STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 43

Het Cauchy-Probleem voor Hyperbolische Systemen Quasi-lineaire Partiële Differentiaalvergelijkingen van de Eerste Orde in Twee Onafhankelijke Variabelen

door

G.J.R. Förch

maart 1965

I N H O U D

Scriptie:

Het Cauchy-Probleem voor Hyperbolische Systemen
Quasi-lineaire Partiële Differentiaal-vergelijkingen
van de Eerste Orde in Twee Onafhankelijke Variabelen

[Wij, die sterk zijn, moeten de geboeligheden der zwakken verdragen.

Romeinen 15:1[a]]

§1. Inleiding:

In deze scriptie zal in het bijzonder het beginwaarde probleem voor hyperbolische quasi-lineaire vergelijkingen met discontinue beginfunkties bestudeerd worden.

Dergelijke systemen vergelijkingen spelen een grote rol in de hydrodynamica en de gasdynamica. Discontinue oplossingen kunnen we dan beschouwen als beschrijvingen van schokverschijnselen.

In Courant-Friedrichs (1) wordt de schoktheorie op klassieke wijze opgezet. Er wordt o.a. in uiteengezet dat een zuiger die met toenemende snelheid in een samendrukbare gasmassa wordt gedreven, daarin, ongeacht de grootte van de snelheid, altijd schokverschijnselen zal opwekken.

Het ontwikkelen van een theorie voor schokgolven op "moderne" basis heeft vele auteurs beziggehouden. In het kader van deze scriptie zal het begrip zwakke oplossing gebruikt worden om de problemen die optreden bij discontinuïteiten in oplossingen van quasi-lineaire vergelijkingen, het hoofd te bieden.

In §2 zullen, na enkele algemene opmerkingen over hyperbolische quasi-lineaire vergelijkingen, de mogelijkheden van het klassieke oplossen van het Cauchy-Probleem behandeld worden. De bedoeling hierbij is geweest steeds minder differentieerbaarheidseisen aan de beginfunkties (en ook aan de coefficiënten van de vergelijkingen) op te leggen. Essentieel in deze beschouwingen is dat de oplossingen altijd beperkt blijven tot tamelijk kleine waarden van de tijd, t.

In §3 wordt het begrip zwakke oplossing ingevoerd. Eerst op algemeen- theoretische basis, later in de vormen die voor ons Probleem het best bruikbaar zijn. In de algemeen-theoretische beschouwingen wordt ook nog even het begrip sterke oplossing genoemd, en vergeleken met zwakke oplossing oplossingen.
Tenslotte wordt vermeld dat zwakke oplossingen niet eenduidig bepaald worden door de beginvoorwaarden. Teneinde dit op te vangen wordt het begrip gegeneraliseerde oplossing ingevoerd.

In §4 worden de mogelijkheden voor de wijze van karakterisering van gegeneraliseerde oplossingen voor een enkele quasi-lineaire vergelijking behandeld, terwijl in §5 hetzelfde geschiedt voor stelsels vergelijkingen.

§2. Cauchy-Problemen met continu-differentieerbare begin funkties.

In het algemene geval verstaan we onder een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking van de eerste orde in twee onafhankelijke variabelen een vergelijking van de vorm:

$$F\left(t,x,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

Dit algemene geval kan worden overgevoerd in een quasi-lineaire vergelijking, d.w.z. een vergelijking van de vorm:

$$a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}+c=0$$

waarin a, b en c funkties zijn van x, t en u (voor de wijze van overvoeren zij men verwezen naar Courant-Hilbert [3]. Hoofdstuk I.).

Beschouwen we nu het systeem differentiaal vergelijkingen:

$$A'U_t+B'U_x+C'=0$$

waarin U en C kolomvektoren zijn en A en B k x k matrices. A, B en C zijn weer funkties van t, x en U.

We noemen een dergelijk systeem hyperbolisch in een bepaald gebied van de x, t, U-ruimte, indien in dit gebied de matrix A' niet singulier is en de matrices A' en B' gelijktijdig gediagonaliseerd kunnen worden. In [4] geven Courant en Lax een aequivalent criterium voor hyperboliciteit.

Aangezien A' niet singulier is kunnen we het systeem naar U_t oplossen. We krijgen dan.

(2.1.) $$U_t+A\,U_x+B=0$$

De voorgaande definitie voor hyperboliciteit gaat nu over in de volgende:

Definitie: Het systeem vergelijkingen (2.1.) heet hyperbolisch in een gebied van de t, x, U-ruimte indien de matrix A in het beschouwde gebied k reële eigenwaarden $\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^k$. bezit en k bijbehorende lineair onafhankelijke linker eigenvektoren $l^1, l^2, \ldots, l^k$; zodat dus geldt:

$$l^i A=\tau^i l^i \qquad i=1,2,\ldots,k.$$

Dit houdt in dat het stelsel vergelijkingen in elk punt van het x, t-vlak, dat in het beschouwde gebied ligt, n verschillende karakteristieke richtingen bezit. Om dit in te zien zullen we eerst het begrip karakteristiek behandelen.

Beschouwen we de enkele vergelijking

(2.2) $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a(u,t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(u,t,x)=0\\ \text{met beginvoorwaarde } u(o,x)=u_o(x)\end{cases}$$

De oplossing van dit Cauchy-Probleem is dan aequivalent met de oplossing van het systeem gewone differentiaalvergelijkingen:

(2.3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\,(u,t,x) \\ \dfrac{du}{dt} = -\,b\,(u,t,x) \end{cases}$ het z.g. karakteristieke systeem.

met beginvoorwaarden $\begin{cases} x\ (0) = x_o \\ u\ (0) = u_o\ (x_o) \end{cases}$

Als we namelijk (2.3) oplossen en de parameter x_o elimineren krijgen we een oplossing van het Cauchy-Probleem (2.2), zoals gemakkelijk is in te zien.

Systeem (2.3) vertegenwoordigt een stelsel krommen in de x,t,u-ruimte; dit stelsel noemen we de karakteristieken van (2.2). Bekijken we de projekties hiervan op het x,t-vlak, dan blijken dit krommen te zijn met in ieder punt (x,t) een richting die gelijk is aan $a(u,t,x)$

Deze krommen worden ook vaak de karakteristieken genoemd. Als we het in het vervolg over karakteristieken hebben zullen we deze projekties bedoelen. We zien nu dat wanneer twee karakteristieken elkaar snijden, dit inhoudt dat de oplossing u (x,t) van (2.2) voor die waarde van (x,t) niet eenwaardig is. Dit snijden van de karakteristieken is duidelijk niet mogelijk indien a onafhankelijk is van u, d.w.z. in het lineaire- of semielineaire geval.

Beschouwen we nu een stelsel vergelijkingen.

(2.4) $$\frac{\partial U}{\partial t} + A\,(U,t,x)\,\frac{\partial U}{\partial x} + B\,(U,t,x) = 0$$

De karakteristieken worden in dit geval gevormd door de krommen in het x,t-vlak, die in elk punt een richting hebben die bepaald wordt door een bepaalde eigenwaarde τ^i van de matrix A (U,t,x). Als we een karakteristiek voorstellen door $x = X(t)$ geldt dus voor een karakteristiek van het i^{de} veld:

$$\frac{dx}{dt} = \tau^i\ (U,t,X)$$

Wederom zou snijding van karakteristieken van eenzelfde veld betekenen dat de oplossing U (x,t) niet meer éénwaardig zou zijn, terwijl ook nu geen snijding kan optreden indien τ^i onafhankelijk is van U (x,t).

Bezien we de boven gegeven definitie van een hyperbolisch stelsel in verband met de karakteristieken, dan houdt deze in dat vanuit elk punt (x,t) in het beschouwde gebied, k verschillende karakteristieken uitgaan.

Bovendien stellen we de neveneis dat voor een Cauchy-Probleem de beginkromme nergens een karakteristieke richting heeft voor alle x, t en U die we beschouwen.

In verband met karakteristieken staat ook het begrip "bepaaldheidsdriehoek" (triangle of determinancy).

Definitie: Zij [ab] een gesloten interval op de lijn t=0, zij op [ab] voor een quasi-lineair systeem een beginfunktie $U_o(x)$ gegeven, zij $A = \max |\tau^i(U,x,t)|$ voor alle i en alle relevante U,x en t. Dan verstaan we onder een bepaaldheidsdriehoek van het segment [ab] een gebied dat begrensd wordt door [ab] en twee lijnen uitgaande van a resp. b met hellingen van resp. B en -B waarbij geldt $B \geqslant A$

We kunnen dit als volgt tekenen

We zullen nu een algemene formulering geven van het Cauchy-Probleem voor (2.1). Deze luidt dan:

Zijn er oplossingen van (2.1) die op een bepaalde gladde beginkromme $x = x(t)$ in het x,t-vlak een voorgeschreven waarde $U(x,t) = U_o(x(t), t)$ aannemen, en zo ja, hoe kunnen deze oplossingen worden bepaald.

Aan deze beginkromme leggen we wel de reeds genoemde eis op dat hij nergens een karakteristieke richting heeft.

Zonder een wezenlijke beperking in te voeren kunnen we als beginkromme de lijn $t=0$ kiezen, aangezien we altijd door een geschikte coördinaten-transformatie deze lijn in elke gewenste gladde kromme kunnen overvoeren.

Het probleem is dus het vinden van een vektorfunktie $U(x,t)$ die voldoet aan:

(2.5)
$$\begin{aligned} U_t + A\,U_x + B &= 0 \\ U(0,x) &= U_o(x) \end{aligned}$$

In het lineaire geval (A en B onafhankelijk van U) en het semilineaire geval (A onafhankelijk van U) laat dit probleem een éénduidig bepaalde oplossing toe voor allè x en t, mits A, B en U_o aan bepaalde differentieerbaarheidseisen voldoen.

In het quasi-lineaire geval echter is i.h.a. eenduidige oplossing van het probleem slechts mogelijk voor kleine waarden van t, aangezien voor zekere t discontinuïteiten kunnen gaan optreden, zelfs bij beginfunkties van zeer hoge differentieerbaarheidsgraad. (zie behandeling karakteristieken). De existentie-theoremata voor de oplossingen van het Cauchy-Probleem voor quasi-lineaire systemen zijn dan ook alleen geldig in een strook $0 \leq t < \delta$.

Alvorens aan te geven hoe het Cauchy-Probleem opgelost kan worden, zullen we stelsel (2.1) in de z.g. normaalvorm of karakteristike vorm brengen. We vermenigvuldigen (2.1) vóór met de i^{de} linkereigenvektor l^i van de matrix A. We verkrijgen zo vergelijkingen die we kunnen schrijven als:

(2.6)
$$l^i \frac{dU}{di} + b_i = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

hierin is $\frac{dU}{di} = U_t + \tau^i U_x$ d.w.z. de afgeleide van U in de i^{de} karakteristieke richting.

In het geval we te maken hebben met een stelsel van twee vergelijkingen is een verdere vereenvoudiging mogelijk. We hebben dan n.l.

(2.6')
$$l_{i1} \frac{du_1}{di} + l_{i2} \frac{du_2}{di} + b_i = 0 \qquad i = 1,2.$$

Er bestaan nu integrerende faktoren f_i (i=1,2), zodat $f_i\ l_i'$ en $f_i\ l_{i1}$ de u_1 resp. u_2 afgeleiden zijn van nieuwe funkties v_i (x,t,U). Het stelsel (2.6') gaat dan over in.

(2.6'') $$\frac{dv_i}{di} + c_i = 0 \qquad i = 1,2$$

De nieuwe afhankelijk variabelen v_i noemen we de Riemann-invarianten van (2.6'). Geometrisch komt het erop neer dat we de karakteristiken van (2.6') als nieuwe coördinaat-assen hebben gekozen.

Het Cauchy-Probleem kan nu op verschillende manieren benaderd worden:

A Lax geeft in [15] een iteratief proces dat uitgaat van het systeem differentiaalvergelijkingen zelf.

Beschouwen we eerst het algemene geval van een lineair hyperbolisch systeem.

(2.7) $$U_t + A\ U_x + B\ U + C = 0 \qquad\qquad U\ (x,0) = U_o\ (x)$$

We kunnen dit altijd in de diagonaalvorm brengen:

(2.8) $$V_t + D\ V_x + \tilde{B}\ V + \tilde{C} = 0 \qquad\qquad V\ (x,0) = V_o\ (x)$$

door invoering van nieuwe afhankelijkvariabelen V die op de volgende wijze van de ouda afhangen: U= TV, waarin T een matrix is, zodanig dat $T^{-1}AT = D$ diagonaal is. Zo'n matrix T bestaat altijd, wegens de eisen die aan A gesteld zijn bij een hyperbolisch systeem.
$\tilde{B}$ en $\tilde{C}$ in (2.8) bevatten de coëfficiënten A, B en C uit (1.7), de matrices T, T^{-1} en de eerste afgeleiden van T.
Nu is het mogelijk om voor de oplossing V (x,t) van (2.8) een bovengrens aan te geven met behulp van het z.g. lemma van Haar (dit wordt o.a. bewezen in [17]).
Dit luidt:

$$|V\ (x,t)| \leq \phi_o\ e^{\beta t} + \int_0^t C(\tau)\ e^{\beta(t-\tau)}\ d\tau.$$

als geldt:

$$\left.\begin{array}{l} |V_o\ (x)| \leq \phi_o \\ |\tilde{B}\ (x,t)| \leq \beta \\ |\tilde{C}\ (x,t)| \leq C(\tau) \end{array}\right\} \text{ voor alle relevante waarden van x en t.}$$

De hier gebuikte norm is de maximum-norm, terwijl als norm van een matrix het miximum van de som v.d. absolute waarden van de elementen van een rij wordt genomen.

Als nu $\tilde{B} \neq 0$, dan kunnen we (2.8) oplossen door middel van iteratie van de transformatie $V = \tau(W)$ die gedefiniëerd wordt door:

(2.9) $$V_t + D\ V_x + \tilde{B}\ W + \tilde{C} = 0 \qquad\qquad V\ (x,0) = V_o\ (x)$$

Op grond van de ongelijkheid van Haar kan aangetoond worden dat iteraties van deze transformaties convergeren naar een oplossing van het beginwaarde-probleem voor (2.8).

We kunnen als uitgangsfunktie voor ons iteratiefproces de funktie V_o (x) nemen.

We gaan nu over naar het quasi-lineaire geval:

(2.10) $$U_t + A(U)\,U_x + B(U) = 0 \qquad U(0,x) = U_o(x)$$

We definiëren nu de transformatie $U = \mathcal{T}(W)$ door middel van:

(2.11) $$U_t + A(W)\,U_x + B(W) = 0 \qquad U(x,0) = U_o(x)$$

Indien A, B en U_o (x) driemaal continu differentieerbaar zijn en we een strook $0 \leq t \leq \delta$ ($\delta > o$ voldoende klein) beschouwen, dan convergeren iteraties van deze transformatie met beginfunktie $W(x,t) = U_o(x)$ naar een oplossing van het beginwaarde probleem van (2.10).

Het bewijs hiervan wordt geleverd in [16]. Ook wordt in [16] aangegeven dat dit resultaat kan worden uitgebreid tot problemen met A, B en U_o (x) continu differentieerbaar, mits de afgeleiden aan een Lipschitzvoorwaarde voldoen.

B. Friedrichs in [10], Courant en Lax in [4], Courant in [2] en Douglis in [5] volgen allen een iteratieproces dat berust op integratie langs de karakteristieken.

Zoals reeds gezegd voldoen de karakteristieken aan de gewone differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = \tau^i$.

We zullen ze aangeven door $x = x^i(t)$.

In het lineaire of semi-lineaire geval worden de karakteristieken volledig bepaald door de vergelijking, d.w.z. ze zijn onafhankelijk van de speciale oplossing waarop ze betrekking hebben. In het quasi-lineaire geval zijn ze wel afhankelijk van de oplossing waarbij ze behoren.
Zij nu P (ξ,η) een punt in het x,t-vlak, en zij $x = x^i(t,\xi,\eta)$ de i^{de} karakteristiek door P; bovendien noemen we het punt waar de i^{de} karakteristiek de as t=0 snijdt $P_o(0, x_{o,i})$.

We beschouwen nu eerst het lineaire- of semi-lineaire geval.

De vergelijkingen zagen er in de karakteristieke vorm als volgt uit:

$$l^i \frac{dU}{di} + b_i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots, k$$

$$\text{met } \frac{dU}{di} = U_t + \tau^i U_x$$

Hierin kunnen we substitueren $v^i = l^i U$; we krijgen dan

(2.12) $$v_x^i + {}^i v_t^i = D^i(t,x,V) \qquad i = 1,2,\ldots,k.$$

τ^i is in het (semi) lineaire geval onafhankelijk van V, zodat er geldt voor v^i (P):

$$v^i (P) - v^i (P_o) = \int_{P_o}^{P} D^i (t,x, V (t,x)) \, dt$$

Waarbij de integratieweg langs de i^{de} karakteristiek door P genomen wordt.

Het beginwaardeprobleem van vergelijking (2.12) met beginfunktie $v^i (0,x) = G^i (x)$ is dus aequivalent met het vinden van een continu differentieerbare funktie v^i, die voldoet aan de integraalvergelijking.

(2.13) $$v^i (\xi,\tau) = G^i (x_{o,i}) + \int_o^{\tau} D^i (t, x, V (t,x)) \, dt$$

Waarbij we onder de integraal voor x moeten substitueren: $x= x^i (t;\xi,\tau)$, en de integratieweg langs de i^{de} karakteristiek door P (ξ,τ) genomen moet worden.

Voeren we nu de volgende transformatie T in:

$$T F^i = G^i(x^i (o;\xi,\tau)) + \int_o^{\tau} D^i (x^i (t;\xi,\tau), t, F^i (x^i,t)) \, dt$$

dan moeten we dus ter oplossing van ons probleem een continu differentieerbare funktie vinden, die invariant is onder de transformatie T. Dit suggereert het gebruik van een iteratief benaderingsproces voor de oplossingen v^i (t,x).

We beginnen met $F_o^i = G^i (x)$ en kiezen $F^i_{n+1} = T F_n^i$. O.a. in [4] wordt aangetoond dat dit proces uniform convergeert naar een limiet funktie F^i, terwijl de eerste afgeleiden van de F_n^i uniform convergeren naar de eerste afgeleiden van F^i. Deze funktie F^i is dus invariant onder de transformatie T en voldoet daarom aan de integraalvergelijking (2.13); maar, omdat de eerste afgeleiden bestaan en continu zijn, voldoet F^i ook aan de differentiaalvergelijking (2.12), zodat $F^i = v^i$.

Het gebruikte proces impliceert bijna onmiddelijk, dat de oplossingen éénduidig bepaald zijn, en dat zij van eventuele parameters met eenzelfde differentieerbaarheidsgraad afhangen als die waarmee deze parameters in de coëfficiënten en de beginfunkties voorkomen.

Willen we nu deze methode toepassen, op het quasi-lineaire geval, dan doen zich twee moeilijkheden voor:

1) Als we de oorspronkelijke vergelijking op dezelfde manier als boven, zouden willen overvoeren in vergelijkingen van de vorm van (2.12), dan zouden de daarin voorkomende D^i de eerste afgeleiden van U gaan bevatten.

2) De karakteristieken zijn nu niet van meet af aan door het oorspronkelijk stelsel differentiaalvergelijkingen bepaald, ze zijn daarentegen steeds afhnakelijk van de oplossing waarop ze betrekking hebben.

Moeilijkheid 1) wordt in [4] opgelost door het oorspronkelijke stelsel van n vergelijkingen om te zetten in een stelsel van 3n vergelijkingen, waarin als nieuwe afhankelijk variabelen voorkomen: $A^{ik} u^i_t$ en $A^{ik} u^i_x$.

Noemen we de kolomvaktor bestaande uit de 3n nieuwe afhankelijk variabelen U, dan heeft het stelsel weer de gewenste vorm.

(2.12) $$u_t^i + c^i u_x^i = D^i (t,x,U), \qquad i = 1,2,\ldots,3n.$$

Moeilijkheid 2) is niet zo ernstig, aangezien we bij iedere iteratiestap de karakteristieken behorende bij die speciale F_n^i kunnen bepalen. We definiëren de tranformatie weer op dezelfde manier als in het lineaire geval:

$$T F^i \equiv G^i (x^i (0;\xi,\gamma)) + \int_0^\gamma D^i \quad (x^i,t, F^i (x^i,t)) dt$$

Waarbij nu echter T afhankelijk is geworden van F^i.
Het zoeken naar een oplossing van het oorspronkelijke stelsel differentiaal vergelijkingen is weer aequivalent met het zoeken naar een funktie, die invariant is onder T.
Dit geschiedt weer door middel van het iteratieve proces

$$T F_n^i = F_{n+1}^i \quad \text{met } F_o^i = G^i (x)$$

In [4] tonen Courant en Lax aan, dat in een zeker gebiedje grenzend aan het begininterval de F_n^i uniform convergeren naar een limietfunktie F^i terwijl tevens de eerste afgeleiden van de funkties F_n^i convergeren naar de eerste afgeleiden van F^i; dit alles mits de beginvoorwaarden en de coëfficiënten tweede afgeleiden bezitten, die Lipschitz-continu zijn. De limietfunkties zijn uit hoofde van de gebruikte procedure éénduidig bepaalde oplossingen van het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen. Bovendien bezit de limietfunktie dezelfde differentieerbaarheidseigenschappen als de beginfunkties en de coëfficiënten.

In [5] weet Douglis op analoge wijze dit resultaat uit te breiden tot quasi-lineaire stelsels waarbij de coëfficiënten en de beginfunkties slechts continue eerste afgeleiden bezitten. Hij gebruikt hierbij het volgende interessante <u>lemma</u>::Als W (ε) een continuïteitsmodulus is voor de eerste afgeleiden van de cëfficiënten en de beginfunktie, dan hebben de eerste afgeleiden van de bijbehorende oplossing u(t,x) een continuïteitsmodulus van de vorm k.w (ε), waarin de constante alleen van de C_1 norm van de coëfficiënten en de beginfunktie afhangt (C_1 norm:

$$\|U\ (x)\|_{C_1} = \|U\|_{max} + \|U_x\|_{max} \quad)$$

De uitbreiding van het existentiebewijs tot quasi-lineaire stelsels met slechts continu differentieerbare coëfficiënten en beginfunkties is op een andere wijze uitgevoerd door Hartman en Wintner in [14].

Het existentiebewijs volgens Douglis geeft ons de meest algemene oplossing voor een quasi-lineair systeem in de strikte betekenis van het woord. Immers een nog verder opgeven van differentieerbaarheidseigenschappen moet onvermijdelijk leiden tot funkties die niet overal aan de differentiaalvergelijkingen kunnen voldoen, aangezien zij niet overal differentieerbaar zijn.

Toch willen we, alvorens over te gaan op het begrip zwakke oplossing, nog de mogelijkheid vermelden om een soort oplossing voor een quasi-lineair systeem te vinden indien de coëfficiënten en de beginvoorwaarden slechts Lipschitz continu zijn. Dit onderwerp wordt uitvoerig behandeld door Lax in [17].
We zullen voor dit soort oplossingen het woord "onechte oplossingen" gebruiken (Lax noemt ze gegeneraliseerde oplossingen, maar dat begrip zullen we later nog in een andere betekenis gebruiken, daarom is het beter om hier over "onechte oplossingen" te spreken).
In [17] formuleert Lax de volgende stelling:

Beschouw het stelsel quasi-lineaire vergelijkingen

(2.14) $$U_t + A\,U_x + C = 0 \qquad \text{met } U(x,0) = U_o(x)$$

en zij T een matrix zodanig dat $T^{-1}AT = D$ diagonaal is. Veronderstel dat de coëfficiënten A,T en C een uniforme Lipschitzvoorwaarde vervullen in een gebied E van de x,t,U-ruimte. Veronderstel dat de beginlijn in het inwendige van E bevat is en dat T niet singulier is in E. Laat bovendien de beginfunktie $U_o(x)$ een uniforme Lipschitzvoorwaarde vervullen.
Dan heeft het beginwaarde probleem een onechte oplossing (In een voldoend klein gebied van het x-t-vlak, grenzend aan het begininterval).

Deze stelling wordt bewezen door zowel de coëfficiënten van de vergelijkingen als de beginfunkties te benaderen door een uniform convergente rij analytische funkties. We krijgen zo dus een rij systemen analytische vergelijkingen met analytische beginvoorwaarden. De oplossingen hiervan blijken uniform te convergeren naar een limietfunktie U. Deze limietfunktie U is per definitie de onechte oplossing van ons oorspronkelijke probleem. Er kan aangetoond worden dat U overal waar hij continudifferentieerbaar is voldoet aan het stelsel differentiaalvergelijkingen. Bovendien is U Lipschitz continu, zodat U dus bijna overal voldoet aan het stelsel vergelijkingen. (zie [17]).

Bovendien zij opgemerkt dat indien de coëfficiënten en de beginvektor nog verdere differentieerbaarheidseigenschappen bezitten, de onechte oplossing deze ook zal hebben.

Van dit punt uit kunnen de voorgaande resultaten over echte oplossingen weer verkregen worden, aangezien indien, A,T,C en U_o continu differentieerbaar zijn, de bijbehorende onechte oplossing U ook continue afgeleiden zal hebben en dus overal zal voldoen aan het systeem differentiaalvergelijkingen. Het is dus een echte oplossing.

Interessant is nog de volgende stelling (zie [17])

Als A,T en C continue eerste afgeleiden hebben en de eerste afgeleide van $U_o(x)$ bijna overal continu is, dan kunnen de punten van het x, t-vlak waar de eerste afgeleiden van de onechte oplossing U discontinu zijn door een karakteristiek verbonden worden met een punt van het begininterval waar de eerste afgeleide van $U_o(x)$ discontinu is.

Of kortweg: discontinuïteiten in U_0' (x) planten zich voort langs karakteristieken.

Misschien is de eis dat de verzameling van discontinuïteitspunten van U_0' (x) maat nul heeft niet noodzakelijk.

De vraag of de klasse van de onechte oplossingen kan worden uitgebreid voor nog ruimere klassen beginfunkties, in het bijzonder voor discontinue beginfunkties, moet i.h.a. ontkennend beantwoord worden.

Immers als een beginvektor $U_o(x)$ die niet Lipschitz continu is, wordt benaderd door een rij analytische funkties U_o^n (x) dan kunnen de eerste afgeleiden van U_o^n (x) niet begrensd blijven, zodat i.h.a. de breedte van de strook waarin het n^{de} beginwaarde probleem van onze benaderende rij een echte oplossing heeft naar nul gaat met toenemende n (zie [16] en [17]).

Men neemt dan ook aan dat het volgende geldt:
Iedere vektor die de limiet is, in welke topologie dan ook, van echte oplossingen van een gegeven quasi-lineair systeem is Lipschitz continu in elk inwendig punt van zijn definitiegebied, tenzij het systeem tot een bepaalde uitzonderingsklasse behoort.

Er zijn natuurlijk wel oplossingen die Lipschitz continu zijn voor positieve t, maar niet voor t=0; we kunnen dit n.l. als het duale beschouwen van het verschijnsel dat oplossingen ergens ophouden Lipschitzcontinu te zijn.
(het is onmogelijk om zulke oplossingen voort te zetten).

Als kriterium voor wat we boven een uitzonderingsklasse genoemd hebben kunnen we het volgende geven:

Het systeem $U_t + A\ U_x + B = 0$ heet uitzonderlijk voor het n^{de} karakteristieke veld dan en slechts dan als de gradiënt van τ^n (de n^{de} eigenwaarde van A) loodrecht staat op l^n (de linkereigenvektor van A met eigenwaarde τ^n) (Zie ook gedegenereerde systemen en kontaktdiscontinuïteiten in § 5).

In [15] vermeldt Lax dat het mogelijk is om voor stelsels die uitzonderlijk zijn voor het n^{de} karakteristieke veld onechte oplossingen te contrueren voor beginvektoren waarvan de eerste (n-1) componenten Lipschitz-continu zijn, maar waarvan de laatste component alleen van begrensde variatie hoeft te zijn.

§ 3 Het begrip zwakke oplossing

Willen we het Cauchy-Probleem voor een stelsel vergelijkingen

(3.1) $U_t + A\ (t,x,U)\ U_x + B\ (t,x,U) = 0$
$U(0,x) = U_o(x)$ met $U_o(x)$ discontinu maar $U_o(x)$ wel meetbaar,

oplossen, dan zullen we eerst een zekere generalisatie van het begrip oplossing van een differentiaal vergelijking moeten invoeren.

Deze generalisatie is echter niet alleen noodzakelijk voor problemen met dicontinue beginvoorwaarden, maar in het algemeen voor elk Cauchy-Probleem voor een stelsel quasi-lineaire vergelijkingen, aangezien het begrip oplossing zoals we het uit de klassieke theorie kennen, slechts voor beperkte t waarden tot een zinvol resultaat leidt.

Willen we toch voor alle t een beschrijving van de gang van zaken voor een probleem van de vorm (3.1) vinden, dan moeten we onze toevlucht zoeken in een uitgebreidere betekenis, die we aan het begrip oplossing kunnen hechten.

Daartoe zullen we dus mogelijke uitbreidingen van differentiaal oparatoren moeten definiëren, in die zin dat we het gebied der funkties waarop we de oparatoren laten werken vergroten. We schrijven ons stelsel uit (3.1) verkort als

(3.2) $$L\,U = f$$

waarin L dus een partiële differentiaaloperator voorstelt. Indien V nu een voldoend gladde funktie is kunnen we de formule van Green toepassen:

(3.3) $$\int_G V.\ L\,U - \int_G L^* V.U = \int_S V.\ B\,U.$$

hierin is L^* de geadjungeerde van L, en G is een gebied in de ruimte van de onafhankelijk variabelen, met gladde rand S, B is de z.g. randmatrix, die we op deze wijze gedefinieerd kunnen denken.

Als nu f en U begrensde meetbare funkties op G zijn, en $\bar{U}$ een begrensde meetbare funktie is die gedefinieerd is op S, dan kunnen we de volgende definitie voor het begrip zwakke oplossing invoeren:

<u>Definitie:</u> We noemen U een zwakke oplossing van (3.2) met randwaarden $\bar{U}$, indien voor alle voldoend gladde funkties

(A) V de volgende betrekking geldt:

$$(V,f) - (L^* V,\ U) = (V,\ B\,\bar{U})_S$$

Het begrip sterke oplossing wordt als volgt gedefinieerd:

<u>Definitie</u>: We noemen U een sterke oplossing van (3.2) met randwaarden $\bar{U}$, indien er een rij voldoende gladde funkties

(B) U^k met randwaarden $\bar{U}^k$ bestaat, zodanig dat:

$$|||\{U^k,\ \bar{U}^k\} - \{U,\ \bar{U}\}||| + ||\,L\,U^k - f\,|| \to 0$$

Waarin we onder $\{U,\bar{U}\}$ elementen verstaan uit de produktruimte $H \times \bar{H}$ als $U \in H$ en $\bar{U} \in \bar{H}$; $|||\ \ |||$ geeft de norm in deze produkt-ruimte aan, en $||\ \ ||$ de norm in de ruimte H.

In 1944 heeft Friedrichs [11] al aangetoon dat de zwakke en de sterke uitbreiding van differentiaal operatoren identieke resultaten geven mits aan bepaalde voorwaarden voldaan is. L. Sarason behandelt in een aanzienlijk recenter artikel [25] eveneens het probleem zwakke oplossing = sterke oplossing en komt tot een uitbreiding van de omstandigheden waaronder dit geldt.

In deze scriptie zal de uitbreiding van het begrip oplossing in zwakke zin gebruikt worden, en wel in een wat concretere vorm dan boven (A).

In het vervolg zullen we quasi-lineaire vergelijkingen beschouwen die in de z.g. divergentievorm verkeren, d.w.z.:

(3.4) $$\frac{\partial \varphi_i (U,t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i (U,t,x)}{\partial x} = f_i (U,t,x)$$

met beginvoorwaarden: $U(0,x) = U_o(x)$ $\quad i = 1, \ldots\ldots, n.$

Hierbij voldoen de funkties φ en ψ aan de volgende eisen: φ en ψ zijn gedefinieerd en continu voor alle waarden van U en $(t,x) \in G$, waar G de strook

$\{ -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T \leq \infty \}$ is.

Voor deze waarden van de variabelen hebben φ en ψ continue partiele afgeleiden, terwijl bovendien geldt

$$\frac{\partial [\varphi_1 ; \varphi_2 ; \ldots ; \varphi_n]}{\partial [u_1 ; u_2 ; \ldots ; u_n]} \neq 0$$

Een stelsel van de vorm (3.4) neomen we een stelsel behoudswetten.

In [24] wijdt Rozhdestvenskii enige beschouwingen aan de mogelijkheid om een stelsel vergelijkingen (3.1) over te voeren in een stelsel behoudswetten (3.4); zijn conclusies zijn, dat dit altijd mogelijk is voor het lineaire geval, en voor het quasi-lineaire geval indien het aantal verg. $n \leq 2.$, en in het algemeen niet mogelijk voor een quasi-lineair stelsel met $n \geq 3$.

Onder een zwakke oplossing van (3.4) met beginwaarde U_o zullen we nu verstaan, een vektorfunktie U, zodanig dat voor elke testvektor W, die continue differentieerbaar is en nul wordt buiten een begrensd gebied de volgende betrekking geldt:

(3.5) $$\iint \{ W_t(t,x)\, \varphi (U,t,x) + W_x(t,x)\, \psi (U,t,x) + W\, f\, (U,t,x) \}\, dtdx + \int W(0,x) .\, \varphi (U_o(x), 0,x)\, dx = 0$$

Wij zullen ons hoofdzakelijk beperken tot het stelsel:

(3.6) $$U_t + F_x (U,t,x) + B (U,t,x) = 0$$

hiervoor gaat (3.5) over in:

(3.7) $$\iint \{ W_t U + W_x F - W B \} dx\, dt + \int W(x,0)\, U_o(x)\, dx = 0.$$

In [24] definieert Rozhdestvenskii het begrip zwakke oplossing voor (3.4) op een andere wijze:

Definitie: Zij G een begrensd gebied in het x,t-vlak met als rand het stuksgewijs gladde contour C.
We noemen een funktie U (t,x) een zwakke oplossing van het probleem (3.4) indien geldt

(3.8) $$\oint_C \{ \varphi (U,t,x)\, dx - \psi_i (U,t,x)\, dt \} + \iint_G f_i(U,t,x)\, dtdx = 0.$$

Deze definitie wordt ook gebruikt door Oleĭnik [21] en Douglis [6]. Oleĭnik toont aan dat voor een enkele homogene differentiaal vergelijking van de vorm

(3.9) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u,t,x)}{\partial x} = 0$$

de definities volgens (3.7) en (3.8) overeenstemmen voor stuksgewijs gladde funkties, in die zin dat ze beide de volgende essentiële eigenschappen bezitten:

a. U (t,x) voldoet aan de differentiaalvergelijking (3.9) in alle punten van het beschouwde gebied waarin U (t,x) continu differentieerbaar is. Voor (3.7) volgt dit direkt door partiële integratie en het willekeurig zijn van W, terwijl we bij (3.8) de stelling van Gauss kunnen toepassen en G willekeurig is. (zie opmerking aan het eind van § 3).

b. Op de discontinuïteitslijnen x = x(t) van de funktie U(t,x) gelden de z.g. sprongrelaties (in de hydrodyn. de Rankine-Hugoniot relaties, welke naam wij verder zullen overnemen).:

(3.10) $$\frac{dx}{dt} = \frac{F(u_1) - F(u_2)}{u_1 - u_2}$$

Waarin u_1 en u_2 de limietwaarden van de funktie u (t,x) in het punt (t, x (t)), genomen van links en van rechts zijn. We noteren deze Rankine-Hugoniot relaties ook wel als volgt:

(3.10') $$s\,[u] = [F]$$

De vierkante haken duiden nu de sprong over de discontinuïteitslijn aan.

Voor (3.8) kunnen we deze relatie aantonen door als contour C te nemen:

(3.11) $t = t_1 + \delta, \quad t = t_1 - \delta, \quad x = x(t) + \delta, \quad x = x(t) - \delta$
en δ naar nul te laten gaan.
Voor (3.7) bewijst Oleĭnik de Rankine-Hugoniot-relaties door een iets andere definitie van zwakke oplossing te nemen, die meer aansluit bij de definitie (A); (3.7) gaat dan over in de eis dat voor elke continu differentieerbare testfunktie W die nul is op de rand van een gebied D geldt:

(3.12) $$\iint_D \left\{ W_t U + W_x F - W B \right\} dx\, dt = 0$$

kiezen we hierin nu voor D het gebied dat als rand het contour (3.11) heeft dan kunnen we daaruit vrij gemakkelijk de Rankine-Hugoniot relaties vinden. (zie [21]).

In [7] maakt Douglis gebruik van een nog andere definitie van het begrip zwakke oplossing, maar daarop komen we nog terug in § 4.

We zullen nu enkele eigenschappen van zwakke oplossingen geven:

1) Zwakke oplossingen (we bedoelen als we spreken van zwakke oplossingen het algemene discontinue geval) kunnen niet worden verkregen als limiet van echte oplossingen. We hebben dus een wezenlijk uitbreiding van de klasse der oplossingen (Zie het slot van § 2).

2) De klasse van zwakke oplossingen bij een gegeven systeem vergelijkingen hangt af van de vorm waarin de vergelijkingen geschreven zijn. D.w.z.: Zij $V = H(U)$ waarbij H een niet-lineaire transformatie is, en veronderstel dat het systeem

(D) $U_t + F_x + B = 0$ door deze transformatie overgaat in

(E) $V_t + G_x + C = 0$

Indien nu U_o een zwakke oplossing is van (D), dan is in het algemeen $V_o = H(U_o)$ geen zwakke oplossing van (E). Lax voegt hier in (17) nog aan toe, dat het in sommige gevallen bewezen is dat V_o dan en slechts dan een zwakke oplossing van (E) is als U_o een Lipschitz continue oplossing is van (D).

3) De beginvoorwaarden bepalen in het algemeen niet eenduidig een zwakke oplossing. Dus bij discontinue beginfunkties zijn verschillende zwakke oplossingen aan te geven. (voor voorbeelden zie (18), (21), (24)).

Indien we echter een physisch proces willen beschrijven met behulp van zwakke oplossingen, dan zal toch één of andere manier eenduidigheid verkregen moeten worden.

Hiertoe moeten we toegevoegde voorwaarden opleggen aan de zwakke oplossingen, die uit de veelheid van mogelijkheden de physisch relevante oplossing selecteren.

Zwakke oplossingen die bovendien nog aan zulke nevenvoorwaarden voldoen zullen we gegeneraliseerde oplossingen noemen.

<u>Opmerking</u>.

In het voorgaande is nog verzuimd het volgende op te merken:

<u>a</u>. Een echte oplossing van de differentiaalvergelijking voldoet aan beide gegeven definities van het begrip zwakke oplossing.

<u>b</u>. Het omgekeerde is ook waar: Een zwakke oplossing die continu differentieerbaar is, is een echte oplossing van de differentiaalvergelijking.

We zullen nu voor een homogeenstelsel het bovenstaande aantonen:

(3.13) $$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U,t,x)}{\partial x} = 0 \qquad U(0,x) = U_o(x)$$

De gegeven definities van zwakke oplossingen luiden nu:
Def.: Voor elk gesloten, stuksgewijs glad contour Γ moet gelden:

(3.14) $$\oint_{\Gamma} (U dx - F dt) = 0$$

Definitie: Voor elke continudifferentieerbare test funktie W (t,x) die nul wordt buiten één of ander eindig gebied moet gelden:

(3.15) $$\iint \{ W_t\ U + W_x\ F \}\, dx\, dt + \int W(x,0)\ U_0(x)\, dx = 0$$

a_1 Dat een echte oplossing van vergelijking (stelsel) (3.13) aan (3.14) voldoet is evident.

a_2 Dat een echte oplossing van vergelijking (3.13) aan (3.15) voldoet voor elke continu differentieerbare testvektor W(t,x) kunnen we als volgt inzien: Vermenigvuldig (3.13) voor met W.; integreer de verkregen vergelijking over het bovenste halfvlak; Pas daarna partiële integratie toe.

b_1 Zij U(t,x) een continu-differentieerbare funktie die voor elk gesloten, gladde contour Γ Voldoet aan (3.14).
Er geldt dan dus

(3.16) $$\oint_{\Gamma} (U dx - F dt) = \iint_D \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\right) d\,x\,dt = 0$$

Hierin is D het gebied binnen Γ
Aangezien D willekeurig is geldt natuurlijk ook

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Dus U voldoet aan (3.13).

b_2 Zij W(t,x) een continu-differentieerbare funktie die voor elke gladde testvektor U(t,x) voldoet aan (3.15).
We mogen dan (3.15) partieel integreren; dit geeft

(3.17) $$\iint W(t,x) \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right\} dx\, dt = 0$$

Aangezien W(t,x) willekeurig is volgt hieruit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Dus U(t,x) voldoet aan (3.13).

Deze bewijzen kunnen eenvoudig uitgebreid worden voor een inhomogeen stelsel quasi-lineaire vergelijkingen.

§4. Gegeneraliseerde oplossingen voor een enkele quasi-lineaire vergelijking.

In deze paragraaf wordt één enkele quasi-lineaire vergelijking behandeld die we zullen veronderstellen de volgende vorm te hebben:

(4.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u,t,x)}{\partial x} + \psi(t,x,u) = 0$$
met $u(0,x) = u_0(x)$

hierin voldoen φ en ψ aan de volgende voorwaarden:
φ en ψ zijn gedefinieerd en continu voor alle waarden van u en (t,x) in de strook $\{-\infty < x < +\infty,\ 0 \leq t \leq T \leq \infty\}$.

Voor deze waarden van de variabelen heeft de funktie $\psi(t,x,u)$ een continue partiële afgeleide naar u, terwijl $\varphi(t,x,u)$ een continue partiële afgeleide naar u heeft die begrensd is voor de betreffende u, (t,x) waarden, $\varphi(t,x,u)$ heeft ook continue afgeleiden φ_{ux} en φ_{uu}. Bovendien zal, tenzij anders wordt vermeld, altijd worden aangenomen dat φ een convexe funktie van U is, d.w.z. $\varphi_{uu} \geqslant 0$.

De vraag die we ons nu stellen is: Welke nevenvoorwaarden komen in aanmerking om een gegeneraliseerde oplossing van het Cauchyprobleem (4.1) te bepalen. Hiertoe zullen we moeten nagaan aan welke eisen de gegeneraliseerde oplossing zal moeten voldoen, willen we er physische betekenis aan kunnen hechten. Deze eisen zijn:

1) De oplossing moet eenduidig door de beginvoorwaarden bepaald zijn.

2) De oplossing moet stabiel zijn; hieronder verstaan we dat de oplossing continu van de beginvoorwaarden moet afhangen.

De methoden om een dergelijke zwakke oplossing te selekteren die in de literatuur genoemd worden zijn:

<u>a</u> De Entropievoorwaarde
<u>b</u> De Viscositeitsmethode
<u>c</u> Differentiemethoden (Numeriek)
<u>d</u> Een expliciete formule die afgeleid is door Lax

We zullen al deze methoden achtereenvolgens behandelen.

<u>a</u> De entropievoorwaarde.

Deze berust op het physische principe dat de entropie over een discontinuïteit niet kan afnemen.

In ons geval geeft dit een analogon dat eist dat de volgende betrekking geldt:

(4.2) $$U(x-0,t) \geqslant U(x+0,t)$$

Er is tot nog toe geen bewijs geleverd dat de voorwaarde (4.2) op zich voldoende is om de oplossing éénduidig en stabiel te doen zijn. Wel is dit het geval voor sommige verscherpingen van (4.2).

Oleĭnik definieert in [21] het begrip gegeneraliseerde oplossing inderdaad met behulp van een verscherpte entropievoorwaarde.

Definitie: Een begrensde meetbare funktie U(t,x) zal een gegeneraliseerde oplossing van het Cauchy-probleem (4.1) worden genoemd in het gebied G indien voldaan is aan de volgende voorwaarden:

1. Voor iedere in G continu differentieerbare funktie f(x,t) die nul wordt buiten G geldt de volgende gelijkheid:

(4.3) $$\iint_G \left\{\frac{\partial f}{\partial t} U(t,x) + \frac{\partial f}{\partial x} \varphi(t,x,U(t,x)) - f\,\psi(U,t,x)\right\} dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(0,x)\, U_0(x)\, dx = 0.$$

2. Er bestaat een funktie $k(t,x_1,x_2)$ die continu is voor $0 < t < T$, $-\infty < x_1 < +\infty$, $-\infty < x_2 < +\infty$ zodat voor alle punten (t,x_1) en (t,x_2) van G geldt:

(4.4) $$\frac{U(t,x_1) - U(t,x_2)}{x_1 - x_2} \leq k(t,x_1,x_2)$$

Zonodig wordt U(t,x) opnieuw gedefinieerd op een verzameling met maat nul.

Uitgaande van deze definitie bewijst Oleĭnik de eenduidigheid van deze gegeneraliseerde oplossing, terwijl hij ook de continue afhankelijkheid van de beginvoorwaarden aantoont. In zijn eenduidigheidsbewijs maakt Oleĭnik gebruik van speciale kernels, terwijl het bewijs van de stabiliteit van de oplossing geschiedt na een gegeneraliseerde oplossing die doormiddel van een eindig differentie-schema wordt verkregen.

Rozhdestvenskii bewijst in [24] de eenduidigheid van een stuksgewijs gladde gegeneraliseerde oplossing van (4.1), als we deze definiëren als een zwakke oplossing (volgens definitie (3.8)) die voldoet aan de nevenvoorwaarde dat:

(4.5) $$\varphi^1_u(U(t,x+0),\, t,x) \leq \varphi^1_u(U(t,x-0),\, t,x)$$

Voor een convexe funktie φ komt dit overeen met de entropie voorwaarde. We kunnen het kriterium (4.5) zien als de toepassing, op het geval van één enkele vergelijking, van de schokvoorwaarden van Lax voor een stelsel vergelijkingen.

Het bewijs van Rozhdestvenskii gaat via de invoering van het begrip potentiaal van een zwakke oplossing, dat gedefinieerd wordt als een funktie $\Phi(t,x)$ die voldoet aan: (Rozhdestvenskii geeft de definitie voor een stelsel vergelijkingen, maar wij passen het hier toe op één vergelijking)

(4.6) $$\Phi(t,x) = \int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)} \left[U(t,x)dx - \{ Q(U,t,x) - F(t,x) \} dt \right]$$

waarin $F(t,x) = \int_{x_0(t)}^{x} \psi(U,t,x)\, dx.$

Voor deze potentiaal gelden de volgende differentiaal vergelijkingen.

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x} = U_i(t,x)$$

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = -\varphi(U(t,x),t,x) + F_i(t,x).$$

terwijl bovendien geldt $\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x} = U(t,x)$

Dit begrip potentiaal is eerder al eens ingevoerd door Oleĭnik. Douglis geeft in [6] een zeer elegant bewijs van de effektiviteit van de verscherpte entropievoorwaarde als selekterend principe. Hij gaat uit van een vergelijking van de vorm.

(4.7) $$U_t + (F(U))_x = 0$$

waarin hij aanneemt dat F(U) sterk convex is.
(Als F(U) sterk concaaf is, is het resultaat volledig analoog) d.w.z. $F''(U) \geq a > 0$.

Douglis maakt in dit artikel gebruik van de definitie van zwakke oplossing volgens (3.8). De funktie U voldoet dus voor elk gesloten stuksgewijs glad contour c aan de relatie.

(4.8) $$\oint_c \{ -Udx + F(U)\,dt \} = 0$$

De verscherpte entropie voorwaarde gebruikt hij in de vorm:

(4.9) $$U(x+h,t) - U(x,t) \leq \frac{h}{at} \qquad \text{voor } h>0, \quad t>0.$$

Als F sterk convex is impliceert (4.2) tevens de geldigheid van (4.9).

Bovendien normaliseert hij de gegeneraliseerde oplossingen (d.w.z. funkties U(t,x) die voldoen aan (4.8) en (4.9)) door te stellen:

(4.10) $$U(x,t) = U(x-0,t)$$

Deze normalisatie is altijd zinrijk omdat wegens de verscherpte entropievoorwaarde de limieten $U(x \pm 0,t)$ altijd bestaan.
De bewijsvoering voor de existentie, de eenduidigheid en de stabiliteit van deze gegeneraliseerde oplossingen berust op de toepassing van het volgende ordeningsprincipe:

Definitie: We zullen zeggen dat het ordeningsprincipe geldt in een klasse Ω van begrensde gegeneraliseerde oplossingen van (4.7), als de leden van Ω op een bepaalde manier partieel geordend zijn net als hun beginfunkties.
D.w.z. als U en V twee begrensde gegeneraliseerde oplossingen uit Ω zijn, en als T een gemeenschappelijke bepaaldheidsdriehoek is (trimgle of determinacy, zie § 2), dan eist het ordeningsprincipe dat $U \leq V$ overal in het inwendige van T indien $U \leq V$ bijna overal op de basis van T.
Douglis bewijst de volgende twee stellingen:

Stelling 1. Als F sterk convex is, dan geldt het ordeningsprincipe in de klasse van alle begrensde, genormaliseerde, gegeneraliseerde oplossingen.

Met behulp van deze stelling bewijst hij

Stelling 2. Als F sterk convex is, en U en V gelijk zijn in bijna elk punt van de basis van een gemeenschappelijke bepaaldheidsdriehoek T, dan zijn U en V ook gelijk in elk punt van het inwendige van T.

Een interessant gevolg van stelling 1 is het volgende:
Als F sterk convex is, heeft iedere gegeneraliseerde oplossing dezelfde bovengrens en dezelfde benedengrens als zijn beginfunktie.

Ook de continue afhankelijkheid van de beginvoorwaarden kan m.b.v. het ordeningsprincipe worden afgeleid. Bovendien bewijst Douglis nog de existentie van een gegeneraliseerde oplossing voor het geval dat F niet sterk convex is en bij willekeurige begrensde meetbare beginfunktie. Ook in dit geval blijkt het ordeningsprincipe van toepassing zodat een gegeneraliseerde oplossing (nu gedefincieert met de verscherpte entzopievoorwaarde (4.9)) weer eenduidig en stabiel is.

In [8] geeft Douglis een heel ander bewijs van de éénduidigheid van een gegeneraliseerde oplossing die gedefinieerd is met behulp van de entropievoorwaarde.

Hij geeft hier de eenduidigheidsstelling als een uitvloeisel van een stelling over niet lineaire vergelijkingen van de vorm:

$$U_t + F(x,t,U,U_x) = 0. \tag{4.11}$$

Waarbij de eerste afgeleide naar x van de oplossing moet voldoen aan de volgende voorwaarde:

Er is een funktie $V(x,t)$ met $V(x,t) = U_x(x,t)$ bijna overal in het beschouwde gebied en met

$$\frac{V(x_1,t) - V(x_2,t)}{x_1 - x_2} < \frac{k}{t} \qquad \text{voor } t > 0, \quad x_1 \neq x_2 \tag{4.12}$$

waarin k één of andere constante is. (entropie-voorwaarde).

We kunnen de betreffende stelling over niet lin.vergelijkingen (4.11) toepassen op het eenduidigheidsprobleem voor oplossingen van quasi-lineaire vergelijkingen door gebruikmaking van de volgende definitie van het begrip zwakke oplossing:
Definitie: Zij U(t,x) Lipschitzcontinu in het bovenste halfvlak $t \geqslant 0$ en laat U (x,t) voor bijna alle positieve t voldoen aan de vergelijking

$$U_t + F(x,t,U_x) = 0$$

Dan noemen we $V(x,t) = U_x(x,t)$ een zwakke oplossing van de vergelijking

$$V_t + (F(x,t,V))_x = 0. \tag{4.13}$$

Als V(x,t) bijna overal continu is en aan voorwaarde (4.12) voldoet dan noemen we hem een gegeneraliseerde oplossing van (4.13). Het eenduidigheidsbewijs na algemenere niet lineaire vergelijkingen laat zich niet zo mooi toepassen voor systemen-quasi-lineaire vergelijkingen.

In [23] behandelt Oleĭnik het probleem van de eenduidigheid en stabiliteit voor gegeneraliseerde oplossingen van het Cauchy-Probleem.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi(U,t,x)}{\partial x} = 0 \\ U(0,x) = U_0(x). \end{cases} \tag{4.14}$$

Voor het geval dat φ niet convex of concaaf is.

Deze oplossingen hebben een meer gecompliceerde struktuur dan die wanneer $\varphi_{uu} \neq 0$. Er kunnen nu n.l. contactdiscontinuïteiten (discontinuïteiten langs karakteristieken, zie § 5) en gecentreerde verdunningsgolven. (dit begrip zal verderop nog worden toegelicht) met het centrum niet op de lijn t = 0 optreden. Als definitie voor zwakke oplossingen wordt die volgens (3.8) gebruikt dus:

Een stuksgewijs gladde funktie U(t,x) is een zwakke oplossing als voor elk stuksgewijs glad gesloten contour Γ

$$\oint_\Gamma \{U dx - \varphi(U,t,x)\,dt\} = 0.$$

Vervolgens worden de volgende notaties ingevoerd

$$U(t,x+0) = U_+(t,x) \quad , \quad U(t,x-0) = U_-(t,x)$$

$$l(U) \equiv \frac{(U_+,t,x) - \varphi(U_-,t,x)}{U_+ - U_-}(U - U_+) + \varphi(U_+,t,x)$$

We zeggen nu dat een zwakke oplossing U(t,x) aan voorwaarde E voldoet indien in alle discontinuïteitspunten van U(t,x) (uitgezonderd misschien in een eindig aantal van hen) geldt:

a Voor discontinuïteitspunten waar $U_+ > U_-$ is $l(U) \leq \varphi(U,t,x)$ voor alle U in het gesloten interval $[U_-, U_+]$

b Voor discontinuïteitspunten waar $U_+ < U_-$ is $l(U) \geq \varphi(U,t,x)$ voor alle U in het gesloten interval $[U_+, U_-]$.

(Voor $\varphi(U,t,x)$ convex komt deze voorwaarde E overeen met de verscherpte entropievoorwaarde).

Een zwakke oplossing die aan voorwaarde E voldoet noemen we nu een gegeneraliseerde oplossing.

Oleĭnik bewijst dat een aldus gedefinieerde gegeneraliseerde oplossing die een gegeven waarde $U_0(x)$ aanneemt voor $t = 0$ éénduidig is, en hij bewijst bovendien dat de gegeneraliseerde oplossing stabiel is.

b. De viscositeitsmethode.

Deze methode gaat ervan uit dat de physisch relevante zwakke oplossing gevonden kan worden als limiet voor $\varepsilon \to 0$ van oplossingen van een vergelijking van de vorm (4.1) waarbij in het rechterlid een z.g. viscositeitsterm is toegevoegd, d.w.z. een tweede orde term met een kleine coëfficiënt, dus een term $\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ of algemener een term van de vorm $\varepsilon \frac{\partial \{a(t,x)\, \partial U/\partial x\}}{\partial x}$

waarin a(t,x) een voldoende gladde funktie is,

of zelfs van de vorm $\varepsilon \frac{\partial \{a(\partial U/\partial x)\}}{\partial x}$;

in het laatste geval spreken we van niet-lineaire viscositeit.

Wij zullen in het algemeen de eenvoudigste vorm voor de viscositeitsterm nemen en dus vergelijkingen beschouwen van de vorm:

(4.15)
$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(U_\varepsilon, t,x)}{\partial x} + \psi(U_\varepsilon, t,x) = \varepsilon \frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x^2}$$

met $U_\varepsilon(0,x) = U_0(x)$

Het is eenvoudig in te zien dat als voor $\varepsilon \to 0$, $U_\varepsilon(t,x) \to U(t,x)$ in de L_1-norm, d.w.z. $\iint_D |U_\varepsilon - U|\, dxdt \to 0$, dat dan U(t,x) een zwakke oplossing is van (4.1). Immers $U_\varepsilon(t,x)$ is een zwakke oplossing van (4.15) (elke echte oplossing is een zwakke oplossing, en élke continudifferentieerbare zwakke oplossing is een echte oplossing), d.w.z. dat voor elke tweemaal differentieerbare funktie f geldt.

$$\iint_D \left[U_\varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} + \varphi(U_\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon U_\varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \psi(U_\varepsilon) f \right] dxdt = 0$$

(vergelijk dit met (3.12))

Als we de limiet hiervan nemen voor $\varepsilon \to 0$ dan krijgen we:

$$\iint_D \left[U \frac{\partial f}{\partial t} + \varphi(U) \frac{\partial f}{\partial x} + f \psi(U) \right] dxdt = 0.$$

dus $U(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon(t,x)$ is een zwakke oplossing van (4.1).

Hopf heeft in (15) al een studie gemaakt van een vergelijking van het type (4.15).

Oleĭnik bewijst in [21] dat het beginwaardeprobleem (4.15) een gladde oplossing $U_\varepsilon(t,x)$ heeft, en dat deze oplossing eenduidig bepaald is. Onder het voldoen aan de beginvoorwaarde $U_\varepsilon(0,x) = U_0(x)$ moeten we dan het volgende verstaan:

Voor iedere continue funktie f(t,x) die gelijk aan nul is voor voldoende grote absolute waarde van x geldt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(t,x)\, U_\varepsilon(t,x) - f(0,x)\, U_0(x) \right] dx \to 0 \quad \text{voor } t \to 0 \tag{4.16}$$

Als $U_0(x)$ continu is voor $x = x_1$ dan geldt:

$$\lim_{t \to 0,\ x \to x_1} U_\varepsilon(t,x) = U_0(x_1)$$

Verder bewijst hij de volgende stelling:

<u>Stelling</u>: Voor $\varepsilon \to 0$ convergeren de oplossingen $U_\varepsilon(t,x)$ van het Cauchy-Probleem (4.15) naar een gegeneraliseerde oplossing U (t,x) van het Cauchy-Probleem (4.1) in die zin dat voor elke t ($0 \leq t \leq T$) en $x > 0$ geldt:

$$\int_{x}^{x} \left| U_\varepsilon(t,x) - U(t,x) \right| dx \to 0 \quad \text{voor } \varepsilon \to 0.$$

In [22] behandelt Oleĭnik eveneens de constructie van een gegeneraliseerde oplossing van de vergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(U)}{\partial x} = 0 \qquad U_0(x) = U(0,t) \tag{4.17}$$

door middel van een verdwijnende viscositeitsterm.

Hij bewijst de volgende stelling:

<u>Stelling</u>: Zij $\varphi_{uu} > 0$, zij $U_0(x)$ een begrensde meetbare funktie op de as $t = 0$. Dan convergeren de oplossingen van het Cauchy-Probleem

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(U_\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x^2} \tag{4.18}$$

$$U_\varepsilon(0,t) = U_0(x).$$

voor $\varepsilon \to 0$ in het gemiddelde naar een bepaalde funktie U(t,x) op elk eindig interval $|x| \leq a$ van elke rechte $t = t_0 > 0$.
Hieruit volgt direkt dat U(t,x) een zwakke oplossing van (4.17) is.
Oleĭnik bewijst tevens dat voor de aldus verkregen U(t,x) een verscherpte entropie voorwaarde vervuld is.

$$\frac{U(t,x_1) - U(t,x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{E}{t}$$

c. Differentie methoden.

Het blijkt ook mogelijk te zijn om zwakke oplossingen langs numerieke weg te berekenen. Voorbeelden van differentie schema's hiervoor worden gegeven door Lax in [18] en [20] en door Oleĭnik in [21] . Een kenmerk van deze differentieschema's is dat zij symmetrisch in de plaatscoördinaten zijn, maar asymmetrisch in de tijdcoördinaat.

In [18] geeft Lax geen bewijs dat zijn daar gebruikte schema inderdaad een zwakke oplossing levert. Hij spreekt echter wel het vermoeden uit dat dit het geval is indien aan het klassieke Courant-Friedrichs-Lewy stabiliteitskriterium is voldaan. Bovendien past Lax het schema toe op een groot aantal voorbeelden.

In [20] geeft Lax een iets ander differentieschema dat de invoering van een kunstmatige viscositeitsterm ter verkleining van de gemaakte fouten, als essentieel punt heeft. Hij komt nu tot een stabiliteitskriterium dat iets sterker is dan dat van Courant-Friedrichs-Lewy.
Weer worden ter illustratie enkele voorbeelden numeriek uitgewerkt. (De voorbeelden hier zijn ontleend aan de hydrodynamika en betreffen stelsels vergelijkingen).

In [21] gebruikt Oleĭnik het differentie schema dat Lax in [18] aangeeft. Er wordt bewezen dat het schema inderdaad ongeveer onder het Courant-Friedrichs-Lewy kriterium stabiel is en convergeert naar een gegeneraliseerde oplossing volgens de definitie die op blz. van deze scriptie gegeven wordt. Oleĭnik gebruikt deze numerieke oplossing ook bij zijn existentie bewijs voor een gegeneraliseerde oplossing. Ook het bewijs dat de volgens de viscositeitsmethode verkregen zwakke oplossing een gegeneraliseerde oplossing is, bewijst hij via de bovengenoemde numerieke oplossing.

d. Een expliciete formule afgeleid door Lax.

In [15] leidt Hopf een formule af voor een soort gegeneraliseerde oplossing van de quasi-lineaire vergelijking

$$U_t + U\,U_x = U\,U_{xx} \qquad U \to 0$$

Later is het Lax gelukt een soortgelijke formule te vinden voor de vergelijking

$$U_t - \left\{ \log (a + b\, e^{-U}) \right\}_x = 0$$

De grote overeenkomst tussen de twee oplossingen bracht Lax er toe een algemeen geldige expliciete formule af te leiden voor een oplossing van een enkele quasi-lineaire vergelijking.

We gaan uit van de vergelijking.

$$U_t + f(U)_x = 0 \qquad U(0,x) = U_o(x) \tag{4.19}$$

Of als we de differentiatie van f uitvoeren

(4.20) $U_t + a(U)\,U_x = 0 \qquad U(0,x) = U_o(x)$

We veronderstellen dat (4.20) echt niet-lineair is, d.w.z. dat $a^1(U) \neq 0$ (dus f (U) is echt convex of echt concaaf; (we zullen verder f(U) convex nemen). We definieren nu achtereenvolgens voor convexe f(U): de geconjugeerde funktie g(S) van f(U).

(4.21) $g(S) = \underset{U}{\mathrm{Max}} \left\{ U\,S - f(U) \right\}$

Zij U =b(S) de waarde van U waar dit maximum wordt aangenomen, dan gelden de volgende relaties.

(4.22) $b(A(U)) = U$

en

(4.23) $\frac{d}{dS}\dot{g}(S) = b(S)$

Bovendien definiëren we:

(4.24) $\Phi(y) = \int_o^y U_o(\tau)\,d\tau$

Beschouwen we nu de uitdrukking

(4.25) $\Phi(y) + t\,g\left(\frac{x-y}{t}\right).$

dan kan bewezen worden dat voor gegeven t, altijd, met uitzondering van een aftelbaar aantal x-waarden, (4.25) zijn minimum aanneemt in één enkel punt, dat we $y_o(x,t)$ zullen noemen.

We definiëren nu:

(4.26) $U(t,x) = b\left(\frac{x-y_o}{t}\right)$

Lax bewijst nu in [19] de volgende stelling:

Stelling: De funktie U(t,x) die door (4.26) gedefinieerd is, is een gegeneraliseerde oplossing van het Cauchy-Probleem (4.19).
Hierin verstaat hij onder een gegeneraliseerde oplossing een zwakke oplossing die voldoet aan de volgende eisen:
Stellen we deze zwakke oplossing voor met behulp van de transformatie S(t) die toegepast wordt op een begrensde en meetbare beginfunktie $U_o(x)$, zodat dus voor $t=t_o$ geldt $U(t_o,x) = S(t_o)\,U_o(x)$ dan moet voor S gelden:

I S(t) beeldt de verzameling van begrensde meetbare toestanden af in zichzelf.

II De operatoren S(t) vormen een één-parameter halfgroep dus

$S(t_1+t_2) = S(t_1)\,S(t_2) \qquad t_1, t_2 \geq 0$

$S(0) = I$

III Voor elke t is de operator S (t) continu in één of andere topologie.

Deze definitie van het begrip gegeneraliseerde oplossing stemt wel overeen met de eisen die wij tot nog toe gesteld hebben aan een gegeneraliseerde oplossing, n.l. eenduidigheid en continue afhankelijkheid van de beginvoorwaarden.

Lax toont aan dat de afhankelijkheid van de beginvoorwaarden voor zijn gegeneraliseerde oplossing niet alleen continu is, maar zelfs totaal continu.

Voor een speciaal geval, n.l. de vergelijking

$$U_t + \left\{ -\log\left(a + be^{-U}\right) \right\}_x = 0 \tag{4.27}$$

toont hij bovendien aan dat het differentieschema uit [18] leidt tot de oplossing volgens (4.26).

Tenslotte past hij formule (4.26) nog toe voor het onderzoek naar het asymptotisch gedrag van een gegeneraliseerde oplossing voor grote t. Om de resultaten die hij daarbij bereikt eenvoudig te kunnen formuleren geven we eerst de volgende definitie.

<u>Definitie</u>: Een funktie ϕ (x) heeft een gemiddelde waarde M als

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \int_a^{a+L} \phi(x)\, dx = M$$

uniform in a.

Voor het gedrag van een gegeneraliseerde oplossing met één of andere gemiddelde waarde, bij grote t geldt nu:

<u>Stelling</u>: Zij U(t,x) de oplossing (4.26) van de behoudswet (4.19); veronderstel dat de beginwaarde van U een gemiddelde waarde M heeft. Dan nadert U (t,x) tot M, uniform in x als t naar ∞ gaat.

Dit resultaat kan worden toegepast op een periodieke funktie, waarbij dan gevonden wordt dat de amplitude van de asymptotische funktie (een zaagtand funktie) gelijk is aan

$$\frac{\text{constante.}\ P}{t} \qquad (P\text{=frequentie})$$

en dus afhankelijk is van de frequentie van de oorspronkelijke funktie, en niet van zijn amplitude.

Ook voor het "uitsterven" van een beginfunktie die buiten een eindig interval nul is wordt in [19] een expliciete formule afgeleid.

We hebben nu in deze paragraaf 4 methoden onderzocht om de physisch relevante zwakke oplossing te vinden in het geval van een enkele behoudswet. Het is gebleken dat ze alle 4 ons leidden tot dezelfde zwakke oplossing. Dat is in overeenstemming met de eisen die we moeten stellen willen deze methoden gebruikt kunnen worden in physische toepassingen.

Het is interessant om na te gaan wat nu de consequenties zijn van de gevonden resultaten. We zullen als kriterium voor een gegeneraliseerde oplossing uitgaan van de entropievoorwaarde (4.2), dus voor convexe F:

(4.2) $$U(x-0, t) \geq U(x+0, t)$$

Dit houdt dus in dat een discontinuïteit in de beginfunktie waarbij $U_o(x-0) > U_o(x+0)$ zich als discontinuïteit kan voortplanten. Daarentegen is een discontinuïteit in de beginfunktie met $U_o(x-0) < U_o(x+0)$ gedoemd direkt te verdwijnen.

In dit geval treedt een z.g.-verdunningsgolf op.
In het geval dat de discontinuïteit gehandhaafd blijft, zal de voortplantingssnelheid (dus de baan in het x-t vlak) bepaald worden door de Rankine-Hugoniot relaties.

Beschouwen we twee constante toestanden:
$U_o(x) = U_r$ (rechts) en $U_o(x) = U_l$ (links) die in het punt x= 0 samenkomen, dan kunnen zich voor de quasi-lineaire vergelijking:

(4.28) $$U_t + (F(U))_x = 0$$

die $U_o(x)$ als beginfunktie heeft, twee essentieel verschillende gevallen optreden.

A. $U_l \geq U_r$

Er treedt een schok op.
De gegeneraliseerde oplossing heeft de gedaante:

(4.29) $$U(t,x) = \begin{cases} U_l & \text{voor } x \leq \\ U_r & \text{voor } x > \end{cases} \frac{F(U_l) - F(U_r)}{U_l - U_r}\, t$$

B. $U_l < U_r$

Er treedt een gecentreerde verdunningsgolf op.
De gegeneraliseerde oplossing heeft de gedaante:

(4.30) $$U(t,x) = \begin{cases} U_l & \text{voor } x < F'(U_l)\, t \\ G\left(\frac{x}{t}\right) & \text{voor } F'(U_l)\, t \leq x \leq F'(U_r)\, t \\ U_r & \text{voor } x > F'(U_r)\, t \end{cases}$$

Hierin is G de inverse funktie van F', d.w.z. als $U = G(\frac{x}{t})$ dan is $F'(U) = \frac{x}{t}$.

<u>Opmerking</u>.

Het feit dat alle vier aangegeven methoden ter bepaling van een gegeneraliseerde oplossing tot eenzelfde resultaat leiden is geheel in overeenstemming met een vermoeden dat Lax in [18] uitspreekt.

Dit vermoeden luidt:

Onder alle transformaties S die aan elke vektor ϕ een zwakke oplossing $U = S(\phi)$ met beginwaarde ϕ toevoegen, is er één en slechts één die continu is in een of andere redelijke topologie.

§5. Gegeneraliseerde oplossingen voor systemen quasi-lineaire vergelijkingen.

Het begrip gegeneraliseerde oplossing voor systemen quasi-lineaire vergelijkingen is veel minder uitputtend onderzocht dan dit het geval is voor een enkele vergelijking.

De vraag hoe we de physisch relevante gegeneraliseerde oplossing van het Cauchy-Probleem voor systemen quasi-lineaire vergelijkingen moeten selekteren, is dan ook nog niet definitief beantwoord. Wel is duidelijk dat we ons bij de beantwoording zullen moeten bezighouden met twee soorten voorwaarden, n.l.:

A. Voorwaarden die we opleggen aan de gegeneraliseerde oplossing. In de literatuur worden dit vaak stabiliteitsvoorwaarden genoemd.

B. Voorwaarden die we aan de vorm van het systeem vergelijkingen opleggen teneinde ons te verzekeren van de eenduidigheid van op bepaalde wijze gedefinieerde gegeneraliseerde oplossingen. Deze voorwaarde worden in de literatuur wel convexiteits-voorwaarden genoemd. Een mogelijke formulering hiervan wordt door Rozhdestvenskii gegeven in [24].
"Lax noemt deze voorwaarden de voorwaarde voor het"echt niet-lineair" zijn van het systeem. Hij geeft als definitie voor het echt-niet- lineair zijn van een karakteristiek veld:

<u>Definitie</u>: Het k^{de} karakteristieke veld van een quasi-lineair systeem:

(5.1) $$U_t + A(U,t,x)\, U_x = 0$$

wordt echt-niet-lineair genoemd indien geldt:

(5.2) $$r_k \cdot \text{grad. } \lambda_k \neq 0 \qquad \text{voor alle } U$$

hierin is r_k de k^{de} rechtereigenvektor van de matrix A en λ_k de bijbehorende eigenwaarde van A.

We noemen het systeem (5.1) echt-niet-lineair als alle karakteristieke velden echt-niet-lineair zijn.

Als voor een karakteristiek veld geldt:

(5.3) $$r_k \cdot \text{grad } \lambda_k \equiv 0$$

dan noemen we dit karakteristieke veld gedegenereerd.

We zullen ons verder hoofdzakelijk bezighouden met de voorwaarden die we onder <u>A</u> genoemd hebben.
Voor het begrip gegeneraliseerde oplossing worden in de literatuur twee definities veelvuldig gebruikt.
Deze zijn:

a. Definitie: Een gegeneraliseerde oplossing van een systeem quasi-lineaire vergelijkingen, is een zwakke oplossing die voldoet aan de schokvoorwaarden zoals die in [19] door Lax worden gegeven. Dus alle discontinuïteiten moeten schokken zijn. Deze definitie wordt ook gebruik door o.a. Rozhdestvenskii in [24].

b. Dit is de definitie die door Gelfand is gesuggereerd en die luidt:

Definitie: Een gegeneraliseerde oplossing van een systeem quasi-lineaire vergelijkingen

(5.4)
$$\frac{\partial F_i\,(q_1,q_2,\ldots,q_n)}{\partial t} + \frac{\partial G_i\,(q_1,q_2,\ldots,q_n)}{\partial x} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

is een stelsel funkties $(q_1, q_2,\ldots,q_n)$ dat verkregen kan worden als limiet voor $\varepsilon \to 0$, van oplossingen van het stelsel differentiaal vergelijkingen:

(5.5)
$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{\partial G_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\varepsilon\, b_{ik}\, \frac{\partial q_k}{\partial x}\right\}$$

Dit is dus een definitie volgens de viscositeitsmethode. Het geval van op deze wijze gedefinieerde gegeneraliseerde oplossingen wordt behandeld in [8], [9], [12], [13] en [26].

Naast deze twee definities van het begrip gegeneraliseerde oplossing is het natuurlijk ook mogelijk om systemen van quasi-lineaire vergelijkingen numeriek aan te pakken, en de aldus verkregen oplossing een gegeneraliseerde oplossing te noemen.
De differentie schema's die Lax geeft in [18] en [20] kunnen worden toegepast op systemen quasi-lineaire vergelijkingen. In hoeverre ze echter voor willekeurige gevallen zullen voldoen is nog niet aangegeven.

We zullen nu het begrip gegeneraliseerde oplossing volgens de definities a en b nader onderzoeken.

a. Lax geeft voor een schok in de oplossing van een stelsel quasi-lineaire vergelijkingen de volgende definitie.

Definitie: Een sprongdiscontinuïteit in een zwakke oplossing heet een schok indien er een index k is, $0 \le k \le n$, zodat de volgende ongelijkheden gelden:

(5.6)
$$\begin{cases} \lambda_{k-1}(U_l) < S < \lambda_k(U_l) \\ \lambda_k\,(U_r) < S < \lambda_{k+1}\,(U_r). \end{cases}$$

hierin is S de helling van de discontinuïteitslijn; dus als de discontinuïteitslijn $x = x(t)$ is dan is $S = \frac{dx}{dt}$.
De karakteristieke waarden λ_i zijn genummerd naar stijgende waarde. We noemen k de index van de schok.

Deze schokvoorwaarde houdt in dat er vanuit elk punt van de discontinuïteitslijn (n-1) karakteristieken uitgaan; (k-1) links en (n-k) rechts van de discontinuïteitslijn.
Dit is in overeenstemming met de theorie der vrije randwaarde problemen, die zegt dat het aantal karakteristieken dat uitgaat van de dicontinuïteitslijn gelijk moet zijn aan het aantal relaties dat gegeven is tussen de toestanden aan weerszijden. Deze relaties zijn de Rankine-Hugoniot relaties. Indien we hieruit S elimineren houden we net (n-1) relaties tussen U_l en U_r over.

We zullen ons nu verder bezighouden met systemen van de vorm:

(5.7) $$U_t + A\,(U)\,U_x = 0$$

Dit houdt geen wezenlijke beperking in.

Bovendien nemen we voorlopig aan dat (5.7) echt-niet-lineaireis.

Lax werpt de vraag op welke rechter eindtoestanden U_r er door middel van een k-schok verbonden kunnen worden met een linkertoestand U_l. Hiertoe differentieert bij de Rankine-Hugoniot relaties en past de schokvoorwaarde (5.6) toe.
Zijn resultaat kunnen we in de volgende stelling weergeven.

Stelling: Elke gegeven toestand U_l kan met een één parameter-familie van toestanden $U_r = U\,(\varepsilon)$, $\varepsilon \leq 0$, door een k-schok verbonden worden, mits de k^{de} familie karakteristieken echt-niet-lineair is.

Bovendienleidt hij nog het volgende af:
De voortplantingssnelheid van de schok is tot op termen van de orde ε^2, gelijk aan het rekenkundig gemiddelde van de geluidssnelheid voor en achter de schok.
De geluidssnelheid wordt bepaald door de karakteristieke waarde λ^k ter plaatse.

Alvorens ons soortgelijke vragen te stellen met betrekking tot verdunningsgolven zullen we enkele nieuwe begrippen invoeren.

Definitie: Een funktie $V = V\,(u_1, u_2, \ldots u_n)$ noemen we een (gegeneraliseerde) k-Riemann-invariant van het systeem (5.7) als hij voldoet aan de voorwaarde:

(5.8) $$r_k \cdot \text{grad. } V = 0 \qquad \text{voor alle } U.$$

Waarin r_k de k^{de} rechtereigenvektor van A is.

Het is eenvoudig in te zien dat er (n-1) onafhankelijke k-Riemann-invarianten zijn, als we tenminste twee funkties onafhankelijk noemen als hun gradiënten lineair onafhankelijk zijn.

<u>Definitie</u>: Een gebied in het x-t vlak waarin U constant is noemen we een "Constant State"

Lax toont nu achtereenvolgens aan dat voor een gladde oplossing een "Constant State" altijd begrensd wordt door een karakteristiek, en dat als een "Constant State" wordt begrensd door een k-karakteristiek, dat dan aan de andere kant van deze k-karakteristiek alle k-Riemann-invarianten constant zijn.

<u>Definitie</u>: Een oplossing van (5.7) om een gebied van het x-t-vlak, waarvoor alle k-Riemann-invarianten constant zijn noemen we een "k-simple wave".
En geldt: De karakteristieken van het k^{de} veld in een "k-simple-wave" zijn rechte lijnen waarlangs de oplossing constant is.

Vroeger hebben we het idee van de :simple wave" aangetroffen bij de z.g. verdunningsgolven.

Uit het voorgaande kan eenvoudig afgeleid worden:
Twee toestanden U_l en U_r kunnen dan en slechts dan door een gecentreerde "k-simple wave" verbonden worden als zij dezelfde k-Riemann-invarianten habben en als

$$\lambda_k (U_l) < \lambda_k (U_r)$$

Lax toont aan dat de toestanden die door middel van een "k-simple wave" met een linker-toestand U_l verbonden kunnen worden weer een één parameterfamilie $U_r = U(\varepsilon)$ vormen, maar nu met $\varepsilon \geq 0$.

Het blijkt dat als we de "schokfamilie" en de "simple wave familie" samenvoegen, de resulterende familie in $\varepsilon = 0$ continue tweede afgeleiden naar ε bezit.
Een gevolg hiervan is dat de verandering van een k-Riemann-invariant over een k-schok van de derde orde in ε, de schoksterkte, is.

Met behulp van de aldus verkregen éénparameterfamilie pakt Lax het z.g. beginwaardeprobleem van Riemann aan.
Dit is het Cauchy-Probleem voor (5.7) met als beginfunktie:

(5.9) $$U(0,x) = \begin{cases} U_o & \text{voor } x < o \\ U_n & \text{voor } x > o \end{cases}$$

Eerst zij opgemerkt dat de oplossing U (t,x) een funktie zal zijn van x/t.
De oplossing bestaat uit (n+1) "Constant States" U_o, U_1, U_2, ..., U_n. Twee aanliggende "Constant States" U_{k-1} en U_k worden gescheiden door een k-schok of een gecentreerde "k-simple wave", of als het veld lineair gedegenereerd is door een contactdiscontinuïteit.

Als nu de twee toestanden U_o en U_n gegeven zijn, dan vinden we de tussenliggende toestanden U_1, U_2, ..., enz als volgt:
Zoals we gezien hebben is er een éénparameterfamilie van toestanden U_1 die met U_o verbonden kunnen worden door middel van een golf (schok of "simple wave") van de eerste soort.

Evenzo is er een één parameterfamilie van toestanden U_2, die met U_1 verbonden kunnen worden door een golf van de tweede soort, enz. Op deze manier krijgen we een n-parameterfamilie van toestanden:

(5.10)
$$\begin{aligned} U_n &= U_n \ (U_o;\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\ldots,\ \varepsilon_n) \\ U_o &= U_n \ (U_o;\ 0,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0\ ) \end{aligned}$$

De Jacobiaan van het verkregen stelsel algebraïsche vergelijkingen is niet nul, zodat de oplossing dus éénduidig bepaald is. We kunnen dit samenvatten in de volgende stelling:

<u>Stelling</u>: Iedere toestand U_o heeft een omgeving zodanig dat als U_n in deze omgeving ligt het beginwaarde probleem van Riemann, (5.7), (5.9) een oplossing heeft. Deze oplossing bestaat uit (n+1) "constant states" die verbonden zijn door schokken of "simple waves".
Er is precies één oplossing van dit soort, mits de tussenliggende toestanden in een omgeving van U_o liggen.

Rozhdestvenskii behandelt in [24] ook het beginwaarde probleem van Riemann (Problem of decay of a discontinuïty) met de methode die aangegeven wordt door Lax. Hij zet het éénduidigheidsbewijs voor de oplossing wat strakker op en sluit de mogelijkheden van contactdiscontinuïteiten in dat bewijs uit.

Ook Lax spreekt in zijn stelling betreffende het beginwaarde probleem van Riemann niet over contactdiscontinuïteiten; immers het geval van een gedegenereerd karakteristiek veld is bij de opbouw van de éénparameterfamilie steeds uitgesloten.

Het lijkt echter toch juist nu nog enkele eigenschappen van gedegenereerde karaktersitieke velden te vermelden+

<u>Stelling</u>: Als twee toestanden U_l en U_r dezelfde k-Riemann-invarianten hebben t.o.v. een gedegenereerd karakteristiek veld, dan worden de Rankine-Hugoniot relaties op de scheidslijn vervuld met $S = \lambda_k\ (U_l\ ) = \lambda_k\ (U_r\ )$.
Zoals reeds eerder is opgemerkt noemen we een dergelijke discontinuïteit een contactdiscontinuïteit.

Aan het eind van § 2 noemden we bovendien een eigenschap van contactdiscontinuïteiten die vervat is in de volgende stelling:

<u>Stelling</u>: Zij van het quasi-lineaire stelsel (5.7) het k^{de} karakteristieke veld gedegenereerd, d.w.z.

$$r_k \cdot \text{grad.}\,\lambda_k \quad = \quad 0$$

Zij U (t,x) een stuksgewijs gladde oplossing van (5.7) en veronderstel dat U alleen een contact discontinuïteit bevat, d.w.z. dat de k-Riemann-invarianten continu zijn over de discontinuïteit van U. Dan kan U verkregen worden als de limiet van een rij gladde oplossingen, mits de sprong niet te groot is.

b. De definitie van Gelfand voor het begrip gegeneraliseerde oplossing volgens de viscositeitsmethode is natuurlijk alleen zinvol als de op die wijze gedefinieerde oplossing éénduidig bepaald wordt door het stelsel (5.4) en niet afhankelijk is van de vorm van de matrix $\| b_{ik} \|$.

In [12] toont Godunov aan de hand van een voorbeeld aan dat de discontinuïteiten van de gegeneraliseerde oplossing afhankelijk zijn van de viscositeitsmatrix.

Een soortgelijk voorbeeld geeft D'Yacenko in [8] Vvedenskaya toont in [26], weer aan de hand van een voorbeeld aan dat zelfs als we als viscositeitsmatrix de eenheidsmatrix nemen, de gegeneraliseerde oplossing niet eenduidig bepaald is.

In [12] toont Godunov weer met een voorbeeld aan dat er redelijke matrices $\| b_{ik} \|$ te vinden zijn waarvoor de gewenste eenduidigheid van de gegeneraliseerde oplossing niet gegarandeerd is.

In [9] bewijst Foy de volgende stelling.

<u>Stelling</u>: Laten $\vec{u}_l$ en $\vec{u}_r$ twee toestanden zijn die verbonden kunnen worden door middel van een k-schok voor een hyperbolisch systeem behoudswetten. Dan bestaat er een continue oplossing van het systeem met toegevoegde viscositeitsterm, die tot de gegeneraliseerde oplossing van het systeem (m.b.v. de schokvoorwaarde gedefinieerd) nadert als de viscositeitsterm naar nul gaat.

Het bewijs wordt alleen geleverd voor als viscositeitsmatrix de eenheidsmatrix. Foy spreekt bovendien de veronderstelling uit dat Gelfand's definitie van het begrip gegeneraliseerde oplossing voor een hyperbolisch quasi-lineair systeem, voor zwakke schokken zinrijk is.

Het voorgaande illustreert wel dat er voor systemen quasi-lineaire vergelijkingen op het gebied van de gegeneraliseerde oplossingen nog veel onbekend is. Lax geeft weliswaar voor het probleem van Riemann een redelijke oplossing, maar algemenere beginwaarde problemen liggen met zijn methode toch ook nog niet direkt binnen bereik, terwijl de algemene bruikbaarheid van de viscositeitsmethode aan zeer redelijke twijfel onderhevig is.

De differentieschema's zoals die door Lax gegeven worden zijn ook nog niet voldoende onderzocht, om over de bruikbaarheid daarvan voor algemene gevallen een definitieve uitspraak te doen.

<u>Appendix</u>.

Tenslotte zullen we een mogelijke toepassingsgebied voor de gegeneraliseerde oplossingen zoals die in deze scriptie behandeld zijn beschouwen, te weten de Chromatografie.

Eerst zullen enkele klassieke beschouwingen gegeven worden, waarvoor men de literatuur kan vinden in [27], [28], [29] [30] en [31], daarna zal in het kort aangegeven worden of dit probleem misschien met profijt is aan te pakken met behulp van gegeneraliseerde oplossingen, en op welke moeilijkheden men dan speciaal zal moeten letten.

Chromatografie is de naam van het proces dat scheiding van stoffen te weeg brengt door middel van fractionele adsorptie. De basis is dus het feit dat de te scheiden stoffen, die we b.v. in opgeloste toestand hebben, door een bepaalde adsorberende stof in verschillende mate geadsorbeerd worden. Ter illustratie geven we de gang van zaken bij de vorming van een chromatogram in de vloeistof-chromatografie.

We hebben een kolom die gedeeltelijk gevuld is met een adsorberende stof. (Indien verstande dat in elke lengte elementje van de kolom zich eenzelfde hoeveelheid adsorberende stof bevindt). Boven in deze kolom gieten we een hoeveelheid van een oplossing van de te scheiden stoffen in één of ander geschikt oplosmiddel. De adsorberende stof zal de opgeloste stoffen volgens een bepaald bandenpatroon opnemen. Dit patroon noemen we een chromatogram. Het chromatogram kan worden "ontwikkeld" door zuiver oplosmiddel door de kolom te gieten; de banden zullen dan i.h.a. met verschillende snelheden gaan "lopen".

Op deze wijze kan men vaak volledige of gedeeltelijke scheiding van de opgeloste stoffen krijgen.
De vloeistof (oplosmiddel) noemen we de mobiele fase, de adsorberende stof noemen we de stationaire fase.

De laatste jaren maakt men het meest gebruik van z.g. gaschromatografen; hierbij wordt de mobiele fase gevormd door een gasstroom, waarin men de te scheiden stoffen op een bepaalde plaats injecteerd. Het aldus verkregen chromatogram is wat anders dan datgene dat boven beschreven is, maar de verschillen treden niet op in de differentiaal vergelijkingen die het proces beheersen, doch alleen in de randvoorwaarden.

Er zijn twee methoden mogelijk om de chromatografie theorie op te zetten:

1 Statistische behandeling van het gedrag van de individuele moleculen,

2. behandeling van de macroscopische eigenschappen van de betreffende stoffen. Deze benadering is gebaseerd op de massabalans in een dunne laag van de kolom, loodrecht op zijn as.

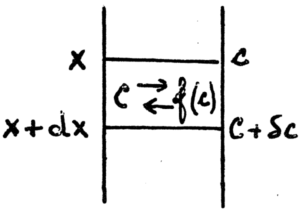
Wij zullen hier de tweede methode volgen. Teneinde vergelijkingen te verkrijgen van het type dat in deze scriptie behandeld is zullen we de volgende restricties maken:

a. Diffusie- en warmte effekten worden verwaarloosd; dus de axiale beweging in de mobiele fase berust uitsluitend op convectie.

b. Het evenwicht tussen mobiele-en stationnaire fase treedt ogenblikkelijk in

c. De stroomsnelheid is constant

We zullen nu eerst het geval van één opgeloste stof behandelen.



We beschouwen zoals gezegd een dun laagje van de kolom.
In [27] leidt Wilson door de massabalans van zo'n laagje op te maken op eenvoudige wijze de volgende vergelijking af:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

met randvoorwaarden:

(2) $$\begin{aligned} &\text{als } V = 0 \text{ dan } f(c) = 0 \quad \text{voor } x > 0 \\ &\text{als } V > 0 \text{ dan } f(c) = f(c_o) \text{ voor } x = 0 \\ &V c_o = \int_o^{\infty} f(c)\, dx. \end{aligned}$$

N.B. deze randvoorwaarden gelden voor een vloeistofchromatogram zoals dat boven beschreven is.

De gebruikte grootheden hebben de volgende betekenis x is de afstand tot de bovenkant van de kolom, c is de concentratie van de opgeloste stof, waarbij c_o de oorspronkelijke concentratie van de ingegoten oplossing is.
V is het ingegoten volume oplossing
f is de hoeveelheid geadsorbeerde stof. Deze f is een funktie van c. Men noemt f(c) de isotherm van de kolom.

Opmerking: In de differentiaalvergelijking die Wilson afleidt staan nog verscheidene constanten die we in (1) hebben weggelaten ter vereenvoudiging van de notatie. Dit is voor de wiskundige formulering niet essentieel.

De Vault geeft in [31] aan dat de afleiding van Wilson en zijn resulterende vergelijking niet helemaal correct zijn, maar het resultaat moet zijn:

(3) $$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial (f+c)}{\partial V} = 0$$

Essentiële verschillen geeft dit natuurlijk niet aangezien we (f+c) zouden kunnen voorstellen door een funktie f*.

Als algemene oplossing van (1) geeft Wilson:

(4) $$c = Q \left\{ V - x\, f^1 (c) \right\}.$$

Willen we deze oplossing aanpassen aan de randvoorwaarde, dan kan dit door voor Q een discontinue funktie te kiezen n.l. Q = constant = c_o tot een bepaalde waarde van x, Q = o voorbij die waarde van x.

We krijgen zo dus de volgende oplossing in het chromatogram weergegeven:

(5)
$$\text{voor} \quad 0 \leqslant x \quad \frac{V c_o}{f(c_o)} \quad \text{dan} \quad f = f(c_o)$$
$$\text{voor} \quad x > \frac{V c_o}{f(c_o)} \quad \text{dan} \quad f = 0$$

In de verdere literatuur is het gebruikelijk x en t (de tijd) als onafhankelijk variabelen te kiezen.

Aangezien we de stroomsnelheid van de mobiele fase constant hebben verondersteld kunnen we in vergelijking (3) gemakkelijk overgaan op t,x in plaats van V, x.

Als we deze stroomsnelheid V noemen dan geldt namelijk: V = vt; vergelijking (3) gaat dan dus over in

(6)
$$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial (f+c)}{v \partial t} = 0 \qquad \text{zie [30]}$$

Of zoals dit meestal genoteerd wordt,

(6')
$$v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial (f+c)}{\partial t} = 0.$$

De oplossingen van de vergelijkingen (3), (6) en (6') zijn natuurlijk geheel analoog aan de beschreven oplossing van vergelijking (1). De randvoorwaarden kan men wijzigen door het chromatogram via een andere methode te maken.

We zullen nu overgaan op het geval dat de oplossing n verschillende stoffen bevat.

Volgen we eerst weer het artikel van Wilson dan gaat vergelijking (1) over in

(7)
$$\frac{\partial f_i}{\partial V} + \frac{\partial c_i}{\partial x} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots, n.$$

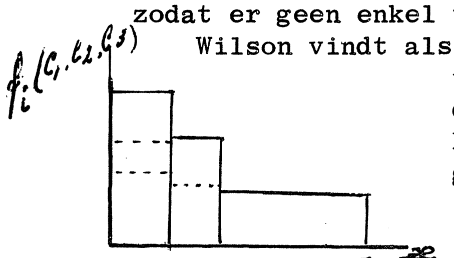
met als randvoorwaarden

(8)
$$\text{Als } V = 0, \quad x \geqslant 0 \quad \text{dan} \quad f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$
$$\text{als } V > 0, \quad x = 0 \quad \text{dan} \quad f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_i(c_1^o, \ldots, c_n^o)$$
$$V c_i^o = \int_o^\infty f_i \, dx.$$

hierin is c_i de concentratie van de i^{de} opgeloste stof terwijl c_i^o de oorspronkelijke concentratie van de i^{de} stof is f_i is de isotherm van de i^{de} opgeloste stof.

We nemen aan dat f_i een funktie is van alle concentraties dus $f_i = f_i(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Immers als f_i alleen een funktie zou u zijn van C_i dan zouden we (7) als n onafhankelijke vergelijkingen kunnen opvatten, zodat er geen enkel verschil met (1) zou zijn.



Wilson vindt als oplossing van het stelsel (7) met randvoorwaarden (8) weer een chromatogram dat discontinuïteiten vertoond. Hiernaast is getekend welk beeld we ongeveer krijgen in het geval we met drie stoffen te doen hebben.

Glueckauf [29]* behandelt het geval van twee opgeloste stoffen. Hij merkt hierbij op dat de isothermen f_1 (c_1, c_2) en f_2 (c_1, c_2) altijd aan de volgende voorwaarden voldoen:

(I) voor $c_1 = 0$ geldt $f_1 = 0$
voor $c_2 = 0$ geldt $f_2 = 0$

(II) $\frac{\partial f_2}{\partial c_1}$ en $\frac{\partial f_1}{\partial c_2}$ hebben hetzelfde teken.

Onder de aanname dat $c_1 = \varphi\,(c_2)$, die in de praktijk heel redelijk is, voert hij het stelsel vergelijkingen (7) over in het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{df_1}{dc_1} \qquad (9)$$

$$\frac{df_1}{dc_1} = \frac{df_2}{dc_2}$$

Voor dit systeem geeft hij een verdere uitwerking.

Beschouwen we nu vergelijking (6'). Voor het geval van meer componenten gaat deze over in

$$v\,\frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial (f_i + c_i)}{\partial t} = 0 \qquad (10)$$

Als deze vergelijkingen volgens de door Glueckauf gegeven methode behandeld worden dan vinden we weer een stelsel dat analoog is aan (9); nu treedt er echter $\frac{dx}{dt}$ in op, en dit is nu net de grootheid die in de gas - chromatografie gemeten wordt.

Voor de theoretische behandeling van de chromatografie is het natuurlijk van het grootste belang een expliciete uitdrukking te hebben voor de isothermen f_i $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Langmuir stelt hiervoor een vorm voor die vaak in overeenstemming is met de praktijk. Hij geeft voor de isothermen de volgende vergelijking

$$f_i\,(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \frac{a_i\,c_i}{1 + \beta \sum_{i=i} a_i\,c_i} \qquad (11)$$

Hierin zijn a_i constanten die van stoffen afhangen, terwijl β een positieve constante is.

Het discontinue karakter van de aangegeven oplossingen van de afgeleide chromatografievergelijkingen doet vermoeden dat er in dit gebied inderdaad gebruik kan worden gemaakt van gegeneraliseerde oplossingen.

Gaan we voorlopig uit van de vergelijkingen (10)

(10) $$V \frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial (f_i + c_i)}{\partial t} = 0$$

dan lijkt het voordelig om de constante V bij een van de variabelen te nemen, we krijgen dan

(12) $$\frac{\partial c_i}{\partial x} + \frac{\partial (f_i + c_i)}{\partial V} = 0$$

of

(13) $$\frac{\partial (V c_i)}{\partial x} + \frac{\partial (f_i + c_i)}{\partial t} = 0$$

Het verschil tussen deze twee representaties komt natuurlijk tot uiting in de randvoorwaarden.

Het zij opgemerkt dat de randvoorwaarden voor de stelsels (12) en (13) niet in de vorm van een beginfunktie zijn gegeven, zodat we de theorie der gegeneraliseerde oplossingen eerst zullen moeten uitbreiden voor gemengde rand-en beginwaarde problemen. Dit zal waarschijnlijk niet op essentiële moeilijkheden stuiten.

In de literatuur wordt het onderwerp op verschillende plaatsen al genoemd.

Bovendien moeten we, om de theorie der gegeneraliseerde oplossingen in zijn algemeenheid te kunnen toepassen, er rekening mee houden dat ons systeem moet voldoen aan de z.g. convexiteitsvoorwaarden.

In verband hiermee zij opgemerkt dat de meeste isothermen inderdaad concaaf of convex zijn, maar dat er echter ook gevallen zijn van z.g. sigmoïde isothermen die een buigpunt vertonen.

Uit praktisch oogpunt is een verbetering van de theorie der chromatografie echter dan pas effektief als de factor van de diffusie ook in rekening wordt gebracht, aangezien de ideale, diffusievrije toestand in de praktijk niet redelijk kan worden benaderd.

Bibliografie

[1] Courant, R. and Friedrichs, K.O.
"Supersonic Flow and Shock Waves"

[2] Courant, R. "Cauchy's problem for Hyperbolic quasi-linear systems of first-order partial differential equations in two independent variables"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. XIV (1961)

[3] Courant, R. and Hilbert
"Methods of Math. Physics" Vol. 2

[4] Courant, R. and Lax P.D.
"On non-linear partial differential equations with two independent variables"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. II (1949)

[5] Douglis, A. "Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. V (1952)

[6] Douglis, A. "An ordering principle and generalized solutions of certain quasi-linear partial differential equations"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. XII (1959)

[7] Douglis, A. "The continuous dependence of generalized solutions of non-linear partial differential equations upon their initial data"
Comm. of Pure and Applied Math. Vol. XIV (1961)

[8] D'Yačenko, V.F. "Cauchy's problem for quasi-linear systems"
Soviet Math. (Translation of Doklady) Vol. 2 Nr. 1 (1961)

[9] Foy, L.R. "Steady state solutions of hyperbolic systems of conservation laws with viscosity terms"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. XVII (1964)

[10] Friedrichs, K.O. "Non-linear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables"
American Journal of Mathematics Vol. 70 (1948)

[11] Friedrichs, K.O. "The identity of weak and strong extension of differential opeartors"
Transactions of the American Math. Soc. Vol. 55 (1944)

[12] Godunov, S.K. "On the concept of Generalized Solution"
Soviet Mathematics Vol. I Nr. 5

[13] Godunov, S.K. "On nonunique "blurrings" of discontinuïties in solutions of quasi-linear systems"
Soviet Mathematics Vol. II Nr. 1

[14] Hartman, P. and Wintner, A. "On hyperbolic partial differential equations"
American Journal of Mathematics Vol. 74 (1952)

[15] Hopf, E. "The partial differential equation: $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. III (1950)

[16] Lax, P.D. "The initial value problem for non-linear hyperbolic differential equations in two independent variables"
Contributions to the Theory of Partial Differential Equations

[17] Lax, P.D. "Non-linear hyperbolic differential equations"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. VI (1953)

[18] Lax, P.D. "Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. VII (1954)

[19] Lax, P.D. "Hyperbolic systems of conservation laws II"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. X (1957)

[20] Lax, P.D. and Wendroff, B. "Systems of conservation laws"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. XIII (1960)

[21] Oleǐnik, O.A. "Discontinuous solutions of non-linear differential equation"
American Math. Soc. Translations Series 2 Vol. 26

[22] Oleǐnik, O.A. "Construction of a generalized solution of the Cauchy-problem for a quasi-linear equation of first order by the introduction of "vanishing viscosity"".
American Math. Soc. Translations Series 2 Vol. 33

[23] Oleǐnik, O.A. "Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy-problem for a quasi-linear equation"
American Math. Soc. Translations Series 2 Vol. 33

[24] Rozhdestvenskii, B.L. "Discontinuous solutions of hyperbolic systems of quasi-linear differential equations"
Russian Mathematical Surveys Vol. 15

[25] Sarason, L. "On weak and strong solutions of boundary value problems"
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. XV (1962)

[26] Vvedenskaya, N.D. "An example of non-uniqueness of a generalized solution of a quasi-linear system of equations"
Soviet Mathematics Vol. II Nr. 1

Bibliografie bij de Appendix

[27] Wilson, N.J. "Theory of Chromatography"
Journal of American Chemical Society Vol. 62 (1940)

[28] Glüeckauf, E. "Theory of Chromatography"
Journal of the Chemical Society (1947)

[29] Glüeckauf, E. "Theory of Chromatography"
Discussions of the Faraday Society No. 7 (1949)

[30] Huber, J.F.K. and Keulemans A.J.M.
"Non-linear ideal chromatography"
Gas Chromatography 1962

[31] De Vault, D. "Theory of Chromatography"
Journal of American Chemical Society Vol. 65 (1943)