STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 48

Asymptotische ontwikkelingen van Fakulteitreeksen

N.M. Temme

maart 1967

Inleiding

Onder fakulteitreeksen verstaan wij reeksen van de volgende vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ \ldots\ (z+n)} .$$

Hierin zijn z en a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ complexe getallen; a_n hangt niet van z af. De opname van de factor n! in de teller leidt in het algemeen tot een prettiger schrijfwijze van de formules.

Deze reeksen spelen een belangrijke rol in de theorie der lineaire differentievergelijkingen. Newton en Stirling waren reeds bekend met de fakulteitreeks, echter pas na 1900 is de theorie, na voorbereidend werk van o.a. Jensen en Nielsen, door Landau ontwikkeld.

In hoofdstuk I geven wij een beknopt overzicht van de theorie der fakulteitreeksen. Een belangrijk resultaat is dat we de reeks kunnen voorstellen door een Laplace integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-z\tau}\ F(t)dt.$$

Dit resultaat wordt in hoofdstuk II gebruikt om voor de reeks een asymptotische ontwikkeling in reciproke machten van z af te leiden. In het laatste gedeelte zullen we aantonen dat de fakulteitreeks zelf als asymptotische reeks gebruikt kan worden. Ook zal de transformatie van een asymptotische reeks in een fakulteitreeks ter sprake komen.

I. Eigenschappen van fakulteitreeksen

I-1. Met een rij complexe getallen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ associëren wij de drie volgende reeksen

de fakulteitreeks (FR) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ \ldots\ (z+n)} ,$$

de reeks van Dirichlet (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$,

de reeks van Newton (N) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \binom{z-1}{n}$.

Wij noemen C_F de verzameling van de punten z waarvoor de fakulteitreeks (FR) convergeert. Op analoge wijze worden C_D en C_N gedefiniëerd voor (D) en (N).

Stelling 1. Voor de drie geassociëerde reeksen geldt

$$C_F = C_D = C_N.$$

(De gehele getallen worden uitgezonderd.)

Deze stelling is afkomstig van E. Landau.
Het bewijs van $C_F = C_D$ is te vinden in [3]
en dat van $C_F = C_N$ in [5].

In verband met deze stelling beschouwen wij verder alleen de convergentie van (FR). Hiervoor gelden de volgende bekende stellingen.

Stelling 2. Als $z_0 \in C_F$ en z zodanig is dat Re z > Re z_0, dan geldt $z \in C_F$.

Stelling 3. Als $z_0 \in C_F$ dan convergeert (FR) absoluut voor elke z met Re z > Re$(z_0 + 1)$.

Stelling 4. Als (FR) absoluut convergeert voor $z = z_0$, dan convergeert (FR) absoluut voor elke z met Re z > Re z_0.

Opm. Bij stelling 2, 3 en 4 worden de punten 0, -1, -2, ... steeds uitgesloten.
Het bewijs van deze drie stellingen wordt gegeven in [5] en [7].

Het gevolg is dat het convergentiegebied een rechterhalfvlak is. De linker begrenzing van dit halfvlak noemen wij de convergentie-lijn en deze rechte geven wij aan met λ. Onder λ zullen wij tevens verstaan het eële getal dat bepaald wordt door het snijpunt van de convergentie-ijn met de reële rechte. De waarden $\lambda = \pm \infty$ worden niet uitgesloten. telling 1 kan dus ook aldus geformuleerd worden: De drie geassociëerde eeksen hebben dezelfde convergentie-lijn.

et gebied van absolute convergentie is ook een rechterhalfvlak, con-ergentie-lijn μ. Een gevolg van stelling 3 is dat

$$0 \leq \mu - \lambda \leq 1.$$

ls $\lambda \neq \mu$ en $\lambda < \operatorname{Re} z < \mu$, dan convergeert (FR) voor deze z voorwaar-elijk.

-2. De volgende stelling geeft een methode waarop de convergentie-ijn λ te bepalen is.

telling 5. (Landau)

$$\text{Noem} \quad \alpha = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log \left| \sum_{m=0}^{n} a_m \right|}{\log n} \right\},$$

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \right|}{\log n} \right\}.$$

ls de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert dan is $\lambda = \alpha$.

ls de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert dan is $\lambda = \beta$.

De stelling wordt bewezen in [5] en [7].

oorbeelden:

) $a_n = 1$ voor alle n; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert $\Longrightarrow \lambda = \alpha = 1$.

2) $a_n = n$ voor alle n; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert $\Longrightarrow \lambda = \alpha = 2$.

3) $a_n = \frac{1}{n}$ voor alle n; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert ==> $\lambda = \alpha$,

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = \log n + \gamma + o(1) \text{ voor } n \to \infty, \text{ dus } \lambda = \alpha = 0.$$

4) $a_n = \rho^n$, $|\rho| < 1$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert ==> $\lambda = \beta$,

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^n - \sum_{m=0}^{n} \rho^n = \frac{\rho^n}{1-\rho}, \quad \beta = \limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{\log \left|\frac{\rho^n}{1-\rho}\right|}{\log n}\right\} = -\infty,$$

want $\log |\rho| < 0$.
Hieruit volgt $\lambda = -\infty$.

I-3. Uniforme convergentie van (FR).

Stelling 6. Als (FR) convergeert voor $z = z_0$, A het gebied van het complexe vlak is, dat bepaald is door: (zie fig. 1)
$A = \{z \mid |\arg(z - z_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$, $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$, dan is (FR) uniform convergent in A.

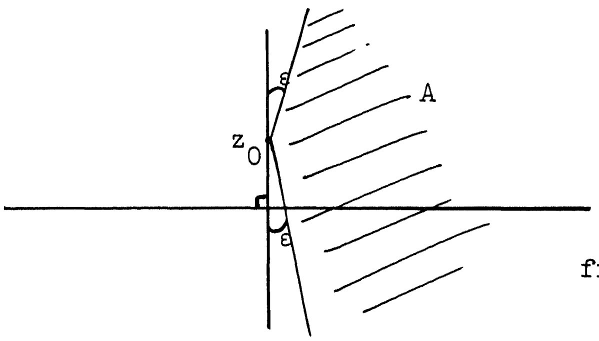

fig. 1

Stelling 7. Als (FR) convergeert voor $z = z_0$, dan convergeert (FR) uniform in het halfvlak $\text{Re } z \geq \text{Re } z_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Opmerking. Indien zich in de gebieden van uniforme convergentie de punten 0, -1, -2, ... bevinden, dan moeten deze punten uitgesloten worden door er kleine cirkels omheen te trekken.

Voor een bewijs van stelling 6 en 7 zie [5] en [7].

I-4. De somfunktie van de uniform convergente reeks noemen we $\Omega(z)$. We kunnen nu concluderen dat $\Omega(z)$ analytisch is binnen het convergentie-halfvlak, aangezien $\Omega(z)$ de som is van een uniform convergente reeks van analytische funkties. Indien de punten 0, -1, -2, ..., -p, zich in het convergentie-halfvlak bevinden, heeft $\Omega(z)$ in deze punten enkelvoudige polen.
Er geldt namelijk

$$z(z+1)\dots(z+p)\left(\Omega(z) - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\dots(z+n)}\right) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{(z+p+1)\dots(z+n)} .$$

De fakulteitreeks in het rechterlid heeft dezelfde convergentie-lijn als de oórspronkelijke reeks (FR), maar convergeert in de punten $z = 0, -1, -2, \dots, -p$.
Het residu van $\Omega(z)$ in het punt $z = -k$ ($k = 0, 1, \dots, p$) is gelijk aan

$$\lim_{z\to -k} (z+k)\Omega(z) = (-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k}, \; k = 0, 1, \dots, p.$$

I-5. Een integraaluitdrukking voor $\Omega(z)$.

Wij kunnen voor $\Omega(z)$ een integraalvoorstelling afleiden door de termen van de fakulteitreeks uit te drukken in Beta-funkties,

$$\frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \frac{\Gamma(z)\, n!}{\Gamma(z+n+1)} = B(z, n+1).$$

Aangezien

$$B(z, n+1) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^n \, dt,$$

geldt dan

$$\text{(I-5-1)} \qquad \Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^n \, dt.$$

Wij bewijzen nu dat wij in deze reeks sommatie en integratie mogen verwisselen voor voldoend grote waarden van Re z.

Stelling 8. De reeks $t^{z-1}\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{z-1} (1-t)^n$ is uniform convergent in het interval $0 \leq t \leq 1$ als Re $z > \max(1,\lambda+2)$.

Bewijs. Neem een reëel getal σ, $\sigma > \max(1,\lambda+2)$. (FR) convergeert dan zeker voor $z = \sigma$ en eveneens voor $z_0 = \sigma - 2$, indien $\sigma \neq 2$. De n^{de} term van de reeks gaat dan naar nul als $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|\ n!}{z_0(z_0+1)\ \ldots\ (z_0+n)} = 0$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|\ n!}{(z_0+1)\ \ldots\ (z_0+n)} = 0.$$

Neem $z_0 = \sigma - 2$ zodat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|\ n!}{(\sigma-1)\sigma(\sigma+1)\ \ldots\ (\sigma+n-2)} = 0$$

ofwel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\binom{\sigma+n-2}{n}} = 0.$$

Zij $\varepsilon > 0$, willekeurig. Er is dan een $N_0 = N_0(z_0,\varepsilon)$ zodat

$$|a_n| < \varepsilon \binom{\sigma+n-2}{n}, \quad \text{voor } n \geq N_0.$$

Er geldt dan voor z met Re $z = \sigma$

$$\left|\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n t^{z-1} (1-t)^n\right| < \varepsilon t^{\sigma-1} \sum_{n=N_0}^{\infty} \binom{\sigma+n-2}{n}(1-t)^n$$

$$< \varepsilon t^{\sigma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\sigma+n-2}{n}(1-t)^n$$

$$= \varepsilon t^{\sigma-1}\left[1 - (1-t)\right]^{-\sigma+1} = \varepsilon.$$

De reeks convergeert dus uniform op $0 \leq t \leq 1$ en als wij sommatie en integratie verwisselen dan vinden wij voor $\Omega(z)$:

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt, \text{ waarin} \tag{I-5-2}$$

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-t)^n. \tag{I-5-3}$$

De fakulteitreeks met convergentie-lijn $\lambda < \infty$ kan men dus altijd schrijven als een bepaalde integraal indien $\mathrm{Re}\ z > \max(1,\lambda+2)$. Deze voorwaarde is niet noodzakelijk, zoals zal blijken uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 5. Beschouw de reeks

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n-1}\ n!}{z(z+1)\ \ldots\ (z+n)} .$$

Volgens voorbeeld 4 is $\lambda = -\infty$, terwijl uit (I-5-3) volgt

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}(1-t)^n = \frac{1}{1+t} ,$$

zodat $$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\frac{dt}{1+t} .$$

Deze integraal stelt een analytische functie voor indien $\mathrm{Re}\ z > 0$. De voorwaarde van stelling 8 is in dit geval $\mathrm{Re}\ z > 1$.

I-6. De functie $\phi(t)$ wordt de genererende funktie van de fakulteitreeks genoemd. Bij een gegeven funktie $\Omega(z)$ kunnen wij $\phi(t)$ bepalen via de omkeerstelling van de Laplace-transformaties.
Uit

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-zt}\phi(e^{-t})dt \text{ voor } \mathrm{Re}\ z > \lambda \tag{I-6-1}$$

vinden wij voor $\phi(t)$

(I-6-2) $$\phi(e^{-t}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{tz}\Omega(z)dz,$$

waarin $l > \lambda$.

Er zijn nodige en voldoende voorwaarden aan te geven voor $\phi(t)$ zodat de funktie

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt$$

ontwikkeld kan worden in een fakulteitreeks (zie Nielsen [6]). De funktie $\phi(t)$ moet analytisch zijn in $t = 1$ en de Taylorreeks in $t = 1$ moet convergent zijn binnen $|t - 1| = 1$. Bovendien moet gelden: is $t = 0$ voor $\phi(t)$ een singulier punt en $\phi^{(\nu)}(t)$ de eerste van alle afgeleiden van $\phi(t)$ die voor $t = +0$ oneindig groot wordt, dan moet er een reëel getal λ bestaan, $-\infty \leq \lambda < \infty$, zo dat

$$\lim_{t\downarrow 0} |t^{z+\nu}\phi^{(\nu)}(t)| = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad \mathrm{Re}\ z > \lambda \\ \infty & \text{als} \quad \mathrm{Re}\ z < \lambda \end{cases}.$$

Verder is er nog een voorwaarde als $\phi(t)$ op $|t - 1| = 1$ andere singuliere punten bezit.

Als de convergentiestraal van de reeksontwikkeling in $t = 1$

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - t)^n$$

groter is dan 1, dan convergeert de fakulteitreeks voor elke z, uitgezonderd 0 en de negatieve gehele getallen.

I-7.

Stelling 9. De ontwikkeling van een funktie $\Omega(z)$ in een fakulteitreeks is éénduidig.

Bewijs.

Als $$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ \ldots\ (z+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n\, n!}{z(z+1)\ \ldots\ (z+n)}$$

en λ en λ' resp. de beide convergentie-lijnen zijn, dan bestaat voor Re $z > \max(1,\ \lambda+2,\ \lambda'+2)$ de relatie

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt = \int_0^1 t^{z-1}\psi(t)dt,$$

met $$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ (1-t)^n$$

en

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\ (1-t)^n.$$

Hieruit volgt via (I-6-1)

$$\int_0^{\infty} e^{-zt}\phi(e^{-t})dt = \int_0^{\infty} e^{-zt}\psi(e^{-t})dt,$$

ofwel

$$\int_0^{\infty} e^{-zt}\{\phi(e^{-t}) - \psi(e^{-t})\}dt = 0.$$

Uit de theorie van de Laplace-transformaties volgt nu, aangezien ϕ en ψ continue funkties zijn,

$$\phi(t) = \psi(t),$$

dus $a_n = b_n$ voor alle n.

Hiermee is de eenduidigheid bewezen.

I-8. Opheffing van de singuliere punten.

De funktie $\Omega(z)$ die door (FR) gedefiniëerd wordt, heeft enkelvoudige polen in 0, -1, -2, ..., indien deze punten zich binnen het convergentie-halfvlak bevinden. De funktie $\frac{\sin \pi z}{\pi}\ \Omega(z)$ is dus overal

analytisch binnen dit halfvlak. Wij kunnen voor deze laatste funktie een reeksontwikkeling afleiden, die veel analogie vertoont met de reeks (I-5-1).
Hiervoor gebruiken wij de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{1+} w^n(w-1)^{z-1}dw.$$

De integratieweg is aangegeven in figuur 2.

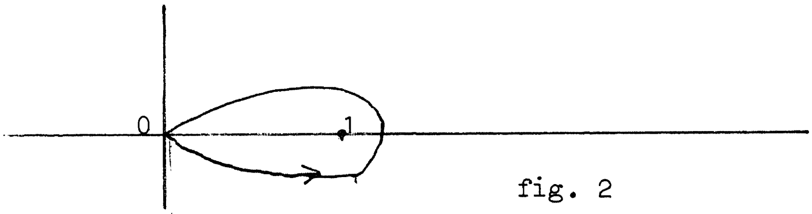

fig. 2

Zoals bekend is geldt voor Re $\lambda > 0$ en alle μ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{1+} w^{\lambda-1}(w-1)^{\mu-1}\,dw =$$

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\mu)\Gamma(1-\mu)} = \frac{\Gamma(\lambda)\;\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}\;\frac{\sin\pi\mu}{\mu}\;.$$

Nemen wij $\lambda - 1 = n$ en $\mu = z$ dan krijgen wij

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{1+} w^n(w-1)^{z-1}dw = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(n+1+z)}\;\frac{\sin\pi z}{\pi} =$$

$$\frac{n!}{z(z+1)\;\dots\;(z+n)}\;\frac{\sin\pi z}{\pi}\;.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\sin\pi z}{\pi}\,\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_0^{1+} w^n(w-1)^{z-1}dw.$$

Deze reeks convergeert nu voor elke z binnen het convergentie-halfvlak van (FR).

I-9. Analytische voortzetting van $\Omega(z)$.

Door de transformatie $t = \tau^{1/\theta}$ in de Laplace-integraal voor $\Omega(z)$ (I-5-2), krijgen wij een nieuwe reeks, die als een generalisatie van de fakulteitreeks beschouwd kan worden.

Wij gaan uit van

(I-5-2) $$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt.$$

Via $t = \tau^{1/\theta}$ krijgen wij dan

$$\Omega(z) = \frac{1}{\theta}\int_0^1 \tau^{\frac{z}{\theta}-1}\phi(\tau^{1/\theta})d\tau.$$

Wij kunnen $\phi(\tau^{1/\theta})$ weer ontwikkelen in een machtreeks in de omgeving van $\tau = 1$.
Namelijk

$$(1 - \tau^{1/\theta})^m = \sum_{n=m}^{\infty} f_{n,m}(\theta)(1 - \tau)^n,$$

zodat

$$\phi(\tau^{1/\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - \tau^{1/\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta)(1-\tau)^n,$$

met

(I-9-1) $$b_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_{n,k}(\theta).$$

Wij krijgen dan voor $\Omega(z)$ de volgende reeks

(I-9-2) $$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(\theta)\ \theta^n\ n!}{z(z+\theta)\ \ldots\ (z+n\theta)} .$$

Voor de convergentie-lijn $\lambda(\theta)$ van deze nieuwe reeks geldt:

als λ de convergentie-lijn van de oorspronkelijke fakulteitreeks is, $\lambda > 0$ en $\theta > 1$, dan voldoet $\lambda(\theta)$ aan

$$\lambda(\theta) \leq \lambda.$$

Als $\lambda(\theta) < \lambda$, dan hebben wij een analytische voortzetting gekregen links van de oorspronkelijke convergentie-lijn λ.

II. Asymptotische ontwikkelingen van fakulteitreeksen

II-1. Een fakulteitreeks met convergentie-lijn λ kan men voorstellen door een Laplace integraal

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt = \int_0^\infty e^{-zt}\phi(e^{-t})dt,$$

voor

$$\text{Re } z > \max(1, \lambda+2).$$

$\phi(t)$ is analytisch binnen $|t - 1| = 1$. Als wij $\phi(e^{-t}) = F(t)$ stellen, dan blijkt $F(t)$ analytisch te zijn in een gebied G dat de oorsprong bevat.

Beschouw de afbeelding $\tau = e^{-t}$. De schijf $|\tau - 1| \leq 1$ wordt dan afgebeeld op een gebied G, aangegeven in figuur 3.

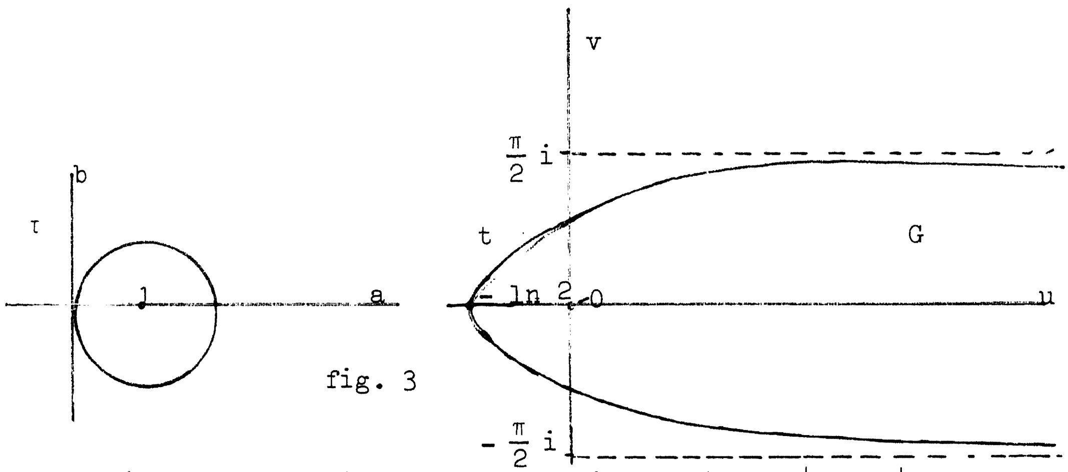

fig. 3

Als $\tau = a + ib$ en $t = u + iv$, dan kunnen wij de cirkel $|\tau - 1| = 1$ in het τ-vlak voorstellen door $(a-1)^2 + b^2 = 1$. Het beeld van deze cirkel wordt in het t-vlak voorgesteld door $u = -\ln |2 \cos v|$, $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

Aangezien F(t) analytisch is in de oorsprong, bestaat er voor F(t) een Taylor-ontwikkeling

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j t^j \quad \text{met} \quad d_j = \frac{F^{(n)}(0)}{n!} .$$

II-2. De coëfficiënten d_j berekenen wij als volgt. Wij ontwikkelen eerst $(1 - e^{-t})^m$ in een machtreeks

$$(1 - e^{-t})^m = \sum_{n=m}^{\infty} c_n^{(m)} t^n .$$

Daarna sorteren wij $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - e^{-t})^n$ naar machten van t, hetgeen toegestaan is wegens de stelling van Weierstrass over dubbelreeksen ([3]). De coëfficiënten $c_n^{(m)}$ kunnen wij uitdrukken in $S_n^{(m)}$, de "getallen van Stirling van de tweede soort", namelijk:

$$(e^x - 1)^m = m! \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{x^n}{n!} .$$

(Handbook of Mathematical Functions)

Hieruit volgt dat:

$$(1 - e^{-t})^m = (-1)^m (e^{-t} - 1)^m = (-1)^m \, m! \sum_{n=m}^{\infty} S_n^{(m)} \frac{(-t)^n}{n!},$$

dus $$c_n^{(m)} = (-1)^{m+n} \frac{m!}{n!} S_n^{(m)} .$$

$S_n^{(m)}$ kan berekend worden uit de formule

$$S_n^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n ,$$

hetgeen blijkt uit uitwerking van $(e^x - 1)^m$.

We kunnen $c_n^{(m)}$ ook uitdrukken in Bernoulli-getallen.

Namelijk:
$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t - 1)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(x) \qquad [8],$$

$$B_\nu^{(n)}(0) = B_\nu^{(n)} \quad \text{en} \quad B_\nu^{(1)} = B_\nu .$$

1) Voor -n en x = 0 (n mag een willekeurig complex getal zijn) leidt deze formule tot

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^{-n} = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(-n)} ,$$

dus

$$\left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu t^\nu \frac{B_\nu^{(-n)}}{\nu!} ,$$

$$(1 - e^{-t})^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu+n} \frac{B_\nu^{(-n)}}{\nu!} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{t^\nu (-1)^{\nu-n} B_{\nu-n}^{(-n)}}{(\nu-n)!} ,$$

zodat

$$C_n^{(m)} = \frac{(-1)^{n-m} B_{n-m}^{(-m)}}{(n-m)!} .$$

2) door -n en x = -n te nemen krijgen wij

$$\frac{t^{-n} e^{-nt}}{(e^t - 1)^{-n}} = \left(\frac{e^t - 1}{te^{+t}}\right)^n = \left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(-n)}(-n),$$

zodat

$$C_n^{(m)} = \frac{B_{n-m}^{(-m)}(-m)}{(n-m)!} .$$

II-3. Wij krijgen het volgende schema

$$m = 0 \quad (1 - e^{-t})^0 = c_0^{(0)}$$

$$m = 1 \quad (1 - e^{-t})^1 = c_1^{(1)} t + c_2^{(1)} t^2 + c_3^{(1)} t^3 + c_4^{(1)} t^4 + \ldots$$

$$m = 2 \quad (1 - e^{-t})^2 = c_2^{(2)} t^2 + c_3^{(2)} t^3 + c_4^{(2)} t^4 + \ldots$$

$$m = 3 \quad (1 - e^{-t})^3 = c_3^{(3)} t^3 + c_4^{(3)} t^4 + \ldots$$

Dus
$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, (1 - e^{-t})^j = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \, t^j,$$

met
$$d_j = \sum_{i=0}^{j} a_i \, c_j^{(i)}.$$

Volgens [4], stelling 6.4 kunnen wij nu voor $\Omega(z)$ een asymptotische ontwikkeling afleiden in reciproke machten van z.

Uit $\Omega(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \, F(t)dt$ en $F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \, t^j$ volgt:

$$\Omega(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} d_j \frac{j!}{z^{j+1}} \quad \text{voor } z \to \infty \text{ met } |\arg z| \leq \phi < \frac{\pi}{2} .$$

II-4. De coëfficiënten d_j kunnen soms eenvoudiger berekend worden, namelijk als de funktie die voorgesteld wordt door de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (1 - t)^n$$

een bekende funktie is, zoals in het volgende voorbeeld.
Wij beschouwen de reeks

$$\Omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{z(z+1) \, \ldots \, (z+n)} .$$

Voor de coëfficiënten a_n geldt dus $a_0 = 0$, $a_n = 1$, $n \geq 1$.

Uit (I-5-3) volgt $\quad \phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - t)^n = \frac{1 - t}{1 - 1 + t} = \frac{1}{t} - 1.$

In voorbeeld 1 hebben wij voor λ gevonden $\lambda = 1$. Volgens stelling 8 geldt de integraalvoorstelling dan voor Re $z > 3$.

Als $\phi(t) = \frac{1}{t} - 1$, dan is $F(t) = e^t - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}$.

Dus

$$\Omega(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} d_j \frac{j!}{z^{j+1}} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{z^j}$$

voor $z \to \infty$ met Re $z > 3$, $|\arg z| \leq \phi < \frac{\pi}{2}$.

De laatste reeks convergeert echter voor $|z| > 1$ en is dan gelijk aan $\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{z(z - 1)}$.

Inderdaad volgt uit

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt \quad \text{en} \quad \text{Re } z > 3$$

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1} \left(\frac{1}{t} - 1\right)dt = \frac{1}{z(z - 1)}.$$

(De voorwaarde Re $z > 3$ is ook in dit geval niet noodzakelijk, want de integraal bestaat voor Re $z > 1$.)

In dit voorbeeld kan de asymptotische reeks dus ook afgeleid worden door de integraal uit te rekenen en voor de gevonden funktie een machtreeksontwikkeling in z^{-1} af te leiden. Deze reeks is dan tevens de asymptotische reeks ([4], p. 6).

Uit dit voorbeeld volgt ook, omdat $d_j = \frac{1}{j!}$,

$$\sum_{i=1}^{j} C_j^{(i)} = \frac{1}{j!} \quad \text{voor alle } j \geq 1.$$

II-5. In [10] wordt afgeleid dat als een funktie analytisch is voor $|z| > R$, zodat daar geldt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

een representatie bestaat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z+1)\ \dots\ (z+n)} \quad \text{voor Re } z > R.$$

(Noem $\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$, dan geldt $f(z) = \int_0^{\infty} z e^{-tz} \phi(t) dt$. Definiëer $F(\xi) = \phi(t)$ via $e^{-t} = 1 - \xi$; de coëfficiënten b_n worden bepaald uit $b_n = F^{(n)}(0)$.)

De voorwaarde dat $f(z)$ een Taylor-ontwikkeling $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ voor $|z| > R$ bezit is voor een fakulteitreeks representatie natuurlijk niet noodzakelijk.

II-6. Het volgende voorbeeld geeft een funktie $\Omega(z)$, die voor Re $z > 0$ analytisch is en waarvan de asymptotische reeks voor elke z divergeert. (Zie ook [4] p. 8 en p. 29.)

Neem

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1} \frac{dt}{1 - \ln t} = \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{dt}{1+t} .$$

In dit geval is $\phi(t) = \frac{1}{1 - \ln t}$. Deze funktie is analytisch in $t = 1$ en de machtreeks convergeert binnen $|t - 1| = 1$.

$t = 0$ is voor $\phi'(t)$ een singulier punt

$$\lim_{t \downarrow 0} \phi'(t) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t(1 - \ln t)^2} = \infty.$$

Nu is $$\lim_{t \downarrow 0} \left| \frac{t^{z+1}}{t(1 - \ln t)^2} \right| = \begin{cases} 0 & \text{voor Re } z \geq 0 \\ \infty & \text{voor Re } z < 0 \end{cases} .$$

$\phi(t)$ heeft op $|t - 1| = 1$ geen andere singuliere punten.
Er bestaat dus een representatie als fakulteitreeks. De coëfficiënten kunnen wij op twee manieren bepalen.

1) $\frac{1}{1 - \ln t} = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln t)^n$ als $|\ln t| < 1$ dus als t reëel: $\frac{1}{e} < t < e$.

Volgens [8] geldt de volgende ontwikkeling

$$\left\{\frac{\log(1+t)}{t}\right\}^n = n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{B_\nu^{(n+\nu)}}{n+\nu}, \quad |t| < 1.$$

Hieruit volgt $\left\{\frac{\ln t}{t-1}\right\}^n = n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t-1)^\nu}{\nu!} \frac{B_\nu^{(n+\nu)}}{n+\nu}$, $|t - 1| < 1$,

ofwel
$$\{\ln t\}^n = n \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+n} \frac{(1-t)^{\nu+n}}{\nu!} \frac{B_\nu^{(n+\nu)}}{n+\nu}$$

$$= n \sum_{\nu=n}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(1-t)^\nu}{(\nu-n)!} \frac{B_{\nu-n}^{\nu}}{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=n}^{\infty} A_\nu^{(n)} (1-t)^\nu, \text{ met } A_\nu^{(n)} = \frac{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{B_{\nu-n}^{\nu}}{(\nu-n)!},$$

zodat
$$\frac{1}{1 - \ln t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-t)^n \text{ met } a_n = \sum_{\nu=0}^{n} A_n^{(\nu)}.$$

De afleiding is gegeven voor waarden van t die niet alle voldoen aan $|t - 1| < 1$. Aangezien wij een ontwikkeling hebben in $t = 1$ van een analytische funktie en de dichtstbijzijnde singulariteit is $t = 0$ voldoet de ontwikkeling binnen $|t - 1| = 1$.

2) $\phi(t) = \frac{1}{1 - \ln t} \Longrightarrow F(t) = \frac{1}{1+t} \Longrightarrow F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^j$ voor $|t| < 1$.

De coëfficiënten a_n kunnen dus ook berekend worden uit

$$d_j = \sum_{i=0}^{j} a_i C_j^{(i)} = (-1)^j.$$

Wij kunnen dus schrijven

$$\Omega(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \; n!}{z(z+1) \ldots (z+n)} \quad .$$

Voor deze fakulteitreeks geldt de volgende asymptotische ontwikkeling

$$\Omega(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{voor } |z| \to \infty.$$

Algemener geldt dat de funktie

$$\Omega_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt} dt}{(1+t)^\nu} = \int_0^1 t^{z-1} \frac{dt}{(1 - \ln t)^\nu}$$

voor Re $z > 0$ geschreven kan worden als fakulteitreeks.

Voor de incomplete gammafunktie $\Gamma_\alpha(x) = \int_x^\infty e^{-t} \, t^{\alpha-1} dt$ kunnen wij op de volgende manier een fakulteitreeks vinden.

Stel $t = xs + s$ (zie ook [2])

$$\Gamma_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-xs-s} \, x^{\alpha-1} \, (s+1)^{\alpha-1} \, x \, ds$$

$$= e^{-x} x^\alpha \int_0^\infty e^{-xt} \, (t+1)^{\alpha-1} \, dt$$

$$= e^{-x} x^\alpha \, \Omega_{1-\alpha}(x).$$

Als $\quad \Omega_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\nu) \; n!}{x(x+1) \ldots (x+n)} \quad$ dan geldt:

$$\Gamma_\alpha(x) = e^{-x} x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(1-\alpha) \; n!}{x(x+1) \ldots (x+n)} \quad .$$

Voor $\nu = \frac{1}{2}$ krijgen wij

$$\Omega_{\frac{1}{2}}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{\sqrt{1+t}} = (\text{stel } t = \frac{\tau^2}{x} - 1)$$

$$= \frac{2e^x}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-\tau^2}\,d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^x \operatorname{erfc} \sqrt{x}.$$

II-7. In [2] vinden wij voor de incomplete gammafunktie een fakulteitreeks waarin een parameter μ voorkomt, die later zó gekozen wordt dat de reeks snel convergeert.

De fakulteitreeks waarin een parameter optreedt kan een analytische funktie voorstellen, die niet afhankelijk is van de parameter. Wij zagen in hoofdstuk I dat dit het geval is als wij in de Laplace-integraal overgaan op een andere integratie-variabele ($t \to t^{1/\theta}$).

$\Omega(z)$ wordt dan voorgesteld door

$$\text{(I-9-2)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(\theta)\,\theta^n\, n!}{z(z+\theta)\,\ldots\,(z+n\theta)} \,.$$

De nodige en voldoende voorwaarden voor een dergelijke ontwikkeling volgen uit:

Stelling 10. $\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt$ kan men dan en slechts dan ontwikkelen in een fakulteitreeks van de vorm (I-9-2) indien:

1) $\Omega(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{\nu(z)}{z(z+1)}$; $\nu(z)$ is een analytische funktie die begrensd is in een rechter-halfvlak. (Re $z \geq \mu > 0$.)

2) de funktie

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{tz}\Omega(z)dz$$

analytisch is in een willekeurig smal gebied, dat de reële positieve as, inclusief de oorsprong, bevat.

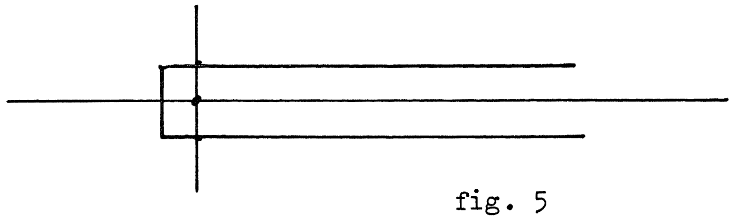

fig. 5

F(t) moet in dit gebied uniform voldoen aan:

$$\lim_{|t|\to\infty} e^{-\mu t} F(t) = 0.$$

De stelling is ontleend aan [7] en [8].
Aan de voorwaarden is bijvoorbeeld voldaan als $\Omega(z)$ regulier is voor $|z| \to \infty$. Dan is de ontwikkeling zelfs mogelijk voor willekeurige complexe θ. Wij berekenen de coëfficiënten $b_n(\theta)$. Wij gaan er van uit dat θ en ϕ zodanig gekozen zijn dat in de volgende berekening alle stappen geoorloofd zijn.

$$\phi(t^{1/\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - t^{\alpha})^n \qquad (\alpha = 1/\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - e^{-s})^n \qquad (t^{\alpha} = e^{-s})$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} d_j\, s^j \qquad d_j = \sum_{i=0}^{j} a_i\, C_j^{(i)} \quad \text{(zie II-3)}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} d_j \{-\alpha \log t\}^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j\, d_j \{\log t\}^j.$$

$$\{\log t\}^j = \sum_{\nu=j}^{\infty} A_\nu^{(j)}(1 - t)^\nu \qquad \text{(zie II-5)}$$

dus $$\phi(t^{1/\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(\theta)(1 - t)^j$$

met $$b_j(\theta) = \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{-1}{\theta}\right)^k d_k A_j^{(k)}.$$

Wij krijgen voor $\Omega(z)$

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{\theta}\right)^k d_k A_n^{(k)}\right)\theta^n \cdot n!}{z(z+\theta) \ldots (z+n\theta)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \theta^{n-k} d_k A_n^{(k)}\right)n!}{z(z+\theta) \ldots (z+n\theta)} .$$

Wij zien hieruit dat $b_n(\theta)\theta^n = O(1)$ voor $\theta \to 0$ en wel

$$\lim_{\theta\to0} b_n(\theta)\theta^n = (-1)^n d_n A_n^{(n)}.$$

Nu is $$A_n^{(n)} = \lim_{t\to1} \left\{\frac{\log t}{1 - t}\right\}^n = (-1)^n$$

zodat $$\lim_{\theta\to0} b_n(\theta)\theta^n = d_n.$$

<u>Conclusie</u>: Als $\Omega(z)$ gegeven is door de volgende reeks

(I-9- 2) $$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(\theta)\theta^n\, n!}{z(z+\theta) \ldots (z+n\theta)} ,$$

dan ontstaat voor $\theta \to 0$ de vorm, althans formeel, die wij in II-3 afgeleid hebben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{d_n}{z^{n+1}} .$$

Deze methode levert nu eens de (convergente) reeksontwikkeling voor $\Omega(z)$, dan weer de asymptotische ontwikkeling voor $\Omega(z)$.
De vraag of dit de twee enige mogelijkheden zijn is hiermee nog niet beantwoord. Indien echter van $\Omega(z)$ bekend is dat er een asymptotische ontwikkeling bestaat

$$\Omega(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} d_j \frac{j!}{j^{n+1}} \quad \text{voor } |z| \to \infty$$

en (I-9-2) is afgeleid uit (I-5-2),
dan is deze methode een juiste methode om de reeks te bepalen. De parametermethode levert namelijk een reeks op, waarvan de coëfficiënten dezelfde zijn als die van de reeks, die via de Laplace-transformatie verkregen wordt.

III. De fakulteitreeks als asymptotische reeks

III-1. De funkties $\phi_n(z) = \frac{1}{z(z+1)\ \ldots\ (z+n)}$ vormen een asymptotische rij, want

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} = 0 \quad \text{voor alle n.}$$

Stelling 11. Als $\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n!\, \phi_n(z)$ en λ is de convergentie-lijn, dan is deze reeks voor $\Omega(z)$ een asymptotische ontwikkeling.

Bewijs. Voor Re $z > \max(1,\lambda+2)$ geldt $\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\, \phi(t)dt$. m keer partiëel integreren geeft

$$\Omega(z) = \frac{1}{z}\,\phi(1) - \frac{1}{z(z+1)}\,\phi'(1) + \frac{\phi''(1)}{z(z+1)(z+2)} + \ldots + \frac{(-1)^m \phi^{(m)}(1)}{z(z+1)\ldots(z+m)}$$
$$+ R_m(z),$$

$$R_m(z) = \frac{(-1)^{m+1}}{z(z+1)\ \ldots\ (z+m)} \int_0^1 \phi^{(m+1)}(t)t^{z+m}\ dt$$

$$= (-1)^{m+1}\ \phi_m(z) \int_0^1 \phi^{(m+1)}(t)\ t^{z+m}\ dt.$$

Volgens stelling 9 kunnen wij door Re z groot genoeg te kiezen de integraal willekeurig klein maken.

Het asymptotische gedrag volgt dan uit:

$$|\Omega(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n\ n!\ \phi_n(z)| = |R_m(z)| = o(\phi_m(z)),$$

$$\text{voor } |z| \to \infty,\ \text{Re } z > \max(1,\lambda+2).$$

Men kan de asymptotische eigenschap van de reeks ook afleiden zonder van de integraalvoorstelling gebruik te maken.

Er gelden namelijk, als steeds Re z > $\lambda+\varepsilon$ genomen wordt, voor de reeks

$$\Omega(z) = \frac{a_0\ 0!}{z} + \frac{a_1\ 1!}{z(z+1)} + \frac{a_2\ 2!}{z(z+1)(z+2)} + \ldots$$

de volgende betrekkingen

$$\lim_{|z|\to\infty} z\Omega(z) = a_0,$$

$$\lim_{|z|\to\infty} (z+1)(z\Omega(z) - a_0) = a_1,$$

$$\lim_{|z|\to\infty} (z+2)\{(z+1)(z\Omega(z) - a_0) - a_1\} = a_2\ 2!,$$

en algemeen

$$\lim_{|z|\to\infty} z(z+1)\ldots(z+n)(\Omega(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu\ \nu!}{z(z+1)\ldots(z+\nu)}) = a_n\ n!.$$

De voorwaarde Re z > max(1,λ+2), die bij gebruik van de integraalvoorstelling gesteld werd, blijkt dus niet noodzakelijk te zijn.

Integralen van het type $\int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt$ en $\int_0^\infty e^{-zt}F(t)dt$ waarvan het gedrag voor grote waarden van z onderzocht moet worden, kunnen wij asymptotisch voorstellen door een machtreeks in z^{-1} of, indien ϕ en F aan bepaalde voorwaarden voldoen, door een convergente fakulteitreeks. Voor F(t) bestaat dan een convergente reeks

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - e^{-t})^n.$$

Een algemener resultaat vinden wij in [1].

Stelling 12. (Erdélyi)
Als $\Omega(z)$ de Laplace-getransformeerde is van F(t) en

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - e^{-t})^n \quad \text{voor } t \downarrow 0,$$

dan geldt

$$\Omega(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ \dots\ (z+n)}$$

$$\text{als } |z| \to \infty \quad \text{en} \quad |\arg z| \leq \phi < \frac{\pi}{2}.$$

III-2. Indien $\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1}\phi(t)dt$ en $\phi(t)$ voldoet niet aan de voorwaarden om een convergente fakulteitreeks af te leiden, dan kunnen wij $\Omega(z)$ soms asymptotisch voorstellen door een fakulteitreeks.

Voorbeeld.

Wij nemen $\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1} \frac{dt}{3 - 2t} = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{dt}{3 - 2e^{-t}}$.

$\Omega(z)$ is analytisch voor Re $z > 0$. $\phi(t) = \frac{1}{3 - 2t}$ is niet analytisch in $|t - 1| < 1$.

Er is een pool voor $t = 3/2$.

Echter $\phi(t) = \frac{1}{3 - 2t} = \frac{1}{1 + 2(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-t)^n$, met $a_n = (-1)^n 2^n$.

Deze ontwikkeling geldt voor $|1 - t| < \frac{1}{2}$.

Voor F(t) krijgen wij dan:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 2^n \, (1 - e^{-t})^n.$$

Deze reeks convergeert voor voldoend kleine waarden van t; in elk geval geldt

$$F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 2^n \, (1 - e^{-t})^n, \quad t \downarrow 0.$$

Dus
$$\Omega(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n! \, 2^n}{z(z+1) \, \ldots \, (z+n)} \quad ,$$

$$\text{voor } |z| \to \infty \text{ en } |\arg z| \leq \phi < \frac{\pi}{2} .$$

Deze fakulteitreeks divergeert voor elke waarde van z want, aangezien $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ divergeert, is

$$\lambda = \alpha = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right|}{\log n} \right\} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log \left| \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \right|}{\log n} \right\} = \infty.$$

De stelling van Erdélyi geeft de geldigheid van deze asymptotische ontwikkeling. Die kan ook aangetoond worden door

$$\Omega(z) = \int_0^1 t^{z-1} \frac{dt}{3 - 2t} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt} \, dt}{3-2e^{-t}}$$

partieel te integreren.

De andere asymptotische reeks volgt weer uit

$$F(t) = \frac{1}{3 - 2e^{-t}} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \, t^j \quad \text{voor t voldoende klein,}$$

waarin
$$d_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \, 2^i \, c_j^{(i)}.$$

Het resultaat is

$$\Omega(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} d_j \frac{j!}{z^{j+1}} \, , \quad |z| \to \infty \quad |\arg z| \leq \phi < \frac{\pi}{2} \, .$$

III-3. Wij hebben in (II-6) gezien dat van $\Omega(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{dt}{t+1}$ een convergente fakulteitreeks bestaat (Re $z > 0$), terwijl de asymptotische reeks voor elke z divergeert.
Watson [9] ging na onder welke omstandigheden het mogelijk is, een (eventueel divergente) machtreeks door een transformatie om te werken tot een convergente fakulteitreeks. Ook Stirling kende al zo'n transformatie.

Stelling 13. (Watson)
Zij ρ een positief getal kleiner dan $3/\pi$, α de scherpe, positieve hoek die voldoet aan:

$$2 \cos \left(\frac{\sin \alpha}{\rho}\right) = e^{-\cos \alpha/\rho} \, ,$$

$f(z)$ analytisch in het gebied

$$D = \{z \mid |z| > \gamma, \ |\arg z| \leq \tfrac{1}{2}\pi + \alpha + 2\delta, \ \delta > 0, \ \gamma \text{ eindig}\}.$$

Als $f(z)$ in D een asymptotische ontwikkeling heeft

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + R_n$$

met $|a_n| < A \rho^n \cdot n!$, $|R_n z^{n+1}| < B \sigma^n \cdot n!$, A, B en σ onafhankelijk van n,
en als Re $z > \max(2, \gamma+1)$ dan kan $f(z)$ ontwikkeld worden in een convergente fakulteitreeks:

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z(z+1)} \ldots \, .$$

$$(\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}, \quad f(z) = \int_0^{\infty} z\phi(t)e^{-zt}dt \quad \mathrm{Re}\ z > \gamma.$$

Via $e^{-t} = 1 - \xi$, $F(\xi) = \phi(\log \frac{1}{1-\xi})$,

$$F_1(\xi) = (1 - \xi)F'(\xi),$$

$$b_n \quad = F_1^{(n-1)}(0) \qquad).$$

Stirling gaf een formele methode om een machtreeks van de vorm

$$\text{(III-3-1)} \qquad \Omega(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots$$

in een fakulteitreeks om te zetten.

Er geldt namelijk voor elke term afzonderlijk

$$\frac{1}{z^m} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{S_n^{n-m}}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \quad ,$$

waarin S_n^{n-m} een "getal van Stirling van de eerste soort" is.

Stelling 14. Als van een funktie $\Omega(z)$ bekend is dat er een representatie mogelijk is in de vorm van een fakulteitreeks en $\Omega(z)$ is voorgesteld door (III-3-1) (de reeks kan convergeren of een asymptotische benadering zijn), dan geeft de formele methode van Stirling altijd de (FR) van $\Omega(z)$, zowel bij divergentie als bij convergentie van III-3-1. Als (III-3-1) voor $|z| > r$ convergeert dan geeft de methode van Stirling een (FR) die zeker voor Re $z > r$ convergeert (analoog aan de stelling uit Whittaker and Watson).

Deze methode is echter geen onafhankelijke methode, want de convergentie van (1) is een irrelevante eis voor de fakulteitreeks. Deze methode geeft tevens geen convergentie gebied voor de fakulteitreeks.

De methode bewijst daarentegen zeker zijn nut als formele methode, indien eerst het bestaan van een fakulteitreeks aangetoond is, en het convergentie gebied is bepaald:

Van $\Omega(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{dt}{1+t} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}$

bestaat een convergente (FR) voor Re $z > 0$.
De stelling van Watson geeft hier geen uitsluitsel want de n^e term van de asymptotische reeks moet voldoen aan

$$|a_n| < A\, \rho^n \cdot n!.$$

In dit geval is

$$|a_n| = |(-1)^{n-1}(n-1)!| = \frac{n!}{n} .$$

Er moet dus gelden

$$\frac{n!}{n} < A\, \rho^n\, n! ,$$

met $\rho < \frac{3}{\pi} < 1$ en A onafhankelijk van n. Er moet dus voldaan zijn aan

$$1 < A\, n\, \rho^n, \text{ voor alle } n.$$

Echter $$n\, \rho^n \to 0 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Literatuur

1. A. Erdélyi.
   Asymptotic representation of Laplace transforms with an application to Inverse Factorial Series.
   Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 8 1947.

2. J.F. Frankena.
   A faculty series for the incomplete gamma function and the related error functions.
   M.C. Report TW 91, 1962.

3. K. Knopp.
   Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.
   Springer, Berlin.

4. H.A. Lauwerier.
   Asymptotic Expansions.
   M.C. Tracts 13, 1966.

5. L.M. Milne Thomson.
   The Calculus of Finite Differences.
   Macmillan & Co, London, 1933.

6. N. Nielsen.
   Handbuch der Theorie der Gammafunktion.
   Leipzig, 1906.

7. N.E. Nörlund.
   Leçons sur les Séries d'Interpolation.
   Gauthier-Villars, Paris, 1926.

8. N.E. Nörlund.
   Differenzenrechnung.
   Springer, Berlin.

9. G.N. Watson.
   The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials.
   Rend. Circ. mat. Palermo, 1912.

10. E.T. Whittaker en G.N. Watson.
    A Course of Modern Analysis.
    Cambridge, 1946.