STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Korte mededeling no T.N.11

Enkele integralen met Bessel functies

door

D.J. Hofsommer

Enkele integralen met Besselfuncties

door
D.J. Hofsommer

Korte mededeling no T.N.11

1.1. In de loop van een hydrodynamisch onderzoek (verg. rapport TW 60) bleek het wenselijk de omgekeerde Laplace transform te bepalen van $p^{-n-\frac{1}{2}}(p+1)^{-n+\frac{1}{2}}$. Dit komt neer op de berekening van

$$\int_0^x e^{-t}\, t^{n-1}\, I_{n-1}(t)dt, \qquad n = 1,2\ldots .$$

In deze mededeling zullen we de iets algemenere integraal

$$\int e^{-x}\, x^{\nu}\, I_{\nu}(x)dx, \quad \nu \neq -\tfrac{1}{2}$$

berekenen. Voeren we de differentiaaloperator $D=\frac{d}{dx}$ in, dan kunnen we onbepaalde integratie met het symbool D^{-1} aangeven. Met

$$D^{-m-1}\, e^{-x}\, x^{\nu} I_{\nu}(x)$$

bedoelen we dan een (m+1)-voudige onbepaalde integratie van de functie $e^{-x} x^{\nu} I_{\nu}(x)$. Deze integralen zijn dus bepaald willekeurig polynoom van de graad m in x na. Ook deze integraal zullen we berekenen. Tenslotte geven we de uitkomst van enkele verwante integralen.

1.2. De gemodificeerde Besselfuncties $I_{\nu}(x)$ voldoen aan de recurrente betrekkingen

$$D\left[x^{\nu}\, I_{\nu}(x)\right] = x^{\nu}\, I_{\nu-1}(x) \qquad 1)$$

$$D\left[x^{-\nu} I_{\nu}(x)\right] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \qquad 2)$$

waarbij ν willekeurig is.
Met behulp hiervan vinden we

$$(D^2-1)\left[x^{\nu}\, I_{\nu}(x)\right] = (2\nu-1)\left[x^{\nu-1}\, I_{\nu-1}(x)\right]$$

of

$$D(D+1)\left[x^{\nu}I_{\nu}(x)\right] - (D+1)\left[x^{\nu}I_{\nu}(x)\right] = (2\nu-1)\left[x^{\nu-1}I_{\nu-1}(x)\right]$$

Hieruit volgt, dat

$$\begin{aligned}(2\nu-1)e^{-x}\,x^{\nu-1}I_{\nu-1}(x) &= D\left[e^{-x}\{(D+1)(x^{\nu}I_{\nu}(x)\}\right]\\ &= D\left[e^{-x}x^{\nu}(I_{\nu}(x)+I_{\nu-1}(x)\right]\end{aligned}$$

zodat

$$D^{-1}\,e^{-x}\,x^{\nu}\,I_{\nu}(x) = \frac{1}{2\nu+1}\,e^{-x}x^{\nu+1}\left[I_{\nu}(x)+I_{\nu+1}(x)\right]+\text{const.} \qquad 3)$$

Voor $\nu=-\frac{1}{2}$ wordt, wegens $I_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\text{ch}\,x$

$$\begin{aligned}D^{-1}\,e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,I_{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\frac{1+e^{-2x}}{x}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\ln x-\text{Ei}(-2x)\right]+\text{const.} \qquad 4)\end{aligned}$$

1.3. We bewijzen nu algemener

$$\begin{aligned}&D^{-m-1}\left[e^{-x}\,x^{\nu}\,I_{\nu}(x)\right] \qquad 5)\\ &= e^{-x}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(2\nu+k)!}{(2\nu+m+1+k)!}\left[I_{\nu+k}(x)+I_{\nu+1+k}(x)\right]+\\ &\qquad + P_m(x),\end{aligned}$$

waarin $P_m(x)$ een willekeurig polynoom van de graad m in x is. Het bewijs zal worden gevoerd door volledige inductie. Daarbij maken we gebruik van de volgende herleiding

$$\begin{aligned}&D\left[e^{-x}x^{m+1+\nu}\,(I_{\nu+k}(x)+I_{\nu+1+k}(x)\right]\\ &= e^{-x}x^{m+\nu}\Big[x\Big(I'_{\nu+k}(x)+I'_{\nu+1+k}(x)-I_{\nu+k}(x)-I_{\nu+1+k}(x)\Big)+\\ &\qquad + (m+1+\nu)(I_{\nu+k}(x)+I_{\nu+1+k}(x)\Big]\\ &= e^{-x}x^{m+\nu}\left[(2\nu+m+1+k)I_{\nu+k}(x)+(m-k)I_{\nu+1+k}(x)\right].\end{aligned}$$

Differentiatie van het rechterlid van 5) geeft dan met weglaten van de factor $e^{-x}\,x^{m+\nu}$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(2\nu+k)!}{(2\nu+m+k)!}\,I_{\nu+k}(x) + m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{(2\nu+k)!}{(2\nu+m+1+k)!}\,I_{\nu+1+k}(x)\\ &=\sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m}{k}\frac{(2\nu+k)!}{(2\nu+m+k)!}+m\binom{m-1}{k-1}\frac{(2\nu-1+k)!}{(2\nu+m+k)!}\right]I_{\nu+k}(x).\end{aligned}$$

Met behulp van $m=(m-k)+k=(2\nu+m+k)-(2\nu+k)$ kan hiervoor worden geschreven

$$\sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m-1}{k}\frac{(2\nu+k)!}{(2\nu+m+k)!}+\binom{m-1}{k-1}\frac{(2\nu-1+k)!}{(2\nu+m-1+k)!}\right]I_{\nu+k}(x)$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{(2\nu+k)!}{(2\nu+m+k)!}\left[I_{\nu+k}(x)+I_{\nu+k+1}(x)\right].$$

We zien dus dat, als 5) juist is, deze formule juist blijft als we m door m-1 vervangen. Als we bovenstaande berekening in omgekeerde volgorde doorlopen blijkt ook, dat als 5) juist is voor m, deze formule juist blijft als we m door m+1 vervangen. Aangezien 5) voor m=0 identiek is met de reeds bewezen formule 3), geldt 5) dan voor positieve gehele waarden van m. Formule 5) verliest zijn betekenis als de coefficiënt van $I_{\nu+k}(x)+I_{\nu+1+k}(x)$ een factor nul in de noemer krijgt. Dit is het geval voor $\nu=-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots,-m-\frac{1}{2}$ of voor $\nu=-1,-2,\ldots,-m$. In de eerstgenoemde gevallen kan de integraal niet meer worden uitgedrukt in Besselfuncties, in de op de tweede plaats genoemde gevallen wel, zij het niet op de in 5) gegeven wijze.

In plaats van de operator D^{-1}, die een onbepaalde integratie voorstelt, kunnen we ook een operator D_0^{-1} invoeren, gedefiniëerd door

$$D_0^{-1}f(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi\ .$$

Uit 5) volgt dan, dat voor $\nu>-\frac{1}{2}(m+1)$

$$D_0^{-m-1}\left[e^{-x}x^{\nu}I_{\nu}(x)\right] \qquad 6)$$
$$=e^{-x}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(2\nu+k)!}{(2\nu+m+1+k)!}\left[I_{\nu+k}(x)+I_{\nu+1+k}(x)\right].$$

1.4. De formules 3) en 5) kunnen worden gebruikt voor het bepalen van de originelen van Laplace transforms. We gebruiken hierbij de volgende definitie

$$h(p)=\int_0^{\infty}e^{-px}f(x)dx$$

en schrijven

$$h(p)\doteqdot f(x).$$

Het linker lid van 6) wordt getransformeerd in

$$D_0^{-m-1}\left[e^{-x}x^{\nu-1}I_{\nu-1}(x)\right] \doteqdot \pi^{-\frac{1}{2}}2^{\nu-1}(\nu-1\tfrac{1}{2})!\ \frac{1}{p^{\nu+m+\frac{1}{2}}(p+2)^{\nu-\frac{1}{2}}}\ .$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{p^{\nu+m+\frac{1}{2}}(p+1)^{\nu-\frac{1}{2}}} \qquad 7)$$

$$\doteqdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(\nu-1\frac{1}{2})!}\ e^{-\frac{1}{2}x}\ x^{m+\nu}\ \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(2\nu-2+k)!}{(2\nu+m-1+k)!}\left[I_{\nu-1+k}(\tfrac{1}{2}x)+ +I_{\nu+k}(\tfrac{1}{2}x)\right]\ .$$

2.0. Op overeenkomstige wijze als hierboven kunnen integralen worden berekend met de integranden $e^{\pm x}\ x^{\nu}\ I_{\pm\nu}(x)$, $e^{\pm x}x^{\nu}K_{\pm\nu}(x)$, $e^{\pm ix}x^{\nu}J_{\pm\nu}(x)$ en $e^{\pm ix}x^{\nu}N_{\pm\nu}(x)$. De met 5) overeenkomende formules worden hierna gegeven. De bewijsvoering is geheel analoog aan die onder 1.2 en 1.3 en is daarom weggelaten.

2.1. $D^{-m-1}\left[e^{\mp x}x^{\nu}I_{\nu}(x)\right]$

$$= e^{\mp x}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(\pm 1)^{k}(k+2\nu)!}{(k+2\nu+m+1)!}\left[I_{\nu+k}(x)\pm I_{\nu+1+k}(x)\right]+P_m(x)$$

$2\nu \neq -1,-2,\ldots,-2m-1.$

2.2. $D^{-m-1}\left[e^{\mp x}x^{\nu}I_{-\nu}(x)\right]$

$$= e^{\mp x}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(\pm 1)^{k}(k+2\nu)!}{(k+2\nu+m+1)!}\left[I_{-\nu-k}(x)\pm I_{-\nu-1-k}(x)\right]\ +P_m(x)$$

$2\nu \neq -1,-2,\ldots,-2m-1.$

2.3. $D^{-m-1}\left[e^{\mp x}x^{\nu}K_{\nu}(x)\right]$

$$= e^{\mp x}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(\mp 1)^{k}(k+2\nu)!}{(k+2\nu+m+1)!}\left[K_{\nu+k}(x)\mp K_{\nu+1+k}(x)\right]+P_m(x)$$

$2\nu \neq -1,-2,\ldots,-2m-1.$

2.4. $D^{-m-1}\left[e^{\mp x}x^{\nu}\ K_{-\nu}(x)\right] = D^{-m-1}\left[e^{\mp x}x^{\nu}K_{\nu}(x)\right]$

2.5. $D^{-m-1}\left[e^{\mp ix}x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]$

$$= e^{\mp ix}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k+2\nu)!}{(k+2\nu+m+1)!}\left[(\pm i)^{k}J_{\nu+k}(x)+(\pm i)^{k+1}J_{\nu+1+k}(x)\right] + P_m(x)$$

$2\nu \neq -1,-2,\ldots,-2m-1.$

2.6. $D^{-m-1}\left[e^{\mp ix}x^{\nu}J_{-\nu}(x)\right]$

$$= e^{\mp ix}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k+2\nu)!}{(k+2\nu+m+1)!}\left[(\mp i)^{k}J_{-\nu-k}(x)+(\mp i)^{k+1}J_{-\nu-1-k}(x)\right] + P_m(x)$$

$2\nu \neq -1,-2,\ldots,-2m-1.$

2.7. $D^{-m-1}\left[e^{\mp ix}x^{\nu}N_{\nu}(x)\right]$

$$= e^{\mp ix}x^{m+i+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k+2\nu)!}{(k+2\nu+m+1)!}\left[(\pm i)^{k}N_{\nu+k}(x)+(\pm i)^{k+1}N_{\nu+1+k}(x)\right] + P_m(x)$$

$2\nu \neq -1,-2,\ldots,-2m-1.$

2.8. $D^{-m-1}\left[e^{\mp ix}x^{\nu}N_{-\nu}(x)\right]$

$$= e^{\mp ix}x^{m+1+\nu}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k+2\nu)!}{(k+2\nu+m+1)!}\left[(\mp i)^{k}N_{-\nu-k}(x)+(\mp i)^{k+1}N_{-\nu-1-k}(x)\right] + P_m(x)$$

$2\nu \neq -1,-2,\ldots,-2m-1.$