

Singuliere oplossingen van de Helmholtz - vergelijking in twee dimensies.

door  
G. H. Veltkamp

1 Vergelijking  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \varphi = 0$

Standaard-oplossing:  $k^2 = 0$  (potentiaal-vergelijking):

$$\varphi(x, y) = -\ln \left[ \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right]$$

$k^2 \neq 0$  (Helmholtz - vergelijking):

$$\varphi(x, y) = K_0(k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}).$$

N.B :  $K_0(r) \sim \ln r$  voor  $r \rightarrow 0$ .

$$K_0(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \text{ voor } r \rightarrow \infty.$$

2 Differentiaal-operator

$$D_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

po-1:  $u(\xi, \eta) = \begin{cases} -\ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) & k^2 = 0 \\ K_0(k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) & k^2 \neq 0. \end{cases}$

dipool:  $D_\theta u(\xi, \eta)$

$2^n$ -pool:  $D_{\theta_n} \dots D_{\theta_1} D_{\theta_1} u(\xi, \eta)$ .

Stelling. Als  $F(x, y)$  voldoet aan  $\Delta F - k^2 F = 0$ , dan is

$$D_{\theta_2} D_{\theta_1} F = \left\{ D_{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} D_{\theta_3} + k^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) \right\} F.$$

Speciale gevallen:

1  $\theta_3 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow D_{\theta_2} D_{\theta_1} = D_{\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}^2 - k^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$ .

2.  $\theta_3 = 0 \rightarrow D_{\theta_2} D_{\theta_1} = D_{\theta_1 + \theta_2} D_0 + k^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2$

3. Als  $k^2 = 0$ , dan generalisatie

$$D_{\theta_n} \dots D_{\theta_1} D_{\theta_1} = D_{\bar{\theta}}^n \quad \text{met} \quad \bar{\theta} = \frac{1}{n} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

Gevolg Voor  $k^2 = 0$  slechts één soort  $2^n$ -polen (op translaties en rotaties na).

Voor  $k^2 \neq 0$  lineaire combinaties van standaard-typen.



3. Lijnen met polen en hogere singulariteiten.

A. Geval  $k^2 = 0$

Lijn met polen met constante sterkte:

$$v(0, a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^a u(\xi) d\xi = (x-a) \ln(\sqrt{(x-a)^2 + y^2}) - x \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - y \left\{ \text{arc tg } \frac{y}{x-a} - \text{arc tg } \frac{y}{x} \right\} + a$$

(arc tg  $\frac{y}{x} = \text{arg}(x + iy)$ , tussen  $-\pi$  en  $+\pi$ ).

Lijn met normale dipolen met constante sterkte:

$$w(0, a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^a D_{\frac{1}{2}} u(\xi) d\xi = \text{arc tg } \frac{y}{x-a} - \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

Differentiatie:  $D_x v(0, a) = u(a) - u(0)$ .

$$D_{\frac{1}{2}} v(0, a) = v(0, a)$$

$$D_0 w(0, a) = D_{\frac{1}{2}} u(a) - D_{\frac{1}{2}} u(0)$$

$$D_{\frac{1}{2}} w(0, a) = -D_0 u(a) + D_0 u(0)$$

Eigenschappen  $v(0, a)$ :

1e continu

2e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  discontinu langs  $(0, a)$ :  $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_- = -2\pi$

3e  $\frac{\partial v}{\partial x}$  en hogere afgeleiden alleen singulier in eindpunten.

Eigenschappen  $w(0, a)$ :

1e discontinu langs  $(0, a)$ :  $\left. w \right|_- = 2\pi$

2e afgeleiden alleen singulier in eindpunten.

Lijn met schieve dipolen:

$$\int_0^a D_{\theta} u(\xi) d\xi = \cos\theta (v(a) - u(0)) + \sin\theta w(0, a)$$

Lijn met quadrupolen:

$$\int_0^a D_{\theta_2} D_{\theta_1} u(\xi) d\xi = D_{\theta_1 + \theta_2} u(a) - D_{\theta_1 + \theta_2} u(0)$$

B Geval  $k^2 \neq 0$

Lijn met polen met constante sterkte:

$$v(0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} u(\xi) d\xi = \pi U(x) e^{-|y|} - \frac{1}{2} \text{sgn } x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|} \text{cht } +iy \text{ sht } \frac{dt}{\text{cht}}$$



Lijn met normale dipolen met constante sterkte:

$$w(0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} D_{\frac{\pi}{2}} u(\xi) d\xi = \pi U(x) \operatorname{sgn} y e^{-|y|} + \frac{i}{2} \operatorname{sgn} x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x| \operatorname{ch} t + i y \operatorname{sh} t} \operatorname{th} t dt.$$

Differentiatie:

$$D_0 v(0) = -u(0)$$

$$D_{\frac{\pi}{2}} v(0) = w(0)$$

$$D_0 w(0) = -D_{\frac{\pi}{2}} u(0)$$

$$D_{\frac{\pi}{2}} w(0) = v(0) + D_0 u(0)$$

Eigenschappen  $v(0)$ :

1a: continu

2a:  $\frac{\partial v}{\partial y}$  discontinu langs  $(0, \infty)$ :  $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{-}^{+} = -2\pi$

3a:  $\frac{\partial^k v}{\partial y^k}$  continu als  $k$  even, discontinu als  $k$  oneven.

4a: afgeleide naar  $x$  en gemengde afgeleiden alleen singulier in 0.

Eigenschappen  $w(0)$ :

1a discontinu langs  $(0, \infty)$ :  $w \Big|_{-}^{+} = 2\pi$ .

2a  $\frac{\partial^k w}{\partial y^k}$  continu als  $k$  oneven, discontinu als  $k$  even.

3a afgeleiden naar  $x$  en gemengde afgeleiden alleen singulier in 0.

Lijn met schieve dipolen:

$$\int_0^{\infty} D_{\theta} u(\xi) d\xi = D_{\theta} v(0) = -\cos \theta u(0) + \sin \theta w(0).$$

Lijn met quadrupolen:

$$\int_0^{\infty} D_{\theta_2} D_{\theta_1} u(\xi) d\xi = D_{\theta_2} D_{\theta_1} v(0) = -D_{\theta_1 + \theta_2} u(0) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 v(0).$$

4. Draaiingsoperator.

$$T_{\alpha}(F(x, y)) \stackrel{\text{def}}{=} F(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$

$$D.w.z. \text{ Als } \left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\} x' + iy' = (x + iy) e^{-i\alpha}$$

dan wordt aan het punt  $(x, y)$  de functie-waarde in het punt  $(x', y')$  .. dat uit  $(x, y)$  ontstaat door terugdraaien over  $\alpha$  - toegevoegd.

Draaiingsoperator, werkend op functie met "Aufpunkt". Functie  $F(x \cdot a, y \cdot b)$  (in het vorige genoteerd als  $F(a, b)$ ).



$$T_\alpha F(a, b) = F(x-a)\cos \alpha + (y-b)\sin \alpha, \quad -(x-a)\cos \alpha + (y-b)\sin \alpha.$$

Eigenschappen:

1o  $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$

2o  $T_{\alpha+2\pi} = T_\alpha$

3o Differentiatie:  $D_\theta T_\alpha = T_\alpha D_{\theta-\alpha}$

Voorbeelden:

$T_\alpha u(a, b) = u(a, b)$  : pool is invariant bij draaiing.

$T_\alpha D_\theta u(a, b) = D_{\alpha+\theta} u(a, b)$  : gedraaide dipool

$T_\alpha v(a) =$  gedraaide lijn met polen.

$T_\alpha w(a) =$  gedraaide lijn met dipolen.

5 Scheve randvoorwaarde

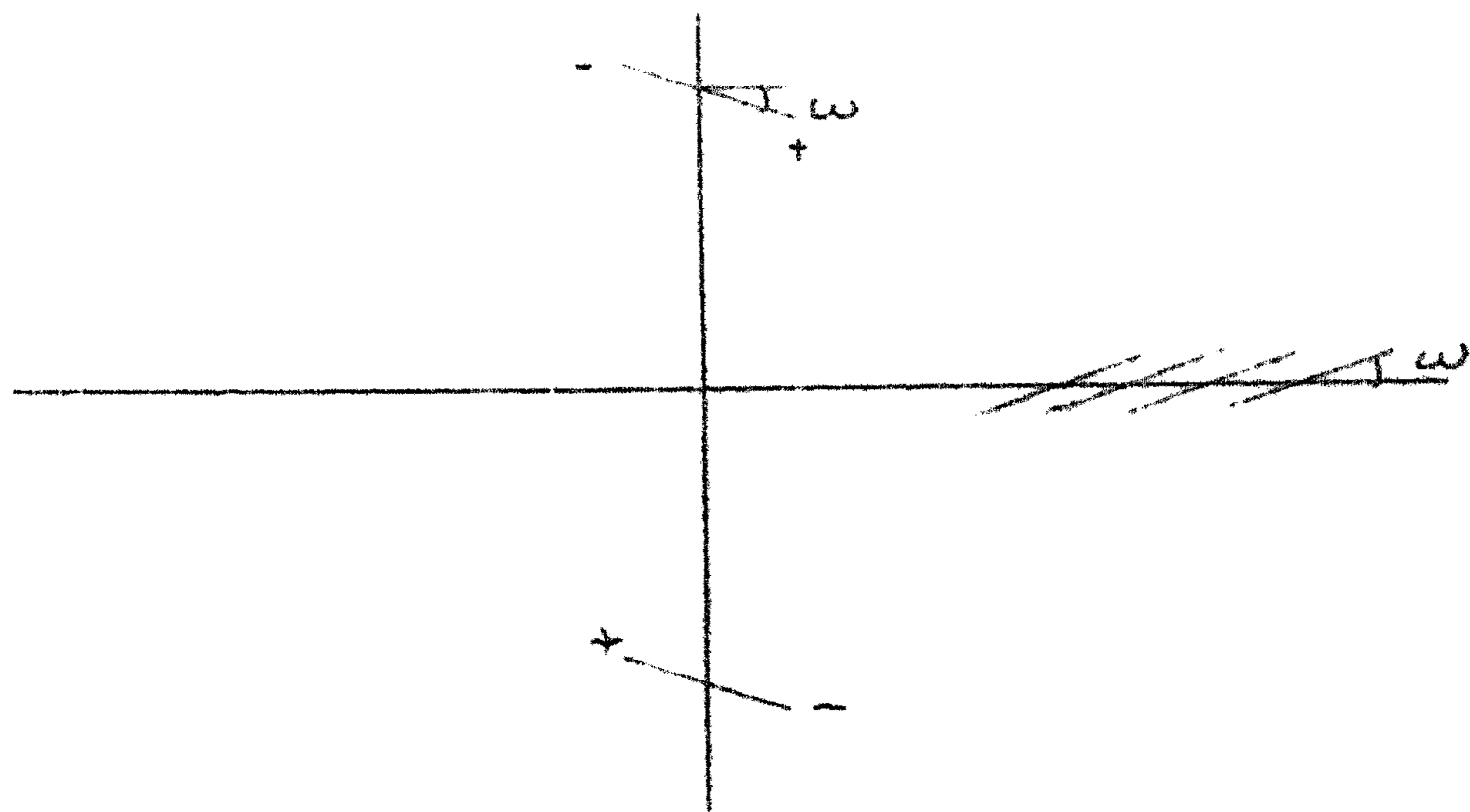
De voorwaarde  $\cos \omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$  voor  $y = 0$  kan geschreven worden  $D_\omega \varphi = 0$  voor  $y = 0$ .

Stelling. Als  $\psi(x, y)$  een on-even functie van  $y$  is, dan voldoet  $\varphi(x, y) = D_{-\omega} \psi$  aan  $D_\omega \varphi = 0$  voor  $x = 0$ .

Toepassingen ( $k^2 \neq 0$ )

1. Kies  $\psi = u(0, a) - u(0, -a)$ ,

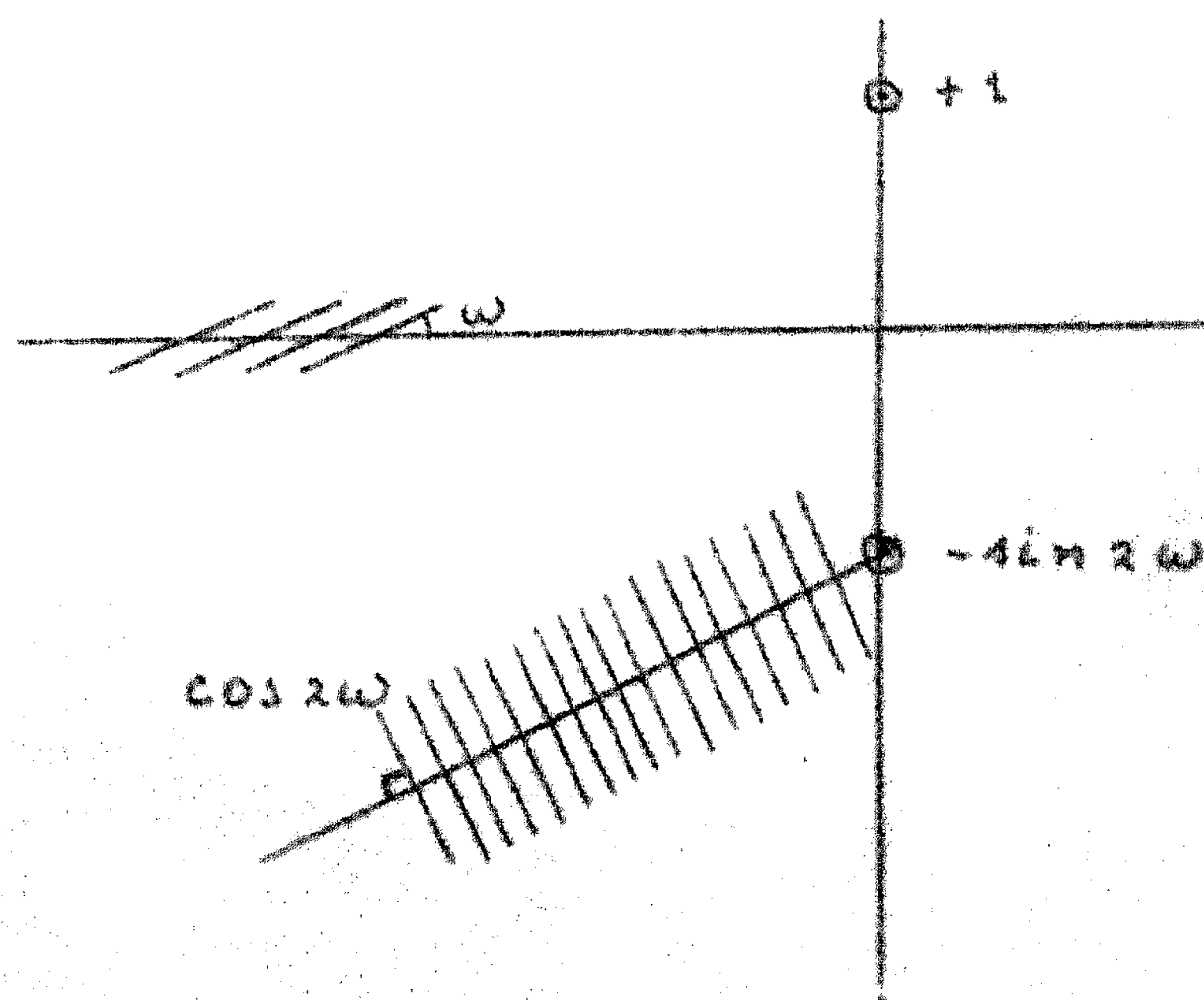
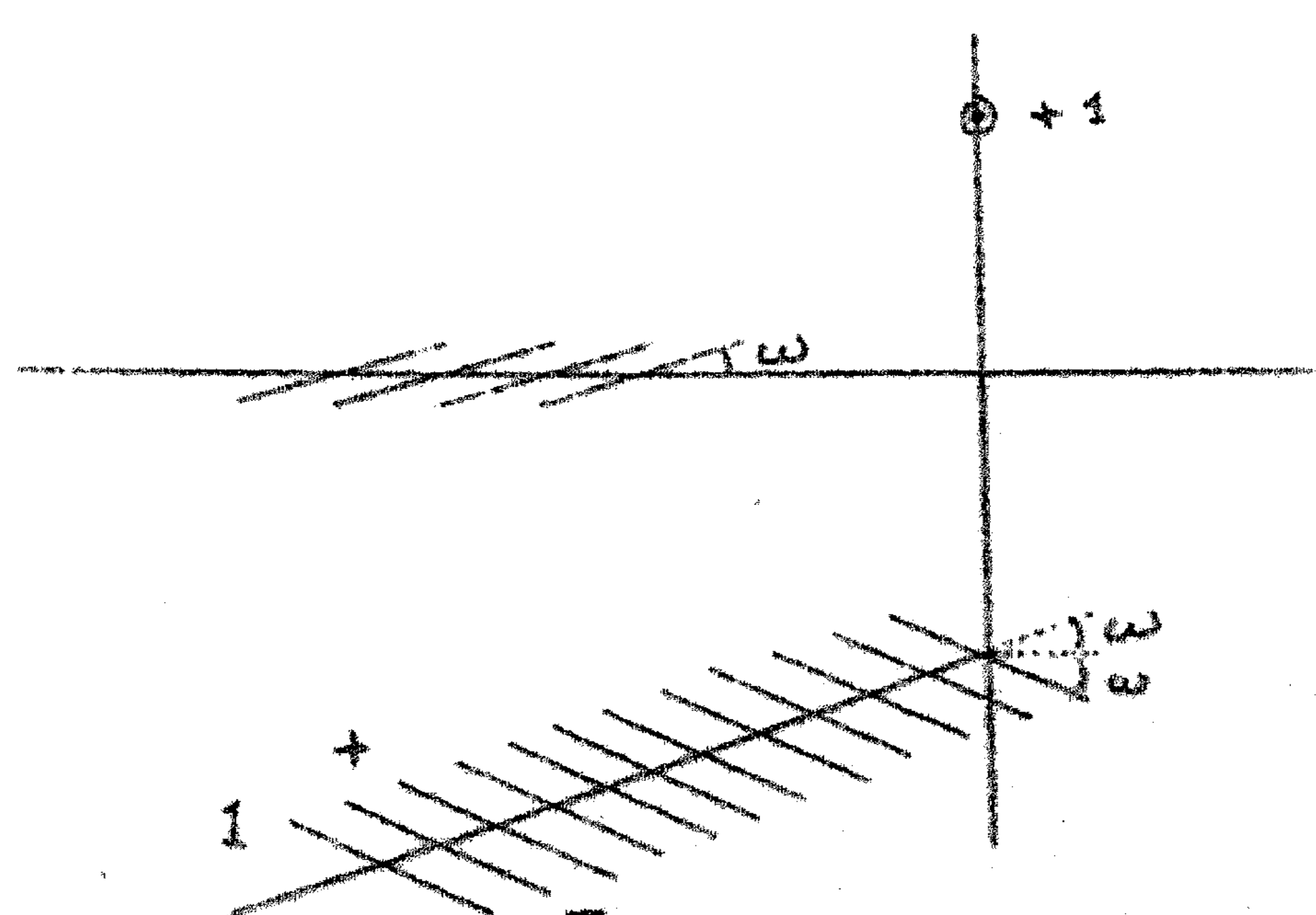
Geeft  $\varphi = D_{-\omega} u(0, a) - D_{-\omega} u(0, -a)$ .



2. Kies  $\psi = T_{\pi-\omega} v(0, a) - T_{-\pi+\omega} v(0, a)$

Geeft  $\varphi = u(0, a) + T_{-\pi+\omega} D_{-\omega} v(0, -a)$

$= u(0, a) - \cos 2\omega u(0, -a) - \sin 2\omega T_{-\pi+\omega} w(0, a)$



3. Analooq blijkt dat  $\varphi = u(a, 0) + T_{\omega + \frac{\pi}{2}} D_{-2\omega} v(-a, 0)$   
en

$$\varphi = T_{-\frac{\pi}{2}} D_{-2\omega} v(a, 0) + u(-a, 0)$$

voldoen aan de randvoorwaarde  $D_{-\frac{\pi}{2}} \varphi = 0$  voor  $x = 0$ .

