STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Over de berekening van de Elliptische Integralen van de eerste en de tweede soort, en van de Elliptische Functies van Jacobi

door

R.P. van de Riet

Juni 1962

Inleiding

Voor de berekening van de Elliptische Integralen en de Elliptische Functies hebben wij een procedure in ALGOL-60 gemaakt.
Voor de Elliptische Integralen bestond reeds zo'n procedure (zie [3] en [4]). Deze wordt besproken in § 18 van dit rapport.
Ze leek ons echter nodeloos ingewikkeld en omvangrijk.
Onze procedure is gebaseerd op de transformaties van Landen en Gauss en de theorie van het arithmetisch-geometrisch-gemiddelde.
Ze levert waarden waarvan ten hoogste het elfde cijfer één eenheid fout kan zijn.

Definitie: Zij $\Delta = \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$ met $0 \leq k \leq 1$
dan verstaan we onder:

de onvolledige elliptische integraal v.d. 1° soort: $\int_0^\varphi \frac{1}{\Delta}\, d\varphi = F(k,\varphi)$

" " " " " 2° soort: $\int_0^\varphi \Delta\, d\varphi = E(k,\varphi)$

" volledige " " " 1° soort: $F(k,\frac{\pi}{2}) = K(k)$

" " " " " 2° soort: $E(k,\frac{\pi}{2}) = E(k)$

Verder is $B(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\Delta}\, d\varphi = \frac{1}{k^2}\left\{E(k,\varphi) - k'^2 F(k,\varphi)\right\}$

en $B(k) = B(k, \frac{\pi}{2})$.

Als $F(k,\varphi)=u$ dan verstaan we onder de elliptische functies van Jacobi:

$$sn(u,k) = \sin\varphi$$

$$cn(u,k) = \cos\varphi$$

$$dn(u,k) = \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}$$

Voor de onvolledige elliptische integralen eisen we dat $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.
Voor de elliptische functies eisen we dat $0 \leq u \leq K(k)$.

Hoofdstuk I. DE TRANSFORMATIES

§ 1 De transformatie van Landen. zie [1]

Als $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{(1+k')\operatorname{tg}\varphi}{1-k'\operatorname{tg}^2\varphi}$ gelden de volgende relaties:

Zij $k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'}$: $\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = \dfrac{1-k_1}{1+k_1}\operatorname{tg}\varphi$

$$F(k_1,\varphi_1) = (1+k')F(k,\varphi)$$

$$E(k_1,\varphi_1) = \frac{2}{1+k'}\Big[E(k,\varphi)+k'F(k,\varphi)\Big] - k_1\sin\varphi_1$$

Opmerking $k_1 < k$ als $0<k<1$, want:

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-k'^2}{(1+k)^2} = \left(\frac{k}{1+k'}\right)^2$$

Bij voortgezette toepassing van bovengenoemde transformatieformules gaat $k_n \longrightarrow 0$, want: $k_n < k_{n-1}^2 < \ldots < k^2$ (als $0<k<1$)

Als we eisen dat $0 \leqq \varphi < \pi/2$ dan kunnen we met een eenvoudige beschouwing over het teken van de tangens te weten komen in welk quadrant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ terecht komen.
Zij Q_i het i^e quadrant.
Als $\varphi_\nu \in Q_i$ dan $\varphi_\nu = (i-1)\frac{\pi}{2} + \varphi_\nu^*$. Daar ook $\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu \in Q_{\bar{i}}$ geldt dus $\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu = (i-1)\frac{\pi}{2} + \bar{\varphi}_{\nu+1}$ dus $\varphi_{\nu+1} = 2(i-1)\frac{\pi}{2} + \varphi_\nu^* + \bar{\varphi}_{\nu+1}$

we weten dat $0 \leqq \varphi_\nu^* + \bar{\varphi}_{\nu+1} < \pi$. Dus als $\varphi_\nu \in Q_{i_\nu}$ dan is òf

$\varphi_{\nu+1} \in Q_{2i_\nu-1}$ òf $\varphi_{\nu+1} \in Q_{2i_\nu}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Als } \operatorname{tg}\varphi_{\nu+1} > 0 \text{ dan } \varphi_{\nu+1} \in Q_{2i_\nu-1} \\ \text{als } \operatorname{tg}\varphi_{\nu+1} < 0 \text{ dan } \varphi_{\nu+1} \in Q_{2i_\nu} \end{array}\right\} \quad i_{\nu+1} = 2i_\nu - \frac{1+\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\varphi_{\nu+1})}{2}$$

$$\text{dus } i_{\nu+1}-1 = 2(i_\nu-1) + \frac{1-\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\varphi_{\nu+1})}{2}$$

$$\text{dus } i_{\nu+1} = 1 + \sum_{i=0}^{\nu} 2^{\nu-i}\,\frac{1-\operatorname{sgn}(\operatorname{tg}\varphi_{i+1})}{2} = 1 + n_{\nu+1}$$

Zij $\varphi^*_{\nu+1} = \varphi_{\nu+1} \pmod{\frac{\pi}{2}}$ dan zijn er twee mogelijkheden:

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \quad \varphi^*_{\nu+1} \geq 0 \text{ dan } \varphi_{\nu+1} = \varphi^*_{\nu+1} + n_{\nu+1}\cdot \pi/2 \\ \\ 2^\circ \quad \varphi^*_{\nu+1} < 0 \text{ dan } \varphi_{\nu+1} = \varphi^*_{\nu+1} + (n_{\nu+1}+1)\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varphi_{\nu+1} = \varphi^*_{\nu+1} + \\ + \left[+ n_{\nu+1} + \frac{1-\mathrm{sgn}(\mathrm{tg}\,\varphi_{\nu+1})}{2} \right] \cdot \frac{\pi}{2} \end{array}$$

en verder: $\mathrm{sgn}(\sin\varphi_{\nu+1}) = \mathrm{sgn}\left\{ 1.5 - \mathrm{entier}\left(\frac{n_{\nu+1}+1}{4}\right).4 \right\}$.

§ 2 Keren we de rollen van φ en φ_1 en van k en k_1 in de bovengenoemde transformatie om dan wordt de transformatie:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{(1+k'_1)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1}{1-k'_1\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_1} \quad \text{of} \quad \mathrm{tg}(\varphi - \varphi_1) = \frac{1-k}{1+k}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1$$

en $k = \frac{1-k'_1}{1+k'_1}$ dus $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{1}{1+k'_1} \quad F(k,\varphi)$$

$$E(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k'_1}{2}\left\{ E(k,\varphi) + k \sin\varphi \right\} - k'_1\, F(k_1, \varphi_1)$$

<u>Opmerking</u>: $k_1 > k$ als $0 < k < 1$ want:

$$k_1 = \sqrt{\frac{k}{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2}} > \sqrt{k} > k.$$

Bij voortgezette toepassing van bovengenoemde transformatie formules gaat $k_n \to 1$ als $0 < k < 1$ want:

$$k_n > \sqrt{k_{n-1}} > \ldots > (k)^{2^{-n}}$$

§ 3 <u>De transformatie van Gauss</u> zie [1] en [2]

Als $\sin\varphi_1 = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}$ gelden de volgende relaties:

Zij $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$

$F(k_1, \varphi_1) = (1+k)F(k,\varphi)$

$E(k_1,\varphi_1) = \frac{1}{1+k}\left\{2\,E(k,\varphi) - k'^2\,F(k,\varphi) + 2k\sin\varphi\,\cos\varphi_1\right\}$

weer gaat $k_n \to 1$ voor toenemende n.

§ 4 Het omgekeerde van de vorige transformatie is:

$$\sin\varphi_0 = \frac{(1+k_1)\sin\varphi_1}{1+k_1\sin^2\varphi_1} \qquad \text{en} \qquad k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$$

en: $F(k,\varphi) = (1+k_1)F(k_1, \varphi_1)$

$$E(k,\varphi) = \frac{1}{1+k_1}\left\{2\,E(k_1, \varphi_1) - k_1'^2\,F(k_1, \varphi_1) + 2\,k_1\sin\varphi_1\cos\varphi\right\}$$

en $k_n \to 0$ voor toenemende n.

§ 5 <u>Het arithmetisch-geometrisch gemiddelde</u> zie [2]

Zij gegeven 2 niet-negatieve reële getallen a en b. Recursief definieren we nu de volgende rijen:

$$a_n = \frac{(a_{n-1}+b_{n-1})}{2} \;;\quad b_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot b_{n-1}} \quad \text{en } a_o = a,\ b_o = b.$$

In het vervolg zijn a en b $\leqq 1$, en $a \geq b$.

Daar $a_n^2 - b_n^2 = \frac{1}{4}(a_{n-1}-b_{n-1})^2$ volgt $a \geqq a_n \geqq b_n \geqq b$

$$a_n - b_n = \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n+b_n} = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{4(a_n+b_n)} \leqq \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{8\,b_o} \leqq \ldots \leqq \frac{(a_o-b_o)^{2^n}}{(8\,b_o)^{2^n-1}}$$

Zij n=m+p dan is

$$(a_m-a_n)=(a_m-a_{m+1}+a_{m+1}-a_{m+2}+\dots+a_{n-1}-a_n) \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}\left\{ a_m-b_m+a_{m+1}-b_{m+1}+\dots+a_{n-1}-b_{n-1}\right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{8\ b_o}{2}\left\{ \frac{a_m-b_m}{8\ b_o}+\left(\frac{a_m-b_m}{8\ b_o}\right)^2+\dots+\left(\frac{a_m-b_m}{8\ b_o}\right)^{2^{p-1}}\right\} \leqq$$

$$= \frac{a_m-b_m}{2}\left\{1+\dots+\left(\frac{a_m-b_m}{8\ b_o}\right)^{2^p-1}\right\} = \frac{a_m-b_m}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{a_m-b_m}{8\ b_o}\right)^{2^p}}{1-\frac{a_m-b_m}{8\ b_o}} \leqq a_m-b_m < \varepsilon$$

als $m > N_o$ voor alle p
en $|b_m-b_n| = |b_m-a_m+a_m-a_n+a_n-b_n| < \varepsilon$ als $n,m > M_1$.
De rijen a_n en b_n convergeren dus naar dezelfde limiet M(a,b), het <u>arithmetisch geometrisch gemiddelde</u>. (afgekort ag M) Verder is van belang op te merken dat

$$a_n-b_n = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{4(a_n+b_n)}$$ dus als a_{n-1} en b_{n-1} in d decimalen overeenstemmen dan stemmen a_n en b_n zeker in 2d decimalen overeen, mits $b_o, a_o > 1/4$.
Met behulp hiervan kunnen we de transformatie formules in § § 1,2,3,en 4 een andere vorm geven.
Beschouwen we eerst de transformatie met $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$ kiezen we a=1 en b=k' dan is:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} = \frac{2\sqrt{1-k_1}}{\sqrt{1+k_1}}\cdot\frac{1+k_1}{1+k_1+1-k_1} = \sqrt{1-k_1^2} = k_1'$$

evenzo is $\frac{b_\gamma}{a_\gamma} = k'_\gamma$.
Beschouwen we nu de transformatie met $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ kiezen we a=1 en b=k dan is:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} = k_1$$

evenzo is $\frac{b_\gamma}{a_\gamma} = k_\gamma$.

§ 6 Numerieke beschouwing

§ 6a De transformaties in § § 1,2,3 en 4 voeren na herhaald toepassen $\Delta(k)=\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$ over in $\Delta(k_n)$ als $k_1=\frac{1-k'}{1+k'}$ dan schrijven we $\Delta(k)$ in de vorm:

$$\Delta(k)=\sqrt{1.\cos^2\varphi+k'^2\sin^2\varphi}=\sqrt{a^2.\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}$$

dan is: $\Delta(k1)=\frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi_1+b_1^2\sin^2\varphi_1}$

$$\Delta(k_n)=\frac{1}{a_n}\sqrt{a_n^2\cos^2\varphi_n+b_n^2\sin^2\varphi_n}$$

Als a_n en b_n numeriek niet meer te onderscheiden zijn, d.w.z. als a_n en b_n in twaalf decimalen overeenstemmen, dan is $\Delta(k_n)$ numeriek gelijk aan: 1.
De integralen $F(k_n,\varphi_n)$ en $E(k_n,\varphi_n)$ worden dan eenvoudige integralen

$$E(k_n,\varphi_n)=F(k_n,\varphi_n)\doteq\varphi_n \quad \text{(numeriek!)}$$

Als $k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ dan schrijven we $\Delta(k)$ in de vorm:

$$\Delta(k)=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\varphi} \qquad \text{dan is:}$$

$$\Delta(k_1)=\frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2-b_1^2\sin^2\varphi_1}$$

$$\Delta(k_n)=\frac{1}{a_n}\sqrt{a_n^2-b_n^2\sin^2\varphi_n}$$

Als a_n en b_n numeriek niet meer te onderscheiden zijn dan is

$$\Delta(k_n)=\sqrt{1-\sin^2\varphi_n}=\cos\varphi_n. \qquad \text{en}$$

$$\left.\begin{aligned}F(k_n,\varphi_n)&=\int_0^{\varphi_n}\frac{1}{\cos\varphi_n}=\tfrac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi_n}{1-\sin\varphi_n}\\ E(k_n,\varphi_n)&=\int_0^{\varphi_n}\cos\varphi_n=\sin\varphi_n.\end{aligned}\right\}\text{(Numeriek!)}$$

§ 6b We hebben nu vier transformaties tot onze beschikking waarbij òf $k_n \to 0$ òf $k_n \to 1$.
Het is duidelijk dat we, als k dicht bij 0 resp. 1 ligt, de eerste soort, resp. de tweede soort transformaties gebruiken.
We zullen nu aantonen dat: als $k < 0.9539$ dan kunnen we in <u>drie</u> stappen het a g M in 12 cijfers berekenen van 1 en k', en als $k \geq 0.9539$ kunnen we in <u>twee</u> stappen het a g M in 12 cijfers berekenen van 1 en k
als $k < 0.9539$ dan is $k' > 0.3$ en voor

$a_0=1$	en $b_0=0.3$	geldt:
$a_1=0.65$	$b_1=0.54772\ 25575\ 05166$	
$a_2=0.59886\ 12787\ 52583$	$b_2=0.59667\ 38324\ 90028$	
$a_3=0.59776\ 75556\ 21305$	$b_3=0.59776\ 65550\ 38990$	
$a_4=0.59776\ 70553\ 30097$	$b_4=0.59776\ 70553\ 29938$	

dus $a_4-b_4 = 1.59\ 10^{-13}$

en als

$a_0=1$	en $b_0=0.9539$	geldt:
$a_1=0.97695$	$b_1=0.97667\ \ 8043$	
$a_2=0.97681\ 40215$	$b_2=0.97681\ 40118$	
$a_3=0.97681\ 40166$	$b_3=0.97681\ 40166$	

dus $a_3-b_3 < (0.97)^2.10^{-16} < 10^{-16}$.

Als dus $k < 0.9539$ dan kunnen we kiezen uit de transformaties van § 1 en § 4, want voor deze transformaties geldt $k_n \to 0$ en $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$.
Kiezen we dus volgens het slot van § 5: $b=k'$ en $a=1$ dan is $b > 0.3$ en na 3 stappen geldt:
het a g M van a en b is gelijk aan

$$a_4 = \frac{a_3+b_3}{2} \quad .$$

En als $k \geq 0.9539$ kunnen we kiezen uit de transformaties van § 2 en § 3.

Voor deze transformaties geldt $k_n \rightarrow 1$ en $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$. We kiezen dus nu b=k en a=1, dan is $b \geqq 0.9539$ en na 2 stappen geldt: het a g M van a en b is gelijk aan

$$a_3 = \frac{a_2+b_2}{2} \quad .$$

§ 6c In de geconstrueerde procedures is niet k als parameter gebruikt maar α =bg sin (k), de reden ligt nu wel voor de hand immers als $k < 0.9539$ dan wordt b=k' en als $k \geqq 0.9539$ dan is b=k, bovendien gebruiken we in een der procedures naast de waarde van k ook die van k', terwijl $k \geqq 0.9539$. Willen we nu $k' = \sqrt{1-k^2}$ berekenen in 12 cijfers dan mag k^2 niet als eerste cijfer een 9 hebben, want

$$1-0.9\ d_2.....d_{12} = 0.0\ d_2^*.....d_{12}^*$$

in plaats van 12 cijfers kennen we er dan dus maar 11.

§ 6d De beschouwing aan het eind van de vorige § geeft ons meteen een middel om tussen de transformaties een keuze te doen.

Nemen we eerst de transformaties van § 1 en § 4 die we gebruiken voor $k < 0.9539$ en $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$.
In § 4 wordt de $\sin\varphi$ getransformeerd, in de formule voor $E(k,\varphi)$ staat echter ook een $\cos\varphi$ dit betekent dat we $\cos\varphi$ moeten uitrekenen op de volgende wijze: $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$.
Evenals in § 6c kan het gebeuren dat we dan de $\cos\varphi$ in minder dan 12 cijfers kennen.
Voor de berekening van $E(k,\varphi)$ moeten we deze transformatie dus verwerpen. De transformatie in § 1 vertoont dit euvel niet, voor de uniformiteit hebben we daarom zowel voor $E(k,\varphi)$, $F(k,\varphi)$ als voor $B(k,\varphi)$ een procedure gemaakt die gebaseerd is op deze transformatie.

Beschouwen we nu de transformaties van § 2 en § 3 die we gebruiken voor $k \geqq 0.9539$ en $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$.

In § 6a is betoogd dat

$$F(k_n, \varphi_n) = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi_n}{1-\sin\varphi_n} \quad .$$

We vestigen de aandacht op $1-\sin\varphi_n$. Numeriek is deze formule niet te gebruiken op grond van dezelfde redenen als boven beschreven zijn.
De transformatie van § 3 is een sinus transformatie, we weten dus $\sin\varphi_n$ in 12 cijfers. Hoeveel cijfers we echter weten van $1-\sin\varphi_n$ is niet bekend.
Het is duidelijk waarom we deze transformatie dus terzijde schoven. (Hetzelfde argument van de vorige alinea is hier overigens ook op zijn plaats).

De transformatie van § 2 is een tangens transformatie daar

$$\frac{1+\sin\varphi_n}{1-\sin\varphi_n} = \frac{(1+\sin\varphi_n)^2}{\cos^2\varphi_n} = \left(\frac{1+\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\varphi_n}}{\mathrm{cotg}\,\varphi_n}\right)^2$$

is dus

$$F(k_n\, \varphi_n) = \ln \frac{1+\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\varphi_n}}{\mathrm{cotg}\,\varphi_n}$$

teller en noemer zijn nu in 12 cijfers bekend, dus dit gaat altijd goed.
Voor $k \geq 0.9539$ blijft ons dus maar één keus over.

§ 6e Numeriek geldt: $F(k_n\, \varphi_n) = \varphi_n$ (als n voldoende groot is) voor de transformaties van § 1 en § 4.
Dit betekent: Als gegeven zijn k en $F(k,\varphi)=u$ dan geldt $\varphi_n = u$ transformeren we φ_n nu weer terug m.b.v. de formules van § 2 en § 3 dan is:

$$\sin\varphi_o = \mathrm{sn}(u,k)$$
$$\cos\varphi_o = \mathrm{cn}(u,k)$$
$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_o} = \mathrm{dn}(u,k) \quad .$$

Voor de transformaties van § 2 en § 3 geldt:

$F(k_n,\varphi_n)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi_n}{1-\sin\varphi_n}$ dus als $\exp(F^2(k_n,\varphi_n))=\mathrm{Exp}$

$\sin\varphi_n=\frac{1+\mathrm{Exp}}{1-\mathrm{Exp}}$ door terugtransformeren vinden we weer de sn, cn en dn.

§ 7 We concludeerden reeds dat we over slechts twee bruikbare transformaties beschikken, met deze kunnen we nu ook procedures maken die de gevraagde resultaten leveren.
We zetten de transformaties in een wat gemakkelijker vorm.

1^o $k < 0.9539$ dan nemen we dus de transformatie van § 1

$\mathrm{tg}\,\varphi_1=\frac{(1+k')\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-k'\,\mathrm{tg}^2\varphi}$ we nemen zoals we in § 5 opmerkten a=1 en b=k' dan is:

$$a_1\,\mathrm{cotg}\,\varphi_1=\tfrac{1}{2}(a\,\mathrm{cotg}\,\varphi-{}^{ba}/a\,\mathrm{cotg}\,\varphi).$$

2^o $k \geq 0.9539$ dan nemen we dus de transformatie van § 2

$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{(1+k')\,\mathrm{tg}\,\varphi_1}{1-k'\,\mathrm{tg}^2\varphi_1}$ nu nemen we a=1 en b=k dan is:

$$\mathrm{cotg}\,\varphi_1=\left\{a\,\mathrm{cotg}\,\varphi+\sqrt{a^2\,\mathrm{cotg}^2\varphi+a^2-b^2}\right\}\frac{1}{a+b}\quad .$$

Hoofdstuk II DE ONVOLLEDIGE ELLIPTISCHE INTEGRALEN.

§ 8a Procedure voor $F(k,\varphi)$ als $k < 0.9539$ dan nemen we dus $a=1$, $b=k'$

$$a_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 = \tfrac{1}{2}(a \operatorname{cotg}\varphi - {}^{ba}/a \operatorname{cotg}\varphi) \text{ met } k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$$

$$F(k,\varphi) = \frac{1}{1+k} F(k_1, \varphi_1) = \frac{a}{a+b} F(k_1 \varphi_1) = \frac{a}{2a_1} F(k_1 \varphi_1) =$$

$$= \frac{1}{16\ a_4} \quad F(k_4, \varphi_4) = \frac{\varphi_4}{16\ a_4}$$

waarin

$$\varphi_4 = \operatorname{bg\ tg} \frac{a_4}{a_4 \operatorname{cotg} \varphi_4} + \left\{ n_4 + \frac{1-\operatorname{sign}(a_4 \operatorname{cotg} \varphi_4)}{2} \right\} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Numeriek kunnen we de waarde van $2\varphi_4$ beter bepalen, omdat de numerieke waarde π^* van π beter met de exacte waarde van π overeenkomt dan de numerieke waarde $\frac{\pi^*}{2}$ van $\frac{\pi}{2}$ met de exacte waarde van $\frac{\pi}{2}$. Immers: $\pi - \pi^* = 0,3.10^{-13}$ en $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^*}{2} = 4,8.10^{-13}$.

Leggen we de ALGOL procedure hiernaast dan stelt in de eind uitkomst $F:=(P/a)/32$, P de waarde van $2\varphi_4$ voor, a de waarde van a_4 en de variabele si de waarde van $a_4 \operatorname{cotg} \varphi_4$.

§ 8b Procedure voor $F(k,\ )$ als $k \geq 0.9539$. We gebruiken dan de transformatie van § 2 met $a=1$ en $b=k$

$$\operatorname{cotg} \varphi_1 = \left\{ a \operatorname{cotg}\varphi + \sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2\varphi + a^2 - b^2} \right\} \frac{1}{a+b}, \text{ met } k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

$$F(k,\varphi) = (1+k_1')F(k_1, \varphi_1) = (1+\frac{1-k}{1+k})F(k_1, \varphi_1) = \frac{2}{1+k} F(k_1, \varphi_1)$$

dus $F(k,\varphi) = \frac{2a}{a+b} F(k_1, \varphi_1) = \frac{a}{a_1} F(k_1, \varphi_1) = \frac{a}{a_3} \quad F(k_3, \varphi_3)$

dus $F(k,\varphi) = \frac{1}{a_3} \ln \frac{1+\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 \varphi_3}}{\operatorname{cotg} \varphi_3}$.

In de ALGOL procedure: `F:=ln ((1+sqrt(1+si×si))/si)/a` waarin $si = \operatorname{cotg} \varphi_3$ en $a = a_3$.

§ 9a <u>Procedure voor $E(k,\varphi)$</u> als $k < 0.9539$ we nemen $a=1$ en $b=k'$ en de transformatie van § 1

$$a_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 = \tfrac{1}{2}\left(a \operatorname{cotg}\varphi - {}^{ba}/_{a \operatorname{cotg}\varphi}\right) \text{ en } k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$$

$$E(k,\varphi) = \frac{1+k'}{2}\left\{ E(k_1, \varphi_1) + k_1 \sin \varphi_1 \right\} - k' F(k,\varphi)$$

$$= \frac{a_1}{a} E(k_1, \varphi_1) - \frac{b}{a} F(k,\varphi) + \frac{a-b}{2a} \sin \varphi_1 =$$

$$= a_4 \; E(k_4, \varphi_4) - (b + 2\; b_1 a_1 + 4\; b_2 a_2 + 8\; b_3 a_3) \frac{F(k_4, \varphi_4)}{16\; a_4} +$$

$$+ \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{a_1} + \frac{a_1^2 - b_1^2}{4} \frac{\sin \varphi_2}{a_2} + \frac{a_2^2 - b_2^2}{4} \frac{\sin \varphi_3}{a_3} + \frac{a_3^2 - b_3^2}{4} \frac{\sin \varphi_4}{a_4}$$

$$= a_4 \; E(k_4, \varphi_4) - S_1 . F(k_4, \varphi_4)/16 \; a_4 + S_2 .$$

terwijl $E(k_4, \varphi_4) = F(k_4, \varphi_4) = \varphi_4$

dus: $$E(k,\varphi) = \left\{ a_4 - \frac{S_1}{16\; a_4} \right\} \varphi_4 + S_2 .$$

In deze vorm blijkt de formule niet geschikt te zijn voor de ALGOL procedure, omdat we bij het berekenen van $a_4 - \frac{S_1}{16\; a_4}$ een cijfer kunnen verliezen.

(N.B. neem het bijzondere geval dat $k=0$ dan is $S_1=15$ dus $1 - \frac{15}{16} = 1 - 0.93 \;..)$

nu is $$16\; a_4^2 = 4(a_3+b_3)^2 = 4\; a_3^2 + 4\; b_3^2 + 8\; a_3 b_3 =$$

$$= 8\; a_3^2 + 4\; b_3^2 + 8\; a_3 b_3 - 4\; a_3^2 =$$

$$= \frac{a_o^2}{2} + \frac{b_o^2}{2} - a_1^2 - 2\; a_2^2 - 4\; a_3^2 + b_1^2 + 2\; b_2^2 + 4\; b_3^2 +$$

$$+ a_o \; b_o + 2\; a_1 b_1 + 4\; a_2 b_2 + 8\; a_3 b_3$$

dus

$$a_4 - \frac{S_1}{16\,a_4} = \left\{ 1 - \left[\frac{a_o^2 - b_o^2}{2} + (a_1^2 - b_1^2) + 2(a_2^2 - b_2^2) + 4(a_3^2 - b_3^2) \right] \right\} \frac{1}{16\,a_4}$$

daar $\frac{a_o^2 - b_o^2}{2} = \frac{k^2}{2} < \frac{(0.9539)^2}{2} = 0.35$, verloopt deze aftrekking altijd goed.

Daar $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ volgt $0 \leqq \varphi_1 < \pi$. dus $\sin \varphi_1 \geqq 0$.
De eerste term van S_2 is dus altijd positief, de overige termen kunnen negatiefworden, maar dan garandeert de snelle convergentie van het a g M dat deze termen zeer klein zijn t.o.v. de eerste term.
Natuurlijk kan $\sin \varphi_1$ zeer klein zijn, dan is echter φ_1 zeer klein en dus zal $\sin \varphi_2 > 0$ zijn.

Op afrondingsfouten na geeft deze procedure dus een goed resultaat.

$$\frac{\sin \varphi_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} \frac{1}{\sqrt{(1+\text{cotg}^2\, \varphi_n)}} = \frac{1}{\sqrt{(a_n{}^2 + (a_n\ \text{cotg}\, \varphi_n)^2)}}$$

In de ALGOL procedure is voor $a_n\ \text{cotg}\, \varphi_n$ de parameter co gekozen.
Evenals in § 8a is $P = 2.\varphi_4$

$$E(k,\varphi) = \left[2\,\varphi_4 . \left\{ \tfrac{1}{4} - \left[(a_3^2 - b_3^2) + \tfrac{1}{2}(a_2^2 - b_2^2) + \tfrac{1}{4}(a_1^2 - b_1^2) + \tfrac{1}{8}(a_o^2 - b_o^2) \right] \right\} \frac{1}{2\,a_4} + \right.$$
$$\left. + \left\{ (a^2 - b^2) \frac{\sin \varphi_1}{a_1} + (a_1^2 - b_1^2) \frac{\sin \varphi_2}{a_2} + (a_2^2 - b_2^2) \frac{\sin \varphi_3}{a_3} + (a_3^2 - b_3^2) \frac{\sin \varphi_4}{a_4} \right\} \right] \frac{1}{4}$$

in ALGOL: `E:=((Px(.25-S1)/a)/2+S2)/4` met

$$S1 = a_3^2 - b_3^2 + \tfrac{1}{2} \left[a_2^2 - b_2^2 + \tfrac{1}{2} \left\{ a_1^2 - b_2^2 + \tfrac{1}{2}(a_o^2 - b_o^2) \right\} \right] \qquad \text{en}$$

$$S2 = (a_3^2 - b_3^2) \frac{\sin \varphi_4}{a_4} + (a_2^2 - b_2^2) \frac{\sin \varphi_3}{a_3} + (a_1^2 - b_1^2) \frac{\sin \varphi_2}{a_2} + (a_o^2 - b_o^2) \frac{\sin \varphi_1}{a_1}$$

zie ook § 10.

§ 9b Procedure voor $E(k,\varphi)$ als $k \geq 0.9539$. We nemen $a=1$ en $b=k$ en de transformatie van § 2.

$$\text{dus} \quad \operatorname{cotg}\varphi_1 = \frac{1}{a+b}\left\{a \operatorname{cotg}\varphi + \sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2\varphi + a^2 - b^2}\right\} \text{ met } k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

$$\text{dan is } E(k,\varphi) = \frac{2}{1+k_1'}\left[E(k_1, \varphi_1) + k_1' F(k_1, \varphi_1)\right] - k \sin\varphi$$

$$\text{nu is } \frac{2}{1+k_1'} = \frac{2}{1+\frac{1-k}{1+k}} = 1+k \quad \text{en } k_1' = \frac{1-k}{1+k}$$

$$\text{dus } E(k,\varphi) = \frac{2\,a_1}{a} E(k_1, \varphi_1) + \frac{a-b}{a} F(k_1, \varphi_1) - \frac{b}{a}\sin\varphi =$$

$$= 8\,a_3\,E(k_3, \varphi_3) + ((a-b)a_1 + 2(a_1-b_1)a_2 + 4(a_2-b_2)a_3)\,\frac{F(k_3, \varphi_3)}{a_3} +$$

$$-(b\sin\varphi + 2\,b_1 \sin\varphi_1 + 4\,b_2 \sin\varphi_2) = 8\,a_3\,E(k_3, \varphi_3) + S_1\,\frac{F(k_3, \varphi_3)}{a_3} - S_2$$

$$\text{nu is } E(k_3, \varphi_3) = \sin\varphi_3 \text{ en } F(k_3, \varphi_3) = \ln \frac{1+\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi_3}}{\operatorname{cotg}\varphi_3}.$$

Ook deze vorm blijkt voor numerieke toepassing niet geschikt. Ten eerste omdat we de bij de berekening van $(a-b)a_1$ cijfers kunnen verliezen.
Dit kan eenvoudig verholpen worden door voor $(a-b)a_1$ in de plaats te zetten: $(a^2-b^2)\frac{a_1}{a+b} = k'^2\,\frac{a_1}{a+b}$.

Daar we in plaats van k, $\alpha = \operatorname{bgsin} k$ als parameter gebruiken weten we $k'^2 = \cos^2\alpha$ in twaalf cijfers nauwkeurig, dus ook de eerste term van S_1, de andere termen zijn veel kleiner dan deze, S_1 kennen we dus in de 12 cijfers, op afrondingsfouten na.
Ten tweede: beschouw $8\,a_3\,E(k_3, \varphi_3) - S_2 = 8\,a_3 \sin\varphi_3 - S_2$. Stel $k=1$ dan is dit gelijk aan $(8-7)\sin\varphi$ weer zien we dat het aftrekken zeer gevaarlijk is. We vervormen daarom deze uitdrukking

$$8\,a_3 \sin\varphi_3 - S_2 = 8\,a_3 \sin\varphi_3 - (4\,b_2 \sin\varphi_2 + 2\,b_1 \sin\varphi_1 + b_o \sin\varphi_o) =$$

$$= 4\,a_2 \sin\varphi_3 + 4\,b_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2) - 2\,b_1 \sin\varphi_1 - b_o \sin\varphi_o =$$

$$= a_o \sin\varphi_3 + b_o(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_o) + 2\,b_1(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1) + 4\,b_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2)$$

Zij φ klein dus $\sin\varphi_o \cong \mathrm{tg}\,\varphi_o \cong \varphi$ ook φ_1 is dan klein
volgens § 2 is dan

$$\mathrm{tg}(\varphi - \varphi_1) = \frac{1-k}{1+k}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1$$

dus $\varphi - \varphi_1 \cong \frac{1-k}{1+k}\,\varphi_1 \leqq \frac{0.0461}{1.9539}\,\varphi_1 = 0.02\,\varphi_1$

dus $\varphi - \varphi_3 \leqq 0.02\,\varphi_1 + 0.004\,\varphi_2 + 0.000016\,\varphi_3 \leqq 0.03\,\varphi_3$

dus $(b_o(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_o) + 2b_1(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1) + 4b_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2)) < 0.21\,\sin\varphi_3$

dus voor kleine φ is deze formule zeer goed te gebruiken.

Voor grotere waarden van φ is deze formule zeker goed, getuige het rekenvoorbeeld:

voor $\varphi = 10^\circ\ 12'$ wordt $\varphi_1 = 10^\circ$ dus $\sin\varphi_1 - \sin\varphi = 0.004$
en $\sin\varphi_1 = 0.177$

voor $\varphi = 62^\circ$ wordt $\varphi_1 = 60^\circ$ dus $\sin\varphi_1 - \sin\varphi = 0.016922$
en $\sin\varphi_1 = 0.8829$

voor $\varphi = 89^\circ\,53'\,57''$ wordt $\varphi_1 = 81^\circ\ 54'$ dus $\sin\varphi_1 - \sin\varphi = 0.000997479$
en $\sin\varphi_1 = 0.99002366$.

$$E(k,\varphi) = \left\{k'^2 + 2(a_1^2 - b_1^2) + 4(a_2^2 - b_2^2)\right\} \frac{\ln \dfrac{1+\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\,\varphi_3}}{\mathrm{cotg}\,\varphi_3}}{a_2 + b_2} +$$

$$+\sin\varphi_3 + b_o(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_o) + 2b_1(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1) + 4b_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2)$$

in de ALGOL procedure is:

```
E:=S1× ln((1+si)/co)/(a+b [2])+P+U
```

met

$S1 = k'^2 + 2(a_1^2 - b_1^2) + 4(a_2^2 - b_2^2)$; $co = \mathrm{cotg}\,\varphi_3$

$si = \sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\,\varphi_3}$; $P = \sin\varphi_3$ en

$U = b_o(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_o) + 2[b_1(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1) + 2\{b_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2)\}]$

zie ook § 10.

§ 10a Procedure voor $B(k,\varphi)$ als $k < 0.9539$
we nemen a=1 en b=k' en de transformatie van § 1

$$a_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 = \tfrac{1}{2}(a \operatorname{cotg}\varphi - {}^{ba}/a \operatorname{cotg}\varphi) \text{ en } k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$$

$$B(k,\varphi) = \frac{1}{k^2}\left\{ E(k,\varphi) - k'^2 F(k,\varphi)\right\} = (\text{zie § 9a})$$

$$= \frac{1}{k^2}\Big\{\Big[2\varphi_4 . \Big\{\frac{1}{4} - \Big[(a_3^2-b_3^2) + \tfrac{1}{2}(a_2^2-b_2^2) + \tfrac{1}{4}(a_1^2-b_1^2) + \tfrac{1}{8}(a_0^2-b_0^2)\Big]\Big\} \frac{1}{2a_4} +$$

$$+ \Big\{(a^2-b^2)\frac{\sin\varphi_1}{a_1} + (a_1^2-b_1^2)\frac{\sin\varphi_2}{a_2} + (a_2^2-b_2^2)\frac{\sin\varphi_3}{a_3} + (a_3^2-b_3^2)\frac{\sin\varphi_4}{a_4}\Big\}\Big]\frac{1}{4} +$$

$$-b^2 \frac{\varphi_4}{16\, a_4}\Big\} = \frac{1}{k^2}\Big\{\Big[2\varphi_4\Big\{-(a_3^2-b_3^2) - \tfrac{1}{2}(a_2^2-b_2^2) - \tfrac{1}{4}(a_1^2-b_1^2) + \frac{k^2}{8}\Big\}\frac{1}{2a_4} +$$

$$+ \Big\{(a^2-b^2)\frac{\sin\varphi_1}{a_1} + (a_1^2-b_1^2)\frac{\sin\varphi_2}{a_2} + (a_2^2-b_2^2)\frac{\sin\varphi_3}{a_3} + (a_3^2-b_3^2)\frac{\sin\varphi_4}{a_4}\Big\}\Big]\frac{1}{4}\Big\}$$

Voor de ALGOL Procedure verwijzen we naar § 9a en § 10. De letter E moet vervangen worden door B, de formule moet gedeeld worden door k^2, terwijl de beginterm van S1 ook iets anders is.

§ 10b Procedure voor $B(k,\varphi)$ als $k \geq 0.9539$
We nemen a=1 en b=k en de transformatie van § 2.

$$\operatorname{cotg}\varphi_1 = \frac{1}{a+b}\left\{a \operatorname{cotg}\varphi + \sqrt{a^2\operatorname{cotg}^2\varphi + a^2 - b^2}\right\} \text{ met } k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

$$B(k,\varphi) = \frac{1}{k^2}\left\{E(k,\varphi) - k'^2 F(k,\varphi)\right\} = (\text{zie § 9b})$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{\left\{k'^2 + 2(a_1^2-b_1^2) + 4(a_2^2-b_2^2)\right\} \frac{\ln \dfrac{1+\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi_3}}{\operatorname{cotg}\varphi_3}}{a_2+b_2} + \right.$$

$$+\sin\varphi_3 + b_0(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_0) + 2b_1(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1) + 4b_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_2) +$$

$$\left. -2\,k'^2 \frac{\ln \dfrac{1+\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi_3}}{\operatorname{cotg}\varphi_3}}{a_2+b_2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{\left\{-k'^2+2(a_1^2-b_1^2)+4(a_2^2-b_2^2)\right\}\frac{\ln\dfrac{1+\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\varphi_3}}{\mathrm{cotg}\,\varphi_3}}{a_2+b_2}+\right.$$

$$\left.+\sin\varphi_3+b_o(\sin\varphi_3-\sin\varphi_o)+2b_1(\sin\varphi_3-\sin\varphi_1)+4b_2(\sin\varphi_3-\sin\varphi_2)\right\}$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{S_1\frac{\ln(\ldots)}{a_2+b_2}+S_2\right\}$$

in § 9b hebben we reeds gezien dat S_2 altijd in twaalf cijfers bekend is op afrondingsfouten na.

Nu is evenwel S1 negatief, het is dus niet ondenkbaar dat we bij het aftrekken een cijfer verliezen.
We zullen bewijzen dat dit niet kan voorkomen. We bewijzen eerst dat als dit zou kunnen voorkomen, dan in ieder geval als $\sin\varphi_3 \geqq 0.815$. Vervolgens bewijzen we de bewering als $\sin\varphi_3 \geqq 0{,}815$.

We merken op dat $\ln\dfrac{1+\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\varphi_3}}{\mathrm{cotg}\,\varphi_3} = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin\varphi_3}{1-\sin\varphi_3}$.

Verder merken we op dat het voldoende is de bewering te bewijzen voor de twee termen:

$$\frac{k'^2}{(a_2+b_2)^2}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi_3}{1-\sin\varphi_3} = A \text{ en } \sin\varphi_3 = B.$$

De overige termen zijn toch veel kleiner dan deze.

zij $\sin\varphi_3 = x$, dan ontwikkelen we $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ in een reeks van Mc Laurin met restterm

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)_\theta \cdot \frac{x^2}{2} \qquad \text{met } 0 \leqq \theta \leqq x < 1$$

$$A \leqq \frac{1-0.9539^2}{1.9539}\left\{x+\frac{2\theta}{(1-\theta^2)^2}\cdot\frac{x^2}{2}\right\}$$

$$= 0.0466\left(1+\frac{\theta}{(1-\theta^2)^2}\right)x \qquad \text{als } \theta < 0.815$$

$$< 0.5\,x = 0.5\,B.$$

Dus als $\sin\varphi_3 < 0.815$ dan kan het eerste cijfer van A niet overeenstemmen met het eerste cijfer van B.

Zoeken we nu naar een $\sin\varphi_3 \geqq 0.815$ zodat A=B. Voor $k \geqq 0.9539$ is $k'^2 \leqq 0.0900$ en $a_1+b_1 \leqq 2$ dan is

$$\ln \frac{1+\sin\varphi_3}{1-\sin\varphi_3} \geqq \frac{4.\sin\varphi_3}{0.09} \geqq \frac{4.\ 0,815}{0.09} = 36,2.$$

$$\frac{1+\sin\varphi_3}{1-\sin\varphi_3} > e^{36,2} > 10^{15}$$

dus $1-\sin\varphi_3 < 10^{-15}.(1+\sin\varphi_3) < 2.10^{-15}$

dus $\sin\varphi_3 > 1-2.10^{-15}$

dus numeriek is $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ en daar $\varphi_3 \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2}$ moet $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Maar we stelden uitdrukkelijk vast dat $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Waarmee bewezen is dat het aftrekken altijd goed gaat.
Voor de ALGOL procedure verwijzen we weer naar § 9b en § 10.

§ 10 In § 6b is betoogd dat we om het agM te vinden voor $k < 0.9539$ en voor $k \geqq 0.9539$, drie resp. twee berekeningen moeten uitvoeren.
Dus voor $k < 0.9539$ is $a_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ = a g M (1,k') en voor $k \geqq 0.9539$ is $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ = a gM (1,k).

In de ALGOL procedures van E als van B is echter een extra cycle toegevoegd omdat dit een aanwerkelijke verkorting van de lengte van de procedure geeft, en dus een vermindering van de geheugen capaciteit van de rekenmachine, om de procedure op te bergen.

We moeten immers voor $k < 0.9539$ φ_4 en $\sin\varphi_4$ weten, en dus de transformatie vier keer uitvoeren, evenzo voor $k \geqq 0.9539$.

Het nadeel is dat één worteltrekking en één of twee vermenigvuldigingen teveel worden uitgevoerd.

Hoofdstuk III DE COMPLETE ELLIPTISCHE INTEGRAAL.

§ 11 De procedures voor K(k), E(k) en B(k) als $k < 0.9539$.
Als $k < 0.9539$ dan kunnen we de transformatie van § 1 en § 4 gebruiken, met $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$. Passen we de transformatie van § 1 toe dan is

$$\varphi_1 = \pi \qquad \text{en } k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$$

$$F(k,\varphi) = \frac{1}{1+k'} \quad F(k_1,\varphi_1)$$

$$E(k,\varphi) = \frac{1+k'}{2} \, E(k_1,\varphi_1) - k'F(k,\varphi)$$

nemen we a=1 en b=k' dan komt er:

$$F(k,\varphi) = \frac{a}{2.a_1} F(k_1, \varphi_1) = \frac{1}{16.a_4} .\varphi_4 = \frac{16.\pi/2}{16.a_4} = \frac{\pi}{2.a_4} = \frac{\pi}{a_3+b_3} .$$

en

$$E(k,\varphi) = \frac{a+b}{2a} E(k_1, \varphi_1) - \frac{b}{a} F(k,\varphi) = \frac{a_1}{a} E(k_1, \varphi_1) - \frac{b}{2a_1} F(k_1, \varphi_1)$$

$$E(k,\varphi) = a_4 \; E(k_4, \varphi_4) - (b+2b_1a_1+4b_2a_2+8b_3a_3) \; \frac{F(k_4, \varphi_4)}{16 \; a_4}$$

$$= \left\{ 16 \; a_4^2 - (b+2b_1a_1+4b_2a_2+8b_3a_3) \right\} \frac{16 \; \pi/2}{16 \; a_4} =$$

$$= \left\{ \frac{a_o^2+b_o^2}{2} - \left[(a_1^2-b_1^2)+2(a_2^2-b_2^2)+4(a_3^2-b_3^2) \right] \right\} \frac{\pi}{a_3+b_3} .$$

Dat deze aftrekking zonder verlies van cijfers gebeurt hebben we in § 9a reeds gezien.

$$B(k,\varphi) = \frac{1}{k^2} \left\{ E(k,\varphi) - k'^2 \; F(k,\varphi) \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \left[\left\{ \frac{a_o^2-b_o^2}{2} - \left[(a_1^2-b_1^2)+2(a_2^2-b_2^2)+4(a_3^2-b_3^2) \right] \right\} \frac{\pi}{a_3+b_3} . \right]$$

Dus $K(k) = \frac{\pi}{a_3+b_3} = F(k, \frac{\pi}{2})$

$$E(k) = E(k, \frac{\pi}{2}) = \left\{ \frac{a_o^2+b_o^2}{2} - \left[(a_1^2-b_1^2)+2(a_2^2-b_2^2)+4(a_3^2-b_3^2) \right] \right\} \frac{\pi}{a_3+b_3}$$

in de ALGOL procedure is:

E: = $4\pi \times s/(a1+b)$ met $s= -a_3^2+b_3^2+\frac{1}{2}\left\{-a_2^2+b_2^2+\frac{1}{2}\left[-a_1^2+b_1^2+\frac{1}{2}(a_0^2+b_0^2)\right]\right\}$

a1=a_3 en b=b_3

$$B(k)=B(k_1,\frac{\pi}{2})=\left\{\left\{\frac{a_0^2-b_0^2}{2} - \left[(a_1^2-b_1^2)+2(a_2^2-b_2^2)+4(a_3^2-b_3^2)\right]\right\}\frac{\pi}{a_3+b_3}\right\}\frac{1}{k^2}$$

in de ALGOL procedure is:

B:= $4\pi \times S/(a1+b)/(b1\times b1)$

met $s= -a_3^2+b_3^2+\frac{1}{2}\left\{-a_2^2+b_2^2+\frac{1}{2}\left[-a_1^2+b_1^2+\frac{1}{2}(k^2)\right]\right\}$;a1=a_3; b=b_3

en b1=k=sin(A).

<u>Opmerking</u> De transformatie van § 4 leidt tot dezelfde formules als die van § 1.

§ 12. <u>De procedures voor K(k), E(k) en B(k)</u> als $k \geq 0.9539$

De transformatie van § 2 zullen we niet gebruiken, omdat we op een andere, fraaie, wijze tot ons doel kunnen komen.

Zoals bekend is geldt voor K(k) de reeksontwikkeling:

$$K(k)= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\right\}^2\left\{\psi(n+1)-\psi(n+\tfrac{1}{2})-\ln k'\right\}k'^{2n} \qquad \text{(zie [1])}$$

met $(\frac{1}{2})_n= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{1.2,\ldots .n}$,

$$\left.\begin{array}{l}\psi(n+1) = -C+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \quad \text{en} \\[2ex] \psi(n+\frac{1}{2}) = -C-2\ln 2+2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1})\end{array}\right\} \text{C=constante van Euler}$$

$$\text{dus } K(k)=\ln\frac{4}{k'}+k'^2\left[\frac{1}{4}(\ln\frac{4}{k'}-1)+k'^2\,\frac{9}{64}(-\frac{5}{2}+\ln\frac{4}{k'})+\ldots\right]$$

$$= \ln\frac{4}{k'}+R.$$

Passen we de transformatie van § 3 toe:

$$\sin \varphi_1 = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\ \sin^2\varphi} \qquad \text{met } k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\ , \quad a=1,\ b=k$$

als $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ dan is $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

$$K(k)=F(k_1,\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{1+k}\,F(k_1,\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{1+k}\,K(k_1) = \frac{a}{2a_1}\,K(k_1) =$$

$$= \frac{1}{8a_3}\,K(k_3).$$

Nu is $k_3'^2 = 1-k_3^2 = \dfrac{a_3^2-b_3^2}{a_3^2} = \dfrac{(a_3-b_3)(a_3+b_3)}{a_3^2} < 2{,}10^{-16}$

$$\frac{k'_n}{4} = \frac{\sqrt{a_n^2-b_n^2}}{4\ a_n} = \frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{8\ a_n} = \frac{a_{n-1}^2-b_{n-1}^2}{16\ a_n^2} = \left(\frac{k'_{n-1}}{4}\right)^2 .\ \frac{a_{n-1}^2}{a_n^2}$$

dus $\dfrac{4}{k_3'} = \dfrac{a_3^2}{a_2^2}\left\{\dfrac{a_2^2}{a_1^2}\left[\dfrac{a_1^2}{a^2}\ \left({}^4/k'\right)^2\right]^2\right\}^2 = \dfrac{a_3^2\ a_2^2\ a_1^4}{(k'/4)^8}$

Numeriek geldt dus:

$$K(k) = \frac{1}{8a_3}\ K(k_3) = \frac{1}{4\ a_3}\ \ln \frac{a_3\ a_2\ a_1^2}{(k'/4)^4}$$

Nu is $k'=\cos\alpha$, en α ligt dicht bij $\frac{\pi}{2}$.
Het bleek dat de X1 voor deze waarden van α de cosinus niet nauwkeurig genoeg berekende. Om aan deze moeilijkheid te ontkomen hebben we het volgende gedaan: Daar

$$k'=\cos\alpha = \sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha' = \frac{\sin 2\alpha'}{2\ \cos\alpha'} = \ldots = \frac{\sin 2^n\alpha'}{2^n\cos\alpha'\cos 2\alpha'\ldots\cos 2^{n-1}\alpha'}.$$

we verdubbelen α' net zo lang tot de $\sin 2^n\alpha'$ wel nauwkeurig wordt uitgerekend, hetgeen zeker zo is voor 20^o.
Vervolgens berekenen we de logarithme:

$$\ln\left\{(a_2+b_2)a_2\ a_1^2 .\ 128.\ \left[\frac{2^n\cos\alpha'\ \cos 2\alpha'\ \ldots\ \cos 2^{n-1}\alpha'}{\sin 2^n\alpha'}\right]^4\right\}.$$

Ook E(k) is in een reeks te ontwikkelen, analoog aan die van K(k).

$$E(k) = 1 + \frac{1}{4} k'^2 \left\{ \left(-1+2 \ln \frac{4}{k'}\right) + k'^2 \frac{1}{8}\left(-\frac{13}{6} + 2 \ln \frac{4}{k'}\right) + \ldots \right\}$$

Passen we de transformatie van § 3 toe dan is

$$\sin \varphi_1 = \frac{(1+k)\sin \varphi}{1+k \sin^2 \varphi} \quad \text{met } k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \ a=1 \text{ en } b=k.$$

Dus als $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ dan is $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

dan is $E(k) = \frac{1}{2}\left\{ (1+k)E(k_1) + \frac{k'^2}{1+k} K(k_1) \right\} = \frac{a_1}{a} E(k_1) + \frac{a-b}{2a} K(k_1) =$

$$E(k) = a_3 \ E(k_3) + \left\{ (a^2-b^2) + 2(a_1^2-b_1^2) + 4(a_2^2-b_2^2) \right\} \frac{K(k_3)}{a_3} \ .$$

Numeriek is $E(k_3)=1$ dus

$$E(k) = \frac{a_2+b_2}{2} + \frac{1}{4}\left\{ (a^2-b^2) + 2(a_1^2-b_1^2) + 4(a_2^2-b_2^2) \right\} \frac{1}{(a_2+b_2)} \ln \frac{a_3 \ a_2 \ a_1^2}{(k'/4)^4}$$

in de ALGOL procedure is:

```
E:=(a2+b)/2+(s/(a2+b)) × ln(128×(a2+b)×a2×a1×a1/(k1↑4))
```

met:

$$s = a_2^2 - b_2^2 + \frac{1}{2}\left\{ (a_2^2 - b_1^2) + \frac{k'^2}{2} \right\} \qquad \text{en } k1 = k'.$$

Op eenvoudige wijze volgt nu de procedure voor B(k).

$$B(k) = \frac{1}{k^2}\left\{ E(k) - k'^2 \ K(k) \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{ \frac{a_2+b_2}{2} + \frac{1}{4}\left[(a^2-b^2) + 2(a_1^2-b_1^2) + 4(a_2^2-b_2^2) \right] \frac{1}{a_2+b_2} \ln \frac{a_3 \ a_2 \ a_1^2}{(k'/4)^4} \right.$$

$$\left. -(a^2-b^2)\frac{1}{4a_3} \ln \frac{a_3 \ a_2 \ a_1^2}{(k'/4)^4} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{ \frac{a_2+b_2}{2} + \frac{1}{4}\left[-(a^2-b^2) + 2(a_1^2-b_1^2) + 4(a_2^2-b_2^2) \right] \frac{1}{a_2+b_2} \ln \frac{a_3 \ a_2 \ a_1^2}{(k'/4)^4} \right\}$$

in de ALGOL procedure is:

B:=((a2+b)/2+(s/(a2+b))×ln(128×(a2+b)×a2×a1×a1/(k1↑4)))/(b1×b1)

met

$s = a_2^2 - b_2^2 + \frac{1}{2}\left\{(a_1^2 - b_1^2) - \frac{k'^2}{2}\right\}$, k1=k' en b1=k.

Hoofdstuk IV DE ELLIPTISCHE FUNCTIES

§ 13 Algemene beschouwing

Als $F(k,\varphi)=u$ dan is omgekeerd: φ een functie van k en u.
Daar $sn(u,k)=\sin\varphi$, $cn(u,k)=\cos\varphi$ en $dn(u,k)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, komt het er dus op aan om de φ te bepalen.

Bij gegeven k en φ kunnen we u vinden door volgens § § 1,2,3 en 4 een aantal malen k en φ te transformeren. Rekenen we in 12 decimalen dan is u een eenvoudige uitdrukking in φ_4 of φ_3 naar gelang $k < 0.9539$ of ≥ 0.9539.

Het omgekeerde probleem is nu als volgt te stellen:
Zij gegeven k en u, dan kunnen we φ_4 of φ_3 berekenen. Is het dan mogelijk om φ_o te vinden, zodanig dat als we van deze φ_o en k uitgaan we weer bij φ_4 of φ_3 terechtkomen?
Het antwoord vinden we reeds in de eerste vier paragrafen. Want naast de transformaties hebben we daar reeds de omkeer transformaties aangegeven.

We hebben weer een keuze tussen vier transformaties (beter gezegd: omkeer transformaties)

Voor de omkeer transformatie van § 1: $tg\,\varphi_1 = \frac{(1+k')tg\,\varphi}{1-k'\,tg^2\varphi}$

met $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$ kunnen we schrijven: a=1 en b=k'

(1) $$\cot g\,\varphi_o = \left\{a_1 \cot g\,\varphi_1 + \sqrt{a_1^2 \cot g\,\varphi_1 + a.b}\right\}\frac{2}{a+b}$$

De omkeer-transformatie van § 2: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{(1+k_1')\,\mathrm{tg}\,\varphi_1}{1-k_1'\,\mathrm{tg}^2\varphi_1}$ met

$k_1 = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$ ligt reeds klaar voor gebruik.

Nemen we a=1 en b=k dan is $k_1' = \dfrac{1-k}{1+k}$

$$(2) \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{2\,\mathrm{tg}\varphi_1}{(1+k)-(1-k)\mathrm{tg}^2\varphi_1} = \frac{2\,a\,\mathrm{tg}\varphi_1}{(2+b)-(a-b)\mathrm{tg}^2\varphi_1} .$$

De omkeer-transformatie van § 3: $\sin\varphi_1 = \dfrac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\,\sin^2\varphi}$ met $k_1 = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$

als a=1 en b=k dan is

$$(3) \qquad \sin\varphi = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - ba\,\sin^2\varphi_1}}{b\,\sin\varphi_1}$$

De omkeer-transformatie van § 4: $\sin\varphi = \dfrac{(1+k_1)\sin\varphi_1}{1+k_1\,\sin^2\varphi_1}$ met

$k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'}$ is reeds gereed als a=1 en b=k' dan is:

$$(4) \qquad \sin\varphi = \frac{2\,\sin\varphi_1}{(1+k')+(1-k')\sin^2\varphi_1} = \frac{2a\,\sin\varphi_1}{(a+b)+(a-b)\sin^2\varphi_1} .$$

Voor de procedure hebben we voor $k \geqq 0.9539$ de transformatie (2) gekozen. Deze heeft het voordeel boven (3) dat we geen wortel hoeven trekken, en dat $\mathrm{tg}\,\varphi_0$ berekend wordt. $\sin\varphi_0$ is dan eenvoudig te berekenen, evenals $\cos\varphi_0$.
Om de $\cos\varphi_0$ te berekenen uit $\sin\varphi_0$ zou weer moeilijkheden opleveren i.v.m. het cijfers verliezen bij het aftrekken.
Voor $k > 0.9539$ hebben we (4) gekozen, daar (4) eenvoudiger is dan (3). De moeilijkheden i.v.m. het aftrekken kunnen we omzeilen.
Er bestaan namelijk de volgende relaties: zie [1] als K=K(k) dan is

$$\mathrm{cn}(u,k) = k'\,\frac{\mathrm{sn}(K-u,k)}{\mathrm{dn}(K-u,k)} \quad \text{en} \quad \mathrm{dn}(u,k) = \frac{k'}{\mathrm{dn}(K-u,k)}$$

§ 14a Procedure voor sn(u,k) voor $k \geq 0.9539$
we nemen de transformatie (2) met $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, a=1 en b=k.

Volgens § 8b is $F(k,\varphi)=u=\frac{1}{a_3}\ln\frac{1+\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi_3}}{\operatorname{cotg}\varphi_3}$

dus $\operatorname{tg}\varphi_3=\frac{e^{2a_3u}-1}{2\sqrt{e^{2a_3u}}}=\frac{e^{(a_2+b_2)u}-1}{2\sqrt{e^{(a_2+b_2)u}}}$ via $\operatorname{tg}\varphi_i=\frac{2\,a_i\,\operatorname{tg}\varphi_{i+1}}{(a_i+b_i)-(a_i-b_i)\operatorname{tg}^2\varphi_{i+1}}$

is tenslotte $\operatorname{sn}(u,k)=\sin\varphi_o=\frac{\operatorname{tg}\varphi_o}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_o}}$.

In de ALGOL procedure staat de variabele t voor $\operatorname{tg}\varphi_i$.

§ 14b Procedure voor sn(u,k) voor $k < 0.9539$
dan nemen we de transformatie (4) met $k_1=\frac{1-k'}{1+k'}$, a=1 en b=k'.
Volgens § 4 is $F(k,\varphi) = u = \frac{\varphi_4}{a_4}$
dus $\sin\varphi_4 = \frac{(a_3+b_3).u}{2}$; via $\sin\varphi_i = \frac{2a_i\sin\varphi_{i+1}}{(a_i+b_i)+(a_i-b_i)\sin^2\varphi_{i+1}}$

is dus $\operatorname{sn}(u,k) = \sin\varphi_o$.
In de ALGOL procedure staat de variabele t voor $\sin\varphi_i$.

§ 15a Procedure voor cn(u,k) als $k \geq 0.9539$
Zie § 14a. $\operatorname{cn}(u,k) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_o}}$, met a=1 en b=k.
Is echter $u/K > \frac{1}{2}$ dan kunnen we een numeriek betere formule afleiden.

Volgens het slot van § 13 kunnen we immers cn(u,k) berekenen uit sn(u-K,k) en dn(u-K,k).
Beginnen we dus met $\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{e^{(a_2+b_2)(K-u)}-1}{2\sqrt{e^{(a_2+b_2)(K-u)}}}$

dan is $\operatorname{cn}(u,k) = k'\,\frac{\operatorname{tg}\varphi_o}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_o}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_o}} = k'\,\frac{\operatorname{tg}\varphi_o}{\sqrt{1+k'^2\operatorname{tg}^2\varphi_o}}$.

Dat deze formule beter voor bepaalde waarden van u is blijkt als volgt:
laat $k' \mathrm{tg}\, \varphi_0$ een fout Δ hebben dus $x+\Delta$ is de exacte waarde dan is

$$\frac{x+\Delta}{\sqrt{1+x^2+2x\Delta}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1+\frac{\Delta}{x}}{\sqrt{1+\frac{2x\Delta}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\left(1-\frac{\Delta x}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left\{1+\frac{\Delta}{x}\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)\right\} .$$

Nu is $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = sn(u,k)$, voor grote u en grote k is $sn(u,k) \lessapprox 1$

dus $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \lessapprox 1$.

Dit betekent echter dat de fout zeer klein wordt.
Dus als $u/K > \frac{1}{2}$ dan starten we met

$$\mathrm{tg}\, \varphi_3 = \frac{e^{(a_2+b_2)(K-u)}-1}{2\sqrt{e^{(a_2+b_2)(K-u)}}} \quad \text{met } K = \frac{1}{a_2+b_2} \ln \frac{a_3 a_2 a_1^2}{(k'/4)^4}$$

en via $\mathrm{tg}\, \varphi_i = \dfrac{2a_i \mathrm{tg}\, \varphi_{i+1}}{a_i+b_i-(a_i-b_i)\mathrm{tg}^2\varphi_{i+1}}$ is $\mathrm{tg}\, \varphi_0$ te bepalen.

$$cn(u,k) = \frac{k' \mathrm{tg}\, \varphi_0}{\sqrt{1+k'^2 \mathrm{tg}^2 \varphi_0}} .$$

Als $u/K \leqq \frac{1}{2}$ dan beginnen we met:

$$\mathrm{tg}\, \varphi_3 = \frac{e^{(a_2+b_2)u}-1}{2\sqrt{e^{(a_2+b_2)u}}} \quad \text{en we bepalen } \mathrm{tg}\, \varphi_0$$

dan is $cn(u,k) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi_0}}$.

In de ALGOL procedure staat de letter t voor $\mathrm{tg}\, \varphi_i$

§ 15b Procedure voor cn(u,k) als $k < 0.9539$

We nemen dan transformatie (4) met $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$, a=1 en b=k'.

$\sin \varphi_4 = \dfrac{a_3+b_3}{2}\, u$; via $\sin \varphi_i = \dfrac{2a_i \sin \varphi_{i+1}}{(a_i+b_i)+(a_i-b_i)\sin^2\varphi_{i+1}}$

is dus $cn(u,k) = \cos\varphi_o = \sqrt{1-\sin^2\varphi_o}$.

Dit gaat goed als $\sin^2\varphi_o < 0.9$ dus zeker als $\varphi_o < \frac{\pi}{4}$.

Nu is $\sin\varphi_i \leqq \frac{2a_i\sin\varphi_{i+1}}{a_i+b_i} < \sin\varphi_{i+1}$.

Dus als $\varphi_4 < \frac{\pi}{4}$ dan is φ_o zeker $< \frac{\pi}{4}$.

Als dus $\varphi_4 = \frac{a_3+b_3}{2} . u < \frac{\pi}{4}$ dan is de procedure gebaseerd op bovenstaande formules.

Als $\varphi_4 = \frac{a_3+b_3}{2}\, u \geqq \frac{\pi}{4}$ dan passen we de formules van het slot van § 13 weer toe. We vervangen u door $K-u = \frac{\pi}{a_3+b_3} - u$.

We starten dus met

$$\sin\varphi_4 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a_3+b_3}{2}\, u\right) \text{ en via } \sin\varphi_i = \frac{2a_i\sin\varphi_{i+1}}{a_i+b_i+(a_i-b_i)\sin^2\varphi_{i+1}}$$

vinden we

$$cn(u,k) = k'\,\frac{sn(K-u,k)}{dn(K-u,k)} = \frac{k'\sin\varphi_o}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi_o}} .$$

In de ALGOL procedure stelt de variabele t, $\sin\varphi_i$ voor.

§ 16 Procedure voor dn(u,k)

Zowel voor grote k als kleine k verwijzen we naar de vorige paragraaf. We schrijven slechts de slotformules op:

$$k \geqq 0.9539 \text{ en } u/K > \tfrac{1}{2}: \; dn(u,k) = k'\sqrt{\frac{1+tg^2\varphi_o}{1+k'^2tg^2\varphi_o}}$$

$$k \geqq 0.9539 \text{ en } u/K \leqq \tfrac{1}{2}: \; dn(u,k) = \sqrt{\frac{1+k'^2tg^2\varphi_o}{1+tg^2\varphi_o}}$$

$$k < 0.9539 \text{ en } \varphi_4 < \tfrac{\pi}{4} : \; dn(u,k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_o}$$

$$k < 0.9539 \text{ en } \varphi_4 \geqq \tfrac{\pi}{4} : \; dn(u,k) = \frac{k'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_o}}$$

Hoofdstuk V Vergelijking van berekende waarden met tabellen

§ 17.

De heer J.F. Frankena heeft voor $k = \sin 1^\circ$ een aantal waarden in 15 decimalen uitgerekend, die goed overeenstemmen met de waarden die de rekenmachine m.b.v. de ALGOL procedure berekend heeft.

Voor $\varphi = 30^\circ$ is:

volgens Frankena: E = 0.52359 18776 94637 en F = 0.52360 56736 62154
met X1: E = 0.52359 18776 92 en F = 0.52360 56736 60

voor $\varphi = 50^\circ$ is:

volgens Frankena: E = 0.87263 56696 09397 en F = 0.87269 35840 17003
met X1: E = 0.87263 56696 07 en F = 0.87269 35840 14

voor $\varphi = 60^\circ$

volgens Frankena: E = 1.04715 07813 64791 en F = 1.04724 43245 60609
met X1: E = 1.04715 07813 62 en F = 1.04724 43244 83

Vergelijking met een twaalf-decimalige tafel voor $\varphi = 45^\circ$ van Legendre uitgegeven door Emde, leverde het volgende resultaat:
De twaalfde decimaal van F vertoont een gemiddelde afwijking van 4 eenheden naar beneden. Het opvallende is dat elke F steeds dezelfde afwijking vertoont.
Hetzelfde geldt voor E als $k < 0.9539$, als $k \geqq 0.9539$ dan treden zowel positieve als negatieve afwijkingen op die voor enkele waarden nogal groot uitvallen (mogelijk is de tabel niet helemaal goed).
Met vrij grote zekerheid kunnen we vaststellen dat in ieder geval de elfde decimaal op één eenheid na goed is.

Vergelijking met behulp van dezelfde tafel voor $\varphi = 90^\circ$ levert voor de complete elliptische integralen:
Met nog meer zekerheid kunnen we garanderen dat de twaalfde decimaal op één eenheid na goed is, voor E en B.
Als k zeer dicht bij 1 ligt dan is het elfde cijfer van K op één eenheid goed. Voor k niet te dicht bij 1 is de twaalfde decimaal van K op één eenheid na goed.
Voor $k > \sin(89^\circ)$ is geen contrôle uitgevoerd, zodat het niet uitgesloten kan worden dat er grotere afwijkingen optreden.

Voor de elliptische functies hebben we een andere tafel, zie [8], tot onze beschikking.
Vergelijking met deze leverde het volgende resultaat:
In alle gevallen is de elfde decimaal op één eenheid na goed.

Hoofdstuk VI Andere methoden in de literatuur

§ 18 De Methode van DiDonati en Hershey zie [3]

Na de transformatie $x=\sin\varphi$ en $t=\sin u$ die $F(k,\varphi)$ overvoert in $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$, na het Binomium van Newton op de integrand te hebben toegepast, integreren de schrijvers de verkregen dubbelreeks termsgewijs en komen tot het volgende resultaat:
(Slechts voor F schrijven we de formules neer, voor de E komt er een analoge formule.)

$$F(k,\varphi) = \frac{2}{\pi} K(k')\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2x^2}+|k|\sqrt{1-x^2}} + |k|\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\ln\frac{1+|kx|}{2} +$$

$$- |k|\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}(1-k^2x^2)^n . \sum_{m=n+1}^{\infty}\left[\frac{(2m+2)!}{2^{2m+2}(m+1)!^2}\right]^2 (k')^{2m-2n} +$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n!}{2^{2n}n!^2}\right]^2 (k')^{2n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(2m-1)} .$$

Als $\tan h1 \leqq |kx| \leqq 1$ convergeert deze reeks.
Als $0 \leqq |kx| < \tan h1$ dan wordt de volgende formule gebruikt:

$$F(k,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n!}{2^{2n}n!^2}k^{2n}\int_0^{\varphi}\sin^{2n}\varphi\, d\varphi .$$

De schrijvers delen mee dat "niet meer" dan 35 cycles nodig zijn om een uitkomst in 13 decimalen nauwkeurig te verkrijgen.
Voorts beweren de schrijvers dat de methode van Legendre (dus een variatie op een van onze methoden) meer rekenwerk zou vereisen dan hun methode, omdat er per cycle 3 wortels getrokken

moeten worden (zij doelen kennelijk op de transformatie van § 3 en § 4 waar inderdaad 3 wortels per cycle getrokken moeten worden).

Voor nadere adstructie hebben we nagegaan hoeveel rekenkundige bewerkingen hun programma ongeveer vereist in het geval dat er 35 cycles nodig zijn, hetgeen bij hen voor kan komen!

Voor $F(k,\varphi)$ en $0 \leqq |kx| < \tan h1$:
35 x 14 = 490 vermenigvuldigingen en delingen
35 x 4 = 140 optellingen en aftrekkingen
2 x cosinus en 2 x sinus

Voor $\tan h1 \leqq |kx| \leqq 1$:
35 x 19 = 665 verm. en del.
35 x 10 = 350 opt. en aftr.
2 x worteltrekken en 2 x logarithme nemen en 2 x cosinus en 2 x sinus.

Voor ons programma: als $k < 0.9539$
28 verm. en delingen
17 opt. en aftr.
3 x worteltrekkingen 2 x cosinus 2 x sinus en 1 x arctangens

Als $k \geqq 0.9539$
28 verm. en delingen
14 opt. en aftr.
5 x worteltrekkingen 2 x cosinus 2 x sinus en 1 x logarithme.

Voor $E(k,\varphi)$ en $0 \leqq |kx| < \tan h1$ volgens de schrijvers:
35 x 13 = 455 verm. en delingen
35 x 4 = 140 opt. en aftrekkingen
2 x cosinus x 2 sinus

Voor $\tan h1 \leqq |kx| \leqq 1$
35 x 32 = 1120 verm. en delingen
35 x 11 = 395 opt. en aftrekkingen
2 x wortel trekken, 2 x logarithme nemen 2 x cosinus en 2 x sinus.

Voor onze procedure is dit als $k < 0.9539$
66 verm. en delingen
45 optellingen en aftrekkingen
8 x worteltrekkingen 2 x cosinus 2 x sinus en 1 x arctangens

Voor $k \geq 0.9539$
46 verm. en delingen
38 opt. en aftrekkingen
10 x worteltrekkingen 2 x cosinus 2 x sinus en 1 x logarithme.

De schrijvers kennen zoals gezegd, Legendre's methode, ze wijzen deze o.a. af omdat er veel vermenigvuldigingen in voorkomen. (Zij kennen het hulpmiddel, dat het arithmetisch-geometrisch gemiddelde ons biedt, niet, zodat er inderdaad veel meer vermenigvuldigd moet worden.)
Beschouwen we echter bovenstaande getallen dan schijnt het ons toe dat ons programma toch heel wat minder rekenwerk vereist.
Was de X1 in staat om ook 13 cijfers te berekenen dan blijft ons programma goed als we de grens 0.9539 naar bijvoorbeeld 0.94 verleggen.
Hadden de schrijvers in plaats van de sinustransformatie (§ 3 en 4) de tangenstransformatie (§ 1 en 2) genomen en daarbij gebruik gemaakt van het arithmetisch geometrisch gemiddelde, dan hadden ze waarschijnlijk geen moeilijke reeksen ontwikkeld om daarmee een programma te maken.
Van dit programma bestaat ook een ALGOL procedure in [4].

§ 19 <u>De methode van Carlson</u>, zie [5].

Carlson leidt voor kleine waarden van φ formules af voor het schatten van F en E.

$$L_o = (1-\tfrac{1}{2}k^2)^{-\frac{1}{2}} \arctan\left[(1-\tfrac{1}{2}k^2)^{\frac{1}{2}} \tan\varphi\right],$$
$$U_o = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}(1-k^2)^{-\frac{1}{2}} \arctan\left[(1-k^2)^{\frac{1}{2}} \tan\varphi\right],$$
$$L_1 = \left(\frac{1+k^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctanh}\left[\left(\frac{1+k^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi\right],$$
$$U_1 = \tfrac{1}{2} \arctan h\,(\sin\varphi) + \tfrac{1}{2}k^{-1} \arctan h(k \sin\varphi)$$

en $L_1 \leq F(k,\varphi) \leq U_1$,

terwijl L_1 en U_1 betere schattingen zijn dan L_o en U_o.

Carlson leidt nu voor $F(k,\varphi)$ een reeks af met als eerste term L_1 en wel:

$$F(k,\varphi) = (1-\tfrac{1}{2}k'^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} \left[\frac{k'^4\tan^2\varphi}{16(2-k'^2)(2+k'^2\tan^2\varphi)}\right]^n \cdot Q_{2n}^{2n}\left(\frac{\operatorname{cosec}\varphi}{(1-\frac{1}{2}k'^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

met $Q_o^o(z) = \operatorname{arctan} h \, \frac{1}{z}$; $i\, Q_o^o(iz) = \arctan \frac{1}{z}$

$$\text{en } Q_n^n(z) = 2^n(\tfrac{1}{2})_n(z^2-1)^{n/2}\left\{ Q_o^o(z) + z\sum_{m=0}^{n-1}\frac{m!}{(3/2)_m(1-z^2)^{m+1}}\right\}.$$

Hoewel nu deze reeks zeer snel convergeert (NB k'^{4n}!) voor kleine waarden van k', (voor $\varphi=30^o$, $k^2=0.92$ zijn er 3 termen nodig om een uitkomst in 12 decimalen nauwkeurig te verkrijgen) hebben we er toch geen gebruik van gemaakt en wel om de volgende redenen:

a. De methode is veel ingewikkelder dan de onze.
b. Slechts voor kleine φ is de snelle convergentie verzekerd.
c. Ook hier moeten twee procedures gemaakt worden, één voor kleine k en een voor grote k.
   (Voor kleine k geeft Carlson een analoge machtreeks die echter complex wordt.)
d. Carlson geeft geen ontwikkeling voor de E.
e. Ook hier moeten logarithmes, sinussen en tangenten berekend worden.

§ 20. De formules die S.C. van Veen, (zie [6]) heeft afgeleid

Van Veen kent kennelijk de Nachlass van Gauss en gebruikt ook steeds de Landentransformatie en de Gausstransformatie, (§§ 1,2, 3,4 en 5.)

Hij drukt zijn slotformules uit in de oorspronkelijke k en φ. Deze formules verkrijgt hij ook na een aantal malen transformeren.

Wij willen slechts een greep doen uit dit uitgebreide formularium.

Voor $k \backsimeq 1$

$$K(k) = \frac{2}{(1+\sqrt{k})^2}\left\{\log 2.\left(\frac{1+k}{1-k}\right).\ F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4\right) + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m)} \sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{n!}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{k}}{k}\right)^{4n}\right\}$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\, F(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;k^2) \text{ en}$$

$$E(k) = \frac{\pi \cos^2 \alpha/2}{2}\, F(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};1;\mathrm{tg}^4 \tfrac{\alpha}{2}) \text{ met } \sin\alpha = k.$$

Voor de niet volledige elliptische integralen:
met $\sin\alpha = k$.
We schrijven alleen de eerste termen van de reeksen op:

$$k \backsimeq 0:\ F(k,\varphi) \backsimeq \frac{1}{(1+\sqrt{\cos\alpha})^2}\left\{\varphi + \arctan(\cos\alpha\ \mathrm{tg}\,\varphi) + \right.$$
$$\left. + 2\arctan(\sqrt{\cos\alpha}\ \mathrm{tg}\,\varphi)\right\}$$

en met $\Delta = \sqrt{1-\sin^2\alpha\ \sin^2\varphi}$.

$$E(k,\varphi) \backsimeq \frac{\sin 2\varphi \sin^2\alpha}{8\Delta} + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi \sin^2\alpha/2.\ \Delta}{1+\cos\alpha\ \mathrm{tg}^2\varphi} +$$

$$+ \frac{\cos^4 \alpha/2}{(1+\sqrt{\cos\alpha})^2}\left\{\varphi + \arctan(\cos\alpha.\mathrm{tg}\,\varphi) + 2\arctan(\sqrt{\cos\alpha}.\mathrm{tg}\,\varphi)\right\}$$

$k \backsimeq 1$ en φ klein:

$$F(k,\varphi) \backsimeq \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \log \frac{1+\sin\varphi\sqrt{\sin\alpha}}{1-\sin\varphi\sqrt{\sin\alpha}}$$

$$E(k,\varphi)\ \frac{1-\sin\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha}} \log \frac{1+\sin\varphi\sqrt{\sin\alpha}}{1-\sin\varphi\sqrt{\sin\alpha}} + \sin\varphi \sin\alpha$$

$k \backsimeq 1$ en $\varphi \backsimeq \pi/2$:

$$F(k,\varphi) \backsimeq K(k) - \frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha}} \log \frac{\Delta + \cos\varphi\sqrt{\sin\alpha}}{\Delta - \cos\varphi\sqrt{\sin\alpha}}$$

$$E(k,\varphi) \backsimeq E(k) - \mathrm{cotg}\,\varphi.\Delta + \frac{\cos^2\alpha}{8\sin\alpha}(1-2\sqrt{\sin\alpha}) - \log\frac{\Delta + \cos\varphi\sqrt{\sin\alpha}}{\Delta - \cos\varphi\sqrt{\sin\alpha}} +$$

$$+ \frac{\Delta.\cos\varphi(1+\sin\alpha)}{2(1+\sin\alpha\sin^2\varphi)}.$$

We willen opmerken dat de directheid en fraaiheid van onze formules § 9 en § 10 naar onze smaak verre opwegen tegen het voordeel van deze formules: dat ze namelijk expliciet staan geschreven.
Een programma op deze formules gebaseerd zou in drie stukken uiteen moeten vallen voor $k \approx 0$, voor $k \approx 1$ en $\varphi \approx 0$, en voor $k \approx 1$ en $\varphi \approx \pi/2$.
We zouden trouwens niet alleen met de hoofdtermen kunnen volstaan, doch meerdere termen van de reeks op moeten nemen.
In feite echter hebben deze formules en onze formules dezelfde oorsprong n.l. de Landentransformatie of de Gausstransformatie. Onze formules laten zich echter gemakkelijker en fraaier in ALGOL 60 programmeren dan bovengenoemde formules.

Literatuur:

[1] Magnus en Oberhettinger: Formeln und Satze.

[2] C.F. Gauss: Anziehung eines Elliptischen Ringes - Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrisches Mittels. Herausgegeben von Dr. HARALD GEPPERT.

[3] A.R. DiDonati en A.V. Hershey: New Formulas for Computing Incomplete Elliptic Integrals of the First and Second Kind. Journal of the Association for Computing Machinery. Jan. 1959 vol.6, p.515.

[4] David K. Jefferson: ALGOL procedure for Elliptic Integrals. Comm. A.C.M. vol. 4, No 12, Dec. 1961.

[5] B.C. Carlson: Series and Bounds for Elliptic Integrals. Journal of Math. and Physics XL 2 July 1961.

[6] S.C. van Veen: Elliptische Integralen. Indagationes Mathematicae, vol.III, Fasc.1, 1941.

[7] A.M. Legendre - F. Emde: Tafeln der Elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung.

[8] G.W. and R.W. Spenceley: Smithsonian Elliptic Functions Tables.

```
comment procedure voor de volledie elliptische integraal van de eerste soort, waarbij de modulus k= sin (A),
het argument moet kleiner dan pi/2 zjn, de berekening is voor A < 88 gr. in 12 decimalen nauwkeurig,
voor 88 gr. ≤ A ≤ 89 gr. in 11 decimalen nauwkeurig;

real procedure K (A); value A; real A;
begin   real a1, a2, b, k1; integer n; b:= abs (sin (A)); if b > .9539
        then    begin   a1:= (1+b)/2; b:= sqrt(b); a2:= (a1+b)/2; b:=sqrt (a1×b); A:= 1.57079632679 − A;
                        k1:= 1; AA: k1:= k1 × 2 × cos (A); A:= A × 2; if A < .349065850398 then goto AA;
                        K:= ln ( 128 × (a2 + b) × a2 × a1 × a1 × (k1/sin (A))↑4)/(a2 + b)/2
                end
        else    begin   b:= abs (cos (A)); a1:=1;
                        for n:=1, 2, 3 do begin a2:= (a1+b)/2; b:= sqrt (a1×b); a1:= a2 end;
                        K:= 3.14159265359/(a1+b)
                end
end K;

comment procedure voor de volledige elliptische integraal van de tweede soort, waarbij de modulus k= sin (A),
het argument moet kleiner dan pi/2 zjn, de berekening is in 12 decimalen nauwkeurig;

real procedure  E (A); value A;  real A;
begin   real a1, a2, b, s, k1; integer n; b:= abs (sin (A)); k1:= abs (cos (A)); if b > .9539
        then    begin   a1:=  (1+b)/2; s:= k1×k1/2+a1×a1−b; b:= sqrt (b); a2:= (a1+b)/2; A:= a1×b;
                        s:= s/2+a2×a2−A; b:= sqrt (A); E:= (a2+b)/2+(s/(a2+b))× ln (128×(a2+b)×a2×a1×a1/(k1↑4))
                end
        else    begin   b:= k1; a1:= 1; s:= 1 + b × b; for n:= 1, 2, 3 do
                        begin a2:= (a1+b)/2; A:= a1×b; a1:= a2; s:= s/2−a1×a1+A; b:= sqrt (A) end;
                        E:= 12.5663706144 × s /(a1+b)
                end
end E;
```

```
comment procedure voor de volledige elliptische integraal B (k)= (E (k) - k' × k' × K (k))/(k × k),
waarbij de modulus k= sin (A), het argument moet kleiner dan pi/2 zjn, de berekening is in 12 decimalen nauwkeurig;

real procedure  B (A); value A; real A;
begin   real a1, a2, b, b1, s, k1; integer n; b:= abs (sin (A)); k1:= abs (cos (A)); b1:= b; if b ≥  .9539
        then    begin   a1:= (1+b)/2; s:= a1×a1 - k1×k1 /2 -b; b:= sqrt (b); a2:= (a1+b)/2; A:= a1×b; b:= sqrt (A);
                        s:= s/2+a2×a2-A; B:= ((a2+b)/2+(s/(a2+b))× ln (128×(a2+b)×a2×a1×a1/(k1↑4)))/(b1×b1)
                end
        else    begin   b:= k1; a1:= 1; s:= b1 × b1;
                        for n:= 1, 2, 3 do begin a2:= (a1+b)/2; A:= a1×b; a1:= a2; s:= s/2-a1×a1+A; b:= sqrt (A) end;
                        B:= (12.5663706144 × s /(a1+b))/(b1 × b1)
                end
end B;

comment procedure voor de onvolledige elliptische integraal van de eerste soort, waarbij de modulus k= sin (A),
en de bovengrens P is, beide argumenten moeten kleiner dan pi/2 zijn, de berekening is in 11 decimalen nauwkeurig;

real procedure  F (A, P); value A, P; real  A, P;
begin   real  a, a1, b, b1, si; integer  n, m; b:= abs (cos (A)); b1:= abs (sin (A)); if  b1 < .9539
        then    begin   a:= 1; si:= cos (P)/sin (P); n:=0;  A:= b;
                        for m:= 1, 2, 3 do
                        begin si:= ( si-A/si)/2; n:= 2×n + (1 - sign (si))/2; a:= (a+b)/2; b:=  sqrt (A); A:= a×b end;
                        si:= (si - A/si)/2; n:= 2×n + 1 - sign (si);  a:= (a+b)/2;
                        P:= 2 × arctan ( a/si) + n × 3.14159265359; F:= (P/a)/32
                end
        else    begin   a:= 1; b:= b1; si:= cos (P)/sin (P); a1:= b×b; for m:= 1, 2 do
                        begin A:= a×b; si:= a×si + sqrt (a×a×(si×si + 1) - a1); a:= (a+b)/2; si:= si/(a×2);
                              b:= sqrt (A); a1:= A
                        end; si:= a×si + sqrt (a×a×(si×si + 1) - A); a:= (a+b)/2; si:= si/(a×2);
                        F:= ln ((1 + sqrt (1 + si×si))/si)/a
                end
end F;
```

```
comment procedure voor de onvolledige elliptische integraal van de tweede soort, waarbij de modulus k= sin (A),
en de bovengrens P is, beide argumenten moeten kleiner dan pi/2 zijn, de berekening is in 11 decimalen nauwkeurig;

real procedure  E (A, P); value A, P; real  A, P;
begin   real U, V;
        procedure  EA;
        begin  real  a, a1, b, S1, S2, si, co; integer n, m;
               b:= U; a:= 1; co:= cos(P)/sin (P); S1:= S2:= 0; a1:= b×b; n:= 0;
               for     m:= 1, 2, 3, 4 do
               begin   A:= a×b; co:= (co - A/co)/2; n:= 2×n + (1 - sign(co))/2; P:= a×a; a:= (a+b)/2;
                       P:= P - a1; S2:= S2 + P × sign (1.5 - n + (n:4)×4)/sqrt (a×a +co×co);
                       S1:= S1/2 + P; a1:= A; b:= sqrt (A)
               end;
               P:= 2 × arctan (a/co) + (n +(1 - sign (co))/2) × 3.14159265359;
               E:= ((P × (.250 - S1)/a)/2 + S2)/4
        end;
        procedure  EB;
        begin  real a, S1, co, si; real array b [0:3], SIN [0:3]; integer m, j;
               a:= 1; S1:= U × U; b [0]:= V; si:= sin (P); co:= cos (P)/si; SIN [0]:= si; b [3]:= 1 + V;
               co:= (co + sqrt (co × co + 1 - V × V))/b [3]; si:= co × co; if V < .98 then j:= 2 else j:= 1;
               for     m:= 0 step 1 until j do
               begin   SIN [m+1]:= 1/sqrt (1 + si); A:= a × b[m]; a:= b [3]/2; b [m+1]:= sqrt (A);
                       P:= a × a; S1:= S1/2 + P - A; b [3]:= a + b [m+1];
                       co:= (a × co + sqrt (P × (si + 1) - A))/b [3]; si:= co × co
               end;    si:= sqrt (1 + si); P:= 1/si; U:= 0; b [3]:= a;
               for m:= j+1 step -1 until 0 do U:= 2 × U + b [m] × (P - SIN [m]);
               E:= 2↑j × S1 × ln ((1 + si)/co)/a + P + U
        end;
        U:= abs (cos (A)); V:= abs (sin (A)); if V < .9539 then EA else EB
end E;
```

```
comment procedure voor de onvolledige elliptische integraal B (A, P)= (E (A, P)  −  k' × k' × F (A, P))/(k × k),
waarbij de modulus k= sin (A), en de bovengrens P is, beide argumenten moeten kleiner dan pi/2 zijn,
de berekening is in 11 decimalen nauwkeurig;

real procedure  B (A, P); value A, P; real  A, P;
begin   real U, V;
        procedure  BA;
        begin   real  a, a1, b, S1, S2, si, co; integer n, m;
                b:= U; a:= 1; co:= cos(P)/sin (P); S2:= S1:= 0; a1:= b×b; n:= 0;
                for     m:= 1, 2, 3, 4 do
                begin   A:= a×b; co:= (co − A/co)/2; n:= 2×n + (1 − sign(co))/2; P:= a×a; a:= (a+b)/2;
                        P:= P − a1; S1:= S1/2 + P; S2:= S2 + P × sign (1.5 − n + (n:4)×4)/sqrt (a×a +co×co);
                        a1:= A; b:= sqrt (A)
                end;
                P:= 2 × arctan (a/co) + (n +(1 − sign (co))/2) × 3.14159265359; V:= V × V;
                B:= (((P × (V/4 − S1)/a)/2 + S2)/4)/V
        end;
        procedure  BB;
        begin   real a, S1, co, si; real array b [0:3], SIN [0:3]; integer m, j;
                a:= 1; S1:= − U × U; b [0]:= V; si:= sin (P); co:= cos (P)/si; SIN [0]:= si; b [3]:= 1 + V;
                V:= V × V; co:= (co + sqrt (co × co + 1 − V))/b [3]; si:= co × co;
                if V < .9604 then j:= 2 else j:= 1;
                for     m:= 0 step 1 until j do
                begin   SIN [m+1]:= 1/sqrt (1 + si); A:= a × b[m]; a:= b [3]/2; b [m+1]:= sqrt (A);
                        P:= a × a; S1:= S1/2 + P − A; b [3]:= a + b [m+1];
                        co:= (a × co + sqrt (P × (si + 1) − A))/b [3]; si:= co × co
                end;    si:= sqrt (1 + si); P:= 1/si; U:= 0; b [3]:= a;
                for m:= j+1 step −1 until 0 do U:= 2 × U + b [m] × (P − SIN [m]);
                B:= (2↑j × S1 × ln ((1 + si)/co)/a + P + U)/V
        end;
        U:= abs (cos (A)); V:= abs (sin (A)); if V < .9539 then BA else BB
end B;
```

```
comment  procedure voor de Elliptische functie van Jacobi : sn (u, k), waarin k = sin (A), A moet kleiner dan pi/2
zijn en u moet kleiner dan K (k) zijn, de berekening is in 11 decimalen nauwkeurig ;

real procedure  sn (u, A); value A, u; real A, u;
begin   real array a [0:3], b [0:3]; real a1, t; integer i;
        a [0]:= 1; b [0]:= abs (sin (A)); if b [0] ≥ .9539
        then    begin   for i:= 1, 2 do
                        begin a1:= (a [i-1] + b [i-1])/2; b [i]:= sqrt (a [i-1] × b [i-1]); a [i]:= a1 end;
                        a1:= exp ((a [2] + b [2]) × u); t:= (a1 - 1)/(2 × sqrt (a1));
                        for i:= 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t /(a [i] + b [i] - (a [i] - b [i]) × t × t);
                        sn:= t/sqrt (1 + t × t)
                end
        else    begin   b [0]:= abs (cos (A)); for i:= 1, 2, 3 do
                        begin a1:= (a [i-1] + b [i-1])/2; b [i]:= sqrt (a [i-1] × b [i-1]); a [i]:= a1 end;
                        a1:= (a [3] + b [3]) × u/2; t:= sin (a1); for i:= 3, 2, 1, 0 do
                        t:= 2 × a [i] × t/(a [i] + b [i] + (a [i] - b [i]) × t × t); sn:= t
                end
end sn;
```

```
comment  procedure voor de Elliptische functie van Jacobi : cn (u, k), waarin k = sin (A), A moet kleiner dan pi/2
zijn en u moet kleiner dan K (k) zijn, de berekening is in 11 decimalen nauwkeurig ;

real procedure  cn (u, A); value A, u; real A, u;
begin   real array a [0:3], b [0:3]; real a1, b1, t,k1; integer i;
        a [0]:= 1; b1:= b [0]:= abs (sin (A)); k1:= abs (cos (A)); if b [0] ≥ .9539
        then    begin   for i:= 1, 2 do
                        begin a1:= (a [i-1] + b [i-1])/2; b [i]:= sqrt (a [i-1] × b [i-1]); a [i]:= a1 end;
                        a1:= (ln ((a [2] + b [2]) × a [2] × a [1] × a [1])/2 + 2.42601513194
                         - 2 × ln (k1))/(a [2] + b [2]); if u/a1 > .5
                        then    begin   a1:= exp ((a [2] + b [2]) × (a1 - u)); t:= (a1 - 1)/(2 × sqrt (a1));
                                        for i:=  2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t /
                                        (a [i] + b [i] - (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        cn:= k1 × t /sqrt (1 + (k1 × t)↑2)
                                end
                        else    begin   a1:= exp ((a [2] + b [2]) × u); t:= (a1 - 1)/(2 × sqrt (a1));
                                        for i:= 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t /
                                        (a [i] + b [i] - (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        cn:= 1/sqrt (1 + t × t)
                                end
                end
        else    begin   b [0]:= k1; for i:= 1, 2, 3 do
                        begin a1:= (a [i-1] + b [i-1])/2; b [i]:= sqrt (a [i-1] × b [i-1]); a [i]:= a1 end;
                        a1:= (a [3] + b [3]) × u/2; if a1 < .78539816340
                        then    begin   t:= sin (a1);
                                        for i:= 3, 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t/
                                        (a [i] + b [i] + (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        cn:= sqrt (1 - t × t)
                                end
                        else    begin   t:= sin (1.57079632679 - a1);
                                        for i:= 3, 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t/
                                        (a [i] + b [i] + (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        cn:= b [0] × t /sqrt (1 - (b1 × t)↑2)
                                end
                end
end cn;
```

```
comment  procedure voor de Elliptische functie van Jacobi : dn (u, k), waarin k = sin (A), A moet kleiner dan pi/2
zijn en u moet kleiner dan K (k) zijn, de berekening is in 11 decimalen nauwkeurig ;

real procedure  dn (u, A); value A, u; real A, u;
begin   real array a [0:3], b [0:3]; real a1, b1, t, k1; integer i;
        a [0]:= 1; b [0]:= b1:= abs (sin (A)); k1:= abs (cos (A)); if b [0] > .9539
        then    begin   for i:= 1, 2 do begin a1:= (a [i-1] + b [i-1])/2; b [i]:= sqrt (a [i-1] × b [i-1]);
                                              a [i]:= a1
                                        end; a1:= (ln ((a [2] + b [2]) × a [2] × a [1] × a [1])/2 + 2.42601513194
                                                 - 2 × ln (k1))/(a [2] + b [2]); if u/a1 > .5
                        then    begin   a1:= exp ((a [2] + b [2]) × (a1 - u)); t:= (a1 - 1)/(2 × sqrt (a1));
                                        for i:= 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t /
                                        (a [i] + b [i] - (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        dn:= k1 × sqrt ((1 + t × t)/(1 + (k1 × t)↑2))
                                end
                        else    begin   a1:= exp ((a [2] + b [2]) × u); t:= (a1 - 1)/(2 × sqrt (a1));
                                        for i:= 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t /
                                        (a [i] + b [i] - (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        dn:= sqrt ((1 + (k1 × t)↑2)/(1 + t × t))
                                end
                end
        else    begin   b [0]:= k1; for i:= 1, 2, 3 do
                        begin a1:= (a [i-1] + b [i-1])/2; b [i]:= sqrt (a [i-1] × b [i-1]); a [i]:= a1 end;
                        a1:= (a [3] + b [3]) × u/2; if a1 < .78539816340
                        then    begin   t:= sin (a1);
                                        for i:= 3, 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t/
                                        (a [i] + b [i] + (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        dn:= sqrt (1 - (b1 × t)↑2)
                                end
                        else    begin   t:= sin (1.57079632679 - a1);
                                        for i:= 3, 2, 1, 0 do t:= 2 × a [i] × t/
                                        (a [i] + b [i] + (a [i] - b [i]) × t × t);
                                        dn:= b [0]/sqrt (1 - (b1 × t)↑2)
                                end
                end
end dn;
```