stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE TD 7/74 MEI

WERKBESPREKINGEN IN TWEEDE HELFT 1973

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

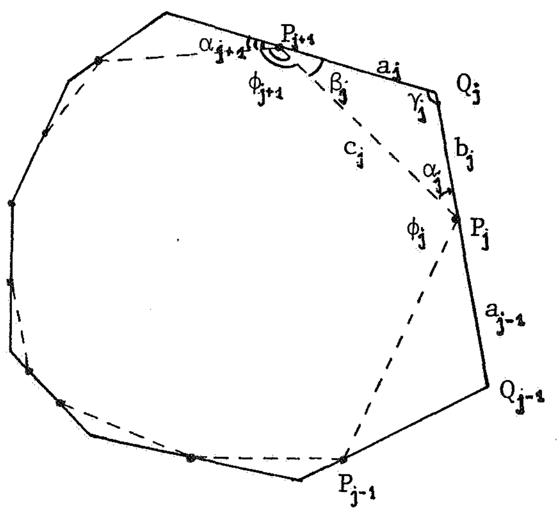
Inhoud

Werkbespreking 18 oktober 1973

B. Dijkhuis

DE CONVEXE KROMME DOOR n GEGEVEN PUNTEN, DIE HET INGESLOTEN OPPERVLAK MAXIMALISEERT

Het probleem heeft alleen zin, wanneer de n gegeven punten P_j $(j=1,2,\ldots,n)$ de hoekpunten van een convexe veelhoek zijn. De zijden van deze veelhoek vormen tezamen de convexe kromme door de punten P_j, waarvoor het ingesloten oppervlak juist minimaal is.



figuur 1

Het is gemakkelijk in te zien, dat de maximaliserende convexe kromme ook een veelhoek is, waarvan eventueel een aantal zijden gedeeltelijk samenvallen met die van de minimale veelhoek, maar die overigens de minimale veelhoek geheel onthult (zie figuur 1). Op elke niet-samenvallende zijde is precies één punt P_j gelegen, op elke samenvallende zijde liggen twee opeenvolgende punten P_j en P_{j+1}. Zo'n samenvallende zijde kan men ook beschouwen als een ontaard paar van zijden, die een hoek van 180° insluiten of als een paar, waarvan één zijde de lengte nul heeft.

Het oppervlak van de omhullende veelhoek met hoekpunten Q_j, waarvan de zijde $Q_{j-1}Q_j$ gaat door het punt P_j, is gelijk aan

(1) $$O = \text{opp. minimale veelhoek} + \sum_{j=1}^{n} O_j,$$

waarbij

(2) $$O_j = \text{opp. } \Delta P_jQ_jP_{j+1} = \frac{1}{2}\, b_jc_j \sin\alpha_j = \frac{1}{2}\, c_j^2 \frac{\sin\alpha_j \sin\beta_j}{\sin\gamma_j} =$$

$$= \frac{1}{2} c_j^2 \frac{\sin\alpha_j \sin(\phi_{j+1} + \alpha_{j+1})}{\sin(\phi_{j+1} + \alpha_{j+1} - \alpha_j)}$$

(de betekenis van b_j, c_j, α_j, β_j, γ_j en ϕ_{j+1} is af te lezen uit figuur 1; waar nodig stellen we $P_{n+1} = P_1$, $P_{n+2} = P_2$, $\alpha_{n+1} = \alpha_1$, etc.).

In (1) en (2) zijn c_j, ϕ_{j+1} en opp.minimale veelhoek constanten, vastgelegd door de ligging van de punten P_j, terwijl de hoeken α_j $(j=1,2,\dots,n)$ zo bepaald moeten worden, dat het oppervlak O maximaal is.

De eis van *convexiteit* houdt in dat de hoeken α_j daarbij begrensd zijn door

(3) $\qquad 0 \le \alpha_j \le \pi - \phi_j \;, \qquad\qquad j = 1,2,\dots,n.$

Merk op dat het oppervlak O_j oneindig kan worden, wanneer de lijnen P_jQ_j en Q_jP_{j+1} evenwijdig kunnen lopen, d.w.z. als $\phi_{j+1} + \alpha_{j+1} - \alpha_j = 0$ kan worden. Op grond van (3) is dit alleen mogelijk als $\phi_j + \phi_{j+1} \le \pi$ (voor n=3 is dit bij ieder tweetal hoeken het geval, voor n = 4 zijn er tenminste twee opeenvolgende hoeken ϕ_j en ϕ_{j+1} met som $\le \pi$). In een dergelijke situatie bestaat er geen *gesloten* kromme door de punten P_j, waarvoor het ingesloten oppervlak maximaal is.

Sluiten we deze gevallen uit en beperken we ons dus tot de veelhoeken waarvoor

(4) $\qquad \phi_j + \phi_{j+1} > \pi \;, \qquad\qquad j = 1,2,\dots,n,$

dan is de funktie $O(\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n)$ continu op het n-dimensionale blok B gedefinieerd door (3). Daar B een compacte verzameling is, neemt O op B zijn maximum en zijn minimum aan. Het minimum $(\sum_{j=1}^n O_j = 0)$ wordt aangenomen in de diametrale randpunten $(\alpha_j=0,\forall_j)$ en $(\alpha_j=\pi-\phi_j,\forall_j)$; in de overige punten van B is O > opp. minimale veelhoek.

De *stationaire waarden* van O worden bereikt als

$$\frac{\partial O}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial O_{j-1}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial O_j}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{2}\,\frac{c_{j-1}^2 \sin^2\alpha_{j-1}}{\sin^2(\phi_j+\alpha_j-\alpha_{j-1})} - \frac{1}{2}\,\frac{c_j^2 \sin^2(\phi_{j+1}+\alpha_{j+1})}{\sin^2(\phi_{j+1}+\alpha_{j+1}-\alpha_j)} =$$

(5)

$$= \frac{1}{2}\,\frac{c_{j-1}^2 \sin^2\alpha_{j-1}}{\sin^2\gamma_{j-1}} - \frac{1}{2}\,\frac{c_j^2 \sin^2\beta_j}{\sin^2\gamma_j} = \frac{1}{2}(a_{j-1}^2 - b_j^2) = \frac{1}{2}(\overline{Q_{j-1}P_j}^2 - \overline{P_jQ_j}^2) = 0\ ,$$

$$j = 1,2,\dots,n,$$

d.w.z. als de gegeven punten P_j *precies midden op de zijden* $Q_{j-1}Q_j$ *liggen*.

We gaan nu na of een dergelijke veelhoek te construeren is. Geven we de coördinaten van de punten P_j aan met de vectoren $\vec{p}_j$ en die van de hoekpunten Q_j met de vectoren $\vec{q}_j$, dan volgt uit de conditie $\overrightarrow{Q_{j-1}P_j} = \overrightarrow{P_jQ_j}$ dat

(6) $$\vec{q}_n + \vec{q}_1 = 2\vec{p}_2\ , \qquad \vec{q}_{j-1} + \vec{q}_j = 2\vec{p}_j\ , \qquad j = 2,\dots,n.$$

Tellen we van (6) de vergelijkingen met oneven j bij elkaar op en trekken we daar die met even j vanaf, dan gaat (6) over in

(7a) $$\vec{q}_{2k-1} = 2(\vec{p}_{2k-1}-\vec{p}_{2k-2}+\dots-\vec{p}_2+\vec{p}_1) - \vec{q}_n\ ,$$

$$k = 1,2,\dots,n/2.$$

(7b) $$\vec{q}_{2k} = 2(\vec{p}_{2k}-\vec{p}_{2k-1}+\dots+\vec{p}_2-\vec{p}_1) + \vec{q}_n\ .$$

In n *oneven* dan volgt uit (7a) met n = 2k-1 dat

(8a) $$\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p}_{n-1} + \dots - \vec{p}_2 + \vec{p}_1\ ,$$

zodat er dan precies één veelhoek is met de eigenschap dat de middens van de zijden $Q_{j-1}Q_j$ samenvallen met de n gegeven punten P_j. De hoekpunten Q_j zijn éénduidig bepaald door (8a) en (7a) of (7b).

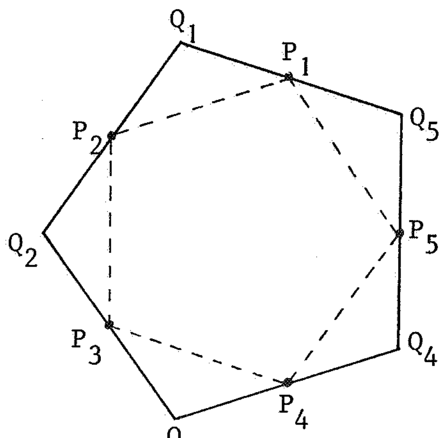
Is daarentegen n *even*, dan volgt uit (7b) met n = 2k dat

(8b) $$\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1} + \dots + \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0.$$

In deze situatie isde constructie van de gevraagde veelhoek slechts mogelijk, wanneer het zwaartepunt van de even punten P_j met dat van de oneven punten P_j samenvalt. Blijkt dit laatste het geval te zijn, dan zijn er echter ∞^2 veelhoeken met de gewenste eigenschap, die men kan krijgen door bijv. $\vec{q}_n$ willekeurig te kiezen, waarna de vectoren $\vec{q}_1,\dots,\vec{q}_{n-1}$ weer eenduidig door (7a) en (7b) bepaald zijn.

Iedere op bovenstaande wijze geconstrueerde veelhoek voldoet aan de vergelijkingen (5). Uiteraard moet ook nog gecontroleerd worden of deze veelhoek wel convex is (dus voldoet aan (3)) en of het ingesloten oppervlak wel een absoluut maximum is. Dat is in het algemeen niet het geval (de zo geconstrueerde stationnaire veelhoek correspondeert in het algemeen met een zadelpunt van de funktie O uit (1)). Het maximum moet dan op de rand van het blok B gezocht worden, d.w.z. onder de omhullende veelhoeken, waarvan tenminste een van de zijden door twee opeenvolgende punten P_j en P_{j+1} gaat. Op de rand van B blijken verscheidene locale maxima voor te komen. Welke daarvan het absolute maximum is, is meestal pas na gedetailleerd rekenwerk vast te stellen. Een eenvoudige methode om de convexe kromme door n willekeurige punten P_j te bepalen, die het ingesloten oppervlak maximaliseert, bestaat er daarom niet.

Voorbeeld: $n = 5$, P_j hoekpunt van een regelmatige vijfhoek.



figuur 2

$\vec{p}_j = (\cos\frac{2\pi j}{5}, \sin\frac{2\pi j}{5})$, $j=1,2,3,4,5.$

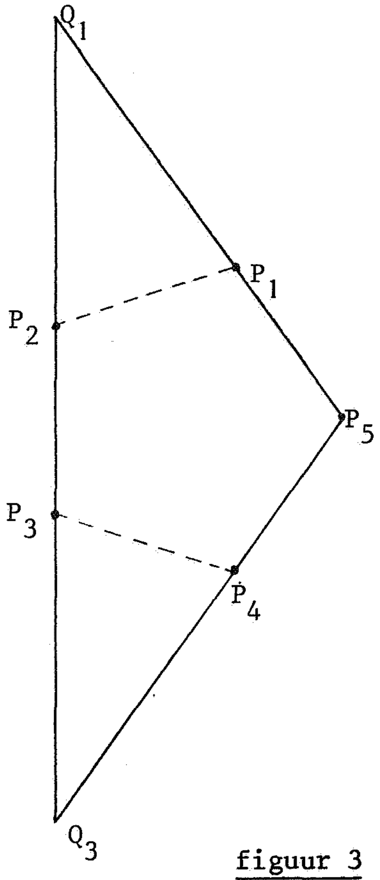
O_p = opp.minimale 5-hoek = $5 \times \sin\frac{\pi}{5} = 2{,}37764\dots$

Omhullende 5-hoek $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$(figuur 2) geconstrueerd volgens (8a) en (7):

$q_5 = (1, 2\sin\frac{2\pi}{5} - 2\sin\frac{4\pi}{5}) = (1, \mathrm{tg}\frac{\pi}{5})$

$\sum O_j = 5 \times$ opp. $\Delta P_1Q_1P_2 = 5 \times O_2 = 1{,}25507\dots$

O = opp. $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5 = 5 \times \mathrm{tg}\frac{\pi}{5} = 3{,}63271\dots$



figuur 3

Randextrema:

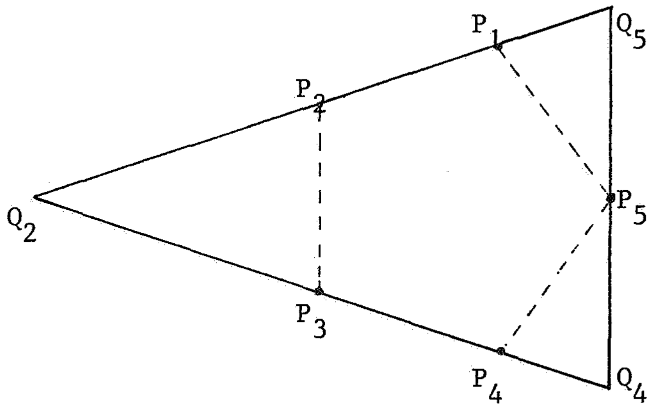
figuur 3: $\sum O_j = O_1 + O_3 \quad = 2{,}12663\ldots$

$O = \text{opp. } \Delta Q_1Q_3P_5 \quad = 4{,}50427\ldots$

(absolute maximum)

figuur 4: $\sum O_j = O_2 + O_4 + O_5 \quad = 1{,}87561\ldots$

$\frac{3}{4} = \text{opp. } \Delta Q_2Q_4Q_5 \quad = 4{,}25325\ldots$



figuur 4

Werkbespreking 1 november 1973

T.H. Koornwinder

ORTHOGONALE POLYNOMEN IN TWEE VARIABELEN, II

In een vorige werkbespreking (16 nov. 1972) gaf ik een overzicht van een aantal speciale klassen van orthogonale polynomen in twee variabelen. Hier zal één speciale klasse op een heel natuurlijke manier ingevoerd worden. Eerst bekijken we het analoge geval in één variabele.

1. Het geval van één variabele. Definieer voor $n = 0,1,2,\ldots$ de functies

$$\text{(1.1)}\qquad \begin{aligned} f_n^{++}(\theta) &= \cos n\theta \quad , & f_n^{+-}(\theta) &= \cos(n+\tfrac12)\theta, \\ f_n^{-+}(\theta) &= \sin(n+\tfrac12)\theta \ , & f_n^{--}(\theta) &= \sin(n+1)\theta. \end{aligned}$$

Voor $\rho,\ \sigma = \pm 1$ zijn de functies $f_n^{\rho,\sigma}$ juist de reguliere eigenfuncties van de operator $d^2\ /\ d\theta^2$ waarvoor geldt dat

$$\text{(1.2)}\qquad \begin{aligned} f_n^{\rho,\sigma}(-\theta) &= \rho f_n^{\rho,\sigma}(\theta), \\ f_n^{\rho,\sigma}(2\pi-\theta) &= \sigma f_n^{\rho,\sigma}(\theta). \end{aligned}$$

Dit zijn symmetrierelaties voor spiegelingen t.o.v. de punten 0 en π. De vier stelsels $\{f_n^{\rho,\sigma}\}$ zijn volledige orthogonale stelsels op het interval $(0,\pi)$, dus

$$\text{(1.3)}\qquad \int_0^\pi f_n^{\rho,\sigma}(\theta)\ f_m^{\rho,\sigma}(\theta)\ d\theta = 0 \quad , \quad n \neq m.$$

Laat $x = \cos\theta$. Er volgen de recurrentiebetrekkingen

$$\text{(1.4)}\qquad x\ f_n^{\rho,\sigma} = \tfrac12\ f_{n+1}^{\rho,\sigma} + \tfrac12\ f_{n-1}^{\rho,\sigma}$$

(met kleine aanpassing voor $n = 0$). Dus $f_n^{\rho,\sigma}\ /\ f_0^{\rho,\sigma}$ is een polynoom van graad n in x.

Definieer

$$(1.5) \qquad P_n^{(-\frac{1}{2}\rho,-\frac{1}{2}\sigma)}(x) = \text{const}\cdot f_n^{\rho,\sigma}(\theta) \;/\; f_0^{\rho,\sigma}(\theta).$$

Voor $\alpha,\beta = \pm\,\frac{1}{2}$ geldt dan:

(i) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ is polynoom van graad n in x,

(ii) $\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\; P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = 0 \quad , \qquad n \neq m.$

Voor algemene α, $\beta > -1$ definiëren eigenschappen (i) en (ii) de Jacobi-polynomen.

2. Een geval van twee variabelen. Definieer voor $n \geq k \geq 0$ en ρ, $\sigma = \pm\, 1$

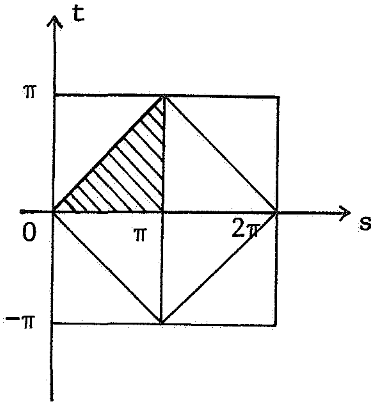
$$(2.1) \qquad \begin{aligned} f_{n,k}^{\rho,\sigma,+}(s,t) &= f_n^{\rho,\sigma}(s)\; f_k^{\rho,\sigma}(t) + f_k^{\rho,\sigma}(s)\; f_n^{\rho,\sigma}(t), \\ f_{n,k}^{\rho,\sigma,-}(s,t) &= f_{n+1}^{\rho,\sigma}(s)\; f_k^{\rho,\sigma}(t) - f_k^{\rho,\sigma}(s)\; f_{n+1}^{\rho,\sigma}(t). \end{aligned}$$

Voor ρ, σ, $\tau = \pm\, 1$ zijn de functies $f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}$ juist de reguliere eigenfuncties van $\partial^2 / \partial s^2 + \partial^2 / \partial t^2$ waarvoor geldt dat

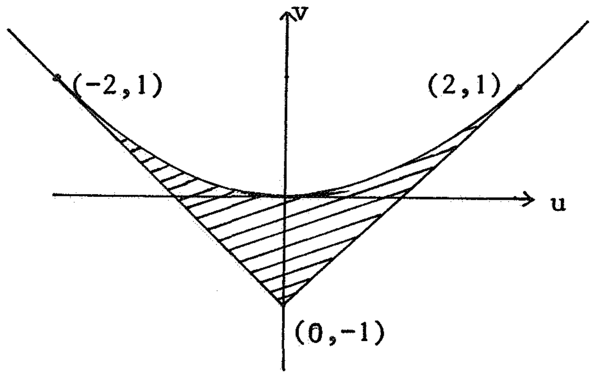
$$(2.2) \qquad \begin{aligned} f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}(s,-t) &= \rho\; f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}(s,t), \\ f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}(2\pi-s,t) &= \sigma\; f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}(s,t), \\ f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}(t,s) &= \tau\; f_{n}^{\rho,\sigma,\tau}(s,t). \end{aligned}$$

Dit zijn symmetrierelaties voor spiegelingen t.o.v. de lijnen $t = 0$, $s = \pi$ en $s = t$ (zie figuur 1). Noem het gebied begrensd door deze drie lijnen R. De acht stelsels $\{f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}\}$ zijn volledige orthogonale stelsels op R dus

$$(2.3) \qquad \iint_R f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}(s,t)\; f_{m,l}^{\rho,\sigma,\tau}(s,t)\; ds\, dt = 0 \quad , \quad (n,k) \neq (m,l).$$



figuur 1



figuur 2

De functies $f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}$ zijn ook eigenfuncties van de operator $\partial^4 / (\partial s^2\, \partial t^2)$.

Laat $u = \cos s + \cos t$, $v = \cos s \; \cos t$. De afbeelding $(s,t) \to (u,v)$ is een diffeomorfisme van het gebied R op een gebied S begrensd door de rechten $1 - u + v = 0$ en $1 + u + v = 0$ en de parabool $u^2 - 4v = 0$ die raakt aan de twee rechten (cf. figuur 2). Er volgen de recurrentiebetrekkingen

$$
(2.4) \quad
\begin{aligned}
u\, f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau} &= \tfrac{1}{2}\left(f_{n+1,k}^{\rho,\sigma,\tau} + f_{n,k+1}^{\rho,\sigma,\tau} + f_{n,k-1}^{\rho,\sigma,\tau} + f_{n-1,k}^{\rho,\sigma,\tau}\right), \\
v\, f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau} &= \tfrac{1}{2}\left(f_{n+1,k+1}^{\rho,\sigma,\tau} + f_{n+1,k-1}^{\rho,\sigma,\tau} + f_{n-1,k+1}^{\rho,\sigma,\tau} + f_{n-1,k-1}^{\rho,\sigma,\tau}\right)
\end{aligned}
$$

(met kleine aanpassing als $n - k \leq 1$ of $k = 0$).

Definieer

$$
(2.5) \quad p_{n,k}^{-\frac{1}{2}\rho,-\frac{1}{2}\sigma,-\frac{1}{2}\tau}(u,v) = \text{const.}\ \frac{f_{n,k}^{\rho,\sigma,\tau}(s,t)}{f_{0,0}^{\rho,\sigma,\tau}(s,t)} \; .
$$

Voor $\alpha, \beta, \gamma = \pm \frac{1}{2}$ geldt dan:

(i) $p_{n.k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$ is een lineaire combinatie van

$1, u, v, u^2, uv, v^2, u^3, u^2v, \ldots, u^n, u^{n-1}v, \ldots, u^{n-k}v^k$

met de coëfficient van $u^{n-k}v^k$ ongelijk nul.

(ii) $$\iint_S p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)\; p_{m,l}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)\, \cdot$$

$$\cdot\; (1-u+v)^{\alpha}(1+u+v)^{\beta}(u^2-4v)^{\gamma}\, du\, dv = 0, \quad (n,k) \neq (m,l).$$

Eigenschap (i) volgt uit (2.4) door volledige inductie t.o.v. de lexicografisch geordende paren (n,k) en (ii) volgt uit (2.3).

Voor algemene $\alpha, \beta, \gamma > -1$ zo dat $\alpha + \gamma + 3/2 > 0$, $\beta + \gamma + 3/2 > 0$ definiëren eigenschappen (i) en (ii) een grote klasse van orthogonale polynomen in twee variabelen.

In de rest van de werkbespreking werd geschetst hoe differentiaalvergelijkingen van orde twee en vier voor de polynomen $p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$ kunnen worden afgeleid. Zie hiervoor het MC-rapport TN 76/73.

Werkbespreking 15 november 1973.

O. Diekmann

OPLOSSING VAN EEN ASYMPTOTISCH PROBLEEM DOOR GEBRUIKMAKING VAN MEERWAARDIGHEID.

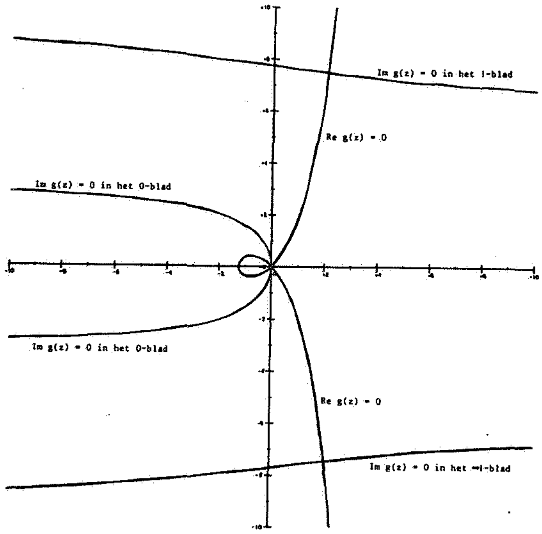
De functie $g(z) = z - \ln(1+z)$ heeft voor $z = -1$ een vertakkingspunt. Het aanbrengen van een coupure langs de reële as van $-\infty$ tot -1 leidt tot een Riemann-oppervlak met oneindig veel bladen. Het blad waarvoor geldt $(2n-1)\pi < \mathrm{Im}\ \ln(1+z) \leq (2n+1)\pi$ geven wij aan met n-blad.

In het 0-blad is $z = 0$ een dubbel nulpunt. De transformatie

$$\tfrac{1}{2}w^2 = z - \mathrm{Ln}(1+z) \quad ,$$

waarbij met Ln de hoofdwaarde van de logaritme wordt aangegeven, geeft

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, w^k \quad , \quad \text{met } c_1 \equiv 1.$$



figuur 1

Het probleem dat wij ons stellen is voor de coëfficiënten c_k van deze reeks een asymptotische ontwikkeling voor $k \to \infty$ af te leiden.

Uit de integraalformule van Cauchy volgt

$$k\, c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\frac{dz}{dw}(w)}{w^k}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{({}_*\sqrt{2g(z)})^k} \quad .$$

Hierbij is de kring in het z-vlak om $z = 0$ in het 0-blad. Met het $_*$teken wordt aangegeven dat voldaan moet zijn aan ${}_*\sqrt{w^2} = w$.

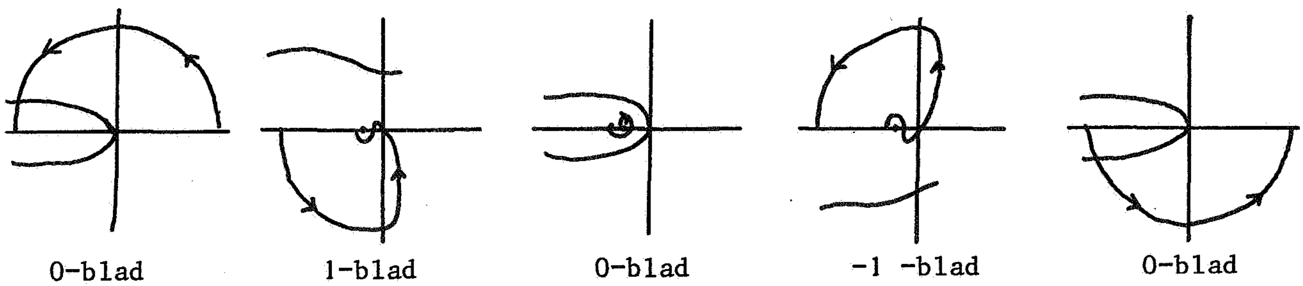
Zadelpunten moeten voldoen aan

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{z}{(1+z)g(z)} = 0.$$

Hieruit volgt dat in het blad waarin het contour ligt geen zadelpunt te vinden is. De geijkte methode is dan om het contour te verbuigen tot lijnen langs de coupure, maar dat blijkt in dit geval niet tot een bruikbare representatie te leiden. Uit de vergelijking volgt dat de punten $z = 0$ in de bladen waarin $g(0)$ ongelijk aan nul is (m.a.w. de n-bladen met $n \neq 0$) zadelpunten zijn.

Omdat $g(0) = -2n\pi i$ zijn alleen de zadelpunten in de bladen met $n = \pm 1$ van belang. De lijnen van het steilste verval worden juist gegeven door de vergelijking $\mathrm{Re}\, g(z) = 0$, waarbij het pad dat door de dalen gaat in het n-blad wordt gekenmerkt door de raaklijn $x = +y$ als $n < 0$ en $x = -y$ als $n > 0$.

Het contour wordt nu verbogen tot:



<u>figuur 2</u>

Rekening houdend met de definitie van de ${}_{*}\surd$ en met het feit dat de bijdragen uit het $\pm$ 1-blad gelijk imaginair en tegengesteld reëel deel hebben, vinden we uiteindelijk het volgende resultaat:

$$c_k = \left(\frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\right)^k \frac{2}{k\sqrt{k}} \left\{\alpha_k + \left(\frac{3}{4}\alpha_k + \frac{\pi}{3}\beta_k\right)\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

waarbij

$$\alpha_k = \cos\frac{k\pi}{4} - \sin\frac{k\pi}{4}, \quad \beta_k = \cos\frac{k\pi}{4} + \sin\frac{k\pi}{4}.$$

Werkbespreking 29 november 1973

I.G. Sprinkhuizen - Kuyper

ORTHOGONALE POLYNOMEN IN TWEE VARIABELEN, III.

De klasse van polynomen $p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$, gedefinieerd door Tom Koornwinder in zijn werkbespreking op 1 november 1973 kan m.b.v. differentiaaloperatoren nader worden onderzocht.

Er zijn twee differentiaaloperatoren waarvan de polynomen eigenfunkties zijn, $D_1^{\alpha,\beta,\gamma}$ (2^e orde) en $D_2^{\alpha,\beta,\gamma}$ (4^e orde). Verder bestaan er differentiaaloperatoren D_-^{γ}, $D_+^{\alpha,\beta,\gamma}$, $E_-^{\alpha,\beta}$, $E_+^{\alpha,\beta,\gamma}$ met de volgende eigenschappen:

(1a) $$D_-^{\gamma}\, p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \text{const. } p_{n-1,k-1}^{\alpha+1,\beta+1,\gamma}(u,v)$$

(1b) $$D_+^{\alpha,\beta,\gamma}\, p_{n-1,k-1}^{\alpha+1,\beta+1,\gamma}(u,v) = \text{const. } p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$$

(1c) $$E_-^{\alpha,\beta}\, p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \text{const. } p_{n-1,k}^{\alpha,\beta,\gamma+1}(u,v)$$

(1d) $$E_+^{\alpha,\beta,\gamma}\, p_{n-1,k}^{\alpha,\beta,\gamma+1}(u,v) = \text{const. } p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)\ .$$

Deze differentiaaloperatoren worden gegeven door de volgende formules:

(2a) $$D_-^{\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + u\,\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v\,\frac{\partial^2}{\partial v^2} + (\gamma + \tfrac{3}{2})\frac{\partial}{\partial v}$$

(2b) $$E_-^{\alpha,\beta} = u\,\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2(v+1)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + u\,\frac{\partial^2}{\partial v^2} + (\beta-\alpha)\frac{\partial}{\partial v} + (\alpha+\beta+2)\frac{\partial}{\partial u}$$

(3a) $$D_+^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{\mu^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)}\,(D_-^{\gamma})^*\,\mu^{\alpha+1,\beta+1,\gamma}(u,v)$$

(3b) $$E_+^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{\mu^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)}\,(E_-^{\alpha,\beta})^*\,\mu^{\alpha,\beta,\gamma+1}(u,v)\ ,$$

waarin $(D_-^{\gamma})^* = D^{-\gamma}$, $(E_-^{\alpha,\beta})^* = E_-^{-\alpha,-\beta}$ de geadjungeerde operatoren zijn van respektievelijk D_-^{γ} en $E_-^{\alpha,\beta}$ en waarin $\mu^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = (1-u+v)^{\alpha}(1+u+v)^{\beta}(u^2-4v)^{\gamma}$ de gewichtsfunktie is.

Uit (1) en (3) en $p_{0,0}^{\alpha+k,\beta+k,\gamma+n-k}(u,v) = 1$ volgt de volgende Rodrigues-achtige formule:

$$(4)\qquad \mu^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)\ p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \text{const.}\ \{(D_-^{\gamma})^*\}^k\ \{(E_-^{\alpha+k,\beta+k})^*\}^{n-k}\ \mu^{\alpha+k,\beta+k,\gamma+n-k}(u,v)\ .$$

Deze formule is te vergelijken met de Rodrigues-formule voor de Jacobi-polynomen:

$$\omega^{\alpha,\beta}(x)\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \text{const.}\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ \omega^{\alpha+n,\beta+n}(x)$$

waarin $\omega^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

We definiëren in het (n,k)-vlak $(n\geq k\geq 0)$ de volgende partiële ordening

Definitie. $(m,l) \prec (n,k) \Leftrightarrow m \leq n \wedge m + l \leq n + k$.

Met behulp van volledige inductie d.m.v. (1b) en (1d) kunnen we bewijzen

$$(5)\qquad p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \sum_{(i,j)\prec(n,k)} a_{ij}\ u^{i-j}\ v^{j}\ .$$

Als $\alpha = \beta$ dan is $\mu^{\alpha,\alpha,\gamma}(-u,v)$ gelijk aan $\mu^{\alpha,\alpha,\gamma}(u,v)$.

Dit heeft tot gevolg:

$$(6)\qquad p_{n,k}^{\alpha,\alpha,\gamma}(-u,v) = (-1)^{n-k}\ p_{n,k}^{\alpha,\alpha,\gamma}(u,v).$$

Een gevolg van (5) en (6) zijn de volgende kwadratische transformaties:

$$(7a)\qquad \frac{p_{n+k,n-k}^{\alpha,\alpha,\gamma}(u,v)}{p_{n+k,n-k}^{\alpha,\alpha,\gamma}(2,1)} = \frac{p_{n,k}^{\gamma,-\frac{1}{2},\alpha}(2v,u^2-2v-1)}{p_{n,k}^{\gamma,-\frac{1}{2},\alpha}(2,1)}$$

$$(7b)\qquad \frac{1}{u}\,\frac{p_{n+k+1,n-k}^{\alpha,\alpha,\gamma}(u,v)}{p_{n+k+1,n-k}^{\alpha,\alpha,\gamma}(2,1)} = \frac{1}{2}\,\frac{p_{n,k}^{\gamma,+\frac{1}{2},\alpha}(2v,u^2-2v-1)}{p_{n,k}^{\gamma,+\frac{1}{2},\alpha}(2,1)}$$

(7a) en (7b) geven ons de polynomen $\{p_{n,k}^{\alpha,\pm\frac{1}{2},\gamma}(u,v)\}$ uitgedrukt in $\{p_{n,k}^{\gamma,\gamma,\alpha}(u,v)\}$; de laatste zijn bekend als $\alpha = \pm\frac{1}{2}$.

Werkbespreking 13 december 1973

J.W. de Roever

VOLDOENDE VERZAMELINGEN VOOR FOURIERREPRESENTATIE

Een functie $\phi \in L^1$ heeft een Fouriergetransformeerde, die tot L^∞ behoort evenals zijn inverse getransformeerde $\hat{\phi}$:

$$(1) \qquad \hat{\phi}(x) = F^{-1}[\phi(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\, \phi(\xi)d\xi.$$

Als ϕ bovendien van begrensde variatie is, geldt de omkeerformule en we kunnen ϕ representeren als de Fouriergetransformeerde van $\hat{\phi}$:

$$(2) \qquad \phi(\xi) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{i\xi x}\, \hat{\phi}(x)dx,$$

waarbij we moeten bedenken dat in L^1 bijna overal gelijke functies geïdentificeerd worden. Een dergelijke formule bestaat ook voor L^2-functies, indien we in (1) integreren van $-N$ tot N en daarna N naar oneindig laten gaan.

Voor locaal integreerbare functies ϕ, die niet al te veel stijgen (bijvoorbeeld polynomen) wordt de Fouriergetransformeerde gedefinieerd met behulp van de ruimte S van C^∞-functies, die sneller dalen dan iedere negatieve macht van $|\xi|$ evenals alle afgeleiden. Zij ϕ een continue lineaire functionaal op S, dan definiëren we de Fouriergetransformeerde $F\,\phi$ van ϕ door voor elke $\psi \in S$ te eisen

$$(3) \qquad \langle F\phi,\psi\rangle = \langle\phi,F\psi\rangle\ .$$

Neem bijvoorbeeld $\phi(\xi) = \xi^m$, dan is $\hat{\phi}_x = i^{-m}\,\delta_x^{(m)}$. Ook hier geldt de omkeerformule, echter in distributionele zin. De functie ξ^m wordt gerepresenteerd door

$$(4) \qquad \xi^m = i^{-m} \frac{d^m}{dx^m}\, e^{i\xi x}\Big|_{x=0}\ .$$

We zullen nu willekeurige C^∞-functies ϕ voorstellen als een integraal van $e^{i\xi x}$. Laat E de ruimte van C^∞-functies zijn, dan bestaat de duale ruimte E' uit distributies f met compacte drager. De fouriergetransformeerde van f kan geschreven worden als $F[f](x) = \langle f_\xi, e^{i\xi x}\rangle$ en is volgens de stelling van Paley-Wiener-Schwartz uit te breiden tot een gehele functie, die voldoet aan

$$(5) \qquad |F[f](z)| \leq K(1+|z|)^m \, e^{m|y|} \qquad \text{met } z = x + iy \quad \text{en} \quad K,m \geq 0.$$

Noem de ruimte van zulke gehele functies H. Omdat E reflexief is, d.w.z. E is ook de duale van E', zijn de Fouriergetransformeerden van functies uit E elementen van H', de duale ruimte van H.

We nemen voorlopig de dimensie n = 1.

Eerst bekijken we enige voorbeelden. Laat $\phi(\xi) = e^\xi$; het is gemakkelijk in te zien hoe we e^ξ moeten voorstellen als integraal van $e^{i\xi x}$, namelijk

$$(6) \qquad e^\xi = e^{i\xi x}\Big|_{x=-i} \qquad \text{of ook} \qquad e^\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{i\xi z}}{z+i} dz ,$$

zodat we verwachten dat $\hat{\phi}$ gelijk is aan δ_{-i}. Inderdaad is voor $f \in E'$

$$\langle \delta_{-i}, Ff\rangle = \langle \delta_{-i}, \langle f_\xi, e^{i\xi x}\rangle\rangle = \langle f_\xi, e^\xi\rangle .$$

Een nog sterker groeiende functie, bijvoorbeeld $\phi(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2}$ wordt gepresenteerd door

$$e^{\frac{1}{2}\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi t - \frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\xi x} . e^{\frac{1}{2}x^2} dx .$$

In beide gevallen zien we dat x niet meer reëel is.

We zullen zien dan H' uit maten μ in het complexe vlak bestaat. Daarom kunnen we iedere functie ϕ uit E voorstellen door

$$(7) \qquad \phi(\xi) = \int_{\mathbb{C}} e^{i\xi z} d\mu(z) .$$

We hebben in (6) al gezien dat deze voorstelling niet eenduidig is, evenals de verzameling in $\mathbb{C}$ waarover geïntegreerd wordt. Een deelverzameling S van $\mathbb{C}$ heet *voldoende voor Fourierrepresentatie* van functies uit E (sufficient set, zie [1]), als iedere ϕ uit E gerepresenteerd kan worden in de vorm (7) waarbij slechts over S geïntegreerd wordt, dus

$$(8) \qquad \phi(\xi) = \int_S e^{i\xi z} d\mu(z) \ .$$

We kunnen dit toepassen op differentiaalvergelijkingen. Laat bijvoorbeeld een partiële differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten $Df = g$ gegeven zijn, waarbij $g \in E$ gegeven is en $f \in E$ gezocht wordt. Zij P het polynoom, dat uit D verkregen wordt door hierin $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ te vervangen door iz_j, $j = 1,\ldots,n$. Stel dat we een voldoende verzameling S gevonden hebben met $S \cap \{z \mid P(z) = 0\} = \emptyset$, dan wordt een oplossing gegeven door

$$f(\xi) = \int_S e^{i\xi z} \frac{1}{P(z)} d\mu(z) \ ,$$

waarbij μ een maat is met $g(\xi) = \int_S e^{i\xi z} d\mu(z)$. Inderdaad geldt

$$Df = D_\xi \int_S e^{i\xi z} \frac{1}{P(z)} d\mu(z) = \int_S e^{i\xi z} d\mu(z) = g \ .$$

We kunnen dit ook op stelsels differentiaalvergelijkingen toepassen.

We zullen nu de maten μ wat nauwkeuriger bekijken en tevens een voorbeeld van een voldoende verzameling van E geven. Zij $M_m(z) = (1+|z|)^{-m} e^{-m|y|}$, dan bestaat volgens (5) H uit de Banachruimte $H_{m,0}$ van gehele functies h, waarvoor $\lim_{z\to\infty} M_m(z)h(z) = 0$, met de norm

$$(9) \qquad \|h\|_m = \sup_{z\in\mathbb{C}} M_m(z)|h(z)| \ .$$

Laat $S \in \mathbb{C}$ een verzameling zijn zo, dat voor iedere m en alle functies $h \in H$ met

$$M_m(z)|h(z)| \le K \quad \text{voor } z \in S \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}} M_m(z)h(z) = 0$$

geldt

(10) $$M_m(z)|h(z)| \leq K \quad \text{voor} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\mathbb{C}}} M_m(z)h(z) = 0 \ .$$

Dan is S een voldoende verzameling voor Fourierrepresentatie van E. Hieraan voldoet bijvoorbeeld iedere verzameling $S = \mathbb{C} \setminus B$ met B compact in $\mathbb{C}$. We zullen echter zien dat er ook voldoende verzamelingen bestaan met dimensie 1.

Zij $C_0(M_m,S)$ de Banachruimte van continue functies h op S, waarvoor $\lim_{z\to\infty} M_m(z)h(z) = 0$, met de norm (9) waarbij het suprimum alleen over S genomen wordt. (10) betekent dat $H_{m,0}$ een lineaire deelruimte van $C_0(M_m,S)$ is. Met behulp van de stelling van Hahn-Banach kunnen alle continue lineaire functionalen op $H_{m,0}$ uitgebreid worden tot continue lineaire functionalen op $C_0(M_m,S)$. Deze laatste zijn volgens de representatiestelling van Riesz te schrijven als totaal begrensde Lebesgue-Stieltjes maten μ_m in S, namelijk voor $h \in C_0(M_m,S)$ is

$$<\mu_m,h> = \int_S M_m(z)h(z)d\mu_m(z) \quad \text{en} \quad \int_S |d\mu_m(z)| < \infty \ .$$

Noemen we $M_m\mu_m = \mu$, dan geldt voor de maten μ in (8)

(11) $$\int_S \left|\frac{d\mu(z)}{M_m(z)}\right| < \infty \qquad \text{voor} \quad m = 0,1,2,\ldots \ .$$

Immers volgens definitie (3) vinden we voor $\phi \in E$ en $f \in E'$

$$<f,\phi> = <Ff,F^{-1}\phi> = \int_S <f_\xi,e^{i\xi z}>d\mu(z)$$

en als we $f_\xi = \delta_\xi$ nemen, krijgen we voorstelling (8).

We bewijzen nu, dat de vereniging R_1 van de reëele en imaginaire as een voldoende verzameling voor Fourierpresentatie van E is, met behulp van de stelling van Phragmén-Lindelöf. Volgens deze stelling geldt voor een functie h, die holomorf en van exponentiële groei is binnen een sector met openingshoek $\alpha < \pi$, met $|h(z)| \leq K$ voor z behorend tot de twee lijnen a en b, die de sector begrenzen, dat $|h(z)| \leq K$ voor alle z uit de sector. Als bovendien de limiet voor $z \to \infty$ langs de lijnen a en b nul is, dan is de limiet nul langs alle lijnen binnen de sector. We nemen nu $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ en als sector telkens een kwadraat in het complexe vlak. Zij h een functie uit $H_{m,0}$, dan voldoet de functie $(z+i)^{-m}e^{imz}h(z)$ aan de voorwaarden van de stelling met het eerste kwadrant als sector. Dus als S de vereniging van de positieve reële en imaginaire as is, geldt (10) in het eerste kwadrant. Evenzo voor de andere kwadranten, zodat (10) geldt met $S = R_1$.

Uit (8) volgt dan dat iedere functie $\phi \in E$ te schrijven is als som van twee functies ϕ_1 en ϕ_2

$$\phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}d\mu_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi y}d\mu_2(y) = \phi_1(\xi) + \phi_2(\xi) \ . \tag{12}$$

Hierin voldoet ϕ_1 aan $\left|\frac{d^m}{d\xi^m}\phi_1(\xi)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^m |d\mu_1(x)| \leq K_m$ volgens (11),

dus ϕ_1 is een C^∞-functie, die evenals zijn afgeleiden begrensd is. Voor ϕ_2 vinden we voor elke m

$$|\phi_2(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi+i\eta)y}d\mu_2(y)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{m|y|}|d\mu_2(y)| \leq K_m \text{ als } |\xi| \leq m$$

volgens (11), dus ϕ_2 kan uitgebreid worden tot een gehele functie in C.

Voor $n > 1$ is $R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ een voldoende verzameling met R_j de vereniging van de reële en imaginaire as in het vlak van de j-de coördinaat.

Het essentiële hierbij is, dat de gehele functies h van exponentiële groei zijn. Daarom kunnen we evenzo vinden, dat de verzameling R voldoende is voor Fourierrepresentatie van $\mathcal{H}$, de ruimte van alle gehele functies, en van $\mathcal{D}'_F$, de ruimte van distributies van eindige orde (zie [1]).

Het geheel kan gegeneraliseerd worden tot niet-gehele functies.

Tot slot geven we nog aan hoe de functie $\phi(\xi) = \xi e^\xi$ voorgesteld kan worden in de vorm (12). Zoals in (6) geldt

$$\xi e^\xi = \frac{-1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{e^{i\xi z}}{(z+i)^2}dz, \quad \text{waarbij } \gamma \text{ een gesloten contour om } -i \text{ is.}$$

Laat γ_1 dat deel van de contour γ zijn, dat in het vierde kwadrant ligt. Voor $z \in \gamma_1$ kunnen we $e^{i\xi z}$ schrijven als

$$e^{i\xi z} = \frac{-1}{2\pi i} \left(\int_{-i\infty}^{i0} + \int_0^{\infty} \right) \frac{e^{i\xi t} e^{-\alpha t^{2-\varepsilon}} e^{\alpha z^{2-\varepsilon}}}{t - z} dt,$$

waarin $\alpha = e^{\pi i/(2+\varepsilon)}$ met $0 < \varepsilon < 1$, zodat

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{i\xi z}}{(z+i)^2} dz = \frac{-1}{2\pi i} \left(\int_{-i\infty}^{i0} + \int_0^{\infty} \right) e^{i\xi t} . e^{-\alpha t^{2-\varepsilon}} \int_{\gamma_1} \frac{e^{\alpha z^{2-\varepsilon}}}{(t-z)(z+i)^2} dz.dt.$$

Gelijksoortige formules gelden voor de rest van de contour γ.

[1] L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables*, Wiley-Interscience Publishes, New York 1970.