MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

DE INVLOED VAN WIND OP ZEESTROMING

Voorlopig rapport no. 1.

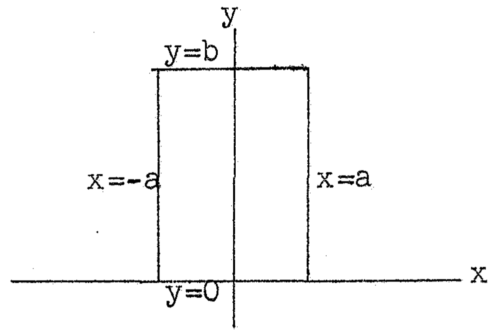
H.A. Lauwerier.

1 9 5 4 .

INLEIDING.

Dit rapport is de eerste van een serie voorlopige rapporten, waarin telkens min of meer afgeronde onderdelen van het algemene probleem van wind en water behandeld zullen worden. Later zullen deze rapporten tot een definitief samenvattend rapport verenigd worden.

Hier wordt het algemene, gelineariseerde, probleem van stroming ten gevolge van een variabel windveld, beschouwd. Op de gebruikelijke wijze wordt Laplace transformatie toegepast. Het getransformeerde probleem kon gereduceerd worden tot de bepaling van een Greense functie. Zoals reeds door Prof. van Dantzig aangegeven kan dit weer teruggevoerd worden tot een integraalvergelijking van Fredholm. Een aanzienlijke vereenvoudiging is bereikt, doordat voor een oneindig lange strook de Greense functie expliciet gevonden kan worden.



Ik formuleer het mathematische model van de stromingen in de Noordzee a.v.

In de rechthoek $x = \pm a$, $y = 0$, $y = b$ gelden de differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}
&\frac{v_1}{\partial t} + \lambda v_1 - \Omega v_2 + \frac{\partial v}{\partial x} = W_1(x,y,t) \\
&\frac{\partial v_2}{\partial t} + \lambda v_2 + \Omega v_1 + \frac{\partial v}{\partial y} = W_2(x,y,t) \qquad (1) \\
&\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{aligned}
x &= \pm a \qquad & v_1 &= 0 \\
y &= 0 & v_2 &= 0 \qquad (2) \\
y &= b & v &= 0 \,.
\end{aligned}$$

De grootheden v_1 en v_2 zijn de stromingscomponenten in X- en Y-richting, v is de verhoging van het zeeniveau t.o.v. de gemiddelde stand als het O-niveau. De constanten λ en Ω vertegenwoordigen de invloed van de wrijving en van de Coriolisversnelling. De functies W_1 en W_2 zijn de X en Y componenten van de windkrachten.

Laplacetransformatie van (1) en (2), waarbij b.v.

$$\bar{v}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \, v_1 \, dt$$

voert het stelsel (1) over in

$$\begin{aligned}
&(s+\lambda)\, \bar{v}_1 - \Omega \bar{v}_2 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = W_1 \\
&(s+\lambda)\, \bar{v}_2 + \Omega \bar{v}_1 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = W_2 \qquad (3) \\
&\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} + s\bar{v} = 0
\end{aligned}$$

met overeenkomstige randvoorwaarden.

Eliminatie van $\bar{v}_1$ en $\bar{v}_2$ geeft voor $\bar{v}$

$$\Delta \bar{v} - k^2 \, \bar{v} = F(x,y) \qquad (4)$$

met

$$k^2 = s \left\{ \frac{\Omega^2}{s+\lambda} + (s+\lambda) \right\} \qquad (5)$$

en

$$F(x,y) = \left(\frac{\partial \overline{w}_1}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}_2}{\partial y}\right) - \frac{\Omega}{s+\lambda}\left(\frac{\partial \overline{w}_1}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w}_2}{\partial x}\right) \tag{6}$$

De randvoorwaarden zijn nu

$$\begin{cases} y = b & \overline{v} = 0 \\ x = \pm a & (s+\lambda)\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \Omega \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} = (s+\lambda)\,\overline{w}_1 + \Omega\,\overline{w}_2 \\ y = 0 & \Omega \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial x} - (s+\lambda)\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \Omega \overline{w}_1 - (s+\lambda)\overline{w}_2 \end{cases} \tag{7}$$

Beschouw dus het volgende probleem

$$\Delta z - k^2 z = F(x,y) \tag{8}$$

$$\begin{cases} \text{op } C_1 & z = 0 \\ \text{op } C_2 & \dfrac{\partial z}{\partial n} + \alpha \dfrac{\partial z}{\partial s} = f(C_2) \end{cases} \tag{9}$$

waarbij C_1 de rand $y = b$ en C_2 de rand $x = \pm a$ met $y = 0$ voorstelt; $\frac{\partial}{\partial n}$ en $\frac{\partial}{\partial s}$ zijn de normale en tangentiele afgeleide aldaar.

Het probleem (8) en (9) kan teruggebracht worden tot de bepaling van een Greense functie $G(x,y,\xi,\eta)$, welke binnen de gegeven rechthoek een logarithmische singulariteit bezit van het type

$$G \sim -\ln r \quad \text{voor} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \longrightarrow 0.$$

Voorts is

$$\Delta G - k^2 G = 0 \tag{10}$$

$$\begin{array}{ll} \text{op } C_1 & G = 0 \\ \text{op } C_2 & \dfrac{\partial G}{\partial n} - \alpha \dfrac{\partial G}{\partial s} = 0 \quad . \end{array} \tag{11}$$

De vorm van de stelling van Green welke ik hier wil gebruiken, is nml.

$$2\pi U(\xi,\eta) + \iint_{\square} \left\{ U(\Delta - k^2)V - V(\Delta - k^2)U \right\} dxdy = \int_C \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds \tag{12}$$

met U regulier binnen de rechthoek en V een logarithmische singulariteit als hierboven.

Toepassing van (12) met $U = z$ en $V = G$ geeft

$$2\pi z(\xi,\eta) = \iint_{\square} F(x,y)\, G(x,y,\xi,\eta)\, dxdy - \int_{C_2} f\, G\, ds \tag{13}$$

waardoor z expliciet in G uitgedrukt wordt.

Het probleem (10) (11) om G te vinden is echter te moeilijk om rechtstreeks op te lossen en daarom beschouw ik het veel eenvoudiger probleem

$$\Delta u - k^2 u = 0 \qquad (14)$$

$$x = \pm a \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$y \longrightarrow \pm\infty \qquad u \longrightarrow 0 \qquad (15)$$

en $u \backsim -\ln r$ voor $r \longrightarrow 0$.

Een elementaire oplossing van (14) is

$$\exp(-vx + ity) \qquad (16)$$

waarbij $v = \sqrt{t^2 + k^2}$.

Een oplossing van (14) welke de vereiste singulariteit bezit, is

$$K_0(kr) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -|x-\xi| v + i\,(y-\eta)t \right\} \frac{dt}{v} \qquad (17)$$

welke dus uit elementaire oplossingen (16) opgebouwd is.

Om nu aan de randvoorwaarden (15) te kunnen voldoen, stel ik

$$u = K_0(kr) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1\, e^{xv} + \varphi_2\, e^{-xv}) \exp\left\{ i(y-\eta)t \right\} \frac{dt}{v} \qquad (18)$$

waarbij φ_1 en φ_2 nader te bepalen **functies** van t en ξ zijn.

De randvoorwaarden bij $x = \pm a$ zijn van het type

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\, e^{iyt}\, dt = 0$$

voor <u>alle</u> y. Dus moet $\varphi = 0$ zijn.

De randvoorwaarden leveren nu

$$(v-\alpha it)e^{-(a+\xi)v} + (v-\alpha it)\varphi_1\, e^{-av} - (v+\alpha it)\varphi_2\, e^{av} = 0$$

$$-(v+\alpha it)e^{-(a-\xi)v} + (v-\alpha it)\varphi_1\, e^{av} - (v+\alpha it)\varphi_2\, e^{-av} = 0$$

waaruit φ_1 en φ_2 opgelost kunnen worden:

$$\varphi_1 = \frac{e^{-(2a+\xi)v}}{2\,\mathrm{Sh}\,2\,av} + \frac{v+\alpha it}{v-\alpha it}\,\frac{e^{\xi v}}{2\,\mathrm{Sh}\,2\,av} \qquad (19)$$

$$\varphi_2 = \frac{e^{-(2a-\xi)v}}{2\,\mathrm{Sh}\,2\,av} + \frac{v-\alpha it}{v+\alpha it}\,\frac{e^{-\xi v}}{2\,\mathrm{Sh}\,2\,av}.$$

Samenvattend dus

$$u = K_o(kr) + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{-2av}Ch(x-\xi)v}{Sh\ 2\ av} + \frac{\psi e^{-(x+\xi)v} + \psi^* e^{(x+\xi)v}}{2\ Sh\ 2\ av}\right\} e^{i(y-\eta)t}\frac{dt}{v} \tag{20}$$

met

$$\psi = \frac{v-\alpha it}{v+\alpha it}\ .$$

Nu dit probleem opgelost is, ga ik het wat moeilijker maken door ook de scheve randvoorwaarde bij $y = 0$ er bij te nemen:

$$\Delta u_1 - k^2 u_1 = 0 \qquad |x| < a \quad 0 < y < \infty \tag{21}$$

$$x = \pm a \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$$

$$y = 0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

$$y \longrightarrow \infty \qquad u_1 \longrightarrow 0$$

en $\quad u_1 \backsim - \ln r \quad$ voor $\quad r \longrightarrow 0$.

Stelt men $\quad u_1 = u + w$

dan is w regulier binnen de open rechthoek en geldt voor w

$$\Delta w - k^2 w = 0 \tag{23}$$

$$x = \pm a \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{24}$$

$$y = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha \frac{\partial w}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right)\ .$$

Om w te vinden pas ik de formule van Green (12) toe op $U = w$ en $V = u\ (x,y,\xi,\eta,-\alpha)$.

We vinden dan

$$2\pi w(\xi,\eta) = \int_{-a}^{a} w(x,o)\,\gamma\,(x,o,\xi,\eta,-\alpha)\,dx + \int_{-a}^{a} u(x,o,\xi,\eta,-\alpha)\,\gamma\,(x,o,\xi,\eta,\alpha)dx \tag{25}$$

waarbij

$$\gamma\,(x,y,\xi,\eta,\alpha) = -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y,\xi,\eta,\alpha) \tag{26}$$

De waarde van w op de rand $y = 0$ volgt dus uit de integraalvergelijking van Fredholm

$$w(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} u(\xi,o,x,o,-\alpha)\,\gamma\,(\xi,o,x,o,\alpha)d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} w(\xi)\,\gamma\,(\xi,o,x,o,-\alpha)d\xi \tag{27}$$

Op analoge wijze kan ik een stap verder gaan en G zelf bepalen via u_1. Schrijf maar $G = u_1 + w_1$ en pas op w_1 en $u_1(-\alpha)$ de formule van Green toe. Er resulteert wederom een integraalvergelijking, waarbij $\frac{\partial w}{\partial y}$ op de bovenrand u = b gevonden moet worden.

Stel ik echter meteen

$$G = u + W$$

dan vind ik twee simultane integraalvergelijkingen voor W op de benedenrand y = 0 en b.v. $\frac{\partial W}{\partial y}$ op de bovenrand y = b.

Voor W moet gelden

$$\Delta W - k^2 W = 0 \tag{28}$$

$$x = \pm a \qquad \frac{\partial W}{\partial x} - \alpha \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

$$y = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial y} + \alpha \frac{\partial W}{\partial x} = -\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{29}$$

$$y = b \qquad W = -u\,.$$

Uit de formule van Green volgt nu

$$2\pi W(\xi,\eta) = \int_{-a}^{a} \Big\{ W(x,o)\gamma(x,o,\xi,\eta,-\alpha) + u(x,o,\xi,\eta,-\alpha)\gamma(x,o,\xi,\eta,\alpha)\Big\}\,dx$$
$$+ \int_{-a}^{a} \Big\{ W^*(x,b)\, u(x,b,\xi,\eta,-\alpha) + u(x,b,\xi,\eta,\alpha)\gamma(x,b,\xi,\eta,-\alpha)\Big\}\,dx \tag{30}$$

waarbij

$$W^*(x,y) = -\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) W(x,y) \tag{31}$$

Hieruit kunnen twee simultane integraalvergelijkingen worden afgeleid in de functies $W(x,o)$ en $W^*(x,b)$.