

STICHTING  
**MATHEMATISCH CENTRUM**

2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Korte mededeling no. TN 21

Bessel functies

door

H. A. Lauwerier

Februari 1962

In deze notitie geven we een aantal bekende en minder bekende eigenschappen van de Bessel functies  $H_{\nu}^{(1)}(z)$  en  $H_{\nu}^{(2)}(z)$  en van hun varianten. De genoemde functies zijn oplossingen van

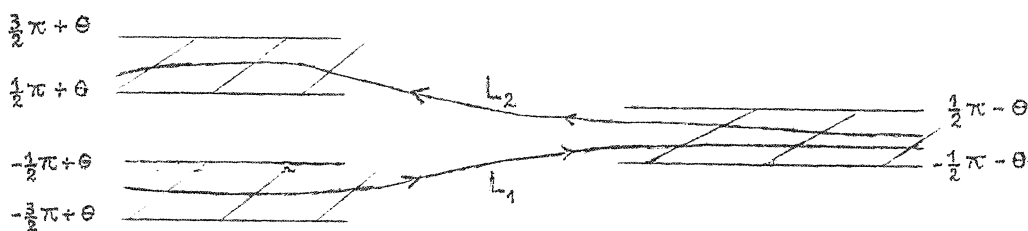
$$(1) \quad \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0 .$$

Oplossingen van (1) kunnen worden voorgesteld als

$$(2) \quad f = \frac{1}{\pi i} \int_L e^{-z \operatorname{sh} w + \nu w} dw ,$$

waarbij L een of andere weg is. Verificatie dat (2) aan (1) voldoet is eenvoudig.

Stellen we  $z=x+iy=re^{i\theta}$  en  $w=u+iv$  dan beschouwen we i.h.b. de volgende wegen



waarbij dus u van  $-\infty$  tot  $+\infty$  loopt.

Convergentie van (2) vereist:

1 voor  $u \rightarrow +\infty$ ,  $\cos(\nu + \theta) > 0$ , dus bijv.

$$-\frac{1}{2}\pi - \theta < \nu < \frac{1}{2}\pi - \theta ;$$

2 voor  $u \rightarrow -\infty$ ,  $\cos(\nu - \theta) < 0$ , dus bijv.

$$-\frac{3}{2}\pi + \theta < \nu < -\frac{1}{2}\pi + \theta \quad \text{of} \quad \frac{1}{2}\pi + \theta < \nu < \frac{3}{2}\pi + \theta .$$

Beperken we ons tot reële  $\nu$  en positief reële  $z (=r)$  dan zijn blijkbaar de door (2) bepaalde oplossingen met de in de figuur aangegeven wegen toegevoegd complex. We definiëren algemeen voor  $j=1,2$

$$(3) \quad H_{\nu}^{(j)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_j} e^{-zshw + \nu w} dw.$$

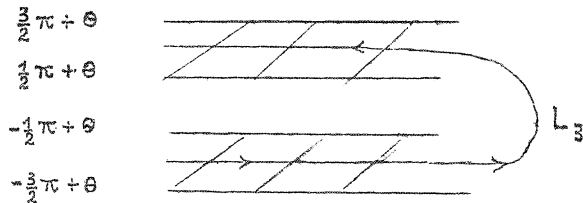
De genoemde functies heten de Hankel functies. Ze zijn enigszins te vergelijken met de functies  $e^{iz}$  en  $e^{-iz}$ . In de praktijk werkt men doorgaans met de Bessel functies  $J_{\nu}(z)$  en  $Y_{\nu}(z)$  welke a.v. met de Hankel functies samenhangen

$$(4) \quad \begin{cases} H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + i Y_{\nu}(z) \\ H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - i Y_{\nu}(z) \end{cases} .$$

Aldus kunnen we  $J_{\nu}(z)$  met  $\cos z$  en  $Y_{\nu}(z)$  met  $\sin z$  vergelijken.

Uit (3) volgt algemeen

$$(5) \quad J_{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} e^{-zshw + \nu w} dw$$



Uit (3) volgt

$$(6) \quad \begin{cases} H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{+i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) \\ H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z) \end{cases} .$$

Uit (4) en (6) volgt

$$(7) \quad \begin{cases} 2i \sin \nu\pi H_{\nu}^{(1)}(z) = -e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(z) + J_{-\nu}(z) \\ 2i \sin \nu\pi H_{\nu}^{(2)}(z) = e^{i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \end{cases} .$$

en

$$(8) \quad \sin \nu \pi Y_\nu(z) = \cos \nu \pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z) \quad .$$

Uit (5) kan men vrij gemakkelijk de volgende reeksontwikkeling afleiden

$$(9) \quad J_\nu(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (j+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j}$$

De ontwikkelingen van  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  volgen m.b.v. (7) en (8). Voor gehele waarden van  $\nu$  moet daarbij een limietovergang uitgevoerd worden.

Voor  $\nu=0$  is in het bijzonder

$$(10) \quad Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{z}{2} \cdot J_0(z) - \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^j \psi(j+1)}{j! j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \right\} ,$$

waarbij  $\psi(j+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j}$ ,  $\gamma = 0.5772 \dots$

Dus

$$(11) \quad \begin{cases} J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} - \dots \\ Y_0(z) = \frac{2}{\pi} (\ln \frac{z}{2} + \gamma) + O(z^2 \ln z) \end{cases} .$$

Voor  $\nu=1$  geldt

$$(12) \quad \begin{cases} J_1(z) = -J_0'(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + \dots \\ Y_1(z) = -Y_0'(z) = -\frac{2}{\pi z} + O(z \ln z) \end{cases} .$$

Het asymptotisch gedrag van de Hankel functies (3) voor  $z \rightarrow \infty$  is bepaald door de zadelpunten  $\pm \frac{1}{2} \pi i$ . De zadelpuntsmethode levert voor  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$

$$(13) \quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp i(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \\ H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp -i(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \end{cases} .$$

Uit (4) en (13) volgt dan

$$(14) \quad \begin{cases} J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \\ Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \end{cases} .$$

Volledigheidshalve vermelden we de volgende formules

$$(15) \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad Y_{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

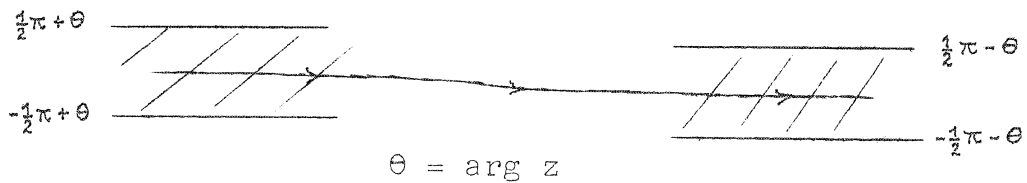
In de moderne literatuur komen de zogenaamde "modified Bessel functions" veel voor. Ze zijn gedefinieerd als

$$(16) \quad I_{\nu}(z) = i^{-\nu} J_{\nu}(iz)$$

$$(17) \quad K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} \nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(iz) .$$

M.b.v. (3) volgt de belangrijke voorstelling

$$(18) \quad K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \int_L e^{-z \operatorname{ch} w + \nu w} dw$$



Uit (6) volgt

$$(19) \quad K_{-\nu}(z) = K_{\nu}(z) .$$

De reeksvoorstellingen volgen gemakkelijk uit de boven gegevene

$$(20) \quad I_{\nu}(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{j! (j+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j} .$$

$$(21) \quad \sin \nu \pi K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \pi \left\{ -I_{\nu}(z) + I_{-\nu}(z) \right\} .$$

$$(22) \quad K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} \cdot I_0(z) + \sum_0^{\infty} \frac{\psi(j+1)}{j! j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} .$$

$$(23) \quad I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} + \dots$$

$$(24) \quad K_0(z) = -(\ln \frac{z}{2} + \gamma) + O(z^2 \ln z) .$$

$$(25) \quad I_1(z) = \frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} + \dots = I'_0(z) .$$

$$(26) \quad K_1(z) = \frac{1}{2} + O(z \ln z) = -K'_0(z) .$$

Het asymptotische gedrag is a.v.

$$(27) \quad K_\nu(z) \asymp \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} .$$

Voor  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$ ,

en

$$(28) \quad I_\nu(z) \asymp \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} e^z$$

voor  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ .

Voorts geldt

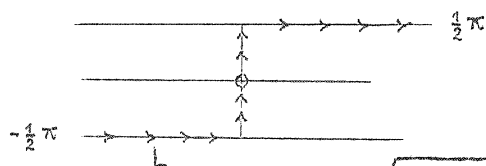
$$(29) \quad \begin{cases} K_0(iz) = -\frac{1}{2}\pi \{ Y_0(z) + i J_0(z) \} \\ K_0(-iz) = -\frac{1}{2}\pi \{ Y_0(z) - i J_0(z) \} \end{cases}$$

$$(30) \quad I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} .$$

Berekening van

$$f = \frac{1}{2} \int_L e^{-a \operatorname{ch} w - b \operatorname{sh} w} dw$$

voor  $a > 0$ ,  $b$  reëel.



Als  $a > |b|$  stellen we  $a = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} \gamma$   
 $b = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sh} \gamma$

zodat

$$f = \frac{1}{2} \int_L e^{-\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(w + \gamma)} dw = \frac{1}{2} \int_L e^{-\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} w} dw = K_0(\sqrt{a^2 - b^2}) .$$

Als  $b > a$  stellen we  $a = i \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{ch}(\gamma - \frac{1}{2}\pi i)$   
 $b = i \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh}(\gamma - \frac{1}{2}\pi i)$

zodat

$$f = \frac{1}{2} \int_L e^{-i\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{ch}(w+\gamma - \frac{1}{2}\pi i) dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{ch} w dw = K_0(i\sqrt{b^2-a^2}).$$

Als  $b < -a$  stellen we

$$a = -i\sqrt{b^2-a^2} \operatorname{ch}\left(\gamma + \frac{1}{2}\pi i\right)$$

$$b = -i\sqrt{b^2-a^2} \operatorname{sh}\left(\gamma + \frac{1}{2}\pi i\right)$$

zodat analoog

$$f = K_0(-i\sqrt{b^2-a^2})$$

Totaal

$$f = K_0(-i\sqrt{b^2-a^2})\theta(-b-a) + K_0(\sqrt{a^2-b^2})\{\theta(b+a) - \theta(b-a)\} + K_0(i\sqrt{b^2-a^2})\theta(b-a)$$

Voor  $b^2 \approx a^2$  is i.h.b.

$$f \approx -\frac{1}{2} \ln |a^2 - b^2| + \frac{1}{2} \pi i \{\theta(-b-a) + \theta(b-a)\}$$

Oplossing van

$$(1) \quad (\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2) f = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3, t)$$

F-transformatie naar  $t$  geeft

$$(2) \quad \tilde{f}(\vec{x}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} f(\vec{x}, t) dt$$

$$(3) \quad (\Delta - (m^2 - z^2)) \tilde{f} = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3)$$

Wetende dat voor  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$$(4) \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3)$$

verifieert men gemakkelijk dat (3) de volgende oplossing heeft

$$(5) \quad \tilde{f} = r^{-1} \exp - r \sqrt{m^2 - z^2}$$

met een zekere keuze voor de wortel.

A)  $m=0$

Men heeft de twee oplossingen

$$(6) \quad \tilde{f}_0 = \frac{1}{r} \exp \pm irz$$

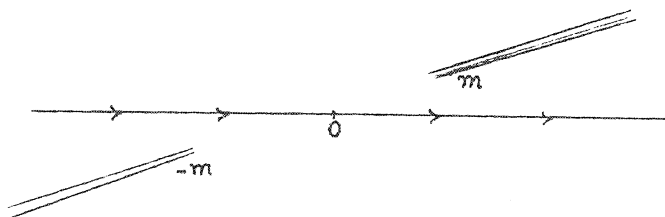
Voor (1) krijgen we dus o.a. de volgende oplossingen - welke onderling in een oplossing van de homogene vergelijking verschillen -

$$(7) \quad \begin{cases} r^{-1} \exp irz \doteq \mathcal{J}(t-r) / r \\ r^{-1} \exp -irz \doteq \mathcal{J}(t+r) / r \\ r^{-1} \cos rz \doteq \frac{1}{2} \{ \mathcal{J}(t-r) + \mathcal{J}(t+r) \} / r \end{cases}$$

Oplossingen van de homogene vergelijking zijn bijv.

$$(8) \quad \begin{cases} r^{-1} \sin rz \doteq \frac{1}{2i} \{ \mathcal{J}(t-r) - \mathcal{J}(t+r) \} / r \\ r^{-1} \sin r z \doteq -\frac{1}{\pi} \frac{1}{t^2 - r^2} \end{cases}$$

B)  $m = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\mu + i\epsilon)$ ,  $\mu > 0$



De eis dat  $f \rightarrow 0$  voor  $r \rightarrow \infty$  en  $|t| \rightarrow \infty$  betekent dat  $\tilde{f}$  als functie van complexe  $z$  holomorfe is in de strook  $|\text{Im } z| < \epsilon$  en dat voor reële  $z$

$$\sqrt{m^2 - z^2} = \sqrt{\mu^2 - z^2} + \frac{i\epsilon\mu}{\sqrt{\mu^2 - z^2}} + o(\epsilon^2) \text{ voor } |z| < \mu$$

$$\sqrt{m^2 - z^2} = \frac{\epsilon\mu}{\sqrt{z^2 - \mu^2}} + i\sqrt{z^2 - \mu^2} + o(\epsilon^2) \text{ voor } |z| > \mu$$

met de eenduidige oplossing (5).

Voor  $z \rightarrow \pm \infty$  betekent dit dus  $\arg \sqrt{m^2 - z^2} \rightarrow \frac{1}{2} \pi$ .



Voer nu de transformatie

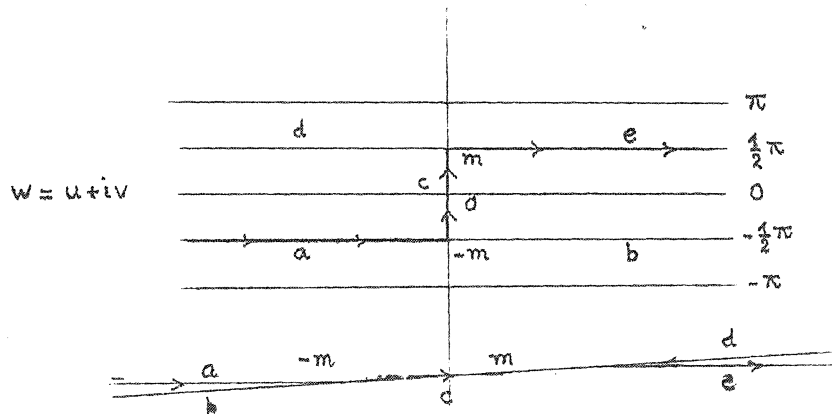
$$z = x + iy, \quad z = -i m \operatorname{sh} w, \quad w = u + iv$$

uit. Dan is

$$x = \mu \operatorname{ch} u \sin v + \varepsilon \operatorname{sh} u \cos v$$

$$y = -\mu \operatorname{sh} u \cos v + \varepsilon \operatorname{ch} u \sin v$$

$$\sqrt{m^2 - z^2} = m \operatorname{ch} w = (\mu \operatorname{ch} u \cos v - \varepsilon \operatorname{sh} u \sin v) + i(\mu \operatorname{sh} u \sin v + \varepsilon \operatorname{ch} u \cos v).$$



De inverse van (5) is

$$f(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \tilde{f}(\vec{x}, z) dz = \frac{im}{2\pi r} \int e^{-m(r\operatorname{ch}w + t\operatorname{sh}w)} \operatorname{ch}w dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi ri} \frac{\partial}{\partial r} \int \exp - m (r\operatorname{ch}w + t\operatorname{sh}w) dw.$$

Dus

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\pi ri} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ K_0(-im\sqrt{t^2 - r^2}) \Theta(-t-r) + \right. \\ (9) \quad &+ K_0(m\sqrt{r^2 - t^2}) \{ \Theta(t+r) - \Theta(t-r) \} \\ &+ K_0(im\sqrt{t^2 - r^2}) \Theta(t-r) \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad &= \frac{1}{2} \left\{ \delta(t+r) + \delta(t-r) \right\} /r + \frac{m}{\pi} \left\{ \frac{-K_1(-im\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} \theta(-t-r) + \right. \\
 &+ \left. \frac{iK_1(m\sqrt{r^2-t^2})}{\sqrt{r^2-t^2}} \left\{ \theta(t+r) - \theta(t-r) \right\} + \frac{K_1(im\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} \theta(t-r) \right\} .
 \end{aligned}$$

We merken op dat voor  $m \rightarrow 0$

$$(11) \quad f_0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \delta(t+r) + \delta(t-r) \right\} /r + \frac{1}{\pi i} \frac{1}{t^2-r^2} ,$$

in overeenstemming met (7) en (8).