STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 30

# Berekening van drie waarschijnlijkheidsintegralen

door

J.F. Frankena

Mei 1963

## 1. Inleiding.

In deze notitie wordt een berekening gegeven van het nulde moment en de eerste momenten van een verdelingsfunctie, n.l.

$$(1.1) \qquad I_1(\alpha,\beta,\gamma,\vartheta) = \iint_G x \exp - f(x,y)\, dx\, dy,$$

$$(1.2) \qquad I_2(\alpha,\beta,\gamma,\vartheta) = \iint_G y \exp - f(x,y)\, dx\, dy,$$

$$(1.3) \qquad I_3(\alpha,\beta,\gamma,\vartheta) = \iint_G \exp - f(x,y)\, dx\, dy.$$

Hierin is G de sector

$$(1.4) \qquad 0 < r < \infty \quad , \quad 0 < \varphi \leqslant \vartheta$$

en f(x,y) de positief definiete kwadratische vorm

$$(1.5) \qquad f(x,y) = \alpha x^2 - 2\beta\, xy + \gamma y^2$$

met

$$D \equiv \alpha\gamma - \beta^2 > 0.$$

Overgang op poolcoördinaten levert in elk der drie gevallen betrekkelijk eenvoudig integreerbare functies. De berekeningen zijn uitgevoerd voor het halfvlak $0 < \vartheta \leqslant \pi$ , met als resultaten

$$(1.6) \qquad I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\gamma - \beta \operatorname{cotg} \vartheta}{(\alpha \operatorname{cotg}^2 \vartheta - 2\beta \operatorname{cotg} \vartheta + \gamma)^{1/2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \right\},$$

$$(1.7) \qquad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D} \left\{ \frac{\beta - \alpha \operatorname{cotg} \vartheta}{(\alpha \operatorname{cotg}^2 \vartheta - 2\beta \operatorname{cotg} \vartheta + \gamma)^{1/2}} + \sqrt{\alpha} \right\},$$

$$(1.8) \qquad I_3 = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha \operatorname{cotg} \vartheta - \beta}{\sqrt{D}} \right\}.$$

Voor het geval dat $\pi < \vartheta \leq 2\pi$ gebruikt men de relaties

(1.9) $\quad I_{1,2}(\vartheta) = I_{1,2}(\pi) - I_{1,2}(\vartheta - \pi),$

en

(1.10) $\quad I_3(\vartheta) = I_3(\pi) + I_3(\vartheta - \pi).$

De integraal $I_2$ kan men rechtstreeks berekenen of, wat aanzienlijk korter is, uit $I_1$ afleiden via de betrekkingen

(1.11) $\quad I_2(\vartheta) = I_1^*(\frac{\pi}{2}) - I_1^*(\frac{\pi}{2} - \vartheta)$

en

(1.12) $\quad I_1(\alpha,\beta,\gamma,-\vartheta) = -I_1(\alpha,-\beta,\gamma,\vartheta)$, indien $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ .

De betrekkingen (1.9) t/m (1.12) worden alle in § 2 afgeleid. De speciale gevallen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ en $\vartheta = \pi$ hebben practische betekenis. Substitutie in (1.6) t/m (1.8) geeft de resultaten

| $\underline{\vartheta = \frac{\pi}{2}}$ | $\underline{\vartheta = \pi}$ |
|---|---|
| $I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\sqrt{\gamma} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right\}$ , | $I_1 = \frac{\beta}{2D}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ , |
| $I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}$ , | $I_2 = \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2D}$ , |
| $I_3 = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left\{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\sqrt{D}}\right\}$ . | $I_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{D}}$ . |

N.B. De integralen $I_1$, $I_2$, en $I_3$ zijn functies der vier parameters $\alpha,\beta,\gamma$ en $\vartheta$. Slechts waar nodig zijn een of meer van deze parameters genoteerd.

## 2. Enige relaties voor $I_1$, $I_2$ en $I_3$.

De relaties (1.9) t/m (1.12) kunnen direct uit de gegeven integraalvormen (1.1) t/m (1.3) worden afgeleid, indien men hierin poolcoördinaten als nieuwe variabelen gekozen denkt. Het geval $\pi < \vartheta \leqslant 2\pi$ wordt als volgt teruggebracht tot $0 < \vartheta \leqslant \pi$.

$$I_{1,2}(\vartheta) = \int_0^{\vartheta}\int_0^{\infty} r^2 \begin{matrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{matrix} \exp - r^2(\alpha\cos^2\varphi - 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi)\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \ldots + \int_{\pi}^{\vartheta}\int_0^{\infty} \ldots = I_{1,2}(\pi) + \int_{\pi}^{\vartheta}\int_0^{\infty} \ldots =$$

$$= I_{1,2}(\pi) - \int_0^{\vartheta-\pi}\int_0^{\infty} r^2 \begin{matrix}\cos\eta \\ \sin\eta\end{matrix} \exp - r^2(\alpha\cos^2\eta - 2\beta\cos\eta\sin\eta + \gamma\sin^2\eta)\,dr\,d\eta =$$

$$(2.1) \qquad = I_{1,2}(\pi) - I_{1,2}(\vartheta-\pi),$$

d.i. formule (1.9).

Voor $I_3$ geldt analoog

$$I_3(\vartheta) = \int_0^{\vartheta}\int_0^{\infty} r \exp - r^2(\alpha\cos^2\varphi - 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi)\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \ldots + \int_{\pi}^{\vartheta}\int_0^{\infty} \ldots = I_3(\pi) + \int_{\pi}^{\vartheta}\int_0^{\infty} \ldots =$$

$$= I_3(\pi) + \int_0^{\vartheta-\pi}\int_0^{\infty} r \exp - r^2(\alpha\cos^2\eta - 2\beta\cos\eta\sin\eta + \gamma\sin^2\eta)\,dr\,d\eta =$$

$$(2.2) \qquad = I_3(\pi) + I_3(\vartheta - \pi),$$

d.i. formule (1.10).

De relatie (1.11) tussen $I_1$ en $I_2$ volgt uit

$$I_2 = \int_0^{\vartheta}\int_0^{\infty} r^2 \sin\varphi \exp - r^2(\alpha\cos^2\varphi - 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi)\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\vartheta}\int_0^{\infty} r^2 \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi)\exp -r^2(\alpha \sin^2(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) - 2\beta \sin(\tfrac{\pi}{2} - \varphi).$$

$$.\cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) + \gamma \cos^2(\tfrac{\pi}{2} - \varphi)) \quad d\varphi =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\vartheta}\int_0^{\infty} r^2 \cos\psi \exp -r^2(\alpha \sin^2\psi - 2\beta \sin\psi \cos\psi + \gamma \cos^2\psi) dr\, d\psi =$$

(2.3) $= I_1^*(\alpha,\beta,\gamma,\tfrac{\pi}{2}) - I_1^*(\alpha,\beta,\gamma,\tfrac{\pi}{2} - \vartheta),$

waarbij $I_1^*$ uit $I_1$ ontstaat door $\alpha$ en $\gamma$ te verwisselen.

De betrekking (1.12) wordt a.v. bewezen

$$I_1(-\vartheta) = \int_0^{-\vartheta}\int_0^{\infty} r^2 \cos\varphi \exp - r^2(\alpha \cos^2\varphi - 2\beta \cos\varphi \sin\varphi + \gamma \sin^2\varphi) \, dr\, d\varphi =$$

$$= -\int_0^{\vartheta}\int_0^{\infty} r^2 \cos\psi \exp -r^2(\alpha \cos^2\psi + 2\beta \cos\psi \sin\psi + \gamma \sin^2\psi) dr\, d\psi =$$

(2.4) $= - I_1(\alpha,-\beta,\gamma,\vartheta).$

Evenzo geldt voor $I_2$ de relatie

(2.5) $I_2(\alpha,\beta,\gamma,-\vartheta) = I_2(\alpha,-\beta,\gamma,\vartheta),$

hetgeen men op analoge manier bewijst.
Tenslotte vindt men voor $I_3$

$I_3(\alpha,\beta,\gamma,-\vartheta) = - I_3(\alpha,-\beta,\gamma,\vartheta).$

## 3. Berekening van $I_1$

Door overgang op poolcoordinaten

$$(3.1) \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

krijgt f(x,y) de gedaante

$$(3.2) \qquad r^2 g(\varphi) \equiv r^2(\alpha\cos^2\varphi - 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi)$$

en wordt $I_1$

$$(3.3) \qquad I_1 = \int_0^{\vartheta}\int_0^{\infty} r^2 \cos\varphi \exp(-r^2 g(\varphi))dr\, d\varphi.$$

De dubbele integraal in (3.3) vatten we op als een herhaalde integraal waarbij we eerst de integratie naar r, en vervolgens die naar $\varphi$ uitgevoerd denken. $I_1$ wordt aldus

$$(3.4) \qquad I_1 = \int_0^{\vartheta} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\infty} r^2 \exp(-r^2 g(\varphi))\, dr.$$

De laatste integratie is gemakkelijk uitvoerbaar indien we gebruik maken van de substitutie

$$r^2 g(\varphi) = v,$$

$$(3.5) \qquad \int_0^{\vartheta} g^{-\frac{3}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\infty} v^2 e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_0^{\vartheta} g^{-\frac{3}{2}} \cos\varphi\, d\varphi .$$

In de laatste integraal kunnen we cotg $\varphi$ als nieuwe variabele kiezen.
Daartoe schrijven we $g^{-\frac{3}{2}}$ in de vorm

$$(3.6) \qquad g^{-\frac{3}{2}}(\varphi) = \sin^{-3}\varphi\,(\alpha\,\mathrm{cotg}^2\varphi - 2\beta\,\mathrm{cotg}\varphi + \gamma)^{-\frac{3}{2}},$$

waarbij we $0 < \vartheta \leq \pi$ nemen.

(3.5) wordt nu

$$I_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_{-\infty}^{-\mathrm{cotg}\,\vartheta}(\alpha t^2+2\beta t+\gamma)^{-\frac{3}{2}}\ t\,dt. \tag{3.7}$$

We kiezen in deze integraal $v = \alpha t + \beta$ als nieuwe variabele, waardoor (3.7) overgaat in de vorm

$$I_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left\{\int_{-\infty}^{\beta-\alpha\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}\frac{v\,dv}{(v^2+D)^{3/2}} - \beta\int_{-\infty}^{\beta-\alpha\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}\frac{dv}{(v^2+D)^{3/2}}\right\}. \tag{3.8}$$

De eerste integraal is elementair uitvoerbaar; de tweede vatten we op als een afgeleide naar de parameter $\gamma$, zodat

$$I_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left\{\alpha(\alpha\,\mathrm{cotg}^2\vartheta - 2\beta\,\mathrm{cotg}\,\vartheta+\gamma)\right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_{-\infty}^{\beta-\alpha\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}\frac{dv}{(v^2+D)^{1/2}} = \tag{3.9}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left\{\alpha(\alpha\,\mathrm{cotg}^2\vartheta-2\beta\,\mathrm{cotg}\,\vartheta+\gamma)\right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ \frac{\partial}{\partial\gamma}\ln(v+\sqrt{v^2+D})\Big|_{-\infty}^{\beta-\alpha\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}.$$

Uitvoering der integratie en invullen der grenzen geeft tenslotte

$$I_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left\{\alpha(\alpha\,\mathrm{cotg}^2\vartheta - 2\beta\,\mathrm{cotg}\,\vartheta+\gamma)\right\}^{-\frac{1}{2}} + \tag{3.10}$$

$$+\frac{\beta}{4D}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left\{1+(\beta-\alpha\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)\right\}\left\{\alpha(\alpha\,\mathrm{cotg}^2\vartheta - 2\beta\,\mathrm{cotg}\,\vartheta+\gamma)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

waaruit na enig rekenwerk gemakkelijk volgt

$$(3.11) \qquad I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\frac{\gamma - \beta \operatorname{cotg} \vartheta}{(\alpha \operatorname{cotg}^2 \vartheta - 2\beta \operatorname{cotg} \vartheta + \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right\}.$$

4. Berekening van $I_2$

Men kan voor $I_2$ de formule (1.2) afleiden op de manier waarop dat met $I_1$ is gebeurd. Gebruikmakend van de relaties, afgeleid in § 2 komt men echter sneller tot het resultaat. We gebruiken dus

$$I_2(\vartheta) = I_1^*\left(\frac{\pi}{2}\right) - I_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right).$$

Nu is

$$I_1^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\frac{\alpha - \beta \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}}{(\gamma \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{2} - 2\beta \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} + \alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\} =$$

$$(4.1) \qquad = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\};$$

en

$$I_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\frac{\alpha - \beta \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - \vartheta)}{(\gamma \operatorname{cotg}^2(\frac{\pi}{2} - \vartheta) - 2\beta \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - \vartheta) + \alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\frac{\alpha - \beta \operatorname{tg} \vartheta}{(\gamma \operatorname{tg}^2 \vartheta - 2\beta \operatorname{tg} \vartheta + \alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\} =$$

$$(4.2) \qquad = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\frac{\beta - \alpha \operatorname{cotg} \vartheta}{(\alpha \operatorname{cotg}^2 \vartheta - 2\beta \operatorname{cotg} \vartheta + \gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}\right\}.$$

Dus is

$$(4.3) \qquad I_2(\vartheta) = I_1^*\left(\frac{\pi}{2}\right) - I_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4D}\left\{\frac{\beta - \alpha \operatorname{cotg} \vartheta}{(\alpha \operatorname{cotg}^2 \vartheta - 2\beta \operatorname{cotg} \vartheta + \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\alpha}\right\}.$$

5. Berekening van $I_3$

De derde integraal

$$I_3 = \iint\limits_G \exp - f(x,y)\, dx\, dy$$

gaat door transformatie naar poolcoördinaten over in

(5.1) $$\int_0^{\vartheta}\int_0^{\infty} r \exp - r^2 g(\varphi)\, dr\, d\varphi ,$$

waarbij $g(\varphi)$ weer door (3.2) gegeven is. De dubbele integraal (5.1) wordt opgevat als een herhaalde integraal. Door de substitutie $r^2 g = v^2$ wordt de integratie naar $r$ elementair. Men verkrijgt dan de enkelvoudige integraal

(5.2) $$I_3 = \tfrac{1}{2}\int_0^{\vartheta} g^{-1}(\varphi)d\varphi .$$

Uit $g(\varphi)$ splitsen we weer de factor $\sin^2\varphi$ af en we kiezen $\operatorname{cotg}\varphi$ als nieuwe variabele.

(5.3) $$\tfrac{1}{2}\int_0^{\vartheta} g^{-1}(\varphi)d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{\operatorname{cotg}\vartheta}^{\infty} (\alpha u^2 - 2\beta u + \gamma)^{-1} du.$$

In de laatste integraal wordt $v = \alpha u - \beta$ als variabele ingevoerd, zodat

(5.4) $$I_3 = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha \operatorname{cotg}\vartheta - \beta}^{\infty} \frac{dv}{v^2+D} = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left\{\operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}\frac{\alpha\operatorname{cotg}\vartheta - \beta}{\sqrt{D}}\right\}.$$

Nu is $\operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$, dus

(5.5) $$I_3 = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha\operatorname{cotg}\vartheta - \beta}{\sqrt{D}}\right\}.$$

Deze vorm geldt voor $0 < \vartheta \leq \pi$, voor $\vartheta > \pi$ of $\vartheta < 0$ zij verwezen naar § 2.