MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

Berekening van twee integralen

door

D.J. Hofsommer

Korte mededeling no T.N. 10

<u>Berekening van twee integralen</u>

door

D.J. Hofsommer

Korte mededeling no T.N. 10

1. In verband met een physisch probleem werd de vraag gesteld de volgende integralen te berekenen

$$I = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\left[f(x+\tfrac{1}{2}\alpha) - f(x-\tfrac{1}{2}\alpha)\right]^2 dx \qquad 1)$$

waarin

$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x+\frac{1}{2}(b+1)} \qquad b > 1 \qquad 2)$$

respectievelijk

$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 x+\frac{1}{2}(b+1)}} \qquad b > 1\ . \qquad 3)$$

De integraal 1) zullen we voor deze gevallen met I_1, resp. I_2 aangeven.

$$I=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\tfrac{1}{2}\alpha)f'(x+\tfrac{1}{2}\alpha)dx-\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tfrac{1}{2}\alpha)f'(x-\tfrac{1}{2}\alpha)dx$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\, f(x+\tfrac{1}{2}\alpha)f(x-\tfrac{1}{2}\alpha)dx$$

of

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\, f(x+\tfrac{1}{2}\alpha)f(x-\tfrac{1}{2}\alpha)dx\ . \qquad 4)$$

Indien $f(x)=\pm f(-x)$, hetgeen zowel voor 2) als voor 3) geldt, mogen we hiervoor schrijven

$$I = -2\int_{0}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\, f(x+\tfrac{1}{2}\alpha)f(x-\tfrac{1}{2}\alpha)dx \qquad 5)$$

2. Laat f(x) gegeven zijn door 2). Dan is

$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x+\frac{1}{2}(b+1)} = \frac{\mathrm{ch}\ 2x-1}{\mathrm{ch}\ 2x+b} = 1 - \frac{b+1}{\mathrm{ch}\ 2x+b}\ . \qquad 6)$$

Substitutie in 4) geeft

$$I_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\left[1 - \frac{b+1}{\mathrm{ch}(2x+\alpha)+b}\right]\left[1 - \frac{b+1}{\mathrm{ch}(2x-\alpha)+b}\right]dx$$

$$I_1 = (b+1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\ \frac{dx}{ch(2x+\alpha)+b} + (b+1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\ \frac{dx}{ch(2x-\alpha)+b}$$
$$-(b+1)^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha}\ \frac{dx}{[ch(2x+\alpha)+b][ch(2x-\alpha)+b]}$$

of, met $b = ch\,\beta$,

$$I_1(\alpha,\beta) = -2(ch\,\beta+1)^2 \frac{d}{d\alpha}\int_0^{\infty} \frac{dx}{[ch(2x+\alpha)+ch\,\beta][ch(2x-\alpha)+ch\,\beta]}. \qquad 7)$$

Stel nu

$$I_1'(\alpha,\beta) = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{[ch(2x+\alpha)+ch\,\beta][ch(2x-\alpha)+ch\,\beta]} \qquad 8)$$
$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(ch\,\alpha\ ch\,2x+ch\,\beta+sh\,\alpha\ sh\,2x)(ch\,\alpha\ ch\,2x+ch\,\beta-sh\,\alpha\ sh\,2x)}$$
$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{ch^2 2x+2ch\,\alpha\ ch\,\beta\ ch\,2x+sh^2\alpha+ch^2\beta}$$
$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{[ch\,2x+ch(\alpha+\beta)][ch\,2x+ch(\alpha-\beta)]}$$
$$= \frac{1}{sh\,\alpha\ sh\,\beta}\int_0^{\infty} \frac{dx}{ch\,2x+ch(\alpha-\beta)} - \frac{1}{sh\,\alpha\ sh\,\beta}\int_0^{\infty} \frac{dx}{ch\,2x+ch(\alpha+\beta)}$$

Dit zijn bekende integralen (vergl. Dwight* 446.00). Integratie geeft

$$I_1'(\alpha,\beta) = \frac{1}{sh\,\alpha\ sh\,\beta}\left[\frac{arth\{th\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,th\,x\}}{sh(\alpha-\beta)} - \frac{arth\{th\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,th\,x\}}{sh(\alpha+\beta)}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{sh\,\alpha\ sh\,\beta}\left[\frac{\alpha-\beta}{sh(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha+\beta}{sh(\alpha+\beta)}\right]$$
$$= \frac{\alpha\ ch\,\alpha\ sh\,\beta-\beta\ ch\,\beta\ sh\,\alpha}{sh\,\alpha\ sh\,\beta\,(ch^2\alpha-ch^2\beta)} \qquad 9)$$

en hieruit volgt, dat

$$I_1(\alpha,\beta) = (ch\,\beta+1)^2\frac{d}{d\alpha}\ \frac{\beta\ ch\,\beta\ sh\,\alpha-\alpha\ ch\,\alpha\ sh\,\beta}{sh\,\alpha\ sh\,\beta(ch^2\alpha-ch^2\beta)}$$

$$\boxed{I_1(\alpha,\beta) = (ch\,\beta+1)^2\left[2sh\,\alpha\ sh\,\beta\ \frac{\alpha\,cth\,\alpha-\beta\,cth\,\beta}{(ch^2\alpha-ch^2\beta)^2} - \frac{cth\,\alpha-\alpha/sh^2\alpha}{ch^2\alpha-ch^2\beta}\right]} \qquad 10)$$

---

* Dwight, H.B. Tables of integrals and other mathematical data, 2nd ed. New York 1947.

Voor $\alpha = \beta$ vinden we met de regel van l'Hôpital uit 10), of door 7) naar α te differentiëren, daarna $\alpha = \beta$ te stellen en dan de integraties uit te voeren, dat

$$\boxed{I_1(\alpha,\alpha) = \frac{\operatorname{ch}\alpha + 1}{\operatorname{ch}\alpha - 1}\left[\frac{\frac{1}{2}\operatorname{ch}2\alpha + 1}{\operatorname{sh}2\alpha} - 2\alpha\,\frac{\operatorname{ch}2\alpha + \frac{1}{2}}{\operatorname{sh}^2 2\alpha}\right]} \qquad 11)$$

3. Laat $f(x)$ gegeven zijn door 3). Dan is, met $b = \operatorname{ch}\beta$,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \frac{1}{2}(b+1)}} = \frac{\sqrt{2}\,\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x + \operatorname{ch}\beta}} \qquad 12)$$

Substitutie in 5) geeft

$$I_2(\alpha,\beta) = -2\int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}\,\frac{2\operatorname{sh}(x+\frac{1}{2}\alpha)\operatorname{sh}(x-\frac{1}{2}\alpha)\,dx}{\sqrt{[\operatorname{ch}(2x+\alpha)+\operatorname{ch}\beta][\operatorname{ch}(2x-\alpha)+\operatorname{ch}\beta]}}$$

$$= -2\int_0^\infty \frac{d}{d\alpha}\,\frac{(\operatorname{ch}2x - \operatorname{ch}\alpha)\,dx}{\sqrt{[\operatorname{ch}(2x+\alpha)+\operatorname{ch}\beta][\operatorname{ch}(2x-\alpha)+\operatorname{ch}\beta]}}$$

$$= 2\operatorname{sh}\alpha\int_0^\infty \frac{dx}{[\operatorname{ch}(2x+\alpha)+\operatorname{ch}\beta]^{\frac{1}{2}}\,[\operatorname{ch}(2x-\alpha)+\operatorname{ch}\beta]^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ 2\operatorname{sh}\alpha\int_0^\infty \frac{(\operatorname{ch}2x - \operatorname{ch}\alpha)(\operatorname{ch}\beta\,\operatorname{ch}2x + \operatorname{ch}\alpha)\,dx}{[\operatorname{ch}(2x+\alpha)+\operatorname{ch}\beta]^{3/2}\,[\operatorname{ch}(2x-\alpha)+\operatorname{ch}\beta]^{3/2}} \qquad 13)$$

Het ligt voor de hand $\operatorname{th} x = y$ te stellen. We vinden dan elliptische integralen, die echter een minder prettige gedaante hebben. Zij kunnen worden opgeknapt door een transformatie volgens Landen toe te passen. De dan verkregen vorm kan ineens worden gevonden door te stellen

$$u = \frac{\operatorname{sh}\alpha\,\operatorname{sh}2x}{\operatorname{ch}\alpha\,\operatorname{ch}(2x+\beta)} \qquad 14)$$

zodat $x=0$ overeenkomt met $u=0$ en $x=\infty$ met $u=\operatorname{th}\alpha$.
Stel nu nog

$$k' = \frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{sh}\alpha}\ , \quad k = \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2} \qquad 15)$$

dan wordt

$$\mathrm{ch}(2x\pm\alpha) + \mathrm{ch}\,\beta = \mathrm{sh}\,\alpha\ \ \mathrm{sh}2x\ \left(\frac{1}{u} \pm 1\right) \qquad 16)$$

$$\mathrm{ch}\,\beta\ \ \mathrm{ch}2x + \mathrm{ch}\,\alpha = \mathrm{sh}\,\alpha\ \mathrm{sh}2x \sqrt{\frac{1}{u^2} - k^2} \qquad 17)$$

$$du = \frac{2u}{\mathrm{sh}2x} \sqrt{1-k^2u^2}\ dx \qquad 18)$$

$$\mathrm{ch}2x - \mathrm{ch}\,\alpha = \frac{(\mathrm{ch}\,\beta+1)\mathrm{sh}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\alpha\ \mathrm{sh}2x}{\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{ch}^2\beta}\ \frac{1}{u} - \frac{\mathrm{ch}^2\alpha + \mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{ch}^2\beta}\sqrt{\frac{1}{u^2} - k^2}\ . \qquad 19)$$

Substitutie van 14) t/m 19) in 13) geeft

$$I_2(\alpha,\beta) = \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} - \frac{\mathrm{ch}^2\alpha + \mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{ch}^2\beta} \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\ \frac{du}{1-u^2} + $$
$$+ \frac{\mathrm{ch}\,\alpha\,(\mathrm{ch}\,\beta+1)}{\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{ch}^2\beta} \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}}\ . \qquad 20)$$

Met behulp van de afkorting $\mathrm{gd}\,\alpha = \mathrm{arcsin\,th}\,\alpha$ (functie van Gudermann) vinden we voor de drie integralen in het rechterlid van 20)

$$\int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = F(\mathrm{gd}\,\alpha, k)$$

$$\int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\ \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} - \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\ du + $$
$$+ \left[u \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} \right]_0^{\mathrm{th}\,\alpha}$$
$$= F(\mathrm{gd}\,\alpha,k) - E(\mathrm{gd}\,\alpha,k) + \mathrm{th}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta$$

$$\int_0^{\mathrm{th}\,\alpha} \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} = \left[\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right]_0^{\mathrm{th}\,\alpha} = \mathrm{sh}\,\alpha\ .$$

Substitutie in 20) geeft tenslotte

$$\boxed{\begin{aligned} & I_2(\alpha,\beta) = -\frac{\mathrm{ch}\,\beta\,(\mathrm{ch}\,\beta+1)}{\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{ch}^2\beta}\ F(\mathrm{gd}\,\alpha,k) + \frac{\mathrm{ch}^2\alpha + \mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{ch}^2\beta}\ E(\mathrm{gd}\,\alpha,k) + \mathrm{th}\,\alpha \\ & \text{met}\quad k' = \frac{\mathrm{sh}\,\beta}{\mathrm{sh}\,\alpha}\ ,\quad k = \sqrt{1-k'^2}\ ,\qquad \alpha \geq \beta \end{aligned}} \qquad 21)$$

Stellen we $E = k'^2F + k^2B$ dan wordt

$$I_2(\alpha,\beta) = -\frac{\mathrm{ch}\,\beta+1}{\mathrm{sh}^2\alpha}F(\mathrm{gd}\alpha,k) + \frac{\mathrm{ch}^2\alpha+\mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{sh}^2\alpha}B(\mathrm{gd}\alpha,k) + \mathrm{th}\,\alpha \qquad 22)$$

waarin

$$B(\mathrm{gd}\alpha,k) = \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha}\sqrt{\frac{1-u^2}{1-k^2u^2}}\,du \quad . \qquad 23)$$

Voor $\alpha=\beta$ is k=0 en

$$F(\mathrm{gd}\alpha\,,0) = E(\mathrm{gd}\alpha\,,0) = \mathrm{gd}\alpha \qquad 24)$$

$$B(\mathrm{gd}\alpha\,,0) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{gd}\alpha + \frac{\mathrm{th}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha}) \qquad 25)$$

en

$$\boxed{I_2(\alpha,\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{ch}\,\alpha-1}{\mathrm{ch}\alpha-1}\,\mathrm{gd}\,\alpha + \frac{\mathrm{ch}\,\alpha-\frac{1}{2}}{\mathrm{ch}\alpha-1}\,\mathrm{th}\,\alpha} \quad . \qquad 26)$$

Voor $\alpha<\beta$ wordt de modulus k imaginair. Door een geschikte transformatie kunnen we echter toch elliptische integralen met reële modulus verkrijgen. We stellen daartoe

$$\left.\begin{aligned} &u = \frac{k_o v}{\sqrt{1-k_o^2v^2}} \qquad k_o^2 = -(\frac{k}{k'})^2 = 1-(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\beta})^2 \\ &k_o' = \frac{1}{k'} = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\beta} \;, \end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

zodat u=0 overeenkomt met v=0 en u=th α met v=th β.

Dan wordt

$$1-u^2 = \frac{1-v^2}{1-k_o^2v^2} \qquad 28)$$

$$1-k^2u^2 = \frac{1}{1-k_o^2v^2} \qquad 29)$$

$$du = \frac{k_o'\,dv}{(1-k_o^2v^2)^{3/2}} \quad . \qquad 30)$$

De elliptische integralen F(gdα,k) en E(gdα,k) worden dan getransformeerd volgens

$$F(\mathrm{gd}\alpha,k) = \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = k_o'\int_0^{\mathrm{th}\,\beta}\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k_o^2v^2)}}$$

$$= k_o'\,F(\mathrm{gd}\beta,k_o) \qquad 31)$$

$$E(\mathrm{gd}\alpha,k) = \int_0^{\mathrm{th}\,\alpha}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du = k_o'\int_0^{\mathrm{th}\,\beta}\frac{dv}{(1-k_o^2v^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k_o^2v^2)}}$$

$$= \frac{1}{k_o'}\int_0^{\mathrm{th}\,\beta}\sqrt{\frac{1-k_o^2v^2}{1-v^2}}\,dv - \frac{k_o^2}{k_o'}\left[v\sqrt{\frac{1-v^2}{1-k_o^2v^2}}\right]_0^{\mathrm{th}\,\beta}$$

$$= \frac{1}{k_o'}E(\mathrm{gd}\beta\,,k_o) - \frac{k_o^2}{k_o'}\,\frac{\mathrm{th}\,\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha} \qquad 32)$$

Substitutie van 31) en 32) in 21) levert tenslotte

$$\boxed{\begin{aligned} I_2(\alpha,\beta) &= \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\ \mathrm{ch}\,\beta\,(\mathrm{ch}\,\beta+1)}{\mathrm{sh}\,\beta\,(\mathrm{ch}^2\beta-\mathrm{ch}^2\alpha)}\,F(\mathrm{gd}\beta,k_o) - \frac{\mathrm{sh}\beta(\mathrm{ch}^2\alpha+\mathrm{ch}\beta)}{\mathrm{sh}\alpha(\mathrm{ch}^2\beta-\mathrm{ch}^2\alpha)}\,E(\mathrm{gd}\beta,k_o) + \\ &\quad + \mathrm{cth}\,\alpha\,\frac{\mathrm{ch}\beta+1}{\mathrm{ch}\beta} \\ \text{met } k_o' &= \frac{\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{sh}\beta},\quad k_o=\sqrt{1-k_o'^2},\qquad \alpha\leq\beta \end{aligned}} \quad 33)$$

of, als we $E=k_o'^2F + k_o^2\,B$ stellen,

$$I_2(\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\beta}\,F(\mathrm{gd}\beta,k_o) - \frac{\mathrm{ch}^2\alpha+\mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{sh}\alpha\ \mathrm{sh}\,\beta}\,B(\mathrm{gd}\beta,k_o)+\mathrm{cth}\,\alpha\,\frac{1+\mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{ch}\,\beta}. \quad 34)$$

Voor $\alpha=\beta$ vinden we hieruit 26) terug.

5. De in het bovenstaande ingevoerde functie B kan ook worden geschreven

$$B = \int_0^{\mathrm{am}u} \mathrm{cn}^2u\,du$$

en is vaak veel prettiger dan de functie

$$E = \int_0^{\mathrm{am}u} \mathrm{dn}^2u\,du.$$

Voor kleine waarden van de modulus k verschillen F en E weinig, $F-E=O(k^2)$. Echter is $F-B=O(1)$. Voor kleine waarden van de complementaire modulus k' wordt $F-E=O(1)$ en $E-B=O(k'^2)$. De functie B wordt dus noch voor k=0, noch voor k=1 identiek met de functie F en valt voor k=1 samen met de functie E. Het zou daarom aanbeveling verdienen B als standaard elliptische integraal van de tweede soort in te voeren in plaats van E en om B te tabelleren.

6. Tabellen

Functie van Gudermann

Emde, F. Tafeln elementarer Funktionen. Leipzig-Berlin 1940.
Notatie: Amp x i.p.v. gdx.

Elliptische integralen

Jahnke, E. und Emde, F. Funktionentafeln. Leipzig-Berlin.
Geeft 4 decimalen.

Pearson, K. Tables of the complete and incomplete elliptic integrals. Cambridge 1934.
Geeft 10 decimalen.