor hogere-orde termen,} \end{array} \right.$$

zodat de reeks divergeert voor $\xi \rightarrow 0$. De "truc" van Lighthill is nu $x^{(1)}$ zo te bepalen dat

$$\left[(r - qu^{(0)})x^{(1)'} + (r' - q'u^{(0)} - u^{(0)''})x^{(1)} - u^{(0)'} u^{(0)'} \right] = R(\xi) + O(\xi^{-q_0+1}),$$

waarbij onderscheid moet worden gemaakt tussen de gevallen $q_0 > 0$, $q_0 = 0$ en $q_0 < 0$.

5. De drie gevallen $q_0 > 0$, $q_0 = 0$ en $q_0 < 0$

$q_0 > 0$

Aangezien de singuliere term in $u^{(0)}(\xi)$ de vorm $A\xi^{-q_0}$ heeft, waarbij A aangepast is aan de randvoorwaarde, zijn de termen

$$-q_0 A \xi^{-q_0} x^{(1)} + q_0 A \xi^{-q_0-1} x^{(1)} + A^2 q_0 \xi^{-2q_0-1}$$

in het rechterlid van (4.4) voor $\xi \rightarrow 0$ het meest "storend". Nemen we voor kleine waarden van ξ , $x^{(1)} \approx -A\xi^{-q_0}/(q_0 + 1)$, dan is $u^{(1)}(\xi) = O(\xi^{-2q_0})$. Herhaling van dit procédé voor de hogere-orde vergelijkingen leidt tot de volgende resultaten voor $\xi \rightarrow 0$

$$(5.1) \quad \begin{cases} u = A\xi^{-q_0} + \varepsilon O(\xi^{-2q_0}) + \varepsilon^2 O(\xi^{-3q_0}) + \varepsilon^3 O(\xi^{-4q_0}) + \dots \\ x = \xi + \varepsilon \left(-\frac{A\xi^{-q_0}}{q_0+1} + \dots \right) + \varepsilon^2 O(\xi^{-2q_0}) + \varepsilon^3 O(\xi^{-3q_0}) + \dots \end{cases}$$

We beschouwen eerst het geval $A > 0$ (fig. 1, bovenste oplossing $u(x)$). Uit de laatste ontwikkeling blijkt dat de "klassieke" singulariteit $x = 0$ correspondeert met $\xi \approx \varepsilon^{1/(q_0+1)}$. Bij $x = 0$ is de verhouding tussen opvolgende termen van de reeksen (5.1) van de orde $\varepsilon^{q_0/(q_0+1)}$. Voor ε voldoende klein convergeren de reeksen dus bij $x = 0$, hetgeen bereikt is door de coëfficiënten $x^{(j)}(\xi)$ zo aan te passen dat de singulariteiten in de reeksen voor u en x analoog zijn.

Voor $A < 0$ (fig. 1, onderste oplossing) vinden we een reëel vertakkingspunt vóór $x = 0$, in eerste benadering gegeven door

$$(5.2) \quad \xi \approx \left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1} \right)^{1/(q_0+1)}, \quad x \approx \left(1 + \frac{1}{q_0} \right) \left(-\frac{\varepsilon A q_0}{q_0+1} \right)^{1/(q_0+1)}.$$

$$\underline{q_0 = 0}$$

Uitgaande van formule (4.4) vindt men voor $\xi \rightarrow 0$

$$u^{(j)} = O(\log^{2j+1} \xi) \quad \text{en} \quad x^{(j)} = O(\log^{2j-1} \xi).$$

Het vertakkingspunt vindt men weer uit $x + \epsilon u = 0$,

$$x = -\epsilon r_0 \log(\epsilon r_0) - \epsilon B + O(\epsilon^3 \log^3 \epsilon),$$

en is > 0 voor kleine ϵ als $r_0 \equiv r(0) \geq 0$. Voor $r_0 < 0$ is er geen reëel vertakkingspunt. De convergentiestraal der reeksoplossing is ongeveer $\epsilon^{-1} \log^{-2} \epsilon$.

$$\underline{q_0 < 0}$$

In dit geval is de oplossing volgens de PLK methode niet altijd convergent bij $x = 0$, zoals hierna zal blijken. Bij gebruik van de klassieke methode levert de term $u^{(0)} u^{(0)'}_v$ in het rechterlid van (4.4) de bijdrage $u^{(1)} \approx O(\xi^{-2q_0-1})$ op voor $\xi \rightarrow 0$. Door $x^{(1)}$ en de volgende $x^{(i)}$'s constant te nemen kan men deze singulariteit elimineren. Speciaal kiest men $x^{(1)} = -u^{(0)}(0)$ en

$$(5.3) \quad x = \xi + \alpha, \quad u = v + \beta,$$

met de voorwaarden

$$(5.4) \quad \alpha + \epsilon\beta = 0, \quad q(\alpha)\beta = r(\alpha),$$

waaruit $\alpha = \alpha(\epsilon)$ en $\beta = \beta(\epsilon)$ bepaald worden. Door deze voorwaarden krijgt de vergelijking (2.A.1) de vorm

$$(5.5) \quad (\xi + \epsilon v) \frac{dv}{d\xi} + q(\xi)v = r(\xi), \quad r_0 = r(0) = 0,$$

waarin de oorsprong $\xi = v = 0$ een knooppunt is. Lighthill heeft bewezen dat voor $q_0 \leq -1$ met klassieke storingsrekening

$$(5.6) \quad v = v^{(0)}(\xi) + \epsilon v^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 v^{(2)}(\xi) + \dots$$

de tot dicht bij $\xi = 0$ convergente ontwikkeling bestaat

$$(5.7) \quad v^{(j)}(\xi) = \xi R(\xi) + O(\xi^{-q_0} \log^{vj+\mu} \xi),$$

waarin

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{als } q_0 \text{ negatief geheel,} \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

en

$$v = \begin{cases} 2 & \text{als } q_0 = -1, \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Het blijkt dat de convergentiestraal van de reeks (5.6) van de grootteorde $\exp(-\text{const.}/\varepsilon^{1/\nu})$ is, zodat een gebied van $x = 0$ tot iets meer dan $x = \alpha$ niet bereikt kan worden, hetgeen echter in sommige gevallen geen bezwaar is. Voor $0 > q_0 > -1$ is het nodig ook de onafhankelijk variabele x in de vergelijking van de vorm (5.5) te ontwikkelen.

Voor $\xi \rightarrow 0$ verkrijgt men

$$(5.8) \quad x^{(j)}(\xi) = O(\xi^{-q_0} \log^{j-1} \xi), \quad u^{(j)}(\xi) = O(\xi^{-q_0} \log^j \xi),$$

op de manier zoals die in het geval $q_0 > 0$ gevolgd is. Wat de convergentiestraal betreft kunnen we hetzelfde opmerken als voor $q_0 \leq -1$, waarbij weer vaak een vertakkingspunt vóór $\xi = 0$ er voor zorgt dat het punt $\xi = 0$ (of $x = \alpha$) niet bereikt behoeft te worden.

6. Andere gewone differentiaalvergelijkingen

Wat de gewone eerste-orde vergelijkingen betreft behandelt Tsien nog het type

$$(6.1) \quad (z^2 + \varepsilon u) \frac{du}{dz} + u = 2z^3 + z^2,$$

of, met $z^2 = x$,

$$(6.2) \quad (x + \varepsilon u) \frac{du}{dx} + \frac{u}{2\sqrt{x}} = x + \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

waar $q(x) = (2\sqrt{x})^{-1}$ en $r(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ kennelijk niet aan de regulariteit-eisen voldoen. Deze en dergelijke gevallen kunnen echter met de grenslaag-methode behandeld worden (Carrier [6], [7]).

In verband met het hiervóór behandelde is vooral de tweede-orde vergelijking van het type

$$(6.3) \quad (x + \varepsilon \frac{dv}{dx} + \varepsilon v) \frac{d^2v}{dx^2} + q(x) \frac{dv}{dx} + s(x)v = r(x)$$

interessant, want deze kan geschreven worden als het simultane stelsel

$$(6.4) \quad \begin{cases} (x + \epsilon u + \epsilon av) \frac{du}{dx} + q(x)u + s(x)v = r(x), \\ \frac{dv}{dx} = u, \end{cases}$$

waarin men het type (2.A.1) herkent. Het vlak $x + \epsilon u + \epsilon av = 0$ in de (x, u, v) -ruimte is singulier voor de vergelijking. De Lighthill-ontwikkelingen

$$(6.5) \quad \begin{cases} x = \xi + \epsilon x^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 x^{(2)}(\xi) + \dots, \\ u = u^{(0)}(\xi) + \epsilon u^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 u^{(2)}(\xi) + \dots, \\ v = v^{(0)}(\xi) + \epsilon v^{(1)}(\xi) + \epsilon^2 v^{(2)}(\xi) + \dots, \end{cases}$$

leiden tot een behandeling welke volkomen analoog is aan die van de eerste-orde vergelijkingen.

Ook op vergelijkingen van het type

$$(6.6) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + u = \epsilon f\left(u, \frac{du}{dx}\right)$$

kan men de Lighthill-methode toepassen. Neemt men als ongestoorde oplossing $u^{(0)}(\xi) = A \sin \xi$ en past men op $f\left(u, \frac{du}{dx}\right)$ een Fourier-ontwikkeling

$$f(A \sin x, A \cos x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

toe, dan treden in de vergelijking voor $u^{(1)}(\xi)$ z.g.n. seculaire termen op:

$$\begin{aligned} u^{(1)''} + u^{(1)} &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \xi + b_1 \sin \xi - 2A x^{(1)'} \sin \xi + A x^{(1)''} \cos \xi + \\ &+ \sum_2^{\infty} (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi), \end{aligned}$$

welke door de keuze

$$x^{(1)} = \frac{b_1}{2A} \xi \quad \text{dus} \quad x^{(1)''} = 0$$

desnoods met tevens $a_1 = 0$ vervallen. Op deze wijze kan men de periode van de stationnaire oplossing (de z.g.n. "limit cycle") berekenen als machtreeks naar ϵ . Overigens zijn voor dit type problemen speciale methoden ontwikkeld (Van der Pol, Krylow en Bogoliubow), welke zeer nauw verwant zijn aan die van Lighthill. Waarschijnlijk zullen deze problemen en hun oplossingsmethoden later in dit colloquium nog ter sprake komen, reden waarom wij er hier niet verder op ingaan.

Opmerking

Het steeds weerkerende probleem in de vele in dit colloquium behandelde gevallen was het vinden van een "uniforme" asymptotiek in het van belang zijnde gebied (bij ons bijna altijd $x \geq 0$). We zagen aan de hand van b.v. de vergelijkingen

$$(x + \epsilon u) \frac{du}{dx} + u = 0,$$

$$(x + \epsilon u) \frac{du}{dx} + g(x)u = r(x)$$

en
$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = \epsilon f(u, \frac{du}{dx})$$

dat de klassieke storingsrekening deze uniformiteit beslist niet verschaft. Vervolgens zagen we, dat de methode van Lighthill in de drie bovengenoemde gevallen niet alleen een constructie van de asymptotische oplossing (tenminste, dat hopen we!) gaf, maar bovendien dat deze asymptotische uitdrukking uniform geldig was in het hele gebied $x \geq 0$, of de variant daarvan welke fysisch vereist was. Vandaar het optimisme van Lighthill. We zullen echter zien dat het in het geval van de grenslaagstroming nodig zal zijn de alternatieve techniek van het gebruik van lokale coördinaten te hulp te roepen bij de constructie van de nulde-orde oplossing.

desnoods met tevens $a_1 = 0$ vervallen. Op deze wijze kan men de periode van de stationnaire oplossing (de z.g.n. "limit cycle") berekenen als machtreeks naar ϵ . Overigens zijn voor dit type problemen speciale methoden ontwikkeld (Van der Pol, Krylow en Bogoliubov), welke zeer nauw verwant zijn aan die van Lighthill. Waarschijnlijk zullen deze problemen en hun oplossingsmethoden later in dit colloquium nog ter sprake komen, reden waarom wij er hier niet verder op ingaan.

Opmerking

Het steeds weerkerende probleem in de vele in dit colloquium behandelde gevallen was het vinden van een "uniforme" asymptotiek in het van belang zijnde gebied (bij ons bijna altijd $x \geq 0$). We zagen aan de hand van b.v. de vergelijkingen

$$(x + \epsilon u) \frac{du}{dx} + u = 0,$$

$$(x + \epsilon u) \frac{du}{dx} + g(x)u = r(x)$$

en

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = \epsilon f(u, \frac{du}{dx})$$

dat de klassieke storingsrekening deze uniformiteit beslist niet verschaft. Vervolgens zagen we, dat de methode van Lighthill in de drie bovengenoemde gevallen niet alleen een constructie van de asymptotische oplossing (tenminste, dat hopen we!) gaf, maar bovendien dat deze asymptotische uitdrukking uniform geldig was in het hele gebied $x \geq 0$, of de variant daarvan welke fysisch vereist was. Vandaar het optimisme van Lighthill. We zullen echter zien dat het in het geval van de grenslaagstroming nodig zal zijn de alternatieve techniek van het gebruik van lokale coördinaten te hulp te roepen bij de constructie van de nulde-orde oplossing.

7. Nogmaals: asymptotische theorie van visceuze stroming

Reeds eerder in dit colloquium kwam de asymptotische theorie van visceuze stroming ter sprake (p.25 e.v.). Hierbij werd m.b.v. lokale coördinaten een oplossing Φ_0 van de gereduceerde vergelijking geconstrueerd, zodanig dat de totale oplossing geschreven kon worden als

$$\Phi(x,y,\epsilon) = \Phi_0(y) + O[g_1(\epsilon)].$$

Er zijn echter nog vele andere methoden om grenslaagproblemen op te lossen. We zullen hiervan twee bespreken: één, meer klassieke, van Kuo [4] en een moderne en zeer effectieve methode welke ontwikkeld is door Kaplun [11].

We roepen eerst nog enige belangrijke zaken betreffende de grenslaagstroming in de herinnering terug, waarbij we terwille van de aansluiting bij het werk van Kuo een iets andere weg bewandelen dan eerder in dit colloquium is geschied.

Het snelheidsveld van een stationaire, incompressibele en visceuze stroming wordt beheerst door de Navier-Stokes vergelijkingen en de continuïteitsvergelijking

$$(7.1) \quad \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nu \nabla^2 \vec{v} - \rho^{-1} \nabla p,$$

$$(7.2) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

waarin $\vec{v}(u,v)$ de (twee-dimensionale) snelheidsvector is, ν de kinematische viscositeit, ρ de (constante) dichtheid en p de druk. Om de randvoorwaarden op te stellen zullen we eerst ons fysische probleem specificeren. Beschouw een "oneindig dunne" plaat ter lengte L , welke in de lengterichting in een laminaire stroming is geplaatst. We brengen een rechthoekig coördinatenstelsel (\bar{x}, \bar{y}) aan met de oorsprong in het begin van de plaat en de positieve \bar{x} -as er langs (fig. 2). Zij de snelheid van de ongestoorde stroming U_∞ , de druk \bar{p}_∞ .

Volgens de klassieke grenslaagtheorie voert men nu dimensieloze grenslaagvariabelen in door

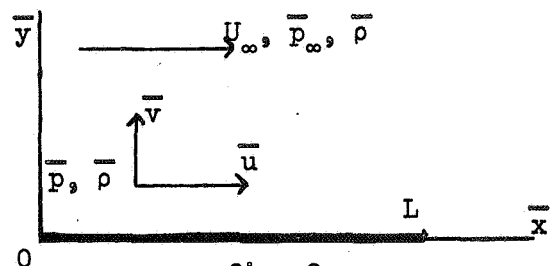


fig. 2

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \bar{u}/U_{\infty}, \quad v = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{v}/U_{\infty}) = \frac{1}{\varepsilon} V, \\ x = \bar{x}/L, \quad y = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{y}/L) = \frac{1}{\varepsilon} Y, \\ p = (\bar{p} - \bar{p}_{\infty})/\bar{\rho} U_{\infty}^2. \end{array} \right.$$

Hierin is de kleine parameter ε met het Reynoldsgetal Re verbonden door de betrekking

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{Re} \frac{d}{U_{\infty} L}.$$

De randcondities welke we zullen stellen zijn

$$(7.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x,0) = v(x,0) = 0, \\ u \rightarrow 1, \text{ als } y \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Naar aanleiding van de continuïteitsvergelijking definiëren we de z.g. stroomfunctie ψ door $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. De vergelijkingen (7.1) en (7.2) zien er, in termen van grenslaagvariabelen geschreven, als volgt uit

$$(7.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2}, \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \varepsilon^4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}. \end{array} \right.$$

Kuo past nu op ψ en p de klassieke ontwikkelingen naar ε toe

$$(7.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(x,y) = \psi^{(0)}(x,y) + \varepsilon \psi^{(1)}(x,y) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(x,y) + \dots, \\ p(x,y) = \varepsilon p^{(1)}(x,y) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x,y) + \dots, \end{array} \right.$$

waarbij de constante druk in de niet-visceuze stroming op nul gesteld is. De stroomfunctie $\psi^{(0)}$ van de niet-visceuze stroming volgt na substitutie van (7.6) in (7.5) uit de grenslaagvergelijking

$$(7.7) \quad \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(0)}}{\partial y^3} = 0.$$

Zoals reeds werd uiteengezet (p. 29) bestaan er oplossingen van (7.7) van de vorm

$$(7.8) \quad \psi^{(0)}(x,y) = \sqrt{x} f_0(\zeta), \quad \zeta = \frac{y}{\sqrt{x}},$$

waarin $f_0(\zeta)$ een oplossing is van de gewone differentiaalvergelijking

$$(7.9) \quad 2f_0'''' + f_0 f_0'' = 0$$

met de randvoorwaarden

$$(7.10) \quad \begin{cases} f_0(0) = f_0'(0) = 0, \\ f_0'(\zeta) \rightarrow 1 \text{ als } \zeta \rightarrow \infty. \end{cases}$$

De grootheden $\psi^{(1)}$ en $p^{(1)}$ blijken te moeten voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$(7.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} = \\ = - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi^{(1)}}{\partial y^3}, \\ \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

De oplossing van (7.7) en (7.11) zullen we in de volgende paragraaf nader uitwerken.

Opmerking. De overgang van de Navier-Stokes vergelijkingen op de grenslaagvergelijking is mathematisch gezien geenszins een triviale kwestie. Men zie b.v. P.C. Fife: "Towards the validity of Prandtl's approximation in a Boundary Layer" ([14]), lettend op de aanhef van deze titel; en ook de opmerking aan het einde van §7 op pag. 30 van deze syllabus.

8. De nulde- en eerste-orde oplossingen

Voor de oplossing $f_0(\zeta)$ van (7.9) heeft men de volgende uitdrukkingen gevonden voor kleine resp. grote waarden van ζ

$$(8.1) \quad f_0(\zeta) = \frac{\sigma}{2!} \zeta^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sigma^2}{5!} \zeta^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{11\sigma^3}{8!} \zeta^8 + \dots, \quad \sigma = 0.332,$$

en

$$(8.2) \quad f_0(\zeta) = \zeta - 1.73 + 0.231 \int_{\infty}^{\zeta} d\zeta' \int_{\infty}^{\zeta'} e^{-(\zeta''-1.73)^2/4} d\zeta''.$$

Voor alle waarden van y is $\psi^{(0)}$ dus singulier in $x = 0$.

Men kan aantonen dat de eerste-orde oplossing $\psi^{(1)}$ ook uit de klassieke grenslaagtheorie m.b.v. (7.11) berekend mag worden. Daarvoor is een betrekking van de snelheden nodig. M.b.v. (8.2) en

$$v = \epsilon v, \quad v^{(0)} = -\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\zeta f_0'(\zeta) - f_0(\zeta) \right]$$

blijkt voor $\zeta \rightarrow \infty$ en $0 \leq x \leq 1$

$$v = v_0 \epsilon x^{-\frac{1}{2}}, \quad v_0 = 0.865.$$

Voor $x > 1$ blijkt $v = 0$ een goede benadering te zijn, zodat

$$(8.3) \quad v = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ v_0 \epsilon x^{-\frac{1}{2}} & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1). \end{cases}$$

Deze waarden van de verticale snelheidscomponent gebruiken we als randvoorwaarden voor het probleem (7.11) ($\zeta \rightarrow \infty$ voor de grenslaag correspondeert met $y \rightarrow 0$ voor de potentiaalstroming).

Na invoering van de volgende ontwikkeling van de uitwendige stroming

$$\begin{cases} u = 1 + \epsilon U^{(1)} \left(\frac{\bar{x}}{L}, \frac{\bar{y}}{L} \right) + \dots \\ v = \epsilon V^{(1)} \left(\frac{\bar{x}}{L}, \frac{\bar{y}}{L} \right) + \dots \end{cases}$$

is het probleem oplosbaar in de vorm

$$(8.4) \quad U^{(1)} - iV^{(1)} = \frac{v_0}{\pi} \int_0^1 \frac{dw}{(z-w)\sqrt{w}} = -\frac{iv_0}{\sqrt{z}} + \frac{v_0}{\pi\sqrt{z}} \log \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}},$$

met $z = x + iy$.

Uit de vergelijking van Bernoulli

$$\bar{p} - \bar{p}_\infty = \frac{1}{2} \bar{p} \{U_\infty^2 - (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\}$$

volgt gemakkelijk

$$(8.5) \quad p^{(1)}(x) = -U^{(1)}(x,0) = \frac{2v_0}{\pi} \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + \dots\right),$$

zodat de vergelijking voor $\psi^{(1)}$ wordt

$$(8.6) \quad \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial y^2} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial^3 \psi^{(1)}}{\partial y^3} = \\ = \frac{dU^{(1)}(x,0)}{dx} = \frac{2v_0}{\pi} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}x + \dots\right).$$

Door de vorm van $\psi^{(0)}$ en $U^{(1)}(x,0)$ wordt gesuggereerd

$$(8.7) \quad \psi^{(1)} = \frac{2v_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2n-1} f_n(\zeta),$$

hetgeen na substitutie in (8.7) leidt tot een derde-orde gewone differentiaalvergelijking voor de functies $f_n(\zeta)$.

Een gedetailleerde beschouwing van $\psi^{(0)}$ en $\psi^{(1)}$ leert dat de singulariteiten in beider uitdrukkingen voor $x = 0$ van dezelfde orde zijn. Men kan bewijzen dat dit met $\psi^{(2)}$ niet meer het geval is; met de voorgaande methode zullen de singulariteiten in hogere-orde oplossingen van steeds hogere orde worden. Nu is dit feit, wat de stroomfunctie ψ betreft, vaak niet van belang: men kan dan in de praktijk reeds met de oplossing tot op orde ϵ volstaan. Voor de berekening van de schuifspanning aan het oppervlak van de plaat is het echter soms van belang, een goede volgende benadering te hebben. Dit probleem nu behandelde Kuo met de techniek van Lighthill, om zodoende de mate van singulariteit te "bevriezen".

9. De tweede-orde oplossing

Volgens de methode van Lighthill zullen we nu trachten, door middel van een geschikte coördinatentransformatie $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ een goede tweede-orde storingsfunctie $\psi^{(2)}$ te vinden. We weten reeds dat $\psi^{(0)}$ en $\psi^{(1)}$ dezelfde mate van singulariteit bezitten; het is daarom niet nodig een eerste-orde storing van x op te nemen. Aangezien tevens de singulariteit alleen m.b.t. x optreedt, behoeven we y in het geheel niet te veranderen. De volgende coördinatentransformatie lijkt daarom plausibel

$$(9.1) \quad \begin{cases} x = \xi + \varepsilon^2 x^{(2)}(\xi, \eta) + \dots, \\ y = \eta. \end{cases}$$

De differentiaties naar x en y gaan over in

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

en

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \varepsilon^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

waarna $\psi^{(2)}$ en $p^{(2)}$ bepaald moeten worden uit

$$(9.2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 \psi^{(2)}}{\partial \eta^3} = \\ & = \left[\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \xi \partial \eta} \right] + \left[- \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \psi^{(0)}}{\partial \eta \partial \xi^2} + \frac{\partial^3 \psi^{(0)}}{\partial \eta^3} \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \xi} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial^3 \psi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} \right] \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 x^{(2)}}{\partial \eta^3} \end{aligned} \right.$$

en

$$(9.3) \quad \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^3 \psi^{(0)}}{\partial \eta^3} = 0.$$

I.v.m. de singulariteiten van $\psi^{(0)}$ en $\psi^{(1)}$ is toelaatbaar dat het rechterlid van (9.2) $O(\xi^{-1})$ is. De tweede term tussen vierkante haken blijkt echter $O(\xi^{-2})$ te zijn als $\xi \rightarrow 0$. Deze groep van termen moet nu op passende wijze gecorrigeerd worden d.m.v. een geschikte keuze van $x^{(2)}$.

De oplossing van (9.3) kan geschreven worden in de vorm

$$p^{(2)}(\xi, \eta) = p_2(\xi) + P^{(2)}(\xi, \eta),$$

met

$$P^{(2)}(\xi, \eta) = \int_0^\eta \left\{ \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^3 \psi^{(0)}}{\partial \xi \partial \eta^2} \right\} d\eta',$$

terwijl $p_2(\xi)$ uit de tweede-orde potentiaalstroming bepaald wordt.

De term $\frac{\partial p_2}{\partial \xi}$ kan voor $\xi \rightarrow 0$ verwaarloosd worden t.o.v. $\frac{\partial P^{(2)}}{\partial \xi}$. Uit de vergelijking die men zodoende voor $x^{(2)}$ verkrijgt blijkt m.b.v. de aanname $\psi^{(0)} = \sqrt{\xi} f_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\right)$ dat $x^{(2)}$ een functie is van $\zeta = \eta \xi^{-\frac{1}{2}}$, $x^{(2)} = g_2(\zeta)$, waarbij $g_2(\zeta)$ een oplossing is van een gewone differentiaalvergelijking.

Voor kleine waarden van ζ kan men afleiden

$$(9.4) \quad g_2(\zeta) = -\frac{1}{2 \cdot 2!} \zeta^2 + \frac{\sigma}{14 \cdot 5!} \zeta^5 - \frac{7\sigma^2}{30 \cdot 8!} \zeta^8 + \dots, \text{ waarin weer } \sigma = 0.332,$$

terwijl voor $\zeta \rightarrow \infty$,

$$(9.5) \quad g_2(\zeta) = -\frac{1}{4} \left(\zeta - \frac{1.73}{2} \right)^2 + C_1 + C_2 \exp -\frac{1}{4} (\zeta - 1.73)^2 + \\ + C_3 \exp -\frac{1}{4} (\zeta - 1.73)^2 \int_{\zeta_1}^{(\zeta - 1.73)/\sqrt{2}} \exp \frac{t^2}{4} dt.$$

De integratieconstanten volgen uit de aansluiting van (9.5) met (9.4) bij b.v. $\zeta_1 = 3$ (de "patching technique"). Met behulp van de gevonden uitdrukking van $x^{(2)}$ zou men nu $\psi^{(2)}(\xi, \eta)$ uit (9.2) kunnen bepalen en daarmee een tweede-orde correctie aan de uitdrukking voor de weerstand op de plaat kunnen toevoegen.

Van mathematisch standpunt bezien is het echter interessanter om ten volle profijt te trekken van de transformatie (9.1): de nulde-orde oplossing $\psi^{(0)}$ kan nl. nog verbeterd worden, en wel z6 dat de singulariteit in de snelheidscomponent V voor $x \rightarrow 0$ althans voor $y \neq 0$ opgeheven wordt.

10. Verbetering van de nulde-orde oplossing

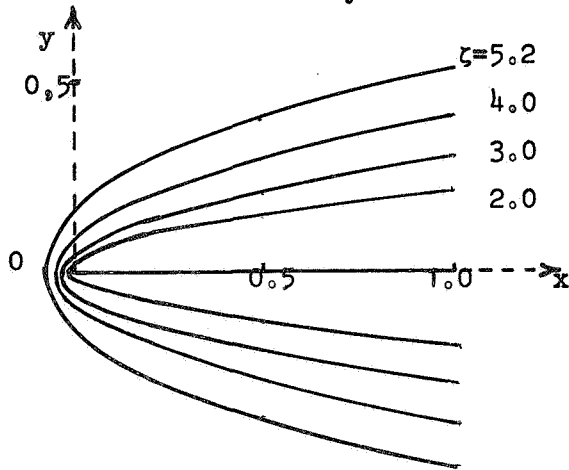
De Blasius-oplossing $\psi^{(0)}(x,y)$ heeft betrekking op het gebied $x \geq 0$, $y \geq 0$ in het (x,y) -vlak. De lijnen $\zeta = \text{constant}$ zijn halve parabolen $y^2 = \zeta^2 \cdot x$ met de top in $(0,0)$. Door de coördinatentransformatie (9.1) wordt het eerste kwadrant van het (ξ,η) -vlak afgebeeld op het bovenhalfvlak in het (x,y) -vlak. Hierbij geldt

$\xi > 0, \eta = 0$ ($\zeta = 0$)	wordt afgebeeld op	$x > 0, y = 0;$
$\xi = 0, \eta = 0$ ($x = \epsilon^2 g_2(\zeta)$, ζ willekeurig)	" " "	$x < 0, y = 0;$
$\xi = 0, \eta > 0$ ($\zeta \rightarrow \infty, g_2 \rightarrow -\infty$)	" " "	$x \rightarrow -\infty;$
$\xi > 0, \eta > 0$ (ζ willekeurig)	" " "	$y > 0.$

De parabolen $\eta^2 = \zeta^2 \cdot \xi$ met gemeenschappelijke top $\xi = \eta = 0$ gaan hierbij over in de parabolen

(10.1) $y^2 = \zeta^2(x - \epsilon^2 g_2(\zeta))$

met de top in $x = \epsilon^2 g_2(\zeta)$ op de negatieve x-as (fig. 3). Wegens $g_2(\zeta) \rightarrow -\infty$ als $\zeta \rightarrow \infty$ verschuiven deze toppen langs de negatieve x-as naar $-\infty$ als $\zeta \rightarrow \infty$ (fig. 4).



grenslaag voor $Re = 100$

fig. 3

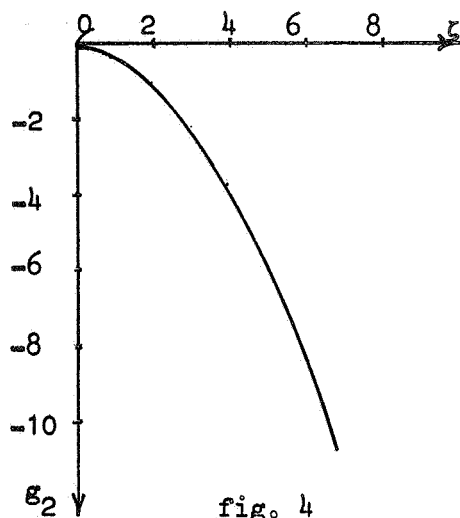


fig. 4

Met behulp van de transformatie van de afgeleiden

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi}}{1 + \varepsilon^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \xi} + \dots}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\frac{\partial}{\partial \xi}}{1 + \varepsilon^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \xi} + \dots}$$

verkrijgt men voor de snelheidscomponenten

$$(10.2) \quad u = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y} = f_0'(\zeta) + \frac{\varepsilon^2 g_2'(\zeta)}{2\xi - \varepsilon^2 \zeta g_2'(\zeta)} (\zeta f_0' - f_0),$$

$$(10.3) \quad v = -\varepsilon \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} = \frac{\varepsilon \sqrt{\xi}}{2\xi' - \varepsilon^2 \zeta g_2'(\zeta)} (\zeta f_0' - f_0).$$

In deze vorm zijn de snelheidscomponenten slechts onbegrensd in de oorsprong, terwijl v dit voordien overal op de y -as het geval was.

11. De stelling van Kaplun

In contrast met de enigszins moeizame en ingewikkelde manipulaties van Kuo staat het werk van S. Kaplun [11]. Deze auteur heeft een algemene en vrij eenvoudige methode aangegeven om een uniform geldige grenslaagoplossing te vinden van het probleem van een stationaire, incompressibele en visceuze stroming langs of op een halfoneindig lichaam.

Allereerst laat Kaplun zien dat de gedaante van de grenslaagoplossing in hoge mate afhangt van de gebruikte coördinaten. Hieraan knoopt hij

de vraag vast, of het mogelijk is dusdanige coördinaten ("optimale" coördinaten) te vinden, dat de grenslaagoplossing in dit stelsel ook op grote afstand van het storende lichaam geldig is. Uitgaande van een coördinatenstelsel $\zeta = (\xi, \eta)$ definiëren we de grenslaagvariabele $\bar{\eta}$ door $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\varepsilon}$, en de grenslaagoplossing ψ_ζ door

$$(11.1) \quad \psi_\zeta = \lim_{\zeta} \psi \stackrel{d}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0; \xi, \bar{\eta} \text{ vast}} \psi(\xi, \bar{\eta}, \varepsilon).$$

Bovengenoemd verlangen kunnen we dan uitdrukken door

$$(11.2) \quad \psi = \psi_\zeta + o(\varepsilon), \text{ buiten de grenslaag.}$$

Dit wil zeggen, dat de exacte- en de grenslaagoplossing tot op de eerste orde in ε overeenstemmen, ook in het oneindige.

Tengevolge van de aanwezigheid van de grenslaag ondervindt de buitenstroming een zekere zijdelingse verplaatsing over een afstand, die de verplaatsingsdikte genoemd wordt en gedefiniëerd is door

$$\delta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) d\eta.$$

Wanneer we nu (11.2) als eis stellen bij de keuze van ons coördinatenstelsel, kunnen we (11.2) op equivalente wijze formuleren als: de grenslaagoplossing omvat de buitenoplossing (d.i. de oplossing "buiten" de grenslaag) en de oplossing t.g.v. de verplaatsing door de grenslaag.

Noemen we de eerste $\psi_e(\xi, \eta)$, de laatste $\psi_e^i(\xi, \eta)$, dan is het te verwachten dat

$$(11.3) \quad \psi = \psi_e(\xi, \eta) + \varepsilon \psi_e^i(\xi, \eta) + o(\varepsilon),$$

waarin

$$(11.4) \quad \psi_e = \lim_{\eta} \psi(\xi, \eta, \varepsilon) \stackrel{d}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0; \xi, \eta \text{ vast}} \psi(\xi, \eta, \varepsilon).$$

De eerste-orde storing van de buitenoplossing ψ_e^i kan dus gedefiniëerd worden door herhaalde toepassing van het limiet-proces (11.4) als

$$(11.5) \quad \psi_e^i = \lim_{\eta} \frac{\psi - \psi_e}{\varepsilon} \quad (\eta \neq 0)$$

en

$$(11.6) \quad \psi_{ew}^{\circ} \stackrel{d}{=} \psi_e^{\circ}(\xi, 0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_e^{\circ}(\xi, \eta),$$

waarbij de index w op het limiet-proces $\eta \rightarrow 0$ slaat.

Men kan afleiden dat

$$(11.7) \quad \psi_{ew}^{\circ} = \int_0^{\infty} (u_{\zeta} - u_{ew}) d\bar{\eta},$$

en dat

$$\lim_{\zeta} \psi_e^{\circ} = \lim_{\zeta} \frac{\psi - \psi_e}{\varepsilon} = \bar{\psi}_{\zeta} - u_{ew} \bar{\eta}, \text{ met } \bar{\psi}_{\zeta} = \frac{\psi_{\zeta}}{\varepsilon}.$$

Passen we de fundamentele aanname, dat voor een willekeurige stromingsgrootheid f geldt

$$(11.8) \quad \lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} (\lim_{\zeta} f) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\lim_1 f),$$

toe op $f = (\psi - \psi_e)/\varepsilon$, dan is het resultaat dat

$$(11.9) \quad \psi_{\zeta} \approx u_{ew} \eta + \varepsilon \psi_{ew}^{\circ} \quad \text{als } \bar{\eta} \rightarrow \infty.$$

Analoog aan (11.3) zoeken we voor ψ_{ζ} naar een uitdrukking van de vorm

$$(11.10) \quad \psi_{\zeta} = \psi_{\zeta e} + \varepsilon \psi_{\zeta e}^{\circ} + o(\varepsilon).$$

Blijkbaar is het verband tussen (11.9) en (11.10)

$$(11.11) \quad \psi_{\zeta e} \stackrel{d}{=} \lim_1 \psi_{\zeta} = u_{ew} \eta \quad (\eta \neq 0)$$

en

$$(11.12) \quad \psi_{\zeta e}^{\circ} \stackrel{d}{=} \lim_1 \frac{\psi_{\zeta} - \psi_{\zeta e}}{\varepsilon} = \psi_{ew}^{\circ} \quad (\eta \neq 0),$$

$$\psi_{\zeta e}^{\circ}(\xi, 0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_{\zeta e}^{\circ}(\xi, \eta).$$

We zeggen nu dat de grenslaagoplossing ψ_{ζ} de buitenoplossing $\psi_{\zeta e}$ van de exacte oplossing bevat indien

$$(11.13) \quad \psi_{\zeta e} \equiv \psi_e, \text{ i.e. } u_{ew} \eta = \psi_e,$$

en dat de grenslaagoplossing ψ_{ζ} de oplossing tgv. de verplaatsing ψ_e^0 bevat indien

$$(11.14) \quad \psi_{\zeta e}^0 \equiv \psi_e^0, \text{ i.e. } \psi_{ew}^0 = \psi_e^0.$$

Indien aan de voorwaarden (11.13) en (11.14) is voldaan noemt Kaplun de bijbehorende coördinaten optimaal. Men kan aantonen dat bij gegeven ψ_e en ψ_e^0 voor optimale coördinaten $\chi = (\rho, \sigma)$ moet gelden

$$\psi_e^0 = \psi_e^0(\rho), \quad \sigma = f(\rho) \cdot \psi_e,$$

waarin $f(\rho)$ een willekeurige functie van ρ is.

We kunnen het voorgaande samenvatten in de

Stelling van Kaplun:

Het coördinatenstelsel $\zeta = (\xi, \eta)$ is optimaal in de zin dat aan (11.13) en (11.14) voldaan is, indien

$$(11.15a) \quad \xi = \psi_e^0, \quad \eta = \psi_e.$$

Een willekeurig ander systeem $\chi = (\rho, \sigma)$ is optimaal dan en slechts dan als het met ζ samenhangt volgens

$$(11.15b) \quad \rho = f_1(\xi), \quad \sigma = f_2(\xi),$$

waarin f_1 en f_2 willekeurige functies zijn. Het stromingsbeeld, gegeven door de grenslaagoplossing ψ_{ζ} is hetzelfde voor alle optimale systemen, maar zal anders zijn voor een willekeurig niet-optimaal systeem.

Men kan nog nagaan dat de grenslaagoplossing ψ_{ζ} aan alle randvoorwaarden voldoet, en blijktens

$$\psi = \psi_e + \varepsilon \psi_e^0 + o(\varepsilon),$$

en

$$\psi_{\zeta} = \psi_{\zeta e} + \varepsilon \psi_{\zeta e}^0 + o(\varepsilon)$$

tot op orde ε met de exacte oplossing overeenstemt.

Het optimale coördinatensysteem is i.h.a. niet a priori bekend. Men kan echter a.v. een optimale grenslaagoplossing construeren. Eerst bepaalt men ψ_e uit het potentiaal-stromingsprobleem, i.e., uit de gereduceerde vergelijking. Uit de grenslaagvergelijking met de randvoorwaarden $u_\zeta(\xi, 0) = v_\zeta(\xi, 0)$ en $u_\zeta \rightarrow u_{ew}$ als $\bar{\eta} \rightarrow \infty$ bepaalt men ψ_ζ . Vervolgens rekent men de integraal (11.7) voor ψ_{ew}^v uit, en lost de potentiaalvergelijking voor ψ_e^v op. Een optimaal systeem $\chi(\rho, \sigma)$ vindt men dan uit (11.15), en ψ_χ door substitutie in ψ_ζ .
We lichten dit toe aan de hand van een passend voorbeeld.

12. Stroming langs een half-oneindige vlakke plaat volgens Oseen

Dit is een type stroming met een laag Reynolds-getal. De Oseen-vergelijking voor ψ is

$$(12.1) \quad (v\nabla^2 - U_\infty \frac{\partial}{\partial x}) \nabla^2 \psi = 0;$$

met de randvoorwaarden

$$(12.2) \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ voor } y = 0, x > 0,$$

en

$$(12.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U_\infty, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{als } |y| \rightarrow \infty \text{ of als } x \rightarrow -\infty.$$

De stroomfunctie ψ_e is een oplossing van de gereduceerde vergelijking

$$(12.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi_e = 0$$

met de randvoorwaarden

$$(12.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_e = 0 \quad \text{voor } y = 0, x > 0, \\ \frac{\partial \psi_e}{\partial y} \rightarrow U_\infty, \quad \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ als } |y| \rightarrow \infty \text{ of } x \rightarrow -\infty. \end{array} \right.$$

De oplossing blijkt te zijn

$$(12.6) \quad \psi_e = U_\infty \cdot y.$$

Met $\varepsilon = \sqrt{\nu/U_\infty}$ wordt de vergelijking (12.1)

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \bar{\psi} = 0,$$

waarbij de overstreepte grootheden zijn gedefiniëerd door $\bar{y} = y/\varepsilon$, $\bar{\psi} = \psi/\varepsilon$. Voeren we nu het limiet-proces (11.1)

$$\lim_{\zeta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0; x, \bar{y} \text{ vast}}$$

uit op deze vergelijking, dan verkrijgen we de grenslaagvergelijking

$$(12.7) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_\zeta}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

en de randvoorwaarden

$$(12.8) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_\zeta = \frac{\partial \bar{\psi}_\zeta}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ voor } \bar{y} = 0, x > 0; \\ \bar{\psi}_\zeta = U_\infty \cdot y + \psi'_{ew} \text{ voor } \bar{y} \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

In rechthoekige coördinaten (x, \bar{y}) is de grenslaagoplossing nu

$$(12.9) \quad \bar{\psi}_\zeta = 2U_\infty \sqrt{x} \left\{ \frac{\bar{y}}{2\sqrt{x}} \operatorname{erf} \frac{\bar{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\exp \left(-\frac{\bar{y}^2}{4x} \right) - 1 \right) \right\},$$

waaruit i.v.m. (12.8) voor ψ'_{ew} volgt:

$$(12.10) \quad \psi'_{ew} = - \frac{2U_\infty \sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Substitutie van $\psi = \psi_e + \varepsilon \psi'_e$ in de vergelijking van Oseen (12.1) en limietovergang $\varepsilon \rightarrow 0$ levert

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi'_e = 0,$$

en daar de stroming rotatievrij is voor $x \rightarrow -\infty$ krijgen we de Laplace-vergelijking voor ψ_e^v

$$(12.11) \quad \nabla^2 \psi_e^v = 0.$$

De oplossing met randvoorwaarde (12.10) is

$$\psi_e^v = -2 U_\infty \sqrt{\frac{r+x}{2\pi}}.$$

Aangezien ψ_e^v constant is langs een stelsel confocale parabolen, kunnen we als optimale ξ -coördinaten nemen

$$(12.12) \quad \xi = \operatorname{Re} \zeta, \quad \zeta = \sqrt{x + iy}, \quad 0 \leq \arg(x + iy) < 2\pi;$$

en als optimale η -coördinaten

$$\eta = f(\xi) \cdot y,$$

of, met speciaal $f(\xi) = \frac{1}{2\xi}$,

$$(12.13) \quad \eta = \operatorname{Im} \zeta.$$

We hebben dus

$$x = \xi^2 - \eta^2,$$

$$y = 2\xi\eta.$$

Volgens een hier niet behandelde stelling van Kaplun (zie [11], p.119) geldt voor de grenslaagvariabelen (met index ζ)

$$(12.14) \quad \begin{cases} x_\zeta = \lim_{\zeta} x = x(\xi, 0) = \xi^2, \\ \bar{y}_\zeta = \lim_{\zeta} y = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \cdot \bar{\eta} = 2\xi\bar{\eta}. \end{cases}$$

Voeren we de substitutie (12.14) uit in de formule (12.9) voor $\bar{\psi}_\zeta$, dan krijgen we voor de grenslaagoplossing in optimale coördinaten

$$(12.15) \quad \psi_\zeta = 2\sqrt{U_\infty} \nu \xi \left\{ \bar{\eta} \operatorname{erf} \bar{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\exp(-\bar{\eta}^2) - 1) \right\}.$$

Controle leert dat de oplossing (12.15) aan de vergelijking (12.1) en alle randvoorwaarden (12.2) en (12.3) voldoet.

Opmerking. Toegepast op het door Kuo uitgewerkte probleem leveren de parabolische coördinaten dezelfde resultaten als de techniek van Lighthill (men zie hiervoor o.a. Goldstein [12], p. 280-285). Verschillende resultaten echter worden verkregen aan de achterkant van de (eindige) plaat, vgl. [13].

Literatuur

1. H.S. Tsien The Poincaré-Lighthill-Kuo method,
Adv. in Appl. Mech., vol. IV (1956), pp 281-349.
2. H. Poincaré Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,
tome I (1892), Ch. III.
3. M.J. Lighthill A technique for rendering approximate solutions to
physical problems uniformly valid,
Phil. Mag. [7], vol. 40 (1949), p. 1179.
4. Y.H. Kuo On the flow of an incompressible viscous fluid past a
flat plate at moderate Reynolds number,
J. Math. and Phys., vol. 32 (1953), p. 83.
5. W.R. Wasow On the convergence of an approximate method of
M.J. Lighthill,
J. Rat. Mech. Anal., vol. 4 (1955), p. 751.
6. G.F. Carrier Boundary-layer problems in applied mechanics,
Adv. in Appl. Mech., vol. III (1953), p. 1.
7. G.F. Carrier Boundary-layer problems in applied mathematics,
Comm. Pure Appl. Math., vol. 7 (1954), p. 11.
8. M.J. Lighthill The position of the shock-wave in certain aerodynamic
problems,
Quart. J. Mech. Appl. Math., vol. 1 (1948), p. 309.

9. G.B. Whitham The propagation of a spherical blast,
Proc. Roy. Soc., vol. A 203 (1950), p. 571.
10. W. Eckhaus Colloquium partiële diff. verg. met een kleine
parameter,
Inleiding §7, pp 25-30.
11. S. Kaplun The role of coordinate systems in boundary-layer
theory,
Z. Angew. Math. Phys., vol. 5 (1954), p. 111-135.
12. S. Goldstein On some methods of approximation in fluid mechanics,
Proc. Int. Congr. of Math., Amsterdam 1954, vol. 1,
p. 277-298.
13. A. Goldberg The anomaly in the application of Poincaré-Lighthill-
Sin-i-Cheng Kuo and parabolic coordinates to the trailing edge
boundary layer,
J. Math. Mech., vol. 10 (1961), p. 529-535.
14. P.C. Fife Towards the validity of Prandtl's approximation in
a boundary-layer,
Arch. for Rat. Mech. An., vol. 18, no 1 (1965), p. 1.

Asymptotische oplossingen van singuliere storingsproblemen
voor differentiaalvergelijkingen van elliptisch type

E.M. de Jager

1. Inleiding

In deze verhandeling beschouwen wij het volgende randwaarde-probleem: de functie $u_\varepsilon(x,y)$ voldoet binnen een begrensd convex gebied G van het (x,y) -vlak aan de differentiaalvergelijking

$$(1.1) \quad L_\varepsilon u_\varepsilon(x,y) = \varepsilon L_2 u_\varepsilon(x,y) + L_1 u_\varepsilon(x,y) = h(x,y),$$

waarin L_2 een differentiaal-operator van de tweede orde en L_1 een differentiaal-operator van de eerste orde is, terwijl langs de rand Γ van het gebied G de randvoorwaarde geldt

$$(1.2) \quad u_\varepsilon(x,y)|_\Gamma = 0.$$

Het probleem dat we hier stellen is onder zekere voorwaarden de functie u_ε voor kleine waarden van de parameter ε in een asymptotische reeks naar ε te ontwikkelen.

Het vraagstuk, waarbij de randvoorwaarde (1.2) vervangen wordt door

$$(1.2^*) \quad u_\varepsilon(x,y)|_\Gamma = \phi(x,y)|_\Gamma,$$

waarin $\phi(x,y)$ een gegeven twee maal differentieerbare functie is, kan door middel van de substitutie

$$u_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon^{**}(x,y) + \phi(x,y)$$

eenvoudig tot het eerstgenoemde randwaardeprobleem teruggebracht worden. Aan bovengesteld vraagstuk is in de literatuur betreffende singuliere storingsproblemen uitvoerige aandacht geschonken. We noemen hier de publicaties van W. Wasow [1], N. Levinson [2] en van M.I. Višik en L.A. Lyusternik [3].

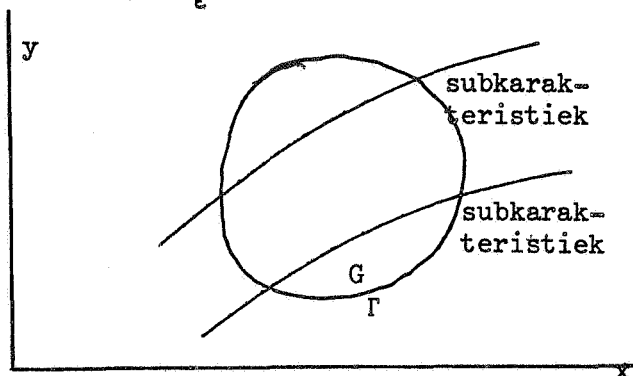
Wasow beschouwt het speciale geval

$$(1.3) \quad \epsilon \Delta u_\epsilon + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = f(x, y)$$

terwijl Levinson een veel meer algemene differentiaalvergelijking gebruikt, namelijk:

$$(1.4) \quad \epsilon \Delta u_\epsilon + A(x, y) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y} + C(x, y) u_\epsilon = D(x, y).$$

Levinson toonde in [2] aan, dat in ieder deelgebied van G begrensd door Γ en door twee bij L_1 horende subkarakteristieken, die Γ snijden (zie fig. 1), de oplossing $u_\epsilon(x, y)$ geschreven kan worden als



figuur 1

$$(1.5) \quad u_\epsilon(x, y) = w_0(x, y) + v_0(x, y, \epsilon) + z_0(x, y, \epsilon),$$

waarin $w_0(x, y)$ een oplossing is van de gereduceerde vergelijking

$$L_1 w_0 = A \frac{\partial w_0}{\partial x} + B \frac{\partial w_0}{\partial y} + C w_0 = D,$$

en $v_0(x, y, \epsilon)$ een grenslaagterm voorstelt, terwijl $z_0(x, y, \epsilon)$ in het bovengenoemde deelgedied van G uniform van de orde $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ is. (Zie [2] of de bijdrage van D. Dunnebier tot dit colloquium [4]).

D. Dunnebier [4] heeft er reeds op gewezen, dat de schatting voor de restterm $z_0(x, y)$ aanzienlijk verscherpt kan worden; er geldt namelijk $z_0(x, y, \epsilon) = O(\epsilon)$.

Het artikel van Levinson is overbodig gecompliceerd en weinig doorzichtig, mede doordat de grenslaagterm $v_0(x, y, \epsilon)$ met behulp van de W.K.B. methode geconstrueerd wordt.

Višik en Lyusternik beschouwen in hun overzichtsartikel [3] een elliptische differentiaalvergelijking van de gedaante

$$(1.6) \quad \varepsilon \left[a(x,y) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + 2b(x,y) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} + d(x,y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \right. \\ \left. e(x,y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + f(x,y) u_\varepsilon \right] + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - g(x,y) u_\varepsilon = h(x,y).$$

De storingsterm in de vergelijking (1.6) is veel algemener dan die in (1.4), terwijl de bij (1.6) behorende gereduceerde vergelijking veel eenvoudiger is dan die, welke met (1.4) correspondeert.

De subkarakteristieken van de gereduceerde vergelijking van (1.6) zijn nu rechte lijnen en wel $y = \text{constant}$.

Onder zeer algemene voorwaarden kunnen de vergelijkingen (1.4) en (1.6) door middel van een transformatie in elkaar overgevoerd worden.

Višik en Lyusternik construeren een formele reeks

$$(1.7) \quad u_\varepsilon(x,y) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i(x,y) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i v_i(x,y,\varepsilon) + z_m(x,y,\varepsilon),$$

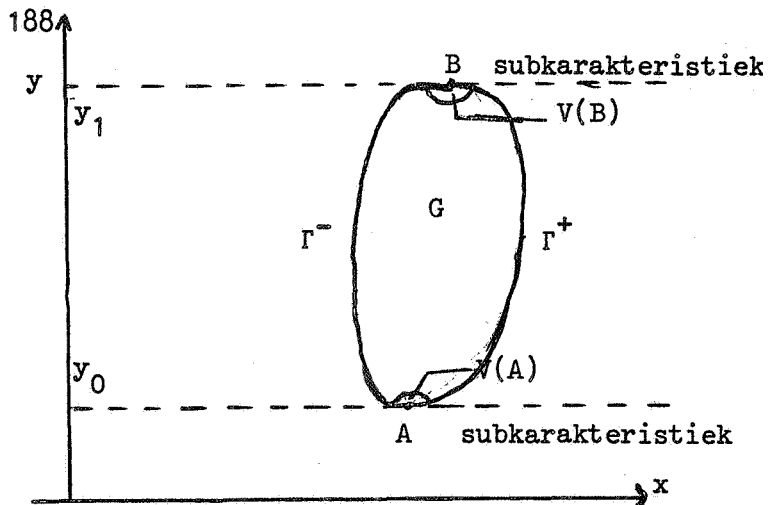
$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

waarin de termen w_i oplossingen zijn van de gereduceerde vergelijking en de termen v_i grenslaagtermen voorstellen.

De waarde van m is afhankelijk van de orde van differentieerbaarheid van de functies $a(x,y)$, $b(x,y)$, \dots , $h(x,y)$ en van de orde van differentieerbaarheid van de parametervoorstelling voor de randkromme Γ .

Deze formele reeks (1.7) wordt alleen gedefiniëerd in een deelgebied $G - V(A) - V(B)$ van het gebied G , waarin $V(A)$ en $V(B)$ willekeurige kleine omgevingen van de punten A en B zijn, welke de punten zijn waar de subkarakteristieken $y = y_0$ en $y = y_1$ de randkromme Γ raken (zie fig. 2).

Kleine omgevingen $V(A)$ en $V(B)$ worden buiten beschouwing gelaten, omdat de functies w_i singulier zijn in A en B (vergelijk hoofdstuk 2).



figuur 2

In [3] wordt ondermeer aangetoond, dat

$$(1.8) \quad \|z_m\|_{\tilde{G}} = O(\varepsilon^{m+1})$$

waarbij $\|z_m\|_{\tilde{G}}$ de L_2 -norm van z_m beduidt met betrekking tot het gebied $\tilde{G} = G - V(A) - V(B)$.

(1.8) geeft echter een globale afschatting van

z_m en uit (1.8) kan geenszins zonder meer de conclusie getrokken worden, dat ook geldt

$$(1.9) \quad z_m = O(\varepsilon^{m+1}) \text{ uniform in } G - V(A) - V(B).$$

Schattingen van het type (1.8) kunnen in de praktijk nuttig zijn voor bijv. energiebeschouwingen, maar zij geven geen uitsluitsel over de asymptotische uitspraak

$$(1.10) \quad u_\varepsilon(x,y) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i(x,y) - \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i v_i(x,y,\varepsilon) = z_m(x,y,\varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}).$$

Višik en Lyusternik zijn er evenwel in geslaagd $u_\varepsilon(x,y)$ in het gehele gebied G uit te drukken als

$$u_\varepsilon(x,y) = \bar{w}_0(x,y) + \varepsilon \bar{v}_0(x,y,\varepsilon) + \bar{z}_0(x,y,\varepsilon),$$

waarin \bar{w}_0 weer een oplossing van de gereduceerde vergelijking en \bar{v}_0 een grenslaagterm voorstelt. Indien de orde van raking van Γ in A en B aan de karakteristieken $y = y_0$ resp. $y = y_1$ voldoende groot is, dan is buiten willekeurige omgevingen van A en B de restterm $\bar{z}_0(x,y,\varepsilon)$ uniform van de orde $O(\varepsilon)$, terwijl in de omgevingen van A en B de functie $\bar{z}_0(x,y,\varepsilon)$ willekeurig klein wordt, naarmate deze omgevingen zich op A en B samentrekken.

Het bewijs, dat de auteurs geven, is tamelijk gecompliceerd door de vele afschattingen, die in de omgevingen van de punten A en B gemaakt moeten worden.

In dit artikel geven wij een nieuw kort en doorzichtig bewijs van de bewering, dat inderdaad geldt

$$(1.11) \quad z_m = O(\varepsilon^{m+1})$$

uniform in ieder gebied $G = V(A) - V(B)$, waarbij $V(A)$ en $V(B)$ willekeurig kleine omgevingen van A en B zijn.

In dit verband wijzen we nog op een recent resultaat van W. Eckhaus [5], die met behulp van de theorie van de parabolische grenslagen op eenvoudige wijze aantoonde, dat geldt

$$(1.12) \quad z_0 = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Deze auteur gaf tevens in [5] de weg aan, hoe dit resultaat nog verscherpt kan worden tot

$$z_0 = O(\varepsilon).$$

In hoofdstuk 2 geven wij de constructie van de reeks (1.7); wij volgen hier Višik en Lyusternik en wij geven de preciese voorwaarden waaronder (1.7) geldig is.

Tenslotte geven wij in hoofdstuk 3 het bewijs van (1.11), i.e. het bewijs voor de asymptotiek van (1.7); hierbij wordt gebruik gemaakt van z.g.n. "barrière-functies".

2. De formele ontwikkeling voor u_ε

2.1. Probleemstelling

We beschouwen het volgende randwaarde-probleem:

In een begrensd convex en enkelvoudig samenhangend gebied G in R_2 voldoet de onbekende functie $u_\varepsilon(x,y)$ aan de differentiaalvergelijking

$$(2.1) \quad L_\varepsilon u_\varepsilon(x,y) = \varepsilon L_2 u_\varepsilon(x,y) + L_1 u_\varepsilon(x,y) = h(x,y),$$

waarin L_2 een elliptische differentiaal-operator van de tweede orde en L_1 een differentiaal-operator van de eerste orde is, namelijk:

$$(2.2) \quad L_2 = a(x,y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b(x,y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d(x,y) \frac{\partial}{\partial x} + e(x,y) \frac{\partial}{\partial y} + f(x,y), \text{ met } a(x,y) > 0 \text{ in } G,$$

en

$$(2.3) \quad L_1 = \frac{\partial}{\partial x} - g(x,y), \text{ met } g(x,y) \geq \alpha^2 > 0 \text{ in } G.$$

Op de rand Γ van het gebied G geldt

$$(2.4) \quad u_\varepsilon(x,y)|_\Gamma = 0.$$

Indien de coëfficiënten a, b, c, \dots, g en het rechterlid h Hölder-continu zijn in $G + \Gamma$ met exponent α en indien de parametervoorstelling van Γ twee keer differentieerbaar is en de tweede afgeleiden zijn ook Hölder-continu met exponent α , dan is het bovengestelde randwaardeprobleem ondubbelzinnig oplosbaar voor voldoende kleine waarden van ε en $u_\varepsilon \in C_{2+\alpha}$, d.w.z. de tweede afgeleiden van u_ε zijn Hölder-continu met exponent α (vgl. Courant-Hilbert [6], Vol. II, pag. 336).

Het gestelde vraagstuk is nu de onbekende functie u_ε voor kleine waarden van ε in een asymptotische reeks naar ε te ontwikkelen.

In verband met de gewenste algemeenheid van de differentiaal-operator L_ε maken we de volgende opmerkingen.

1. Een willekeurige lineaire differentiaal-operator van de eerste orde kan voorgesteld worden door:

$$L_1 = \alpha(x,y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(x,y) \frac{\partial}{\partial y} + \gamma(x,y).$$

Onderstellen we nu, dat $\alpha(x,y)$ en $\beta(x,y)$ beide continu en niet tegelijkertijd nul zijn in G , dan gaat door ieder punt van het gebied G één en slechts één subkarakteristiek, die geen dubbelpunten of andere singulariteiten bezit.

Indien we verder aannemen, dat er in G een functie $\eta(x,y)$ bestaat, zodanig dat de uitdrukking

$$\frac{\partial}{\partial x} \{n(x,y)\alpha(x,y)\} + \frac{\partial}{\partial y} \{n(x,y)\beta(x,y)\}$$

in G positief of negatief en tekenvast is, dan kunnen de karakteristieken ook geen limiet cycle zijn in G (Theorema van Bendixon).

Onder deze voorwaarden zullen de gladde subkarakteristieken de rand Γ in een even aantal punten snijden.

We nemen tenslotte aan dat G zodanig is, dat de subkarakteristieken de rand Γ in slechts twee punten snijden en dat er slechts twee subkarakteristieken zijn, die ieder aan Γ raken in één punt.

Het gebied G wordt "overdekt" door een schaar karakteristieken

$$\zeta(x,y) = \zeta$$

en voeren we in de plaats van y de coördinaat ζ als nieuwe onafhankelijke variabele in, dan neemt L_1 de vorm (2.3) aan en we zijn in de situatie, zoals in de probleemstelling gesteld is (vgl. ook figuur 2).

2. Omdat de operator L_2 elliptisch is in G , is $a(x,y)$ hetzij groter, hetzij kleiner dan nul in G ; zonder de algemeenheid te beperken hebben we hier $a(x,y) > 0$ gekozen.

Dit heeft dan tot gevolg, dat het voor de ondubbelzinnige oplosbaarheid van het randwaardeprobleem noodzakelijk is dat $-g(x,y) + \epsilon f(x,y) \leq 0$ moet zijn in G (vgl. Courant-Hilbert [6], Vol. II, pag. 321).

Aan deze voorwaarde is voor voldoende kleine waarden van ϵ stellig voldaan, indien $g(x,y) \geq \alpha^2 > 0$ in G .

3. In het vervolg zullen we aannemen dat $\epsilon > 0$ is; indien $\epsilon < 0$ is, dan is de theorie geheel analoog.

2.2. De gereduceerde vergelijking

Voor een eerste ruwe benadering van de functie $u_\epsilon(x,y)$ voor kleine positieve waarden van ϵ beschouwen we een functie $w_0(x,y)$, die voldoet aan de vergelijking, welke uit de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (2.1) verkregen wordt door hierin $\epsilon = 0$ te stellen; deze vergelijking heet de gereduceerde vergelijking.

Substitutie van $\varepsilon = 0$ in (2.1) geeft:

$$(2.5) \quad L_1 w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} - g(x,y)w_0 = h(x,y).$$

De subkarakteristieken van deze vergelijking zijn de lijnen $y = \text{constant}$. Veronderstel dat de karakteristieken $y = y_0$ en $y = y_1$ de randkromme Γ raken in de punten A en B, welke punten Γ verdelen in twee delen, die we Γ^+ resp. Γ^- noemen (zie fig. 2); Γ^+ heeft de vergelijking $x = \gamma^+(y)$ en Γ^- de vergelijking $x = \gamma^-(y)$.

De randvoorwaarde $w_0 = 0$ kan nu alleen nog maar opgelegd worden op één van de randen Γ^- of Γ^+ . Om redenen, die in paragraaf 2.3 duidelijk zullen worden leggen we deze randvoorwaarde op langs de rand Γ^+ en er geldt

$$(2.6) \quad w_0(x,y)|_{\Gamma^+} = 0.$$

De functie $w_0(x,y)$ kan nu eenvoudig bepaald worden en het resultaat is:

$$(2.7) \quad w_0(x,y) = \int_{\gamma^+(y)}^x \exp \left[\int_{\xi}^x g(\tau,y) d\tau \right] h(\xi,y) d\xi.$$

Het is duidelijk dat $w_0(x,y)$ bij "benadering" aan de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (2.1) en slechts voor een deel aan de vereiste randvoorwaarde (2.4) voldoet.

De eerste benadering van de functie $u_\varepsilon(x,y)$ wordt verkregen door toevoeging van een term $v_0(x,y,\varepsilon)$, die nul is langs Γ^+ , die gelijk is aan $-w_0(\gamma^-(y),y)$ langs Γ^- , en die tezamen met $w_0(x,y)$ aan de differentiaalvergelijking (2.1) tot op orde $O(\varepsilon)$ voldoet. Deze term heet een grenslaagterm en zal in de volgende paragraaf geconstrueerd worden.

Alvorens echter op de constructie van een formele asymptotische reeks nader in te gaan, zullen we eerst nog even de eerste term $w_0(x,y)$ nader bekijken, omdat deze reeds singulariteiten introduceert in de punten A en B, welke punten dan ook in het vervolg buiten beschouwing gelaten dienen te worden.

Veronderstel dat het gedrag van de kromme $x = \gamma^+(y)$ in $A(x_0, y_0)$ beschreven wordt door

$$(2.8) \quad \gamma^+(y) - x_0 \approx c_0 (y - y_0)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1$$

en in $B(x_1, y_1)$ door

$$(2.9) \quad \gamma^+(y) - x_1 \approx C_1 (y - y_1)^{\frac{1}{q}}, \quad q > 1.$$

(Voor $p = 2$ gedraagt $x = \gamma^+(y)$ zich in A als een kegelsnede.)
Stel verder dat $g(x, y)$ en $h(x, y)$ in $\bar{G} = G \cup \Gamma$ continu differentieerbaar is naar y en dat $\gamma^+(y)$ continu differentieerbaar is voor $y_0 < y < y_1$. Hieruit volgt nu dat $w_0(x, y)$ continu differentieerbaar is naar y in $\bar{G} - V(A) - V(B)$, waarbij $V(A)$ en $V(B)$ willekeurige omgevingen van A en B zijn, en er geldt in $\bar{G} - V(A) - V(B)$:

$$(2.10) \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = \int_{\gamma^+(y)}^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\exp \left\{ \int_{\xi}^x g(\tau, y) d\tau \right\} h(\xi, y) \right] d\xi -$$

$$\exp \left[\int_{\gamma^+(y)}^x g(\tau, y) d\tau \right] h(\gamma^+(y), y) \cdot \frac{d}{dy} \gamma^+(y),$$

$$\text{met } \frac{d}{dy} \gamma^+(y) \approx \frac{1}{p} C_0 (y - y_0)^{\frac{1}{p} - 1} \quad \text{in de omgeving van } A.$$

Derhalve heeft $w(x, y)$ een singuliere afgeleide naar y voor $y = y_0$ en hetzelfde geldt geheel analoog voor $y = y_1$. Indien $g(x, y)$ en $h(x, y)$ in \bar{G} twee maal ^{*)} differentieerbaar zijn naar y en $\gamma^+(y)$ is twee maal continu differentieerbaar voor $y_0 < y < y_1$, dan is w_0 ook twee maal continu differentieerbaar naar y in $\bar{G} - V(A) - V(B)$.

Verder geldt in de omgeving van A

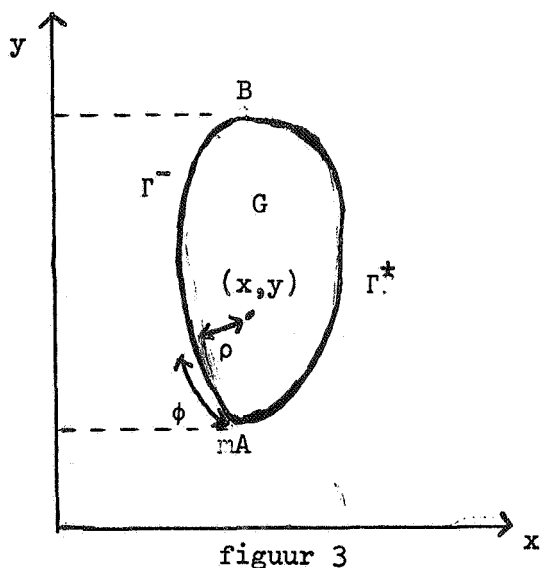
$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = O\left(\frac{d^2}{dy^2} \gamma^+(y)\right) = O\left((y - y_0)^{\frac{1}{p} - 2}\right)$$

en een analoog resultaat geldt in de omgeving van B .

2.3. Het fundamentele iteratieproces

Voor de constructie van de z.g.o.n. grenslaagtermen is het noodzakelijk een nieuw coördinatensysteem in de omgeving van de linkerrand Γ^- in te voeren (zie fig. 3).

*) continu



ρ zij de afstand langs de normaal gemeten van een punt $(x, y) \in G$ tot Γ^- en ϕ de afstand, gemeten langs Γ^- , vanaf het punt A tot het punt, waar de normaal uit (x, y) de kromme Γ^- snijdt. De parametervoorstelling van de randkromme Γ^- zij gegeven door:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} x &= x_r(\phi) \\ y &= y_r(\phi) \end{aligned}$$

met $0 \leq \phi \leq \Phi$, A het punt

$(x_r(0), y_r(0))$ en B het punt $(x_r(\Phi), y_r(\Phi))$. We veronderstellen, dat de vergelijkingen (2.12) $(n+3)$ maal continu differentieerbaar zijn naar ϕ voor $0 \leq \phi \leq \Phi$. ($n = 0, 1, 2, \dots$).

We beschouwen nu een rechter omgeving $\bar{\Omega}$ ($0 \leq \rho \leq \rho_0$, $0 \leq \phi \leq \Phi$) van de randkromme Γ^- die voldoende klein is, dat de normalen vanuit de punten op de rand Γ^- elkaar niet snijden binnen $\bar{\Omega}$.

Dus in $\bar{\Omega}$ bestaat er een 1-1 afbeelding van de coördinaten (x, y) op de coördinaten (ρ, ϕ) en omgekeerd; deze afbeelding wordt beschreven door de relaties:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} x &= x_r(\phi) + \rho \left\{ 1 + \left(\frac{dy_r}{d\phi} / \frac{dx_r}{d\phi} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ y &= y_r(\phi) + \rho \left(\frac{dy_r}{d\phi} / \frac{dx_r}{d\phi} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{dy_r}{d\phi} / \frac{dx_r}{d\phi} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Substitueren we deze transformaties in de differentiaalvergelijking (2.1), dan krijgen we in Ω de differentiaalvergelijking:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \epsilon \left\{ \alpha(\rho, \phi) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + 2\beta(\rho, \phi) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \gamma(\rho, \phi) \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \zeta(\rho, \phi) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \right. \\ \left. \eta(\rho, \phi) \frac{\partial u}{\partial \phi} + f(\rho, \phi)u \right\} + \theta(\rho, \phi) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \chi(\rho, \phi) \frac{\partial u}{\partial \phi} - g(\rho, \phi)u = h(\rho, \phi), \end{aligned}$$

geldig voor $0 < \phi < \Phi$ en $0 < \rho < \rho_0$.

In deze vergelijking geldt:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\rho, \phi) &= a(\rho, \phi) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + 2b(\rho, \phi) \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} + c(\rho, \phi) \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \\
 \beta(\rho, \phi) &= a(\rho, \phi) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + b(\rho, \phi) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + c(\rho, \phi) \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
 (2.15) \quad \theta(\rho, \phi) &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \\
 x(\rho, \phi) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}
 \end{aligned}$$

met $a(\rho, \phi) = a(x, y)$, $b(\rho, \phi) = b(x, y)$, etc.

Omdat de differentiaaloperator L_2 (2.2) een elliptische operator is met $a(x, y) > 0$ in G , is ook

$$(2.16) \quad \alpha(\rho, \phi) > 0 \text{ in } \Omega.$$

Verder geldt

$$(2.17) \quad \theta(0, \phi) = \cos(\rho, x) \Big|_{\rho=0} > 0 \text{ voor } 0 < \phi < \Phi.$$

Indien we tenslotte veronderstellen, dat de coëfficiënten van onze oorspronkelijke differentiaalvergelijking (2.1) in \bar{G} continue partiële afgeleiden tot en met de orde n naar x en y bezitten, dan hebben de coëfficiënten van de vergelijking (2.14) in $\bar{\Omega}$ ook continue partiële afgeleiden tot en met de orde n naar ρ en ϕ ; hiervoor was het noodzakelijk te veronderstellen dat de parameteraanpakking (2.12) van de randkromme Γ^* ($n+3$) maal continu differentieerbaar is naar ϕ met $0 \leq \phi \leq \Phi$. We mogen nu de coëfficiënten van (2.14) in het gebied Ω^* met $0 < \rho < \rho_0$, $0 < \delta \leq \phi \leq \Phi - \delta < \Phi$ (δ willekeurig klein) in een Taylor-reeks ontwikkelen en we schrijven:

$$\begin{aligned}
 \alpha(\rho, \phi) &= \alpha_0(\phi) + \alpha_1(\phi)\rho + \dots + \alpha_N(\phi)\rho^N + \alpha_{N+1}(\rho, \phi)\rho^{N+1} \\
 \beta(\rho, \phi) &= \beta_0(\phi) + \beta_1(\phi)\rho + \dots + \beta_N(\phi)\rho^N + \beta_{N+1}(\rho, \phi)\rho^{N+1}
 \end{aligned}$$

$$(2.18) \quad \theta(\rho, \phi) = \theta_0(\phi) + \theta_1(\phi)\rho + \dots + \theta_N(\phi)\rho^N + \theta_{N+1}(\rho, \phi)\rho^{N+1}$$

$$g(\rho, \phi) = g_0(\phi) + g_1(\phi)\rho + \dots + g_N(\phi)\rho^N + g_{N+1}(\rho, \phi)\rho^{N+1}$$

met $\alpha_0(\phi) > 0$, $\theta_0(\phi)$ en $N+1 \leq n$.

We voeren nu in de variabele t , gedefinieerd door $\rho = \epsilon t$ en de differentiaal-uitdrukking $\epsilon L_\epsilon u_\epsilon$ wordt:

$$(2.19) \quad \epsilon L_\epsilon u_\epsilon \equiv M_0 u_\epsilon + \epsilon R_1 u_\epsilon + \dots + \epsilon^N R_N u_\epsilon + \epsilon^{N+1} R_{N+1} u_\epsilon,$$

waarin

$$M_0 = \alpha_0(\phi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \theta_0(\phi) \frac{\partial}{\partial t}$$

$$R_1 = \alpha_1(\phi)t \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\beta_0(\phi) \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} + \zeta_0(\phi) \frac{\partial}{\partial t} + t\theta_1(\phi) \frac{\partial}{\partial t} +$$

$$x_0(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} - g_0(\phi)$$

(2.20)

$$R_2 = \alpha_2(\phi) t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\beta_1(\phi) t \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} + \gamma_0(\phi) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \zeta_1(\phi) t \frac{\partial}{\partial t} +$$

$$n_0(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} + f_0(\phi) + \theta_2(\phi) t^2 \frac{\partial}{\partial t} + x_1(\phi) t \frac{\partial}{\partial \phi} - g_1(\phi) \cdot t.$$

En analoog R_i .

R_i ($2 < i \leq N$) is een differentiaal-operator van de tweede orde, waarin de t afhankelijkheid van de factoren is van de gedaante t^j met $j \leq i$.

R_{N+1} is ook een differentiaal-operator van de tweede orde, waarvan de coëfficiënten zijn van de vorm $t^j H(\rho, \phi)$ met $j \leq N+1$ en $H(\rho, \phi)$ begrensd in $\bar{\Omega}$.

Met behulp van (2.1)-(2.4) en de "lokale" ontwikkeling (2.19) kan nu formeel een ontwikkeling van de gevraagde functie u_ϵ geconstrueerd worden. Dit resultaat wordt geformuleerd in de volgende stelling.

Stelling I

Indien de coëfficiënten en het rechterlid van de elliptische differentiaalvergelijking

$$(2.1) \quad L_\epsilon u_\epsilon(x,y) = \epsilon L_2 u_\epsilon(x,y) + L_1 u_\epsilon(x,y) = h(x,y)$$

in een convex begrensd gesloten gebied \bar{G} continu differentieerbaar zijn naar x en y tot en met de orde $2m+3$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) en indien de parametervoorstelling van de rand Γ met de booglengte als parameter $2m+6$ maal continu differentieerbaar is, dan kan de oplossing $u_\epsilon(x,y)$ van het randwaarde-probleem met

$$u_\epsilon|_\Gamma = 0$$

in ieder gebied $G = V(A) - V(B)$, waarbij $V(A)$ en $V(B)$ willekeurige omgevingen zijn van de punten A en B , waar de subkarakteristieken van L_1 de randkromme Γ raken, geschreven worden in de gedaante:

$$(2.21) \quad u_\epsilon(x,y) = \sum_{i=0}^m \epsilon^i w_i(x,y) + \sum_{i=0}^{m+1} \epsilon^i \tilde{v}_i(x,y,\epsilon) + z_m(x,y,\epsilon).$$

Hierin zijn $w_i(x,y)$ en $\tilde{v}_i(x,y,\epsilon)$ functies die voor $\epsilon > 0$ uniform begrensd zijn in $G = V(A) - V(B)$; in het bijzonder zijn de functies $\tilde{v}_i(x,y,\epsilon)$ voor kleine waarden van ϵ snel dalende functies, die ongelijk nul zijn in slechts een rechter omgeving van de linker rand Γ^- (grenslaagfuncties).

De restterm $z_m(x,y,\epsilon)$ voldoet in $G = V(A) - V(B)$ aan de differentiaalvergelijking:

$$(2.22) \quad L_\epsilon z_m(x,y) = \epsilon^{m+1} g_m(x,y,\epsilon),$$

waarbij $g_m(x,y,\epsilon)$ uniform begrensd is op $\overline{G = V(A) - V(B)}$, terwijl $z_m = 0$ is op $\Gamma \cap \overline{G = V(A) - V(B)}$.

Bewijs

Wij construeren eerst de functies $w_i(x,y)$ en vervolgens de functies $\tilde{v}_i(x,y)$; daarna volgt het bewijs eenvoudig uit de constructie van deze functies.

a. De constructie van de functies $w_i(x,y)$.

De functie $w_0(x,y)$ is een oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking

$$(2.5) \quad L_1 w_0(x,y) = h(x,y),$$

met de randvoorwaarde

$$(2.6) \quad w_0(x,y)|_{\Gamma^+} = 0.$$

De functies $w_i(x,y)$ worden bepaald door iteratie uit de vergelijkingen

$$(2.23) \quad L_1 w_i(x,y) = -L_2 w_{i-1}(x,y), \text{ en}$$

$$(2.24) \quad w_i(x,y)|_{\Gamma^+} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Hieruit volgt, dat de gevraagde functies zijn:

$$(2.7) \quad w_0(x,y) = \int_{\Gamma^+(y)}^x \exp \left[\int_{\xi}^x g(\tau,y) d\tau \right] h(\xi,y) d\xi, \text{ en}$$

$$(2.25) \quad w_i(x,y) = \int_{\Gamma^+(y)}^x \exp \left[\int_{\xi}^x g(\tau,y) d\tau \right] L_2 w_{i-1} \Big|_{\xi,y} d\xi,$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

In $\overline{G} = \overline{V(A)} = \overline{V(B)}$ bezit w_0 continue partiële afgeleiden tot en met de orde $(2m+3)$, w_1 tot en met de orde $(2m+1)$, w_2 tot en met de orde $(2m-1)$, etc. en w_m tot en met de orde 3.

Dus we mogen de operator L_ε op de eerste som van (2.21) toepassen.

b. De constructie van de functies $\tilde{v}_i(x,y,\varepsilon)$.

We construeren eerste een rij functies $v_i(x,y,\varepsilon)$, $i = 0, 1, \dots, m+1$. De functie $v_0(x,y,\varepsilon)$ wordt in $\Omega = V(A) = V(B)$ gedefiniëerd als oplossing van de vergelijking

$$(2.26) \quad M_0 v_0 = \alpha_0(\phi) \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \theta_0(\phi) \frac{\partial v_0}{\partial t} = 0,$$

met de randvoorwaarde

$$(2.27) \quad v_0|_{\Gamma^-} = v_0|_{t=0} = v_0|_{\rho=0} = -w_0(0, \phi).$$

De algemene oplossing voor de functie v_0 luidt

$$(2.28) \quad v_0(t, \phi) = v_0\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi\right) = C_1(\phi) \exp\{-\lambda(\phi)t\} + C_2(\phi) = \\ = C_1(\phi) \exp\left\{-\lambda(\phi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right\} + C_2(\phi),$$

$$\text{met } \lambda(\phi) = + \frac{\theta_0(\phi)}{\alpha_0(\phi)} \quad \text{en} \quad C_1(\phi) + C_2(\phi) = -w_0(0, \phi).$$

We kiezen de oplossing met $C_1(\phi) = -w_0(0, \phi)$ en $C_2(\phi) \equiv 0$, en we krijgen

$$(2.29) \quad v_0(t, \phi) = v_0\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi\right) = -w_0(0, \phi) \exp\{-\lambda(\phi)t\} = \\ = -w_0(0, \phi) \exp\left\{-\lambda(\phi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right\}.$$

We merken op, dat in $\Omega = V(A) - V(B)$ geldt $\theta_0(\phi) > 0$, $\alpha_0(\phi) > 0$ en derhalve neemt v_0 snel af voor toenemende waarden van ρ en voor dalende ε ($\varepsilon > 0$). Voor $\rho \neq 0$ is $v_0\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi\right)$ in $\Omega = V(A) - V(B)$ zelfs asymptotisch gelijk aan nul voor kleine waarden van ε .

Het zal in het vervolg blijken, dat deze eigenschap van essentieel belang is voor de constructie van de formele ε -reeks voor u_ε en daarom hebben we $C_1(\phi)$ en $C_2(\phi)$ zoals hierboven gekozen.

Deze opmerking is ook van toepassing voor de volgende termen $v_i(x, y)$, waarvan we de constructie nu aangeven.

De functies $v_i(x, y)$ worden in $\Omega = V(A) - V(B)$ iteratief bepaald door middel van de differentiaalvergelijkingen:

$$(2.30) \quad M_0 v_i = - \sum_{\rho=1}^i R_\rho v_{i-\rho}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

met de randcondities

$$(2.31) \quad v_i|_{\Gamma^-} = v_i|_{t=\rho=0} = -w_i(0, \phi), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

waarin de differentiaal-operatoren R_s door (2.20) gedefiniëerd zijn. We kiezen analoog als bij de bepaling van de functie $v_0(x, y, \epsilon) = v_0(\frac{\rho}{\epsilon}, \phi)$ de oplossing

$$(2.32) \quad v_i(t, \phi) = v_i(\frac{\rho}{\epsilon}, \phi) = P_i(t, \phi) \exp \{-\lambda(\phi)t\} \\ = P_i(\frac{\rho}{\epsilon}, \phi) \exp \{-\lambda(\phi) \frac{\rho}{\epsilon}\}.$$

Hierin is $P_i(t, \phi)$ een polynoom in t , terwijl de van t onafhankelijke term in $P_i(t, \phi)$ gelijk is aan $-w_i(0, \phi)$.

De functies $v_i(\frac{\rho}{\epsilon}, \phi)$ zijn wederom asymptotisch gelijk aan nul voor kleine waarden van ϵ , indien $\rho \neq 0$ is.

Verder volgt uit (2.32), dat $v_i(t, \phi)$ oneindig vaak differentieerbaar is naar t , maar op grond van de aanwezigheid van de term $w_i(0, \phi)$ slechts $(2m+3-2i)$ maal continu differentieerbaar met betrekking tot ϕ in $\Omega - V(A) - V(B)$.

Dus de functie v_m is nog juist 3 maal continu differentieerbaar naar ϕ in $\Omega - V(A) - V(B)$.

De functie v_{m+1} wordt tenslotte in $\Omega - V(A) - V(B)$ vastgelegd door de vergelijking

$$(2.33) \quad M_0 v_{m+1} = - \sum_{s=1}^{m+1} R_s v_{m+1-s},$$

met de randvoorwaarde

$$(2.34) \quad v_{m+1}|_{\Gamma^-} = v_{m+1}|_{t=\rho=0} = 0.$$

We nemen analoog als hierboven de oplossing

$$(2.35) \quad v_{m+1}(t, \phi) = P_{m+1}(t, \phi) \exp \{-\lambda(\phi)t\} = \\ = P_{m+1}(\frac{\rho}{\epsilon}, \phi) \exp \{-\lambda(\phi) \frac{\rho}{\epsilon}\},$$

waarin $P_{m+1}(t, \phi)$ wederom een polynoom is in t , terwijl de constante term in $P_{m+1}(t, \phi)$ nu gelijk aan nul is. Derhalve is v_{m+1} weer oneindig vaak differentieerbaar met betrekking tot t .

De functie $v_{m+1}(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi)$ is wederom asymptotisch gelijk aan nul voor $\rho \neq 0$. Op grond van de differentieerbaarheidseigenschappen van de functies v_i ($i = 1, 2, \dots, m$) en de gedaante van de operatoren R_s (vgl. (2.20)) is het rechterlid van (2.33) slechts twee maal continu differentieerbaar met betrekking tot ϕ (let op de term $R_1 v_m$) en derhalve is ook $v_{m+1}(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi)$ slechts twee maal continu differentieerbaar naar ϕ .

Dus kan de operator L_ε toegepast worden in $\Omega - V(A) - V(B)$ op de uitdrukking

$$\sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i v_i(x, y, \varepsilon).$$

Om tot dit resultaat te komen hebben we alle in de stelling genoemde differentieerbaarheidseigenschappen van de coëfficiënten en van het rechterlid van de differentiaalvergelijking en die van de parameteraanpak van de randkromme nodig gehad.

De termen $v_i(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi)$ zijn typisch grenslaagtermen, die gedefiniëerd zijn in de omgeving $\overline{\Omega - V(A) - V(B)}$ van de linker rand Γ^m .

Om deze grenslaagtermen te schrijven als functies die in het gehele gebied $\overline{G - V(A) - V(B)}$ gedefiniëerd en daar twee maal continu differentieerbaar zijn, vermenigvuldigen we hen met een z.g.o.n. "smoothing factor"; we voeren nl. in de functies

$$(2.36) \quad \tilde{v}_i(x, y, \varepsilon) = \tilde{v}_i(t, \phi) = \tilde{v}_i(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi) = \psi(\frac{\rho}{\rho_0}) v_i(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi),$$

waarin ψ een C^∞ functie is met $\psi(\xi) \equiv 1$ voor $\xi < 1/3$ en $\psi(\xi) \equiv 0$ voor $\xi > 2/3$.

Nu de functies $w_i(x, y)$ en $\tilde{v}_i(x, y, \varepsilon)$ gedefiniëerd zijn, gaan we over tot het bewijs van de stelling.

c. Het bewijs van de stelling.

We stellen zoals in (2.21)

$$(2.21) \quad u_\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i(x, y) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i \tilde{v}_i(x, y, \varepsilon) + z_m(x, y, \varepsilon),$$

en we zullen nu de in de stelling genoemde afchatting voor $L_\epsilon z_m$, geldig in $G - V(A) - V(B)$, bewijzen.

$$\begin{aligned}
 L_\epsilon z_m &= L_\epsilon u_\epsilon - L_\epsilon (w_0 + \sum_{i=1}^m \epsilon^i w_i) - L_\epsilon \left(\sum_{j=0}^{m+1} \epsilon^j \tilde{v}_j \right) = \\
 (2.37) \quad &= h - \left\{ L_1 w_0 + L_1 \left(\sum_{i=1}^m \epsilon^i w_i \right) + \epsilon L_2 \left(\sum_{i=0}^m \epsilon^i w_i \right) \right\} - \\
 &- \epsilon^{-1} \left\{ \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon^i R_i \right) \left(\sum_{j=0}^{m+1} \epsilon^j \tilde{v}_j \right) \right\} = \\
 &- \epsilon^{m+1} L_2 w_m - \epsilon^{-1} \left\{ \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon^i R_i \right) \left(\sum_{j=0}^{m+1} \epsilon^j \tilde{v}_j \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

De operator R_{m+2} is iets anders gedefiniëerd dan R_i met $i < m+2$. De coëfficiënten zijn geen polynomen in t , maar begrensde functies van de gedaante $t^j H(t, \phi)$ met $j \leq m+2$.

We beschouwen nader de uitdrukking

$$\left(M_0 + \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon^i R_i \right) \left(\sum_{j=0}^{m+1} \epsilon^j \tilde{v}_j \right) = \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon^i R_i \right) \left(\sum_{j=0}^{m+1} \epsilon^j \psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) v_j \right).$$

Voor $\rho < 1/3 \rho_0$ mag de factor $\psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$ weggelaten worden, voor $\rho > 2/3 \rho_0$ is de totale uitdrukking gelijk aan nul en voor $1/3 \rho_0 \leq \rho \leq 2/3 \rho_0$ geeft een willekeurig aantal malen differentiëren naar t , toegepast op $\psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) v_j$, het resultaat

$$D_t^p \psi \left(\frac{\epsilon t}{\rho_0} \right) v_j \sim \psi \left(\frac{\epsilon t}{\rho_0} \right) D_t^p v_j,$$

omdat v_j een factor $\exp \left\{ -\lambda(\phi) \frac{\rho}{\epsilon} \right\}$ bevat, die voor $\rho \geq 1/3 \rho_0$ voor kleine waarden van ϵ asymptotisch gelijk aan nul is. (Zie de opmerking betreffende de keuze van $C_1(\phi)$ en $C_2(\phi)$ in (2.28).)

Dus we mogen schrijven

$$\begin{aligned}
 \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon^i R_i \right) \left(\sum_{j=0}^{m+1} \epsilon^j \tilde{v}_j \right) &\sim \psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(M_0 + \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon^i R_i \right) \left(\sum_{j=0}^{m+1} \epsilon^j v_j \right) = \\
 \epsilon^{m+2} \psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \sum_{i=0}^{m+1} R_{m+2-i} v_i &\sim \epsilon^{m+2} \sum_{i=0}^{m+1} R_{m+2-i} \tilde{v}_i.
 \end{aligned}$$

Substitutie van dit resultaat in (2.37) levert tenslotte, dat in $G = V(A) - V(B)$ de betrekking geldt:

$$(2.38) \quad L_\varepsilon z_m = \varepsilon^{m+1} g_m$$

met

$$(2.39) \quad g_m = -L_2 w_m - \sum_{i=0}^{m+1} R_{m+2-i} \tilde{v}_i.$$

Op grond van het gedrag van w_m en \tilde{v}_i (vgl. (2.7), (2.25), (2.29), (2.32), (2.35) en (2.36)) is het duidelijk, dat g_m uniform begrensd is in $\overline{G = V(A) - V(B)}$. Dus er bestaat een constante M , onafhankelijk van ε , zodat

$$(2.40) \quad |L_\varepsilon z_m| < \varepsilon^{m+1} M, \text{ in } G = V(A) - V(B).$$

Uit de randvoorwaarden, opgelegd aan de functies u_ε , w_i en \tilde{v}_i , volgt tevens zonder moeite dat langs het deel van de rand Γ , dat buiten $V(A)$ en $V(B)$ ligt, geldt:

$$(2.41) \quad z_m = 0$$

en hiermee hebben we stelling I bewezen.

q.e.d.

Opmerkingen

We kunnen het verkregen resultaat als volgt samenvatten.

1. We hebben geconstrueerd een reeks

$$(2.42) \quad \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i(x,y) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i \tilde{v}_i(x,y,\varepsilon) = u_\varepsilon(x,y) - z_m(x,y,\varepsilon)$$

met de eigenschappen, dat deze in $G = V(A) - V(B)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking (2.1) tot op orde $O(\varepsilon^{m+1})$ na, terwijl de reeks langs het deel $\tilde{\Gamma}$ van Γ , dat buiten $V(A)$ en $V(B)$ ligt, voldoet aan de randvoorwaarde opgelegd aan u_ε , namelijk

$$(2.43) \quad \left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i \tilde{v}_i \right) \Big|_{\tilde{\Gamma}} = 0$$

Hieruit volgt echter nog geenszins dat de reeks (2.42) de gevraagde oplossing u_ε ook op orde $O(\varepsilon^{m+1})$ nadert. Dit is echter wel het geval, zoals in het volgende hoofdstuk bewezen zal worden.

2. Uit de constructie is duidelijk geworden, waarom de randvoorwaarde voor de functies w_i bij positieve waarde van ε op de rechter rand Γ^+ opgelegd moest worden.

Hadden we deze namelijk op de linker rand Γ^- opgelegd, dan moesten we met behulp van de grenslaagfuncties v_i er voor zorgen dat aan de randvoorwaarde op de rechter rand Γ^+ voldaan wordt. Dit zou leiden tot bijv. de grenslaagfunctie

$$v_0\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \phi\right) = -w_0(0, \phi) \exp\left\{-\lambda(\phi) \frac{\rho}{\varepsilon}\right\}.$$

Op de rechter rand is evenwel $\lambda(\phi) = \frac{v_0(\phi)}{\alpha_0(\phi)}$ negatief en derhalve wordt bij positieve waarden van ε de grenslaagfunctie groter dan iedere negatieve macht van ε .

Dergelijke functies zijn vanzelfsprekend niet voor ons doel geschikt. Indien we echter hadden aangenomen, dat $\varepsilon < 0$ zou zijn, dan moest de randvoorwaarde voor de functies w_i op de linker rand Γ^- voorgescreven worden, terwijl dan de grenslaagfuncties in de omgeving van de rechter rand Γ^+ geconstrueerd zouden moeten worden.

3. Het bewijs voor de asymptotiek van de formele ontwikkeling van u_ε

3.1. De asymptotiek van de formele ontwikkeling

In dit hoofdstuk zullen we bewijzen dat de in het vorige hoofdstuk geconstrueerde formele ontwikkeling

$$(2.21) \quad u_\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i(x, y) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i \bar{v}_i(x, y, \varepsilon) + z_m(x, y, \varepsilon)$$

inderdaad in $G = V(A) - V(B)$ een asymptotische ontwikkeling van u_ε levert voor kleine positieve waarden van ε .

Dit wil zeggen, dat er een ε_0 bestaat met de eigenschap dat voor $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ de uitdrukking

$$\varepsilon^{-m-1} \left\{ u_\varepsilon(x, y) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i(x, y) - \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i \tilde{v}_i(x, y, \varepsilon) \right\}$$

met betrekking tot ε uniform begrensd is in $\overline{G - V(A) - V(B)}$, ofwel korter uitgedrukt

$$(3.1) \quad u_\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i w_i(x, y) + \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{v}_i(x, y, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}), \text{ in}$$

$\overline{G - V(A) - V(B)}$.

Hiertoe is het nodig te bewijzen, dat de restterm z_m van de orde $O(\varepsilon^{m+1})$ is.

We hebben de term $\varepsilon^{m+1} \tilde{v}_{m+1}(x, y)$ buiten beschouwing gelaten, omdat het reeds duidelijk is dat deze $O(\varepsilon^{m+1})$ is, daar \tilde{v}_{m+1} uniform (met betrekking tot ε) begrensd is in $\overline{G - V(A) - V(B)}$. Deze term dient alleen maar voor de constructie van de restterm z_m , waarvoor volgens (2.40) en (2.41) geldt

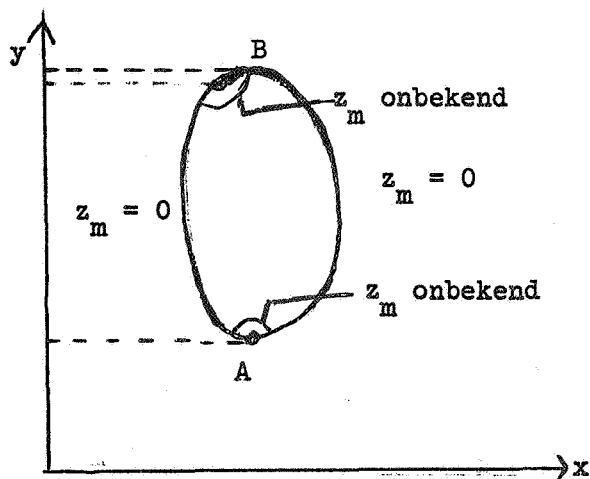
$$(3.2) \quad L_\varepsilon z_m = O(\varepsilon^{m+1}) \quad \text{in} \quad \overline{G - V(A) - V(B)},$$

en

$$(3.3) \quad z_m = 0 \quad \text{langs} \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \overline{G - V(A) - V(B)}.$$

Het is te verwachten, dat we van dit resultaat gebruik kunnen maken om aan te tonen, dat $z_m = O(\varepsilon^{m+1})$ in $\overline{G - V(A) - V(B)}$.

De moeilijkheid bestaat hierin, dat we vooralsnog geen geschikte schatting van de restterm z_m hebben langs de totale rand van $G - V(A) - V(B)$ (zie fig. 4). Indien we hierover wel beschikten, dan zouden we direkt al van een "maximum-principe" gebruik kunnen maken (zie paragraaf 3.2).



figuur 4

We zullen het bewijs van de asymptotiek eerst geven voor het geval $m = 0$, d.w.z.:

$$(3.4) \quad u_\varepsilon - w_0 - \bar{v}_0 = O(\varepsilon).$$

Hieruit volgt dan eenvoudig het algemene geval voor willekeurige m , mits maar aan de voorwaarden van stelling I voldaan is.

3.2. Het bewijs voor de asymptotiek

3.2.1. Het maximumprincipe en toepassingen

Het bewijs voor de asymptotiek van de formele ontwikkeling van u_ε steunt op het gebruik van het z.g.n. maximumprincipe voor elliptische differentiaal-operatoren.

Dit maximumprincipe formuleren we hier in een hulpstelling en voor het bewijs verwijzen we de lezer naar lit. [6], pag. 321.

Hulpstelling 1.

$$(3.5) \quad L[u] = a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + \\ b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y - c(x,y)u = \\ M[u] - c(x,y)u,$$

zij een differentiaal-uitdrukking, die in een begrensde gebied G met rand Γ elliptisch is, terwijl de coëfficiënten in G continu zijn met $c(x,y) > 0$.

Indien een twee maal continu differentieerbare functie u een maximum heeft in een inwendig punt P van G , dan geldt in dit punt $M[u] \leq 0$. Indien dit maximum positief is, dan volgt hieruit, dat in P geldt $L[u] < 0$.

Gevolg

Indien binnen een begrensd gebied G voor twee maal continu differentieerbare functies u en ϕ de ongelijkheid geldt

$$(3.6) \quad |L[u]| \leq L[-\phi],$$

waarin L een differentiaal-operator is met de in de hulpstelling genoemde eigenschappen, terwijl langs de rand Γ van G geldt

$$(3.7) \quad |u| \leq \phi,$$

dan is ook

$$(3.8) \quad |u| \leq \phi \quad \text{in } \bar{G}.$$

Bewijs

Stel $u - \phi$ bezit in een inwendig punt P van G een positief maximum, dan gold volgens de hulpstelling 1

$$L[u - \phi] \Big|_P < 0,$$

hetgeen in tegenspraak is met (3.6).

Dus $u - \phi$ bezit geen positief maximum binnen G en volgens (3.7) is $u - \phi \leq 0$ langs de rand van G ; derhalve

$$(3.9) \quad u - \phi \leq 0 \quad \text{in } \bar{G}.$$

Stel $-u - \phi$ bezit in een inwendig punt P van G een positief maximum, dan gold volgens de hulpstelling 1

$$L[-u - \phi] \Big|_P < 0,$$

hetgeen wederom in strijd is met (3.6).

Dus $-u - \phi$ bezit geen positief maximum binnen G en volgens (3.7) is $-u - \phi \leq 0$ langs de rand van G ; derhalve

$$(3.9^*) \quad -u - \phi \leq 0 \quad \text{in } \bar{G}.$$

Uit (3.9) en (3.9^{*}) volgt nu onmiddellijk de bewering (3.8). q.e.d.

De functie ϕ heet een barrière-functie voor de functie u .

We zullen nu een voor ons doel nuttige toepassing van het maximum-principe bewijzen.

Hulpstelling 2.

De oplossingen u_ε van het in stelling I genoemde randwaarde-probleem zijn voor voldoende kleine waarden van ε uniform begrensd in \bar{G} .

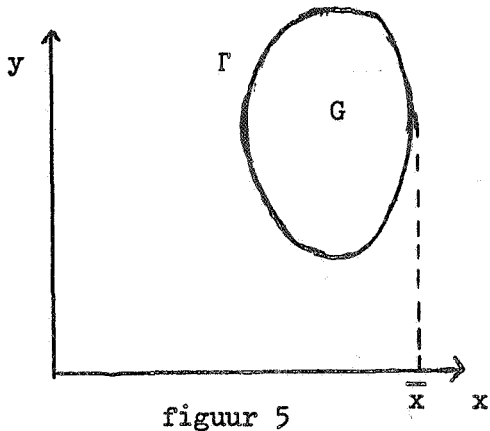
Bewijs

De differentiaalvergelijking (2.1) schrijven we in de gedaante

$$(3.10) \quad L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon \left[a \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} \right] + (1 + \varepsilon d) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \varepsilon e \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} - (g - \varepsilon f) u_\varepsilon = h.$$

Langs de rand Γ van het begrensde convexe gebied G geldt

$$(3.11) \quad u_\varepsilon|_\Gamma = 0.$$



Zonder beperking van de algemeenheid mogen we met behulp van een translatie in de x -richting het gebied G rechts van de y -as nemen.

(Zie fig. 5.)

Omdat $g \geq \alpha^2 > 0$ is ((2.3)) en de coëfficiënten van de differentiaalvergelijking continu zijn in \bar{G} , bestaat er een ε_0 , zodat voor $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ geldt:

$$(3.12) \quad g - \varepsilon f > 0 \quad \text{en} \quad (1 + \varepsilon d) \geq \frac{1}{2} \quad \text{in } \bar{G}.$$

We voeren nu in de functie

$$(3.13) \quad n(x) = \left\{ \max_{\bar{G}} |h| \right\} (e^{\beta \bar{x}} - e^{\beta x}),$$

waarin β nog een nader te bepalen positieve constante is en $\bar{x} = \max_{\bar{G}} (x)$.

Langs de rand Γ geldt op grond van (3.13) stellig

$$(3.14) \quad |u_\varepsilon|_\Gamma \leq n.$$

Toepassing van de operator L_ϵ op de functie $-\eta$ levert

$$-L_\epsilon [\eta] = \left\{ \max_{\bar{G}} |h| \right\} \left[\{ \epsilon a \beta^2 + \beta(1 + \epsilon d) \} e^{\beta x} + (g - \epsilon f)(e^{\beta \bar{x}} - e^{\beta x}) \right].$$

Omdat in G de coëfficiënt $a(x,y) > 0$ is, volgt wegens (3.12) voor $\beta \geq 2$ en $\epsilon < \epsilon_0$

$$-L_\epsilon [\eta] > \max |h| \quad \text{in } G$$

en dus

$$(3.15) \quad L_\epsilon [u_\epsilon] < L_\epsilon [-\eta] \quad \text{in } G.$$

Derhalve is de functie $\eta(x)$ een barrière-functie voor u_ϵ en in \bar{G} hebben we de mogelijkheid

$$|u_\epsilon| \leq \eta = (\max |h|)(e^{\beta \bar{x}} - e^{\beta x}), \quad \epsilon < \epsilon_0 \text{ en } \beta \geq 2,$$

waaruit onmiddellijk de uniforme begrenstheid van u_ϵ voor $\epsilon < \epsilon_0$ volgt. q.e.d.

3.2.2. Het bewijs voor de asymptotiek in het geval $m = 0$

In deze paragraaf zullen we de volgende stelling bewijzen:

Stelling II

Indien de voorwaarden van stelling I vervuld zijn dan is

$$(3.16) \quad u_\epsilon - w_0 - \tilde{v}_0 = O(\epsilon)$$

in ieder deelgebied $\overline{G - V(A) - V(B)}$ van \bar{G} , waarbij $V(A)$ en $V(B)$ willekeurig kleine omgevingen van de punten A en B zijn.

Dus er bestaat een ϵ_0 en een positieve constante C , onafhankelijk van ϵ , met de eigenschap dat

$$|u_\epsilon - w_0 - \tilde{v}_0| < C\epsilon$$

voor $(x,y) \in \overline{G - V(A) - V(B)}$ en $\epsilon < \epsilon_0$.

Bewijs

We kiezen een vaste willekeurig kleine δ en noemen de puntverzameling

$$(y_0 + \delta < y < y_1 - \delta) \cap G$$

het gebied G^* ; $y_0 = \min_G y$ en $y_1 = \max_G y$.

In G^* zijn de functies $w_0(x, y)$, $\tilde{v}_0(x, y, \epsilon)$ en $\tilde{v}_1(x, y, \epsilon)$ gedefiniëerd en volgens de formules (2.7), (2.29), (2.35) en (2.36) geldt

$$(2.7) \quad w_0(x, y) = + \int_{\gamma^+(y)}^x \exp \left[\int_{\xi}^x g(\tau, y) d\tau \right] h(\xi, y) d\xi,$$

$$(2.29) \quad \tilde{v}_0(x, y, \epsilon) = \tilde{v}_0(\rho, \phi, \epsilon) = -w_0(0, \phi) \exp \left\{ -\lambda(\phi) \frac{\rho}{\epsilon} \right\} \cdot \psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right),$$

en

$$(2.35^*) \quad \tilde{v}_1(x, y, \epsilon) = \tilde{v}_1(\rho, \phi, \epsilon) = \left\{ p_{12}(\phi) \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right)^2 + p_{11}(\phi) \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) \right\} \exp \left\{ -\lambda(\phi) \frac{\rho}{\epsilon} \right\} \cdot \psi \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right),$$

waarbij $p_{11}(\phi)$ en $p_{12}(\phi)$ functies zijn van de boogparameter ϕ , welke functies onafhankelijk zijn van ϵ en welke begrensd zijn langs het deel van Γ^- dat in $\overline{G^*}$ ligt.

De formule (2.35^{*}) is gemakkelijk met behulp van (2.33) en (2.34) te verifiëren.

Uit de hulpstelling 2 en de uitdrukkingen voor w_0 , \tilde{v}_0 en \tilde{v}_1 volgt, dat voor ϵ voldoende klein ($\epsilon < \epsilon_0$) $z_0 = u_\epsilon - w_0 - \tilde{v}_0 - \tilde{v}_1$ uniform begrensd is in het gebied $\overline{G^*}$ door een constante A , die onafhankelijk van ϵ is.

Dus in $\overline{G^*}$ is

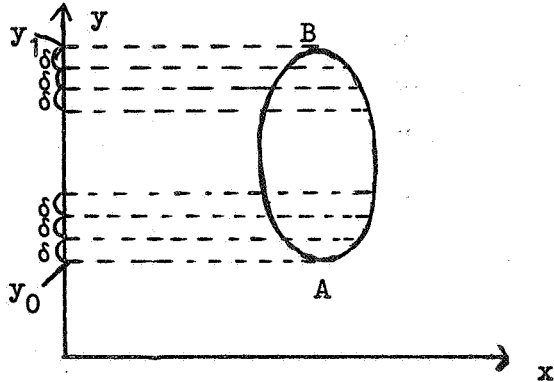
$$|z_0| < A$$

en derhalve geldt langs de rand van G^*

$$(3.17) \quad |z_0| \Big|_{\Gamma} = 0, \quad |z_0| \Big|_{\substack{y=y_0+\delta \\ y=y_1-\delta}} < A.$$

Verder volgt uit de stelling I, dat er een constante M , onafhankelijk van ε , bestaat met de eigenschap dat in $\overline{G^*}$

$$(3.18) \quad |L_\varepsilon z_0| < M\varepsilon.$$



figuur 6

We voeren nu in de volgende functie $\phi(y)$, die behoort tot de klasse C^∞ met de eigenschappen

$$\phi(y) \equiv 0 \text{ voor } y_0 + 3\delta \leq y \leq y_1 - 3\delta$$

$$(3.19) \quad \phi(y) \equiv 2A \text{ voor } y_0 + \delta \leq y \leq y_0 + 2\delta$$

$$\text{en voor } y_1 - 2\delta \leq y \leq y_1 - \delta.$$

$\phi(y)$ is onafhankelijk van ε en er bestaat dus een constante D , ook onafhankelijk van ε , zodat in $\overline{G^*}$ geldt

$$(3.20) \quad \left| \frac{d^2 \phi}{dy^2} \right| < D \quad ; \quad \left| \frac{d\phi}{dy} \right| < D.$$

In $\overline{G^*}$ zijn de coëfficiënten van de differentiaal-operator L_ε continu en er bestaat een constante B onafhankelijk van ε , zodat

$$(3.21) \quad \max_{\overline{G^*}} (|a|, 2|b|, |c|, |d|, |e|, |f|, |g|) < B.$$

Verder is in $\overline{G^*}$ de coëfficiënt $g(x,y)$ van de benedenkant begrensd door

$$g(x,y) \geq \alpha^2 > 0.$$

We voeren nu tenslotte in de functie

$$(3.22) \quad \psi(y) = \phi(y) + \frac{2(M + BD)}{\alpha^2} \varepsilon$$

en we zullen bewijzen dat $\psi(y)$ in $\overline{G^*}$ een barrière-functie is voor de restterm z_0 .

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon[-\psi] &= \left\{ \varepsilon \left(a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} - g \right\} [-\psi] = -\varepsilon \left(c \frac{d^2 \psi}{dy^2} + e \frac{d\psi}{dy} + f\psi \right) + g\psi \\
(3.23) \quad &\geq (\alpha^2 - \varepsilon f)\psi - \varepsilon B \max_{\overline{G^*}} \left(\left| \frac{d^2 \psi}{dy^2} \right|, \left| \frac{d\psi}{dy} \right| \right) \\
&\geq (\alpha^2 - \varepsilon f)\psi - \varepsilon BD.
\end{aligned}$$

Er bestaat een $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ met de eigenschap, dat voor $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$(3.24) \quad \alpha^2 - \varepsilon f > \frac{1}{2} \alpha^2 \quad \text{in } \overline{G^*}.$$

Dus voor $\varepsilon < \varepsilon_1$ is in G^* volgens (3.19), (3.22)-(3.24)

$$(3.25) \quad L_\varepsilon(-\psi) > \frac{1}{2} \alpha^2 \psi - \varepsilon BD \geq M\varepsilon.$$

Combinatie van (3.18) en (3.25) levert tenslotte, dat voor $\varepsilon < \varepsilon_1$, in G^* geldt

$$(3.26) \quad |L_\varepsilon z_0| < L_\varepsilon(-\psi).$$

Verder is volgens (3.17), (3.19) en (3.22) langs de rand van G^* voldaan aan

$$(3.27) \quad |z_0| < \psi.$$

Derhalve is ψ voor z_0 een barrière-functie in G^* en toepassing van het gevolg van hulpstelling 1 levert de waardevolle afschatting

$$(3.28) \quad |z_0| \leq \psi \quad \text{in } \overline{G^*} \quad \text{voor } \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Dus voor $y_0 + 3\delta \leq y \leq y_1 - 3\delta$ en $\varepsilon < \varepsilon_1$ hebben we het resultaat

$$(3.29) \quad |z_0| \leq \frac{2(M + BD)}{\alpha^2} \varepsilon$$

en er bestaat een van ε onafhankelijke constante $C = \frac{2(M + BD)}{\alpha^2}$ met de eigenschap, dat

$$|u_\varepsilon - w_0 - \tilde{v}_0 - \varepsilon \tilde{v}_1| \leq C\varepsilon \text{ voor } y_0 + 3\delta \leq y \leq y_1 - 3\delta \text{ en } \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Omdat \tilde{v}_1 , met betrekking tot ε uniform begrensd is in $\overline{G^*}$, geldt dus ook

$$|u_\varepsilon - w_0 - \tilde{v}_0| < C'\varepsilon \text{ voor } y_0 + 3\delta \leq y \leq y_1 - 3\delta \text{ en } \varepsilon < \varepsilon_1,$$

waarbij C' natuurlijk wederom onafhankelijk van ε is en dus

$$(3.30) \quad u_\varepsilon = w_0 + \tilde{v}_0 + O(\varepsilon) \text{ voor } y_0 + 3\delta \leq y \leq y_1 - 3\delta.$$

Doordat δ willekeurig klein genomen mag worden, is hiermee de asymptotiek bewezen voor het geval $m = 0$ in $G - V(A) - V(B)$, waarbij $V(A)$ en $V(B)$ willekeurig kleine omgevingen van de punten A en B zijn. q.e.d.

3.2.3. Het bewijs voor de asymptotiek in het geval van $m > 0$

In deze paragraaf zullen we stelling II als volgt generalizeren.

Stelling III

Indien de voorwaarden van stelling I vervuld zijn, dan is voor alle gehele niet negatieve waarden van k met $k \leq m$

$$(3.31) \quad u_\varepsilon - \sum_{i=0}^k \varepsilon^i w_i(x, y) - \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \tilde{v}_i(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$$

in ieder deelgebied $\overline{G - V(A) - V(B)}$ van \overline{G} , waarbij $V(A)$ en $V(B)$ willekeurig kleine omgevingen van de punten A en B zijn.

Bewijs

We beschouwen wederom de restterm

$$(3.32) \quad z_k = u_\varepsilon - \sum_{i=0}^k \varepsilon^i w_i - \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^i \tilde{v}_i.$$

Omdat \tilde{v}_{k+1} met betrekking tot ε uniform begrensd is in $\overline{G - V(A) - V(B)}$, is het bewijs geleverd, indien we kunnen aantonen dat in $\overline{G - V(A) - V(B)}$ de restterm z_k van de orde $O(\varepsilon^{k+1})$ is.

Om dit laatste te bewijzen maken we gebruik van het principe van de volledige inductie.

Stel $z_{k-1} = O(\epsilon^k)$, $1 \leq k < m$.

Hieruit volgt

$$z_k = O(\epsilon^k) - \epsilon^k w_k(x, y) - \epsilon^{k+1} \bar{v}_{k+1}(x, y, \epsilon).$$

Stel nu $z_k = \epsilon^k z_k^{**}$ en dus

$$(3.33) \quad z_k^{**} = O(1) - w_k(x, y) - \epsilon \bar{v}_{k+1}(x, y, \epsilon).$$

Wegens de formules (2.25), (2.32) en (2.35) is het nu evident dat de functie z_k^{**} uniform begrensd is in $\overline{G - V(A) - V(B)}$.

Verder geldt op grond van stelling I, dat er een constante M , onafhankelijk van ϵ , bestaat zodat in $\overline{G - V(A) - V(B)}$ geldt

$$(3.34) \quad L_\epsilon z_k^{**} < \epsilon M,$$

terwijl langs het deel van de rand Γ dat buiten $V(A)$ en $V(B)$ ligt

$$(3.35) \quad z_k^{**} = 0.$$

We zijn nu in precies dezelfde situatie als in die van het geval $m = 0$ en z_k^{**} kan dezelfde rol spelen als z_0 .

Op grond van het bewijs van stelling II is het nu duidelijk, dat

$$(3.36) \quad z_k^{**} = O(\epsilon) \quad \text{in } \overline{G - V(A) - V(B)}$$

en derhalve

$$(3.37) \quad z_k = O(\epsilon^{k+1})$$

in $\overline{G - V(A) - V(B)}$.

Dus als in $\overline{G - V(A) - V(B)}$ geldt dat $z_{k-1} = O(\epsilon^k)$, dan ook $z_k = O(\epsilon^{k+1})$.

De inductie onderstelling is volgens stelling II waar voor $k = 1$ en derhalve is zij ook waar voor alle gehele positieve waarden van k met $k \leq m$ en hiermee is de stelling bewezen.

We kunnen geen waarden voor k nemen, die groter dan m zijn, omdat volgens het bewijs van stelling I de reeks

$$u_\epsilon = \sum_{i=0}^k \epsilon^i w_i + \sum_{i=0}^{k+1} \epsilon^i \bar{v}_i + z_k$$

slechts tot en met $k = m$ geconstrueerd kan worden. q.e.d.

Uit de stellingen I en III volgt tenslotte nog op zeer eenvoudige wijze het volgende belangrijke resultaat:

Stelling IV

Indien de coëfficiënten en het rechterlid van de elliptische differentiaalvergelijking

$$L_{\epsilon} u_{\epsilon} = h$$

oneindig vaak differentieerbaar zijn en indien de parametervoorstelling van de rand Γ :

$$x = x_r(\phi) \quad \text{en} \quad y = y_r(\phi)$$

ook oneindig vaak differentieerbaar is, dan bezit de oplossing u_{ϵ} van het randwaarde-probleem

$$L_{\epsilon} u_{\epsilon} = h \quad \text{in } G$$

$$u_{\epsilon}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{langs } \Gamma$$

de asymptotische ontwikkeling

$$(3.38) \quad u_{\epsilon} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i w_i(x,y) + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \bar{v}_i(x,y,\epsilon).$$

Deze asymptotische ontwikkeling is geldig in ieder deelgebied $G - V(A) - V(B)$, waarbij $V(A)$ en $V(B)$ willekeurig kleine omgevingen van de punten A en B zijn.

4. Literatuur

1. Wasow, W. Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta u + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda f(x,y)$, Duke Math. J., vol. 11 (1944), 405-415.
2. Levinson, N. The first boundary value problem for $\epsilon \Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$ for small ϵ , Annals of Mathematics, vol. 51, No. 2, March 1950.
3. Visik, M.I. Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter, American Math. Soc. Translations, Series 2, Vol. 20.
Lyusternik, L.A.
4. Dunnebiër, D. Singuliere storingsproblemen van lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van elliptisch type, Bijdrage tot dit colloquium.
5. Eckhaus, W. Parabolische grenslagen, Bijdrage tot dit colloquium.
6. Courant, R. Methods of mathematical physics, Vol. II, Intersc. Publ., 1962.
Hilbert, D.

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameterDe methode van de "multiple-time-scales" en een toepassing
op de vergelijking van Van der Pol

J. Nuis

1. Inleiding

De differentiaalvergelijkingen, welke beschouwd worden, zijn van het Van der Pol-type

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \epsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0 \quad (1.1)$$

met beginvoorwaarden

$$y(0) = a, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0. \quad (1.2)$$

Passen we hierop de klassieke storingsrekening toe ([1], p. 12), dan ontstaan seculaire termen op de volgende wijze. Stel dat de oplossing van (1.1) $y(t, \epsilon)$ geschreven kan worden als

$$y(t, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \epsilon^n y_n(t) + O(\epsilon^{N+1}). \quad (1.3)$$

Substitutie van (1.3) in (1.1) levert een nest van differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = - f(y_0, \frac{dy_0}{dt}) \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 = - y_1 \frac{\partial f(y_0, \frac{dy_0}{dt})}{\partial y} - \frac{dy_1}{dt} \frac{\partial f(y_0, \frac{dy_0}{dt})}{\partial (\frac{dy}{dt})} \quad (1.6)$$

waarbij de rechtertermen ontstaan door $f(y, \frac{dy}{dt})$ te ontwikkelen in een Taylor-reeks in de omgeving van $(y_0, \frac{dy_0}{dt})$. De beginvoorwaarden (1.2) bij (1.1) gaan over in

$$y_0(0) = a \quad y_n(0) = 0 \quad (n \neq 0) \quad (1.7a)$$

$$\frac{dy_n(0)}{dt} = 0 \quad (\forall n). \quad (1.7b)$$

De oplossing van (1.4) wordt dan

$$y_0(t) = a \cos t. \quad (1.8)$$

De rechterzijde van (1.5), $-f(y_0, \frac{dy_0}{dt}) = -f(a \cos t, -a \sin t)$, kan, daar de argumenten van f periodiek zijn, voorgesteld worden door de Fourierreeks

$$-f(y_0, \frac{dy_0}{dt}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$\text{met } a_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos t, -a \sin t) \cos nt \, dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos t, -a \sin t) \sin nt \, dt.$$

De oplossing $y_1(t)$ van (1.5) is nu

$$y_1(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{t}{2}(a_1 \sin t - b_1 \cos t) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{1-n^2}\right) \cos t + \\ + \left(\frac{b_1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nb_n}{1-n^2}\right) \sin t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_n}{1-n^2} \cos nt + \frac{b_n}{1-n^2} \sin nt\right). \quad (1.9)$$

Op een dergelijke manier kunnen alle y_n 's berekend worden. Vanaf y_1 komen er steeds seculaire termen in voor, zodat de veronderstelde klassieke machtreeksontwikkeling van $y(t, \epsilon)$ naar machten van ϵ zeker niet meer geldig is voor grote t . Voor een eindig tijdsinterval is die machtreeksontwikkeling echter een hopelijk geldige representatie van de oplossing.

Bij de grenslaag-methode, eerder in dit colloquium geïntroduceerd, hebben we gezien, dat de problemen uit de klasse II der singuliere storingsproblemen na transformatie van de onafhankelijk variabele, zeg x , in de z.g. lokale coördinaat, zeg \tilde{x} , overgaan naar de klasse I der reguliere storingsproblemen. De laatstgenoemde coördinaat is via de relatie

$$x = \varepsilon^{\nu} \tilde{x} \quad (1.10)$$

verbonden met de variabele x , met een geschikt gekozen $\nu > 0$. Het is interessant na te gaan op welke wijze de differentiaalvergelijking (1.1) ontstaan gedacht kan worden uit een singulier storingsprobleem. De transformatie

$$\tau = \varepsilon t \quad (1.11)$$

doet (1.1) overgaan in

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + y + \varepsilon f(y, \varepsilon \frac{dy}{d\tau}) = 0. \quad (1.12)$$

Het probleem, beschreven in de "langzame tijd" τ , behoort dus tot de klasse II der singuliere storingsproblemen. De grenslaag-methode kan echter, zoals uit het nu volgende blijkt, niet toegepast worden.

De gereduceerde vergelijking, behorende bij (1.12), heeft als oplossing

$$\phi_0(\tau) \equiv 0. \quad (1.13)$$

De gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten, welke ontstaat door in (1.1) $\varepsilon = 0$ te nemen, heeft als oplossing, de beginvoorwaarden (1.2) in acht genomen,

$$\psi_0(t) = a \cos t. \quad (1.14)$$

De aansluiting zou tot stand komen door te nemen

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \phi_0(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_0(t). \quad (1.15)$$

De $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_0(t)$ bestaat echter niet, daar $t = \infty$ een singulier punt van de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten is.

Indien dus op deze wijze oscillaties voorkomen in de oplossingen, kan de grenslaag-methode niet met succes worden toegepast.

In het geval van het beschouwde type differentiaalvergelijkingen spelen t en $\tau = \epsilon t$ kennelijk een verschillende rol. De variabele t komt voor in de gereduceerde vergelijking in lokale coördinaten

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$

en beschrijft het oscillerende gedrag van de oplossing. De variabele τ uit de gereduceerde vergelijking

$$y(\tau) \equiv 0$$

kan in verband gebracht worden met ontwikkelingen op langere termijn.

Een methode nu om dit soort problemen op te lossen is voorgesteld door J.D. Cole en uitgewerkt door J. Kevorkian [2]. Een oplossing, welke alleen van t afhangt, voldoet niet. Dit suggereert, dat een ontwikkeling, welke ook moet gelden voor grote tijden, afhangt van t en τ , waarbij men beiden als onderling onafhankelijk moet zien. Een dergelijke zienswijze is ook vaak nuttig in de physica. Heeft men b.v. een kubusvormig vat met ribben van lengte L , waarin zich een gas bevindt met een gemiddelde snelheid van deeltjes v , een gemiddelde vrije weglengte l tussen de deeltjes en een werkzame diameter der deeltjes d , dan werkt men vaak met drie onderling onafhankelijke tijdschalen, met eenheden in de orde van grootte van L/v , l/v en d/v , waarin men de gebeurtenissen beschrijft. Als kleine parameter kan b.v. dienen $\epsilon = l/L$, waarbij dan $d/L = o(\epsilon)$.

2. De methode van de "multiple-time-scales"

Bij deze methode, met in het algemeen n onafhankelijke tijdschalen, gaat men formeel als volgt te werk. Men introduceert

$$t_i = g_i(\epsilon)t \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1)$$

en een gedeeltelijke Poincaré-ontwikkeling

$$t_0 = (1 + g_{n+1}(\varepsilon)\omega_{n+1} + g_{n+2}(\varepsilon)\omega_{n+2} + \dots)t \quad (2.2)$$

waarbij de $g_i(\varepsilon)$ orde-functies zijn. Er geldt dus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_{k+1}(\varepsilon)}{g_k(\varepsilon)} = 0. \quad (2.3)$$

Men gebruikt de vrijheid t.g.v. het optreden van de ω_k 's om de seculariteiten te elimineren. Tenslotte wordt de Poisson-ontwikkeling ingevoerd:

$$y(t_0, t_1, t_2, \dots, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n(t_0, t_1, t_2, \dots) + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (2.4)$$

Door de introductie der meersoortige tijdschalen (meersoortig, omdat hetzelfde probleem in de éne tijdschaal regulier, in een andere singulier kan zijn) gaat $\frac{d}{dt}$ over in

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{dt_2}{dt} + \dots \quad (2.5)$$

ofwel

$$\frac{d}{dt} \rightarrow (1 + g_{n+1}(\varepsilon)\omega_{n+1} + \dots) \frac{\partial}{\partial t_0} + g_1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t_1} + g_2(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \quad (2.6)$$

Past men deze methode toe op de differentiaalvergelijking (1.1)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) = 0$$

dan blijkt, dat er volstaan kan worden met de introductie van twee tijdschalen. Men voert in

$$y(t_0, t_1) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n(t_0, t_1) + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (2.7)$$

$$t_0 = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots)t \quad (2.8)$$

$$t_1 = \varepsilon t. \quad (2.9)$$

Dit blijkt voldoende vrijheid te verschaffen om de seculariteiten van het probleem te elimineren.

$$\text{Via } \frac{d}{dt} = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}$$

en een Taylorreeks-ontwikkeling van $f(y, \frac{dy}{dt})$ in de omgeving van $(y_0, \frac{dy_0}{dt_0})$

$$f(y, \frac{dy}{dt}) \sim f\left(\sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n, (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial t_0} \left(\sum_{n=0}^N \varepsilon^n y_n\right) + \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n+1} \frac{\partial y_n}{\partial t_1}\right) \quad (2.10)$$

ontstaat een nest van partiële differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2} + y_0 = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + y_1 = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0 \partial t_1} - f(y_0, \frac{dy_0}{dt_0}) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_0^2} + y_2 = & -2\omega_2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2} - 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0 \partial t_1} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} - y_1 \frac{\partial f(y_0, \frac{\partial y_0}{\partial t_0})}{\partial y} - \\ & - \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1}\right) \frac{\partial f(y_0, \frac{\partial y_0}{\partial t_0})}{\partial (\frac{dy}{dt})} \end{aligned} \quad (2.13)$$

De algemene oplossing van (2.11) is

$$y_0(t_0, t_1) = A^{(0)}(t_1) \sin t_0 + B^{(0)}(t_1) \cos t_0. \quad (2.14)$$

Teneinde y_1 te berekenen wordt $f(y_0, \frac{dy_0}{dt_0})$ ontwikkeld in een Fourierreeks met betrekking tot t_0 :

$$f(y_0, \frac{dy_0}{dt_0}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt_0 + b_n \sin nt_0). \quad (2.15)$$

Hierin hangen a_n en b_n af van $A^{(0)}(t_1)$ en $B^{(0)}(t_1)$ en dus impliciet van t_1 . Substitutie van (2.14) en (2.15) in (2.12) levert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_0^2} + y_1 = & - \left(2 \frac{dA^{(0)}}{dt_1} + a_1 \right) \cos t_0 + \left(2 \frac{dB^{(0)}}{dt_1} - b_1 \right) \sin t_0 - \frac{a_0}{2} \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nt_0 + b_n \sin nt_0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

De oplossing van (2.16) luidt

$$\begin{aligned} y_1 = & - t_0 \left[\left(\frac{dA^{(0)}}{dt_1} + \frac{a_1}{2} \right) \cos t_0 + \left(\frac{dB^{(0)}}{dt_1} - \frac{b_1}{2} \right) \sin t_0 \right] + \\ & + (B^{(1)}(t_1) - \frac{1}{2} \frac{dA^{(0)}}{dt_1} - \frac{a_1}{4}) \cos t_0 + (A^{(1)}(t_1) + \frac{1}{2} \frac{dB^{(0)}}{dt_1} - \frac{b_1}{4}) \sin t_0 - \\ & - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_n}{1-n^2} \cos nt_0 + \frac{b_n}{1-n^2} \sin nt_0 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

De seculaire termen in y_1 kunnen geëlimineerd worden door voor $A^{(0)}$ en $B^{(0)}$ te eisen

$$2 \frac{dA^{(0)}}{dt_1} + a_1 = 0 \quad (2.18)$$

$$2 \frac{dB^{(0)}}{dt_1} - b_1 = 0. \quad (2.19)$$

Door in (2.13) $y_1 \frac{\partial f}{\partial y}$ en $\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} \right) \frac{\partial f}{\partial (\frac{dy}{dt})}$ in een Fourierreeks te

ontwikkelen, kan men op analoge wijze voorwaarden scheppen waaraan $A^{(1)}$ en $B^{(1)}$ moeten voldoen, opdat y_2 niet-seculair is.

Schrijft men

$$y_1 \frac{\partial f(y_0, \frac{\partial y_0}{\partial t_0})}{\partial y} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (e_n \cos nt_0 + d_n \sin nt_0)$$

en

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} \right) \frac{\partial f(y_0, \frac{\partial y_0}{\partial t_0})}{\partial (\frac{dy}{dt})} = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos nt_0 + q_n \sin nt_0)$$

dan gaat (2.13) over in

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_0^2} + y_2 = & - \left[2 \frac{dA(1)}{dt_1} + \frac{1}{2} \frac{db_1}{dt_1} - 2\omega_2^B(0) + c_1 + p_1 \right] \cos t_0 + \\ & + \left[2 \frac{dB(1)}{dt_1} + \frac{1}{2} \frac{da_1}{dt_1} + 2\omega_2^A(0) - d_1 - q_1 \right] \sin t_0 - \\ & - \frac{1}{2} (c_0 + p_0) - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2n \frac{da_n}{dt_1}}{1-n^2} + d_n + q_n \right] \sin nt_0 + \right. \\ & \left. + \left[-\frac{2n \frac{db_n}{dt_1}}{1-n^2} + c_n + p_n \right] \cos nt_0 \right\}. \end{aligned}$$

De niet-seculariteit naar t_0 van y_2 eist, dat

$$2 \frac{dA(1)}{dt_1} + \frac{1}{2} \frac{db_1}{dt_1} - 2\omega_2^B(0) + c_1 + p_1 = 0 \quad (2.20)$$

$$2 \frac{dB(1)}{dt_1} + \frac{1}{2} \frac{da_1}{dt_1} + 2\omega_2^A(0) - d_1 - q_1 = 0. \quad (2.21)$$

Al deze vergelijkingen bepalen eenduidig, alles wat is ingevoerd. Details komen ter sprake bij de behandeling van de vergelijking van Van der Pol.

Overigens heeft C.H. Su [3] een probleem op het gebied van de kinetische theorie van een gas met zwakke interactie op analoge wijze behandeld door introductie van drie onafhankelijke tijdschalen.

3. Toepassing van de "multiple-time-scales"-methode op de vergelijking van Van der Pol

Deze vergelijking is in het algemeen bekend in de vorm

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (3.1)$$

De transformatie $x \rightarrow \frac{dy}{dt}$ en een integratie naar t levert de vergelijking

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \varepsilon \left[\frac{dy}{dt} - \frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 \right] + y = 0 \quad (3.2)$$

waarvan Kevorkian uitgaat in [2], welke publicatie een handleiding is bij deze voordracht.

Er geldt dus, dat

$$f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = -\frac{dy}{dt} + \frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt}\right)^3. \quad (3.3)$$

Vergelijking (2.11)

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2} + y_0 = 0$$

heeft als oplossing

$$y_0(t_0, t_1) = A^{(0)}(t_1) \sin t_0 + B^{(0)}(t_1) \cos t_0. \quad (3.4)$$

De Fourier-coëfficiënten met betrekking tot f zijn:

$$a_n = 0 \quad (n \neq 1, 3) \qquad b_n = 0 \quad (n \neq 1, 3) \qquad (3.5a)$$

$$a_1 = \frac{A(0)^3}{4} + \frac{A(0)B(0)^2}{4} - A(0) \qquad (3.5b)$$

$$a_3 = \frac{A(0)^3}{12} - \frac{A(0)B(0)^2}{4} \qquad (3.5c)$$

$$b_1 = -\frac{B(0)^3}{4} - \frac{A(0)^2 B(0)}{4} + B(0) \qquad (3.5d)$$

$$b_3 = \frac{B(0)^3}{12} - \frac{A(0)^2 B(0)}{4} \qquad (3.5e)$$

De voorwaarden (2.18) en (2.19) gaan over in

$$2 \frac{dA(0)}{dt_1} + \frac{A(0)^3}{4} + \frac{A(0)B(0)^2}{4} - A(0) = 0 \qquad (3.6)$$

$$2 \frac{dB(0)}{dt_1} + \frac{B(0)^3}{4} + \frac{A(0)^2 B(0)}{4} - B(0) = 0. \qquad (3.7)$$

Wat betreft de beginvoorwaarden dient het volgende te worden opgemerkt.

y en $\frac{dy}{dt}$ hebben de ontwikkelingen

$$y = \sum_{n=0}^N \epsilon^n y_n(t_0, t_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial t_0} \sum_{n=0}^N \epsilon^n y_n(t_0, t_1) + \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{n=0}^N \epsilon^{n+1} y_n \\ &= (1 + \sum_{k=2}^{\infty} \epsilon^k \omega_k) \frac{\partial}{\partial t_0} \sum_{n=0}^N \epsilon^n y_n(t_0, t_1) + \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{n=0}^N \epsilon^{n+1} y_n \\ &= \frac{\partial y_0}{\partial t_0} + \sum_{n=1}^N \epsilon^n \left[\frac{\partial y_n}{\partial t_0} + \frac{\partial y_{n-1}}{\partial t_1} + \sum_{k=2}^n \omega_k \frac{\partial y_{n-k}}{\partial t_0} \right]. \end{aligned}$$

Aan de oorspronkelijke beginvoorwaarden

$$y(0) = a, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0$$

is dus voldaan als

$$y_0(0,0) = a, \quad y_n(0,0) = 0 \quad (n \neq 0) \quad (3.8a)$$

en

$$\frac{\partial y_0(0,0)}{\partial t_0} = 0, \quad \frac{\partial y_1(0,0)}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0(0,0)}{\partial t_1} = 0$$

(voor $n \geq 2$)

$$\frac{\partial y_n(0,0)}{\partial t_0} + \frac{\partial y_{n-1}(0,0)}{\partial t_1} + \sum_{k=2}^n \omega_k \frac{\partial y_{n-k}(0,0)}{\partial t_0} = 0. \quad (3.8b)$$

Er moet dus gelden

$$A^{(0)}(0) = 0, \quad B^{(0)}(0) = a. \quad (3.9)$$

Uit (3.6), (3.7) en (3.9) volgt dan

$$A^{(0)}(t_1) \equiv 0 \quad (3.10)$$

$$B^{(0)}(t_1) = 2a \left[a^2 - (a^2 - 4)e^{-t_1} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

zodat

$$y_0(t_0, t_1) = 2a \left[a^2 - (a^2 - 4)e^{-t_1} \right]^{-\frac{1}{2}} \cos t_0 \quad (3.12)$$

en

$$a_n = 0 \quad \forall n$$

$$b_n = 0 \quad (n \neq 1, 3)$$

$$b_1 = -\frac{B^{(0)3}}{4} + B^{(0)}$$

$$b_3 = \frac{B^{(0)3}}{12}.$$

Volgens (2.17) geldt voor $y_1(t_0, t_1)$

$$y_1(t_0, t_1) = A^{(1)}(t_1) \sin t_0 + B^{(1)}(t_1) \cos t_0 + \frac{B^{(0)}(t_1)^3}{96} \sin 3t_0. \quad (3.13)$$

De voorwaarden (2.20) en (2.21), waaraan $A^{(1)}$ en $B^{(1)}$ moeten voldoen, opdat y_2 geen seculaire termen bevat, luiden voor dit geval

$$2 \frac{dA^{(1)}}{dt_1} - 2\omega_2 B^{(0)} - A^{(1)} + \frac{A^{(1)} B^{(0)^2}{4} + \frac{B^{(0)^5}{128} - \frac{B^{(0)}}{4} = 0 \quad (3.14)$$

$$2 \frac{dB^{(1)}}{dt_1} - B^{(1)} + \frac{3}{4} B^{(1)} B^{(0)^2} = 0. \quad (3.15)$$

Uit (3.8) en (3.9) volgen de beginvoorwaarden voor $A^{(1)}$ en $B^{(1)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1(0,0)}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0(0,0)}{\partial t_1} &= \{ A^{(1)}(t_1) \cos t_0 - B^{(1)}(t_1) \sin t_0 + \\ &+ \frac{B^{(0)}(t_1)^3}{32} \cos 3t_0 + 2a \cdot -\frac{1}{2} [a^2 - (a^2 - 4)e^{-t_1}]^{-3/2} \cdot \\ &(a^2 - 4)e^{-t_1} \cos t_0 \} \Big|_{t_0=0, t_1=0} = A^{(1)}(0) + \frac{a^3}{32} - \frac{a^3}{8} + \frac{a}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$y_1(0,0) = B^{(1)}(0) = 0,$$

zodat

$$A^{(1)}(0) = \frac{3a^3 - 16a}{32}, \quad B^{(1)}(0) = 0. \quad (3.16)$$

De oplossingen van (3.14) en (3.15), met in acht neming van (3.16), zijn

$$\begin{aligned} A^{(1)}(t_1) &= \frac{B^{(0)}(t_1)}{8} \ln \frac{B^{(0)}(t_1)}{a} + \frac{B^{(0)}(t_1)}{64} (B^{(0)}(t_1)^2 + 5a^2 - 32) + \\ &+ \frac{B^{(0)}(t_1)t_1}{2} \left(\frac{1}{8} + 2\omega_2 \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$B^{(1)}(t_1) \equiv 0. \quad (3.18)$$

De term $\frac{B^{(0)} t_1}{2} \left(\frac{1}{8} + 2\omega_2\right)$ uit het rechterlid van $A^{(1)}(t_1)$ heeft de vorm $a \left[a^2 - (a^2 - 4)e^{-t_1} \right]^{-\frac{1}{2}} t_1 \left(\frac{1}{8} + 2\omega_2\right)$. Voor $t_1 \rightarrow \infty$ nadert deze term tot $t_1 \left(\frac{1}{8} + 2\omega_2\right)$. Opdat y_2 geen seculaire termen naar t_1 zal bevatten, kiezen we $\omega_2 = -\frac{1}{16}$.

De verkregen oplossing van de Van der Pol-vergelijking tot op orde ϵ is dus

$$y_0 + \epsilon y_1 = B^{(0)} \cos\left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right)t + \epsilon \left[\frac{B^{(0)}}{8} \ln \frac{B^{(0)}}{a} + \frac{B^{(0)}}{64} + (B^{(0)^2} + 5a^2 - 32) \right] \sin\left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right)t + \epsilon \frac{B^{(0)^3}{96} \sin 3\left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right)t \quad (3.19)$$

met $B^{(0)}(t_1) = 2a \left[a^2 - (a^2 - 4)e^{-t_1} \right]^{-\frac{1}{2}}$ en $t_1 = \epsilon t$.

Uit (3.19) blijkt, dat, onafhankelijk van de beginvoorwaarde $y(0) = a$, er een trillingstoestand ontstaat met een bepaalde amplitude. Daardoor heeft de oplossing een aanvaardbaar karakter. Hopelijk is de ontwikkeling uniform geldig.

4. De toepassing van de P.L.K.-methode op de vergelijking van Van der Pol

Ingevoerd worden de transformaties (zie [4])

$$y = y^{(0)}(\tau) + \epsilon y^{(1)}(\tau) + \epsilon^2 y^{(2)}(\tau) + \dots \quad (4.1)$$

$$t = \tau + \epsilon t^{(1)}(\tau) + \epsilon^2 t^{(2)}(\tau) + \dots \quad (4.2)$$

Substitutie hiervan in de vergelijking van Van der Pol leidt tot

$$\begin{aligned}
& (y^{(0)''} + \epsilon y^{(1)''} + \epsilon^2 y^{(2)''} + \dots)(1 + \epsilon t^{(1)'} + \epsilon^2 t^{(2)'} + \dots) - \\
& - (y^{(0)'} + \epsilon y^{(1)'} + \epsilon^2 y^{(2)'} + \dots)(\epsilon t^{(1)''} + \epsilon^2 t^{(2)''} + \dots) + \\
& + (y^{(0)} + \epsilon y^{(1)} + \epsilon^2 y^{(2)} + \dots)(1 + \epsilon t^{(1)'} + \epsilon^2 t^{(2)'} + \dots)^3 - \\
& - \epsilon (y^{(0)'} + \epsilon y^{(1)'} + \epsilon^2 y^{(2)'} + \dots)(1 + \epsilon t^{(1)'} + \epsilon^2 t^{(2)'} + \dots)^2 + \\
& + \frac{\epsilon}{3} (y^{(0)'} + \epsilon y^{(1)'} + \epsilon^2 y^{(2)'} + \dots)^3. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Er ontstaat het volgende nest van differentiaalvergelijkingen door coëfficiëntenvergelijking van ϵ -machten:

$$y^{(0)''} + y^{(0)'} = 0 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
y^{(1)''} + y^{(1)'} &= -y^{(0)''} t^{(1)'} + y^{(0)'} t^{(1)''} - 3y^{(0)'} t^{(1)'} + y^{(0)'} - \\
&\quad - \frac{y^{(0)'}{}^3}{3} \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{(2)''} + y^{(2)'} &= -y^{(1)''} t^{(1)'} - y^{(0)''} t^{(2)'} + y^{(1)'} t^{(1)''} + y^{(0)'} t^{(2)''} - \\
&\quad - 3y^{(1)'} t^{(1)'} - 3y^{(0)'} t^{(1)'}{}^2 - 3y^{(0)'} t^{(2)'} + 2y^{(0)'} t^{(1)'} + \\
&\quad + y^{(1)'} - y^{(1)'} y^{(0)'}{}^2 \tag{4.6}
\end{aligned}$$

De oorspronkelijke beginvoorwaarden waren

$$y(0) = a \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0. \tag{4.7}$$

Zij τ_1 de waarde van τ voor $t = 0$, dan volgt uit (4.2)

$$\tau_1 = -\epsilon t^{(1)'}(\tau_1) - \epsilon^2 t^{(2)'}(\tau_1) - \dots \tag{4.8}$$

Substitutie van (4.8) in $t^{(1)'}(\tau_1)$, $t^{(2)'}(\tau_1)$, ... en ontwikkeling naar machten van ϵ levert

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= -\varepsilon t^{(1)}(0 - \varepsilon t^{(1)}(\tau_1) - \varepsilon^2 t^{(2)}(\tau_1) - \dots) - \varepsilon^2 t^{(2)}(0 - \varepsilon t^{(1)}(\tau_1) - \\
&\quad - \varepsilon^2 t^{(2)}(\tau_1) - \dots) - \dots = -\varepsilon t^{(1)}(0) + \varepsilon^2 t^{(1)}(0 - \varepsilon t^{(1)}(\tau_1) - \dots) \\
&\quad t^{(1)'}(0) + \dots - \varepsilon^2 t^{(2)}(0) + \dots = -\varepsilon t^{(1)}(0) + \varepsilon^2 (t^{(1)}(0) t^{(1)'}(0) - \\
&\quad - t^{(2)}(0)) + \dots \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Uit (4.7a) volgt

$$a = y^{(0)}(\tau_1) + \varepsilon y^{(1)}(\tau_1) + \varepsilon^2 y^{(2)}(\tau_1) + \dots$$

ofwel

$$\begin{aligned}
a &= y^{(0)}(0 - \varepsilon t^{(1)}(0) + \varepsilon^2 (t^{(1)}(0) t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) + \dots) + \\
&\quad + \varepsilon y^{(1)}(0 - \varepsilon t^{(1)}(0) + \varepsilon^2 (t^{(1)}(0) t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) + \dots) + \dots \\
&= y^{(0)}(0) - \varepsilon t^{(1)}(0) y^{(0)'}(0) + \varepsilon^2 (t^{(1)}(0) t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) y^{(0)'}(0) + \dots \\
&\quad + \varepsilon y^{(1)}(0) - \varepsilon^2 t^{(1)}(0) y^{(1)'}(0) + \dots + \varepsilon^2 y^{(2)}(0) + \dots \\
&= y^{(0)}(0) + \varepsilon (y^{(1)}(0) - t^{(1)}(0) y^{(0)'}(0)) + \varepsilon^2 (y^{(2)}(0) - t^{(1)}(0) y^{(1)'}(0) + \\
&\quad + (t^{(1)}(0) t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) y^{(0)'}(0)) + \dots
\end{aligned}$$

zodat een deel der beginvoorwaarden nu luidt

$$y^{(0)}(0) = a \quad (4.10a)$$

$$y^{(1)}(0) = t^{(1)}(0) y^{(0)'}(0) \quad (4.10b)$$

$$y^{(2)}(0) = t^{(1)}(0) y^{(1)'}(0) - (t^{(1)}(0) t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) y^{(0)'}(0) \quad (4.10c)$$

De andere beginvoorwaarde, $\frac{dy(0)}{dt} = 0$, geeft aanleiding tot het volgende.

$$\frac{y^{(0)'} + \varepsilon y^{(1)'} + \varepsilon^2 y^{(2)'} + \dots}{1 + \varepsilon t^{(1)'} + \varepsilon^2 t^{(2)'} + \dots} = 0 \quad \text{voor } \tau = \tau_1 \quad (4.11)$$

Onder de veronderstelling, dat

$$1 + \varepsilon t^{(1)}(\tau_1) + \varepsilon^2 t^{(2)}(\tau_1) + \dots < \infty \quad (4.12)$$

geldt dan

$$y^{(0)'} + \varepsilon y^{(1)'} + \varepsilon^2 y^{(2)'} + \dots = 0 \quad \text{voor } \tau = \tau_1 \quad (4.13)$$

ofwel

$$\begin{aligned} & y^{(0)'}(0 - \varepsilon t^{(1)}(0) + \varepsilon^2(t^{(1)}(0)t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) + \dots + \\ & + \varepsilon y^{(1)'}(0 - \varepsilon t^{(1)}(0) + \varepsilon^2(t^{(1)}(0)t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) + \dots + \\ & + \varepsilon^2 y^{(2)'}(0 - \varepsilon t^{(1)}(0) + \varepsilon^2(t^{(1)}(0)t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0)) + \dots + \dots = \\ & = y^{(0)'}(0) - \varepsilon t^{(1)}(0)y^{(0)''}(0) + \varepsilon^2(t^{(1)}(0)t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0))y^{(0)''}(0) + \dots \\ & + \varepsilon y^{(1)'}(0) - \varepsilon^2 t^{(1)}(0)y^{(1)''}(0) + \dots + \varepsilon^2 y^{(2)'}(0) + \dots = \\ & = y^{(0)'}(0) + \varepsilon(y^{(1)'}(0) - t^{(1)}(0)y^{(0)''}(0)) + \\ & + \varepsilon^2(y^{(2)'}(0) - t^{(1)}(0)y^{(1)''}(0) + (t^{(1)}(0)t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0))y^{(0)''}(0)) + \dots = 0 \end{aligned}$$

zodat

$$y^{(0)'}(0) = 0 \quad (4.14a)$$

$$y^{(1)'}(0) = t^{(1)}(0)y^{(0)''}(0) \quad (4.14b)$$

$$y^{(2)'}(0) = t^{(1)}(0)y^{(1)''}(0) - (t^{(1)}(0)t^{(1)'}(0) - t^{(2)}(0))y^{(0)''}(0) \quad (4.14c)$$

De oplossing van (4.4), met in acht neming van (4.10a) en (4.14a) is

$$y^{(0)}(\tau) = a \cos \tau. \quad (4.15)$$

Substitutie van dit resultaat in (4.5) leidt tot

$$\begin{aligned} y^{(1)''} + y^{(1)} &= -2a \cos \tau t^{(1)'} - a \sin \tau t^{(1)''} - a \sin \tau + \frac{a^3 \sin^3 \tau}{3} = \\ &= \sin \tau \left(\frac{a^3}{4} - a - at^{(1)''} \right) - 2at^{(1)'} \cos \tau - \frac{a^3}{12} \sin 3\tau. \quad (4.16) \end{aligned}$$

De termen, welke de seculariteit van $y^{(1)}$ leveren, zijn $(\frac{a^3}{4} - a - at^{(1)'})\sin \tau$ en $-2at^{(1)'} \cos \tau$. Men elimineert deze seculariteit door te nemen

$$at^{(1)'} = 0 \quad (4.17)$$

en
$$\frac{a^3}{4} - a - at^{(1)'} = 0. \quad (4.18)$$

De combinatie (4.17), (4.18) levert 2 mogelijkheden

i) $a = 0 \rightarrow t^{(1)}$ willekeurig.

(4.16), met (4.10b) en (4.14b) geeft $y^{(1)}(\tau) \equiv 0$; een zelfde resultaat verkrijgt men voor alle hogere orde-termen $y^{(n)}(\tau)$. De oplossing is dus de nul-oplossing.

ii) $a \neq 0 \rightarrow t^{(1)'} = 0$, $t^{(1)} = 0$ en bovendien $a = \pm 2$. Voor $a = 2$ gaan (4.15), (4.16), (4.10b) en (4.14b) over in

$$\begin{aligned} y^{(0)}(\tau) &= 2 \cos \tau & y^{(1)''} + y^{(1)} &= -\frac{2}{3} \sin 3\tau \\ y^{(1)}(0) &= 0 & y^{(1)'}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dit levert

$$y^{(1)}(\tau) = -\frac{1}{4} \sin \tau + \frac{1}{12} \sin 3\tau. \quad (4.19)$$

Substitutie van de tot nog toe gevonden resultaten in (4.6) geeft aanleiding tot

$$\begin{aligned} y^{(2)''} + y^{(2)} &= \cos \tau (-4t^{(2)'} + \frac{1}{4}) - 2t^{(2)''} \sin \tau - \frac{1}{2} \cos 3\tau + \\ &+ \frac{1}{4} \cos 5\tau. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De voorwaarde van niet-seculariteit van $y^{(2)}$ naar τ eist

$$-4t^{(2)'} + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{en} \quad t^{(2)''} = 0$$

zodat

$$t^{(2)} = \frac{\tau}{16}. \quad (4.21)$$

Er geldt dus (4.2)

$$t = \tau + \frac{\varepsilon^2 \tau}{16} + O(\varepsilon^3). \quad (4.22)$$

Tot op een orde van ε^2 levert dit

$$\tau = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t.$$

De resultaten samenvattend, kan geschreven worden

$$y(t) = 2 \cos \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t + \varepsilon \left[-\frac{1}{4} \sin \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t + \frac{1}{12} \sin 3 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t \right]. \quad (4.23)$$

(4.23) is in volledige overeenstemming met (3.19), verkregen via de meersoortige tijdschalen-methode, wanneer men ook daar neemt $a = 2$ (dan $B^{(0)}(t_1) \equiv 2$).

5. Enkele slotopmerkingen

Ook bij de methode van de meersoortige tijdschalen dient vermeld te worden, dat er geen bewijs bestaat, dat de gevonden asymptotische ontwikkeling de ontwikkeling is van de oplossing van de differentiaalvergelijking. Een aanwijzing in die richting is wellicht het feit, dat de resultaten overeenkomen met die verkregen met andere methoden (b.v. met de methoden van Kryloff en Bogolinboff [5] en Struble [6], terwijl de uitkomst van de periodieke oplossing in overeenstemming is met die uit de PLK-methode).

Er is geen criterium bekend, waardoor aan de vorm van de differentiaalvergelijking gezien kan worden, hoeveel onafhankelijke tijdschalen geïntroduceerd moeten worden. Vooralsnog is dit dus een kwestie van fysieke intuïtie.

Deze methode heeft met vele anderen gemeen, dat er veel rekenwerk verricht moet worden. Daar staat tegenover, dat de methode der meersoortige tijdschalen een met de langzame tijd variërende amplitude geeft, in tegenstelling tot de PLK-methode, die dan ook alleen de periodieke oplossing geeft.

Literatuur

1. W. Eckhaus, Bijdrage tot dit colloquium: Inleiding in de theorie van singuliere storingsproblemen, p. 1-33.
2. J. Kevorkian, The Two Variable Expansion Procedure for the Approximate Solution of Certain Non-linear Differential Equations, 3 Dec. 1962, Douglas Report SM-42620.
3. C.H. Su, Kinetic Theory of a Weakly Coupled Gas, J. Math. Phys., Sept. 1964, vol. 5, no. 9, p. 1273-1290.
4. J.F. Frankena, Bijdrage tot dit colloquium: De methode van Poincaré, Lighthill en Kuo, p. 151-184.
5. N. Kryloff en N. Bogoluboff, Introduction to Non-linear Mechanics, translated by S. Lefschetz, Princeton University Press, 1947.
6. R.A. Struble, Nonlinear Differential Equations, McGraw-Hill Book Co, New York, 1956.

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

Constructie van uniforme benaderingen
volgens de theorie van Langer

P.J. v.d. Houwen

1. Inleiding

We beschouwen een storingsprobleem, waarvan de oplossing zowel een grenslaag- als een oscillerend karakter heeft. Dit geval werd reeds in de inleiding tot dit colloquium aangestipt, waar de volgende vergelijking ter sprake kwam:

$$\varepsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q(x)\phi = 0$$

$$Q(x) < 0 \text{ voor } x < 0$$

$$Q(x) > 0 \text{ voor } x > 0.$$

$Q(x)$ werd verder continu en begrensd verondersteld. De laatste eis laten we vallen en we staan ook geïsoleerde polen toe. De nulpunten worden omkeerpunten genoemd van de vergelijking en tezamen met de singulariteiten, overgangspunten. Zonder overgangspunten werd al afgeleid:

$$\phi(x, \varepsilon) = Q^{-1/4} \left\{ A \exp \left(- \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x Q^{1/2} d\xi \right) + B \exp \left(\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int^x Q^{1/2} d\xi \right) \right\} \\ \{1 + o(\varepsilon)\}. \quad (1.1)$$

Voor de genormaliseerde Bessel-vergelijking werd deze benadering reeds door Carlini in 1817 gegeven. Liouville en Green gaven onafhankelijk van elkaar in 1837 hetzelfde voor algemene $Q(x)$, terwijl Horn (1899) bewees, dat er inderdaad van een asymptotische benadering sprake is.

Gans (1915) was de eerste, die tot een oplossing kwam, wanneer er een enkelvoudig nulpunt toegelaten wordt. Daartoe benaderde hij $Q(x)$ in $x = 0$ lineair, zoals ook in de inleiding van dit colloquium gedaan is, waarmee de vergelijking van Airy verkregen wordt:

$$\varepsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \alpha_1 x \phi = 0.$$

De oplossingen hiervan zijn bekend en moeten voor $\varepsilon \rightarrow 0$ aangesloten worden aan de juiste combinatie van Liouville-Green benaderingen. Zonder het werk van Gans te kennen gaf Jeffreys in 1923 een analoge methode om de aansluitingsformules te verkrijgen. Ook dit bleef voorlopig onbekend, want in 1926 publiceerden Wentzel, Kramers en Brillouin nogmaals (onafhankelijk van elkaar) aansluitingsformules voor het enkelvoudige omkeerpunt. Een alternatieve methode om aansluitingsformules te vinden bestaat uit de "omzeiling" van het overgangspunt via het complexe vlak. Dit werd door Zwaan toegepast en door Kemble (1935) streng geformuleerd.

Een meer fundamentele asymptotische theorie werd in 1934 door Langer ontwikkeld. Deze komt er op neer, dat er een expliciet oplosbare vergelijking geconstrueerd wordt, die "zo goed mogelijk" op de gegeven vergelijking "lijkt". In enkele belangrijke gevallen kan aangetoond worden, dat de oplossingen inderdaad asymptotisch equivalent zijn, in het algemene geval is dit echter op z'n minst aannemelijk. Als voordelen van de Langer-theorie kunnen we noemen:

- a) De (formele) eerste termen van de asymptotische ontwikkeling zijn in de voor de physica belangrijke gevallen eenvoudig te verkrijgen en gelden voor het gehele interval, zodat aansluitingsformules eenvoudig af te leiden zijn.
- b) Het bewijs van de asymptotische equivalentie is voor alle gevallen in principe hetzelfde.
- c) De hoofdlijnen van de theorie zijn over te dragen op stelsels differentiaalvergelijkingen en niet lineaire vergelijkingen.

2. Theorie van Langer

De vergelijking

$$\varepsilon \phi'' + q(x)\phi = 0 \tag{2.1}$$

transformeren we volgens

$$\xi = \xi(x, \epsilon) \quad , \quad \phi = \tau(x)\phi(x).$$

Dit geeft

$$\phi_{\xi\xi} + \left(\frac{\xi''}{(\xi')^2} + 2 \frac{(1/\tau)'}{(1/\tau)\xi'} \right) \phi_{\xi} + \left(\frac{(1/\tau)''}{(1/\tau)(\xi')^2} + \frac{q(x)}{\epsilon(\xi')^2} \right) \phi = 0. \quad (2.2)$$

Met de keuze $\tau = \sqrt{\xi'}$ gaat deze vergelijking in normaalvorm over:

$$\epsilon \phi_{\xi\xi} + \gamma(\xi, \epsilon) \phi = 0 \quad (2.3)$$

waarin γ gedefiniëerd is als

$$\gamma(\xi, \epsilon) = (\xi')^{-2} q(x) + \epsilon (\xi')^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2}{dx^2} (\xi')^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

We willen nu de vergelijking (2.3) vergelijken met een expliciet oplosbare vergelijking en nagaan aan welke voorwaarden voldaan moet worden, opdat de oplossingen van (2.3) asymptotisch equivalent zijn met de oplossing van zo'n expliciet oplosbare vergelijking. Daartoe voeren we in een verzameling E van functies $Q(\xi)$ zó, dat als $Q \in E$,

$$\epsilon \phi_{0\xi\xi} + Q(\xi) \phi_0 = 0 \quad (2.5)$$

een bekende oplossing heeft. (In [9] vindt men een opsomming van dergelijke vergelijkingen.)

Indien we $\xi = \xi(x, \epsilon)$ zo kunnen kiezen, dat voldaan wordt aan:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q \in E \\ Q(\xi(x, \epsilon)) = \gamma(\xi(x, \epsilon), \epsilon) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

dan is (2.3) exact opgelost. Dit mogen we echter niet verwachten en we zullen ons er mee tevreden moeten stellen een $\xi(x, \epsilon)$ en een $Q(\xi)$ te vinden, die voldoen aan:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q \in E \\ Q(\xi(x, \epsilon)) = \gamma(\xi(x, \epsilon), \epsilon) + O(\epsilon^N), N > 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

d.w.z. we lossen vergelijking (2.6) in benadering op.

Het is nu aannemelijk, dat de door (2.5) bepaalde functie ϕ_0 de oplossing ϕ benadert, immers voor ϕ geldt:

$$\varepsilon \phi_{\xi\xi} + \gamma(\xi, \varepsilon) \phi \equiv \varepsilon \phi_{\xi\xi} + (Q(\xi) + O(\varepsilon^N)) = 0.$$

Alleen in de nulpunten van $Q(\xi)$ zal dit niet het geval zijn. Hier gaan we nog op in. Het al of niet asymptotische karakter van de benadering $\phi_0(\xi, \varepsilon)$ kan onderzocht worden met de methode van de variërende parameters en iteratie volgens Picard. Dit geeft ons de ontwikkeling:

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \sum_0^n I^V \phi_0(\eta, \varepsilon) + I^{n+1} \phi(\eta, \varepsilon) \quad (2.8)$$

waarin $I =$ Integraal-operator $W^{-1}(\phi_0) \int_{\xi_0}^{\xi} d\eta K(\xi, \eta)$

$$K(\xi, \eta) = (\gamma(\eta, \varepsilon) - Q(\eta))(\phi_{01}(\xi) \phi_{02}(\eta) - \phi_{01}(\eta) \phi_{02}(\xi))$$

$$W(\phi_0) = \text{Wronskiaan van (2.5)}.$$

Voor een aantal gevallen, waarin aan (2.7) voldaan kan worden, is (2.8) geanalyseerd ([3], [4], [5], [6]) en dit bleek inderdaad de asymptotische benadering voor ϕ te zijn. Op dit aspect van de theorie (de zgn. tweede phase) zullen we niet ingaan, maar we zullen ons concentreren op de eerste phase d.w.z. het construeren van formele asymptotische benaderingen.

a) Eerste benadering

De vorm van $\gamma(\xi, \varepsilon)$ suggereert het verband:

$$Q(\xi) = (\xi')^{-2} q(x) \quad (2.9)$$

want dan is

$$Q(\xi) - \gamma(\xi, \varepsilon) = -\varepsilon \left(\frac{Q(\xi)}{q(x)} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{Q(\xi)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.10)$$

en voorwaarde (2.7) luidt: $\xi = \xi(x)$ en $Q(\xi)$ zò te bepalen, dat

$$\begin{cases} (\xi')^{-2} q(x) = Q(\xi) \in E \\ \frac{Q(\xi)}{q(x)} = o(1). \end{cases} \quad (2.11)$$

We zullen laten zien, dat we aan (2.11) in een groot aantal gevallen kunnen voldoen door $Q(\xi)$ hetzelfde analytische karakter te geven als $q(x)$:

Stel dat x_0, \dots, x_m alle overgangspunten in het beschouwde interval van $q(x)$ zijn dan kiezen we:

$$Q(\xi) = \prod_{j=0}^m (\xi - \xi_j)^{n_j}$$

waarin n_j de orde van het overgangspunt x_j is, en ξ_j nog nader te bepalen; ξ_0 kiezen we willekeurig en we schrijven (2.9) in de vorm

$$\int_{\xi_0}^{\xi} Q^{\frac{1}{2}}(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x q^{\frac{1}{2}}(x) dx. \quad (2.12)$$

Blijkbaar is $\xi(x_0) = \xi_0$; we willen ook dat $\xi(x_j) = \xi_j$ voor $j = 1, \dots, m$. Daartoe vormen we de m vergelijkingen:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_j} Q^{\frac{1}{2}}(\xi) d\xi = \int_{x_0}^{x_j} q^{\frac{1}{2}}(x) dx$$

voor elk van de ξ_j 's. Hiermee heeft $Q(\xi)$ hetzelfde analytische karakter als $q(x)$. Wanneer we nu aantonen dat in een overgangspunt geldt

$$\xi - \xi_j \sim x - x_j, \quad (2.13)$$

dan zijn we klaar. Nu is (2.12) in de omgeving van $\xi_j = \xi(x_j)$ te schrijven als

$$A \int_{\xi_j}^{\xi} (\xi - \xi_j)^{n_j} d\xi = B \int_{x_j}^x (x - x_j)^{n_j} dx$$

waarin A en B constanten zijn. Hieruit volgt direct (2.13).

We nemen aan dat $\xi = \xi(x)$ regulier is en lokaal een (1-1) afbeelding voorstelt, zodat we hebben verkregen:

$$\phi(x, \varepsilon) \sim \phi_0(\xi(x), \varepsilon) \left(\frac{Q(\xi(x))}{q(x)} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.14)$$

Zoals al opgemerkt is zal dit in de omkeerpunten van $\phi(x, \varepsilon)$ geen goede benadering meer zijn voor $\phi(x, \varepsilon)$. Toch biedt (2.14) twee belangrijke voordelen boven de Liouville-Green benaderingen nl. ten eerste, de benadering (2.14) heeft geen singuliere punten, zodat ook in de directe omgeving van de omkeerpunten voor $\varepsilon \rightarrow 0$ een correcte benadering verkregen wordt, dit in tegenstelling tot de Liouville-Green benaderingen, en ten tweede, (2.14) benadert, met uitzondering van de omkeerpunten uniform één en dezelfde integraal $\phi(x, \varepsilon)$ van (2.3).

Als eenvoudig voorbeeld om bovenstaande theorie te illustreren beschouwen we het geval $q(x) > 0$. De eenvoudigste functie met een soortgelijk analytisch gedrag is wel

$$Q(\xi) \equiv 1.$$

Volgens (2.9) is dan

$$\xi(x) = \int_0^x q^{\frac{1}{2}}(x) dx$$

en de vergelijking voor ϕ_0 :

$$\varepsilon \phi_{0\xi\xi} + \phi_0 = 0$$

met oplossingen

$$\phi_0 = \exp \pm \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \xi(x).$$

Substitutie in (2.14) geeft

$$\phi(x, \varepsilon) \sim q^{-\frac{1}{4}}(x) \left\{ A e^{\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x q^{\frac{1}{2}}(x) dx} + B e^{-\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x q^{\frac{1}{2}}(x) dx} \right\}.$$

De asymptotische equivalentie van de benadering (2.14) en de exacte oplossing $\phi(x, \epsilon)$ werd door Langer [1] voor het geval zonder overgangspunten en het geval van een enkelvoudig omkeerpunt gegeven. Bij Erdélyi [2] vindt men een samenvatting hiervan.

Opmerking: In de electronentheorie van metalen blijkt het nodig te zijn ook in de omkeerpunten over correcte benaderingen te beschikken [7]. Hierover kunnen we enkele algemene opmerkingen maken: Schrijf $\gamma(\xi, \epsilon)$ als

$$\gamma(\xi, \epsilon) = Q(\xi) + \epsilon R(\xi)$$

en laten ξ_j en $\bar{\xi}_j$ nulpunten zijn van $Q(\xi)$ resp. $\gamma(\xi, \epsilon)$. Voor $\epsilon \rightarrow 0$ zullen ξ_j en $\bar{\xi}_j$ samenvallen. Schrijf $Q(\xi)$ als

$$Q(\xi) = f(\xi) \prod_j (\xi - \xi_j)^{n_j}$$

en definiëer

$$\bar{Q}(\xi, \epsilon) = f(\xi) \prod_j (\xi - \bar{\xi}_j)^{n_j}$$

$$\bar{R}(\xi, \epsilon) = Q(\xi) - \bar{Q}(\xi, \epsilon) + \epsilon R(\xi). \quad (2.15)$$

We kunnen nu $\gamma(\xi, \epsilon)$ schrijven als

$$\gamma(\xi, \epsilon) = \bar{Q}(\xi, \epsilon) + \bar{R}(\xi, \epsilon)$$

met de eigenschap dat: \bar{Q} en \bar{R} dezelfde nulpunten hebben

\bar{Q} en Q hetzelfde analytisch karakter hebben.

Indien nu $\bar{R}(\xi, \epsilon) = O(\epsilon^\alpha)$, $\alpha > 0$ (2.16)

dan wordt $\phi(\xi, \epsilon)$ in alle punten benaderd door de oplossing $\bar{\Phi}_0$ van

$$\epsilon \bar{\Phi}_{0\xi\xi} + \bar{Q}(\xi, \epsilon) \bar{\Phi}_0 = 0.$$

Op grond van (2.15) mag men verwachten, dat aan (2.16) voldaan wordt. $\bar{\Phi}_0(\xi, \epsilon)$ onderscheidt zich van $\Phi_0(\xi, \epsilon)$ hierin, dat aan de omkeerpunten correcties toegevoegd zijn, gegeven door $\bar{\xi}_j - \xi_j$. $\bar{\xi}_j$ moet men berekenen uit

$$Q(\xi) + \epsilon R(\xi) = 0.$$

We kunnen dit schrijven in de vorm

$$\xi = \xi_j + \left(\frac{-R(\xi)}{f(\xi) \prod_{i \neq j} (\xi - \xi_i)^{n_i}} \right)^{\frac{1}{n_j}} \frac{1}{\epsilon^{n_j}}.$$

Volgens een stelling van Lagrange [10] geldt voor ξ

$$\xi = \bar{\xi}_j = \xi_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{n}{n_j}}}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\xi_j^{n-1}} \rho^{-n}(\xi_j)$$

waarin

$$\rho(\xi) = \left(\frac{-R(\xi)}{f(\xi) \prod_{i \neq j} (\xi - \xi_i)^{n_i}} \right)^{\frac{1}{n_j}} \frac{1}{\epsilon^{n_j}};$$

de correcties zijn dus $O(\epsilon^{\frac{n}{n_j}})$ zodat inderdaad aan (2.16) voldaan wordt.

b) Hogere orde benaderingen

Hoe meer $\gamma(\xi, \epsilon)$ en $Q(\xi)$ op elkaar zullen gelijken des te beter zal de benadering zijn. Tot dusver zijn er drie algoritmen te onderscheiden die coëfficiënten $Q(\xi)$ leveren, welke tot op willekeurige orde van ϵ op $\gamma(\xi, \epsilon)$ gelijken:

- 1° Methode van Langer
- 2° Methode van Cherry
- 3° Methode van Moriguchi.

De constructie van Langer is in feite een generalisatie van de transformatie van de afhankelijke variabele: als nieuwe variabele wordt ingevoerd een lineaire combinatie van $\Phi_0(\xi, \epsilon)$ en $\frac{d}{d\xi} \Phi(\xi, \epsilon)$ en wel zodanig dat deze in hogere orde op een expliciet oplosbare vergelijking gelijkst. Voortzetting van dit proces geeft steeds betere benaderingen. Langer [3] behandelde hiermee zowel de eerste als de tweede fase voor één enkelvoudig nulpunt en enkelvoudige pool. Kazarinoff [4] en Mc Kelvey [5] pasten deze methode toe op resp. 2 enkelvoudige nulpunten en één 2^{de} orde nulpunt.

Cherry [6] construeerde een reeksontwikkeling naar machten van ε voor de oplossing $\xi = \xi(x, \varepsilon)$ van (2.6). Deze reeks divergeert, maar afbreking bij een term ε^n geeft $\gamma - Q = O(\varepsilon^n)$. Voor een enkelvoudig nulpunt verkreeg Cherry aldus een asymptotische benadering van de orde $\frac{n}{2}$. Moriguchi [7] kiest voor ξ de eerste benadering en past op de vergelijking

$$\phi_{\xi\xi} + \gamma(\xi, \varepsilon)\phi = 0$$

de gehele procedure nogmaals toe. Kiest men voor de nieuwe onafhankelijke variabele weer de eerste benadering, dan wordt de correctie op de coëfficiënt van de nieuwe afhankelijke variabele van een hogere orde ε . Voortzetting levert dus steeds betere benaderingen voor de gegeven vergelijking.

We zullen wat nader ingaan op de methode van Cherry:

We ontwikkelen $\xi(x, \varepsilon)$ en $Q(\xi(x, \varepsilon))$ naar machten van ε

$$\xi(x, \varepsilon) = \sum_0^{\infty} \varepsilon^n \xi_n(x)$$

$$Q(\xi(\varepsilon)) = \sum_0^{\infty} \varepsilon^n Q_n(x)$$

en merken daarbij op dat

$$Q_0(x) = Q(\xi_0(x))$$

$$Q_1(x) = \xi_1 Q_{\xi}(\xi_0)$$

$$Q_2(x) = \xi_2 Q_{\xi}(\xi_0) + \xi_2^2 Q_{\xi\xi}(\xi_0).$$

Substitutie in (2.5) en coëfficiënten-vergelijking geeft:

$$Q(\xi_0)(\xi_0')^2 = q(x)$$

$$2Q(\xi_0)\xi_1' + \xi_0' Q_{\xi}(\xi_0)\xi_1 = (\xi_0')^{-\frac{1}{2}} ((\xi_0')^{-\frac{1}{2}})'' = q_1(x)$$

$$2Q(\xi_0)\xi_2' + \xi_0' Q_{\xi}(\xi_0)\xi_2 = q_2(x)$$

De rechterleden van deze vergelijkingen zijn steeds uit te drukken in de voorgaande oplossingen $\xi_i(x)$, terwijl het linkerlid met uitzondering van de eerste vergelijking lineair van de eerste orde in de onbekende is. In $\xi_0(x)$ herkennen we de reeds besproken eerste benadering. Voor ξ_1 vinden we na integratie

$$\xi_1(x) = Q^{-\frac{1}{2}}(\xi_0(x)) \int^x Q^{\frac{1}{2}}(\xi_0(x)) \left(\frac{Q(\xi_0)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\left(\frac{Q(\xi_0)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \right)' dx. \quad (2.9)$$

Voor de verdere coëfficiënten ξ_i gelden analoge uitdrukkingen, waarmee men $\gamma(\xi, \varepsilon)$ en $Q(\xi)$ tot op elke orde van ε met elkander kan laten overeenstemmen.

3. Toepassingen

a. Aansluitingsformules voor de Lionville-Green benaderingen ter weerszijden van een n^{de} orde nulpunt. Formules van Jeffreys.

Stel dat $x = 0$ een n^{de} orde nulpunt voor $q(x)$ is en dat $q(x) \approx ax^n$ met $a > 0$ in de omgeving van $x = 0$. De oplossing van

$$\varepsilon \phi'' + q(x)\phi = 0$$

wordt dan volgens (2.8) benaderd door

$$\Phi_0(\xi(x), \varepsilon) \left(\frac{\xi(x)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.1)$$

waarin Φ_0 de oplossing is van

$$\varepsilon \Phi_{0\xi\xi} + \xi^n \Phi_0 = 0 \quad (3.2)$$

en $\xi(x)$ bepaald wordt door

$$\int_0^\xi \xi^{n/2} d\xi = \int_0^x q^{\frac{1}{2}}(x) dx \rightarrow \xi(x) = \left(\frac{n+2}{2} \int_0^x q^{\frac{1}{2}}(x) dx \right)^{2/n+2}.$$

Vergelijking (3.2) is door de substituties:

$$\xi = \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{n+2}{2} t \right)^{2/n+2}, \quad \phi_0 = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}(n+2)}} \psi$$

over te voeren in:

$$\psi_{tt} + \frac{1}{t} \psi_t + \left(1 - \frac{(1/n+2)^2}{t^2} \right) \psi = 0$$

met oplossingen

$$\psi = J_{\frac{\pm 1}{n+2}}(t),$$

dus de oplossingen van (3.2) zijn

$$\phi_0(\xi, \varepsilon) = (-\varepsilon)^{-1/2(n+2)} \xi^{\frac{1}{2}} J_{\frac{\pm 1}{n+2}} \left(\frac{2}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}} \xi^{\frac{n+2}{2}} \right). \quad (3.3)$$

Substitutie in (3.1) geeft

$$\phi_{1,2}(x, \varepsilon) \sim q^{-\frac{1}{4}}(x) \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x q^{\frac{1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{\pm 1}{n+2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x q^{\frac{1}{2}} dx \right). \quad (3.4)$$

Voor $x \neq 0$ en $\varepsilon \rightarrow 0$ moeten we ϕ in de Liouville-Green benaderingen kunnen uitdrukken. We nemen het geval $n = \text{oneven}$, dan geldt

$$\phi(-|x|, \varepsilon) \sim (-q)^{-\frac{1}{4}} \exp \frac{\pm 1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x (-q)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$x < 0 \rightarrow \arg \int_0^x q^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{2} \pi$$

$$0 < \arg t < 2\pi \rightarrow J_{\nu}(t) \sim e^{(v+\frac{1}{2})\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left(t + \frac{1}{2}v\pi + \frac{1}{4}\pi \right).$$

We proberen nu die combinaties van $J_{\frac{\pm v}{n+2}}(t)$ te vinden ($v = \frac{1}{n+2}$), die asymptotisch equivalent zijn met Liouville-Green benaderingen: Daartoe stellen we

$$(-q)^{-\frac{1}{4}} \exp \pm it = q^{-\frac{1}{4}} \sqrt{t} \left\{ A \frac{\pm}{+} J_{\frac{\pm v}{n+2}}(t) + B \frac{\pm}{+} (J_{-\frac{\pm v}{n+2}}(t)) \right\}.$$

A_+ en B_+ volgen dus uit

$$A_+ e^{\frac{3}{2} v \pi i} + B_+ e^{-\frac{3}{2} v \pi i} = -\sqrt{2\pi}$$

$$A_+ e^{\frac{1}{2} v \pi i} + B_+ e^{-\frac{1}{2} v \pi i} = 0$$

$$A_+ = \frac{\sqrt{2\pi}}{2 \sin v\pi} e^{-(v-1)\frac{1}{2}\pi i} \quad B_+ = \frac{\sqrt{2\pi}}{2 \sin v\pi} e^{(v-1)\frac{1}{2}\pi i}.$$

Op grond van het feit dat (3.4) uniform geldig is op het gehele interval blijft deze combinatie van Bessel-functies ook rechts van het nulpunt gelden.

We vinden de verbindingsformule:

$$(-q)^{-\frac{1}{4}} e^{it} \leftrightarrow q^{-\frac{1}{4}} \sqrt{t} \frac{\sqrt{2\pi}}{2 \sin v\pi} \{e^{\frac{1}{2}(1-v)\pi i} J_{\frac{1}{2}v}(t) + e^{\frac{1}{2}(v-1)\pi i} J_{-\frac{1}{2}v}(t)\}.$$

Nu geldt:

$$x > 0 \rightarrow \arg \int_0^x q^{\frac{1}{2}} dx = 0$$

$$|\arg(t)| < \pi \rightarrow J_{\frac{1}{2}v}(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi).$$

Substitutie en uitwerking geeft, als we het reële deel van de asymptotische oplossing nemen:

$$(-q(x))^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x (-q)^{\frac{1}{2}} dx\right) \leftrightarrow q(x)^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^x q^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{4}\pi\right).$$

Iets dergelijks geldt voor de andere Lionville-Green benadering en de gevallen waarin n even is.

Voor $n = 1$ staan deze verbindingsformules bekend als de "Jeffreys-Kramers connection-formulas".

b. Het waterstof-atoom

Schrödinger's vergelijking voor het waterstof-atoom wordt gegeven door

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \right) \left(H + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0.$$

Het systeem bestaat uit een relatief zware kern met lading $+e$ en een electron met lading $-e$ en massa m ; de potentiële energie bedraagt $-e^2/r$, h is de constante van Planck en H de totale energie. In bolcoördinaten zijn de variabelen te scheiden en voor de radiële golf functie $R(r)$ geldt

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left\{ \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(H + \frac{e^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R = 0,$$

waarin l een separatie constante is, die de waarden $0, 1, 2, \dots$ aanneemt. De transformatie $R = S/r$ geeft:

$$S'' + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left\{ H + \frac{e^2}{r} - \frac{h^2 l(l+1)}{8\pi^2 m r^2} \right\} S = 0. \quad (3.5)$$

We willen uit deze vergelijking de quasi-klassieke resultaten van Bohr-Sommerfeld afleiden. De quasi-klassieke limiet ontstaat per definitie, wanneer de Broglie-golflengte λ klein is, maar de impuls p van het deeltje willekeurig, d.w.z. niet uitzonderlijk groot. Volgens de fundamentele relatie

$$\lambda = h/p$$

komt dit formeel overeen met $h \ll 1$. We willen het electron voor die kleine r -waarden beschouwen, waarvoor de energie nagenoeg geheel door de centrifugale energie bepaald wordt, dus

$$\frac{p^2}{2m} \sim \frac{h^2 l(l+1)}{8\pi^2 m r^2} \sim \frac{h^2 l^2}{m r^2}$$

m.a.w.

$$l \sim \frac{rp}{h}.$$

In de quasi-klassieke limiet van het H-atoom geldt dus $l \gg 1$ en vergelijking (3.5) is van de besproken vorm met

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \quad q(r) = H + \frac{e^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{8\pi^2 m r^2} = \frac{Hr^2 + e^2 r - \hbar^2 l(l+1)/8\pi^2 m}{r^2}.$$

$q(r)$ heeft de enkelvoudige nulpunten

$$r_{1,2} = \frac{e^2 \pm \sqrt{\{e^4 + 4H\hbar^2 l(l+1)/2\pi^2 m\}}}{-2H}$$

dus

$$q(r) = H(r - r_1)(r - r_2)/r^2.$$

Aangezien $H < 0$ is, zal S tussen de omkeerpunten oscilleren en daarbuiten zich exponentieel gedragen. De pool in $r = 0$ sluiten we van het te beschouwen interval uit en we eisen

$$S(r) \text{ eindig op } r \geq r_0 > 0.$$

Voor $Q(\xi)$ kiezen we de functie $\alpha^2(1 - \xi^2)$, zodat ϕ_0 gegeven wordt door

$$\epsilon \phi_0 \xi \xi + \alpha^2(1 - \xi^2)\phi_0 = 0. \quad (3.6)$$

$R(r)$ wordt benaderd door

$$R \sim r^{-1} \phi_0(\xi, \epsilon) \left(\frac{\alpha^2(1 - \xi^2)}{q(r)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

In $\xi = \xi(r)$ worden de constanten zo gekozen dat r_1 met -1 en r_2 met $+1$ correspondeert:

$$\int_1^\xi (\alpha^2(1 - \xi^2))^{\frac{1}{2}} d\xi = \int_{r_2}^r q^{\frac{1}{2}}(r) dr \text{ en } \int_1^{-1} (\alpha^2(1 - \xi^2))^{\frac{1}{2}} d\xi = \int_{r_2}^{r_1} q^{\frac{1}{2}}(r) dr.$$

Voor α^2 vinden we dus

$$\alpha^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{r_1}^{r_2} q^{\frac{1}{2}}(r) dr \right]^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{e^2}{2\sqrt{-H}} - \sqrt{\frac{\hbar^2 l(l+1)}{8\pi^2 m}} \right\}^2 \pi^2.$$

De transformatie $\xi = \xi(x)$ is door Kazarinoff [4] onderzocht en blijkt lokaal 1-1 te zijn.

Vergelijking (3.6) gaat door de substitutie $\eta = \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \xi$ over in

$$\phi_{0n\eta} + \left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{\varepsilon\alpha^2}} - \eta^2 \right) \phi_0 = 0.$$

Nu geldt:

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow |\eta| \rightarrow \infty \text{ voor } r \geq r_0 \text{ en } \xi \neq 0.$$

De eis dat $S(r)$ eindig moet zijn voor alle $r \geq r_0$ impliceert dat ϕ_0 eindig moet zijn voor $|\eta| \rightarrow \infty$, hetgeen alleen dan het geval is, wanneer

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\varepsilon\alpha^2}} = 2n + 1, \quad n \text{ positief geheel getal.}$$

De oplossingen zijn dan de zgn. Hermite functies ϕ_{0n} van de orde n [8]

$$\phi_{0n} = e^{-\frac{1}{2}\eta^2} H_n(\eta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \xi^2\right) \cdot H_n\left(\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \xi\right)$$

waarin H_n de Hermite polynoom voorstelt.

In de quasi-klassieke limiet vinden we de discrete toestanden:

$$R_n(r) \sim \frac{1}{r} \left(\frac{\alpha^2(1-\xi^2)}{q(r)} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi^2\right) H_n\left(\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \xi\right).$$

Uitwerking van de relatie $\sqrt{\frac{\alpha^2}{\varepsilon}} = 2n + 1$ geeft verder:

$$-H = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{1(1+1)} \right)^2} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 (n+1+1)^2}.$$

Literatuur

- [1] R.E. Langer, Trans. Amer. Math. Soc. 33(1931); 34(1932);
- [2] A. Erdelyi, J. Math. Phys. (1960);
- [3] R.E. Langer, Trans. Amer. Math. Soc. (1949);
- [4] N.D. Kazarinoff, Arch. Rat. Mech. & Anal. (1958);
- [5] R.W. McKelvey, Trans. Amer. Math. Soc. (1955);
- [6] T.M. Cherry, Trans. Amer. Math. Soc. (1950);
- [7] H. Moriguchi, J. Phys. Soc. Japan (1959);
- [8] I.N. Sneddon, Special functions of Math. phys. and Chemistry
University math. tests pg 137;
- [9] R.B. Dingle, Appl. Sci. Res. B5 (1956);
- [10] E.T. Whittaker & C.N. Watson, A Course of Modern Analysis.

Colloquium partiële differentiaalvergelijkingen met kleine parameter

ERRATA DEEL II

Er staat:	Lees:
p.163, r. 15 v.b.	
... orde $\varepsilon^{q_0/(q_0+1)}$... orde $\varepsilon^{1/(q_0+1)}$
p.179, (11.15b)	
..., $\sigma = f_2(\xi)$..., $\sigma = f_2(\xi)\eta$
p. 181, r. 7 v.b.	
$\lim_{\zeta} \dots$	$\lim_{z} \dots$
p. 181, (12.7)	
... $\frac{\partial^2 \bar{\psi}_{\zeta}}{\partial \bar{y}^2} = 0$... $\frac{\partial^2 \bar{\psi}_z}{\partial \bar{y}^2} = 0$
p. 181, (12.8)	
$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{\zeta} = \frac{\partial \bar{\psi}_{\zeta}}{\partial \bar{y}} \dots \\ \bar{\psi}_{\zeta} \approx \dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_z = \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{y}} \dots \\ \bar{\psi}_z \approx \dots \end{array} \right.$
p. 181, (12.9)	
$\bar{\psi}_{\zeta} = \dots$	$\bar{\psi}_z = \dots$
p. 182, (12.14)	
... = $\lim_{\zeta} y = \dots$... = $\lim_{\xi} \bar{y} = \dots$



Er staat:

Lees:

p. 222, (2.12)

$$\dots - f(y_0, \frac{dy_0}{dt_0})$$

$$\dots - f(y_0, \frac{\partial y_0}{\partial t_0})$$

p. 232, (4.12)

$$1 + \epsilon t^{(1)}(\tau_1) + \epsilon^2 t^{(2)}(\tau_1) + \dots$$

$$1 + \epsilon t^{(1)'}(\tau_1) + \epsilon^2 t^{(2)'}(\tau_1) + \dots$$

p. 234, (4.23)

$$\dots 2 \cos \left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right) + \dots$$

$$\dots 2 \cos \left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right)t + \dots$$

$$\dots \sin 3 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right) \Big]$$

$$\dots \sin 3 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right)t \Big]$$

p.240, laatste regel

$$\dots n_j$$

$$\dots \frac{1}{2}n_j \quad (2x)$$

p.243, r.4 v.b.

$$\dots \rho^{-n}(\xi_j)$$

$$\dots \rho^{+n}(\xi_j)$$

p.244, r.16 v.b.

$$Q(\xi(\epsilon)) = \dots$$

$$Q(\xi(x, \epsilon)) = \dots$$

p.246, laatste regel

$$\dots \left\{ A_{\mp} J_{\nu}(t) + B_{\mp} (J_{-\nu}(t)) \right\}$$

$$\dots \left\{ A_{\pm} J_{\nu}(t) + B_{\pm} J_{-\nu}(t) \right\}$$

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by a valid receipt or invoice. This ensures transparency and allows for easy auditing of the accounts.

In the second section, the author details the various methods used to collect and analyze data. This includes both primary and secondary research techniques. The primary research involved direct observation and interviews with key stakeholders, while secondary research focused on reviewing existing literature and industry reports.

The third section presents the findings of the study. It highlights several key trends and patterns observed in the data. For example, there was a significant increase in the use of digital marketing channels, and a corresponding decrease in traditional advertising methods. These findings are supported by statistical analysis and visual representations of the data.

Finally, the document concludes with a series of recommendations based on the research findings. These recommendations are designed to help organizations optimize their marketing strategies and improve their overall performance. The author suggests that a more data-driven approach to marketing is essential for success in the current market environment.