TW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 53

Het optimaliseren van een functionaal binnen de klasse van oplossingen van een elliptische partiële differentiaalvergelijking.

door

R. Delver

november 1968

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Inhoud

Deze scriptie is ontstaan onder leiding van Prof.Dr. R. Timman, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft.

1 Inleiding.

Variatierekening gaat in het algemeen over het optimaliseren van een functionaal binnen een zekere klasse van functies.

In de klassieke variatierekening beschouwt men o.a. het probleem met als functionaal:

$$J\{y(x)\} = \int_a^b F(y(x),y'(x),x)dx,$$

en als klasse van functies:

$$Y = \{y(x):y(x) \in D_1(a,b) \wedge y(a) = A \wedge y(b) = B\}$$

Zie hiervoor b.v.: Bibliografie [1].

In de "optimal-control theory" beschouwt men o.a. het probleem met als functionaal:

$$J = \int_{T_0}^{T_1} F(x^1(t),\ldots,x^n(t),u^1(t),\ldots,u^m(t),t)dt.$$

en als klasse van functies:

$$X = \{x^i(t):\dot{x}^i(t) = f^i(x^1(t),\ldots,x^n(t),u^1(t),\ldots,u^m(t),t) \wedge \text{r.v.}\}.$$

Een behandeling van dit probleem vindt men b.v. in een artikel van Prof.Dr. R. Timman (Bibliografie [3]).
De functies $x^i(t)$ zijn de toestandsvariabelen en de functies $u^k(t)$ zijn de stuurvariabelen.
Uit het stelsel differentiaalvergelijkingen $\dot{x}^i(t) = f^i$ en de randvoorwaarden (r.v.), kunnen als de stuurvariabelen bekend zijn, de toestandsvariabelen worden bepaald. Optimaliseren houdt hier in het, "zo goed mogelijk", bepalen van de stuurvariabelen, waarbij de randvoorwaarden ongewijzigd blijven.
Men optimaliseert hier dus binnen de hierboven gedefinieerde klasse van oplossingen van een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen.

Wordt de hier geschetste lijn doorgetrokken dan komt men op het optimaliseren van een functionaal binnen de klasse van oplossingen van een partiële differentiaalvergelijking.
In deze scriptie worden, in de hoofdstukken 3 en 4, noodzakelijke voorwaarden afgeleid waaraan een functie $u(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, die een oplossing is van een lineaire tweede orde elliptische partiële differentiaalvergelijking: $L\{u(\xi^1, \ldots, \xi^n)\}=d(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ al dan niet met nevenvoorwaarden op de rand van het beschouwde gebied in R_n, moet voldoen, opdat deze functie aan de functionaal:

$$J\{u(\xi^1, \ldots, \xi^n)\}= \int_G \!\cdots\! \int F(u, u_{\xi^1}, \ldots, u_{\xi^n}, \xi^1, \ldots, \xi^n)dG,$$

een relatief extreem toekent.
Optimaliseren houdt hier in: het zodanig bepalen van de randvoorwaarden, dat de door deze voorwaarden en de differentiaalvergelijking bepaalde oplossing, aan $J\{u(\xi)\}$ een relatief optimum toekent.
In hoofdstuk 5 worden de in hoofdstuk 3 gevonden voorwaarden uitgeschreven voor de Poisson vergelijking, dit in de meest voorkomende coördinatenstelsels.
Tenslotte vindt men constructieve toepassingen in de hoofdstukken 6 en 7.

2 Definities

In dit hoofdstuk worden enige symbolen geïntroduceerd die in dit rapport steeds in de hier gedefinieerde betekenis worden gebruikt.

G : Een open begrensd gebied in R_n met deelsgewijs continue randen.

Γ : De rand, of als G meervoudig samenhangend is de randen van G.

E_1 : De verzameling van alle punten van Γ waar de normale afgeleide niet is gedefinieerd. Aangenomen wordt dat E_1 bestaat uit eindig veel gesloten begrensde gebieden in Γ van dimensie kleiner dan n-1.

E_2 : Een willekeurige verzameling van eindig veel gesloten begrensde gebieden in Γ van dimensie kleiner dan n-1.

$\{x\},\{\xi\},T$: $\{x\}$ Is het cartesiaans coördinatenstelsel, $\{x\}=\{x^1, \ldots, x^n\}$. $\{\xi\}$ Is een orthogonaal kromlijnig coördinatenstelsel, $\{\xi\} = \{\xi^1, \ldots, \xi^n\}$. T verzorgt de transformatie van $\{x\}$ naar $\{\xi\}$, T: $x^i=x^i(\xi^1, \ldots, \xi^n)$.

L,M : L is een lineaire 2^e orde elliptische partiële differentiaal operator in het cartesiaanse coordinaten stelsel:

$$L = \left[a^{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + c(x) \right].$$

Met: $\begin{cases} a^{ik}(x) = a^{ki}(x),\ a^{ik}(x) \in D_2[G \cap \Gamma], \\ b^i(x) \in D_1[G \cap \Gamma], \\ c(x) \in C[G \cap \Gamma]. \end{cases}$

Aangenomen wordt dat het gegeneraliseerde Dirichlet probleem voor L en voor de geadjungeerde differentiaal operator M, van L juist één oplossing heeft.

L', M' : De voor het stelsel $\{\xi\}$ getransformeerde differentiaal operatoren L resp. M. Dit transformeren geschiedt door $a^{ik}(x)$ te vervangen door $a^{ik}(x(\xi))$, $b^i(x)$ door $b^i(x(\xi))$, $c(x)$ door $c(x(\xi))$ en door voor de differentialen de regels door het differentieren van samengestelde functies toe te passen.

D_1' : $u(\xi) \in D_1'$ betekent: $u_{\xi^i} \in D_1[C\{E_2\} \cap \Gamma]$ $(i=1,2,\dots,n)$, $u(\xi) \in D_1[C\{E_2\} \cap \Gamma]$, terwijl $u(\xi), u_{\xi^1}, \dots, u_{\xi^n}$ begrensd zijn voor $\{\xi\} \in \Gamma$.

U : $U = \{u(\xi) : u(\xi) \in D_1' \wedge L'\{u(\xi)\} = d(x(\xi))\}$
Hierbij geldt: $d(x) \in C[G \cap \Gamma]$.

$F(u(\xi), u_\xi, \xi)$: Een op $G \cup \Gamma$ gedefinieerde naar al zijn argumenten 2 maal continu differentieerbare functie.

$J\{u(\xi)\}$: $J\{u(\xi)\} = \int \dots \int_G F(u(\xi), u_\xi, \xi)\, dG$

$\hat{u}(\xi)$: Een functie $u(\xi) \in U$ die aan $J\{u(\xi)\}$ een relatief extreem toekent.

3 Algemene theorie

Aangenomen wordt dat U een functie $\hat{u}(\xi)$ bevat. Er wordt onderzocht aan welke eisen een dergelijke functie moet voldoen.
Varieer daartoe $\hat{u}(\xi)$, binnen U, met $\varepsilon\phi(\xi)$, ε is een willekeurig klein reëel getal, en noem de gevarieerde functie $\tilde{u}(\xi)$:

$$\tilde{u}(\xi) = \hat{u}(\xi) + \varepsilon\phi(\xi).$$

Uit $\tilde{u} \in U$ volgen: $L\{\phi(\xi)\} = 0, \ \{\xi\} \in G$ (1)

en $\phi(\xi) \in D_1'$. (2)

Uit (1) en (2) volgt dat $\phi(\xi)$, $\{\xi\} \in G \cup \Gamma$, begrensd is. $\varepsilon\phi(\xi)$ is dus een willekeurig kleine variatie.

Stel: $\Delta J\{\hat{u}(\xi); \varepsilon\phi(\xi)\} = J\{\hat{u}(\xi) + \varepsilon\phi(\xi)\} - J\{\hat{u}(\xi)\}$.

Opdat $\hat{u}(\xi)$ inderdaad een relatief minimum aan $J\{u(\xi)\}$ toekent moet gelden:

$$\Delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} \geq 0,$$

voor elke $\phi(\xi)$ die voldoet aan (1) en (2).
Hierbij wordt opgemerkt dat $\phi(\xi)$, afgezien van de beperkingen die D_1' oplegt, op Γ een willekeurige functie kan zijn.

$$\Delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} = \int_G \cdots \int \left[F(\hat{u}+\varepsilon\phi, \hat{u}_\xi+\varepsilon\phi_\xi, \xi) - F(\hat{u}, \hat{u}_\xi, \xi) \right] dG.$$

$$= \int_G \cdots \int \left[\varepsilon\{F_{\hat{u}} \cdot \phi + F_{\hat{u}_\xi j} \cdot \phi_\xi j + \varepsilon^2\{\ldots\} \right] dG.$$

Stel: $\delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} = \varepsilon \int_G \cdots \int \left[F_{\hat{u}} \cdot \phi + F_{\hat{u}_\xi j} \cdot \phi_\xi j \right] dG.$ (3)

hieruit volgt: $\Delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} = \delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} + O(\varepsilon^2)$.

Het teken van δJ wisselt met dat van ε, terwijl voor voldoende kleine ε het teken van ΔJ gelijk is aan dat van δJ. Om aan $\Delta J \geq 0$ te voldoen moet dus gelden:

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\delta(\xi)\} = 0 \qquad (4)$$

Via het divergentie theorema van Gauss en het tweede theorema van Green zal de integraal over G, (3), worden getransformeerd in een integraal over Γ.

Bij het overgaan van het coördinatenstelsel $\{\xi\}$ op $\{\xi'\}$ transformeert $F_{u_\xi j}$ als:

$$F_{u_{\xi'}j} = \frac{\partial}{\partial u_\xi j}\,\{F(u(\xi),u_\xi 1,\ldots,u_\xi n,\xi)\}\frac{\partial}{\partial u_{\xi'}j}\,\{u_\xi j\} = F_{u_\xi j}\,\frac{\partial}{\partial \xi^j}\{\xi'^j\}.$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(u(\xi),u_\xi 1,\ldots,u_\xi n,\xi)}{\partial u_{\xi'}} \\ \\ \dfrac{\partial F(u(\xi),u_\xi 1,\ldots,u_\xi n,\xi)}{\partial u_\xi n} \end{bmatrix}$$

is dus een contravariante vector.

$$\nabla.\underline{F} = F^j{}_{,j} = \frac{\partial F^j}{\partial \xi^j} + \left\{{j \atop kj}\right\} F^k.$$ Hieruit volgt:

$$\nabla.\{\phi\underline{F}\} - \phi\{\nabla.\underline{F}\} = \phi_\xi j . F^j$$

Substitutie hiervan in $\delta J\{u(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\}$ levert:

$$\delta J\{u(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} = \varepsilon \int_G \!\!\cdots\!\! \int \left[\phi(F_u - \nabla.\underline{F}) + \nabla.(\phi F)\right] dG. \qquad (5)$$

Uit het divergentie theorema van Gauss volgt:

$$\int_G \!\!\cdots\!\! \int \nabla.(\phi\underline{F})\,dG = \oint\!\!\oint_\Gamma \phi(\underline{n}.\underline{F})\,d\Gamma. \qquad (6)$$

Hierin is $\underline{n}$ de naar buiten gerichte eenheidsnormaalvector.
Op $E_1 \cup E_2$ is $\underline{n}.\underline{F}$ niet gedefinieerd. Opmerkingen hierover worden uitgesteld tot δJ helemaal in de vorm van een oppervlakteintegraal is gebracht.

In cartesiaanse coördinaten bestaat het gegeneraliseerde tweede theorema van Green. Een variant hiervan is:

$$\int_G \cdots \int \beta(x)\, M\{\alpha(x)\} dG = \oint\!\!\oint_\Gamma \beta(x) \frac{\partial\alpha(x)}{\partial \underline{\nu}}\, d\Gamma\,. \tag{7}$$

Hierbij geldt: $\alpha(x)$ en $\beta(x) \in D_2[G]$,

$$\frac{\partial\beta}{\partial\underline{\nu}} = a^{ik}(x) n_k(x) \frac{\partial\beta(x)}{\partial x^i}\,, \quad \{x\} \in \Gamma,$$

$a^{ik}(x)$ zijn de coëff. van $\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$ in L,

$L\{\beta(x)\} = 0$ voor $\{x\} \in G$,

$\alpha(x) = 0$ voor $\{x\} \in \Gamma$.

De geadjungeerde functie $\psi(\xi)$ van een functie $u(\xi) \in U$ wordt éénduidig gedefinieerd door:

$$\begin{cases} M'\{\psi(\xi)\} = F_u - \nabla.\underline{F}\,, \text{ voor } \{\xi\} \in G, \\ \psi(\xi) = 0, \text{ voor } \{\xi\} \in \Gamma. \end{cases} \tag{8}$$

$$\int_G \cdots \int \phi(\xi)\{F_u - \nabla.\underline{F}\} dG = \int_G \cdots \int \phi(\xi) M'\{\psi(\xi)\} dG$$

$$\int_G \cdots \int \phi(\xi(x)).M\{\psi(\xi(x))\}.dG.$$

Pas op de laatste integraal nu (7) toe, $\phi(\xi(x))$ en $\psi(\xi(x))$ voldoen aan de eisen voor $\beta(x)$ resp. $\alpha(x)$.

$$\int_G \!\!\cdots\!\! \int \phi(\xi)\{F_u - \nabla.\underline{F}\}dG = \oint\!\!\!\int_\Gamma \phi(\xi(x))\,\frac{\partial\psi(\xi(x))}{\partial\underline{\nu}}\,dG.$$

$$\frac{\partial\psi(\xi(x))}{\partial\underline{\nu}} = a^{ik}(x)n_k(x)\,\frac{\partial\psi(\xi(x))}{\partial x^i}\ ,\ \text{voor}\ \{x\} \in \Gamma.$$

De functies $a^{ik}(x)$ vindt men na transformatie van L' naar L als de coëfficienten van $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$.

$$a^{ik}(x(\xi)) = A^{\alpha\beta}(\xi)\,\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\alpha}\,.\,\frac{\partial x^k}{\partial\xi^\beta}\ .$$

Hierin zijn $A^{\alpha\beta}(\xi)$ de coëfficienten van $\frac{\partial^2}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta}$ in L'.

$$\text{Stel nu:}\ \begin{cases} n(x) = \dfrac{\partial\psi(\xi(x))}{\partial\underline{\nu}} & \text{en} \\ N(\xi) = n(x(\xi)) \end{cases}$$

Substitutie hiervan in de laatste integraal levert:

$$\int_G \!\!\cdots\!\! \int \phi(\xi)\{F_u - \nabla.\underline{F}\}dG = \oint\!\!\!\int_\Gamma \phi(\xi).N(\xi)d\Gamma \qquad (9)$$

Substitutie van (6) en (9) in (5) levert de gezochte oppervlakte-integraal:

$$\delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} = \varepsilon \oint\!\!\!\int_\Gamma \phi(\xi)\{\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)\}d\Gamma \qquad (10)$$

Het voordeel van deze uitdrukking is dat $\phi(\xi)$ als expliciete factor in de integrand voorkomt, waarmee de vrijheid van $\phi(\xi)$ voor $\{\xi\} \in \Gamma$ op een eenvoudige wijze kan worden benut.

Stel: $\tilde{\Gamma} = C\{E_1 \cup E_2\} \cap \Gamma$.

De componenten van $\underline{n}$ zijn continu op $C\{E_1\} \cap \Gamma$ en begrensd voor $\{\xi\} \in \Gamma$.

De componenten van $\underline{F}$ zijn wegens $u(\xi) \in D_1'$ continu voor $\{\xi\} \in C\{E_2\} \cap \Gamma$ en begrensd voor $\{\xi\} \in \Gamma$.
De functie $N\{\xi\}$ is continu voor $\{\xi\} \in \tilde{\Gamma}$ en begrensd voor $\{\xi\} \in \Gamma$.
De functie $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)$ is dus continu op $\tilde{\Gamma}$ en begrensd op Γ.
In (10) kan Γ dus zonder bezwaar worden vervangen door $\tilde{\Gamma}$.

$$\delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} = \varepsilon \oiint_{\tilde{\Gamma}} \phi(\xi)\{\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)\}d\Gamma \tag{11}$$

$\tilde{\Gamma}$ is een open gebied. Bij elk punt $\{\xi_0\} \in \tilde{\Gamma}$ bestaat dus een eindige omgeving $A\{\xi_0\}$ waarvoor geldt $\{\xi_0\} \in A\{\xi_0\} \subset \tilde{\Gamma}$.
Zij: $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi) \neq 0$, b.v. > 0, voor een punt $\{\xi_1\} \in \tilde{\Gamma}$.
Er bestaat dan een open omgeving $B(\xi_1)$ waarvoor geldt:
$\{\xi_1\} \in B\{\xi_1\} \subset A\{\xi_1\}'$ en $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi) > 0$. De enige eis voor $\phi\{\xi\}$, voor $\{\xi\} \in \Gamma$, is $\phi(\xi) \in D_1'$.
Dit is het geval bij de volgende keuze:

$$\begin{cases} \phi\{\xi\} > 0, \text{ voor } \{\xi\} \in B\{\xi_1\} \\ \phi\{\xi\} = 0, \text{ voor } \{\xi\} \in C\{B\{\xi_1\}\} \cap \Gamma \\ \phi\{\xi\} \in D_1' \text{ voor } \{\xi\} \in \Gamma \end{cases}$$

Hierbij geldt: $\frac{1}{\varepsilon}\,\delta J\{\hat{u}(\xi),\varepsilon\,\phi(\xi)\} = \oiint_{\tilde{\Gamma}} \phi(\xi)\{\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)\}d\Gamma$

$$= \oiint_{B\{\xi_1\}} \phi(\xi)\{\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)\}d\Gamma > 0.$$

Dit is in tegenspraak met (4), waarmee bewezen is:

$$\underline{n}.\underline{F} + N(\xi) = 0, \text{ voor } \{\xi\} \in \tilde{\Gamma}. \tag{12}$$

Een functie $u \in U$ die aan (4) voldoet wordt een stationaire oplossing genoemd.
Door elke functie $u \in U$ is op eenduidige wijze een functie $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)$ bepaald.
Als $u \in U$ een stationaire oplossing is, dan voldoet de bijbehorende functie $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)$ aan (12), terwijl als omgekeerd van een functie $u \in U$ de bijbehorende functie $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)$ aan (12) voldoet, die functie $u \in U$ een stationaire oplossing is.

Dit laatste blijkt uit het betoog tussen (4) en (10) in tegengestelde richting.

Stelling 1. Opdat $u(\xi) \in U$ een stationaire oplossing is t.a.v. $J\{u(\xi)\}$ is nodig en voldoende dat er bij die functie $u(\xi) \in U$ een geadjungeerde functie $\psi(\xi)$ bestaat die voldoet aan het over bepaalde stelsel:

$$\begin{cases} M'\{\psi(\xi)\} = F_u - \nabla.\underline{F}, \text{ voor } \{\xi\} \in G, \\ \psi(\xi) = 0, \text{ voor } \{\xi\} \in \Gamma, \\ \underline{n}.\underline{F} + N(\xi) = 0, \text{ voor } \{\xi\} \in \tilde{\Gamma} \end{cases} \qquad (13)$$

Hierin is: $\nabla.\underline{F} = F^j{}_{,j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^j}\{\sqrt{g}\, F^j\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^j}{\partial \xi^j} + \sum_{j=1}^{n} F^j \frac{\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\sqrt{g})}{\sqrt{g}}$,

met $\sqrt{g} = h_1, h_2, \ldots, h_n; h_j = \{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j})^2\}^{\frac{1}{2}}$, $(j=1,\ldots,n)$.

De schaalfactoren h_j vindt men vaak eenvoudig door te bedenken dat voor het lijnelement ds geldt:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} h_j^2 (d\xi^j)^2.$$

Er volgen nu nog enige opmerkingen.

1e) $\tilde{\Gamma}$ is pas bekend als behalve E_1, die vast ligt als Γ bekend is, ook E_2 vast ligt. Dit is voor constructieve methodes een nadeel. Het is dan beter E_2, dus de plaatsen op Γ waar $u(\xi), u_{\xi^1}, \ldots, u_{\xi^n}$ eindige sprongen mogen vertonen van te voren vast te leggen.

2e) Men is bij de hier behandelde methode niet gebonden aan het Dirichlet probleem. Ook voor andere typen randwaarde problemen volgen de randfuncties, die nodig zijn om eenduidig een oplossing te bepalen uit $\hat{u}(\xi)$. $\hat{u}(\xi)$ wordt dan gegenereerd door die randfuncties op te leggen.

3e) Het stelsel (13) kan samen met $L\{u(x)\} = d(x)$ dienen als basis voor een numeriek proces ter bepaling van $\hat{u}(x)$. In het differentieschema vindt men in stelsel (13) voor elke ontbrekende waarde van de randfunctie $u(x)$, $\{x\} \in \Gamma$, juist één extra vergelijking voor de normale afgeleide van $\psi(x)$. Zie ook stelsel (19).

4 Algemene theorie met nevenvoorwaarden op de rand

Het kan voorkomen dat, b.v. uit technische overwegingen, niet kan worden toegestaan dat de variabele $u(\xi) \in U$, op de rand Γ bepaalde grenzen overschrijdt, of dat $u(\xi) \in U$ op delen van Γ vast voorgeschreven waarden moet aannemen.
Ook voor deze problemen kunnen eisen voor een extreem, hiervoor wordt weer een relatief minimum genomen, worden afgeleid.

Op Γ zijn de functies $a(\xi)$ en $b(\xi)$ gedefinieerd, die de onder- resp., boven begrenzing van de randfunctie $u(\xi)$, $\{\xi\} \in \Gamma$, bepalen.
In de punten $\{\xi\} \in \Gamma$, waar $a(\xi) = b(\xi)$ moet de randfunctie kennelijk vast voorgeschreven waarden $a(\xi)$ aannemen. Waar $a(\xi) < b(\xi)$ heeft de randfunctie nog zekere vrijheid.
De functies die, in eerste instantie, in aanmerking komen om aan de functionaal $J\{u(\xi)\}$ een extreem toe te kennen liggen dus in de klasse W,

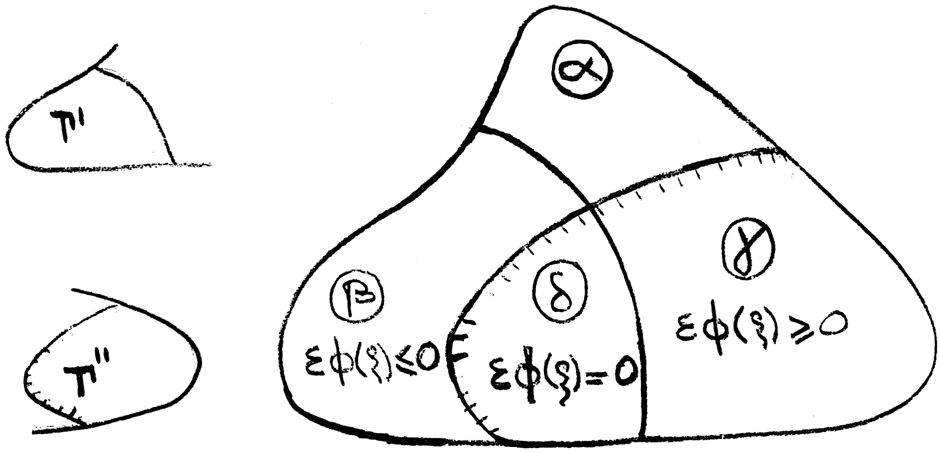
$$W = \{u(\xi): u(\xi) \in U \wedge a(\xi) \leq u(\xi) \leq b(\xi),\ \{\xi\} \in \Gamma\}.$$

Als een functie $\hat{u}(\xi)$ bekend is dan kunnen op Γ twee gebieden worden onderscheiden:

Γ' : de verz. van punten $\{\xi\} \in \Gamma$, waarvoor geldt $\hat{u}(\xi) = b(\xi), \{\xi\} \in \Gamma$.
Γ'': " " " " " " " $\hat{u}(\xi) = a(\xi), \{\xi\} \in \Gamma$.

De gebieden Γ' en Γ'' kunnen meervoudig zijn. Γ' en Γ'' zijn gesloten.
M.b.v. Γ', Γ'' en de eisen die daar voor $\varepsilon\phi(\xi)$ gelden kunnen nu 4 eventueel meervoudige gebieden worden onderscheiden, elk met verschillende eisen t.a.v. het teken van $\varepsilon\phi(\xi)$.
De 4 gebieden zijn:

$$\alpha = \{C(\Gamma' \cup \Gamma'')\} \cap \tilde{\Gamma}, \text{ open gebied,}$$
$$\beta = \{C\Gamma''\} \cap \{\Gamma' \cap \tilde{\Gamma}\},$$
$$\gamma = \{C\Gamma'\} \cap \{\Gamma'' \cap \tilde{\Gamma}\},$$
$$\delta = \Gamma' \cap \Gamma'' \quad\quad\text{, gesloten gebied.}$$



Er komen nu slechts variaties $\varepsilon\phi(\xi)$ van $\hat{u}(\xi)$ in aanmerking met:

$$\begin{cases} L\{\varepsilon\phi(\xi)\} = 0, \\ \phi(\xi) \in D_1', \\ \text{voor } \{\xi\} \in \alpha \text{ gelden geen eisen t.a.v. het teken van } \varepsilon\phi(\xi). \\ \text{voor } \{\xi\} \in \beta \text{ geldt: } \varepsilon\phi(\xi) \leq 0, \\ \text{voor } \{\xi\} \in \gamma \text{ geldt: } \varepsilon\phi(\xi) \geq 0, \\ \text{voor } \{\xi\} \in \delta \text{ geldt: } \varepsilon\phi(\xi) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Voor een relatief minimum moet weer gelden:

$$\Delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} \geq 0.$$

Aangezien ΔJ en δJ voor voldoende kleine ε hetzelfde teken hebben moet voor kleine ε en voor elke functie $\phi(\xi)$ die aan (14) voldoet gelden:

$$\delta J\{\hat{u}(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} \geq 0 \tag{15}$$

Met $\underline{n}, \underline{F}$ en $N(\xi)$ gedefinieerd als in hoofdstuk 3 komt men op dezelfde manier als in dit hoofdstuk op:

$$\delta J\{u(\xi);\varepsilon\phi(\xi)\} = \varepsilon \oiint_{\tilde{\Gamma}} \phi(\xi)\{\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)\}d\Gamma. \tag{16}$$

Uit elementaire beschouwingen, vrijwel analoog aan die tussen (11) en (12), volgt dat om aan (15) te voldoen, voor elke toelaatbare variatie $\varepsilon\phi(\xi)$, dus voor elke $\varepsilon\phi(\xi)$ die voldoet aan (14) moet worden geeist:

$$\underline{n}.\underline{F} + N(\xi) = 0 \ , \text{ voor } \{\xi\} \in \alpha,$$
$$\underline{n}.\underline{F} + N(\xi) \leq 0 \ , \text{ voor } \{\xi\} \in \beta,$$
$$\underline{n}.\underline{F} + N(\xi) \geq 0 \ , \text{ voor } \{\xi\} \in \gamma.$$

Voor $\{\xi\} \in \delta$ geldt: $\varepsilon\phi(\xi) = 0$. In dit geval is dus zonder nadere eisen t.a.v. $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)$ voldaan aan (15).
Uit de continuiteit van $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)$ voor $\{\xi\} \in \tilde{\Gamma}$ volgt dat ook op de grens van α met β,γ of δ, waar deze niet samenvalt met $E_1 \cup E_2$ geldt $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)=0$. Deze eis geldt dus voor het gesloten gebied $\bar{\alpha} \cap \tilde{\Gamma}$.

Stelling 2. Nodig opdat $u(\xi) \in W$ aan de functionaal $J\{u(\xi)\}$ een relatief minimum toekent is dat er bij die functie $\hat{u}(\xi)$ een geadjungeerde variabele $\psi(\xi)$ bestaat die voldoet aan het over bepaalde stelsel:

$$\begin{cases} M'\{\psi(\xi)\} = F_{\hat{u}} - \nabla.\underline{F}, \text{ voor } \{\xi\} \in G, \\ \psi(\xi) = 0, \text{ voor } \{\xi\} \in \Gamma, \\ \underline{n}.\underline{F} + N(\xi) \begin{cases} = 0 & , \text{ voor } \{\xi\} \in \bar{\alpha} \cap \tilde{\Gamma}, \\ \leq 0 & , \text{ voor } \{\xi\} \in \beta, \\ \geq 0 & , \text{ voor } \{\xi\} \in \gamma. \end{cases} \end{cases} \qquad (17)$$

Het zal duidelijk zijn dat voor een relatief maximum de symbolen β en γ van plaats moeten worden gewisseld.

Er volgen nog enige opmerkingen.
1e) Ook als E_2 van te voren bekend is liggen de gebieden α,β en γ pas vast als $\hat{u}(\xi)$ bekend is.
Een constructieve methode m.b.v. (17) ter bepaling van een functie $\hat{u}(\xi)$ lijkt dan zeer gecompliceerd.
2e) In het bijzondere geval waarbij uitsluitend gelijkheidscondities op Γ gelden zijn β en γ leeg en liggen α en δ wel van te voren vast.
3e) Als voor het hele gebied Γ gelijkheids condities gelden is δ identiek met Γ. De klasse W bevat dan juist één functie die dus het extreem aan $J\{u(\xi)\}$ toekent. Er moet dan een geadjungeerde functie $\psi(\xi)$ volgens (17) bestaan. Dit uit zich in (17) door het verdwijnen van eisen t.a.v. $\underline{n}.\underline{F} + N(\xi)$.

De vergelijking van Poisson

In dit hoofdstuk wordt voor de operator L de Laplace operator genomen. Hiervoor wordt zowel in het stelsel $\{x\}$ als in het stelsel $\{\xi\}$ de notatie Δ gebruikt. De Laplace operator is zelf geadjungeerd. In dit hoofdstuk geldt dus:

$$\Delta = L = L' = M = M'$$

In plaats van (7) kan nu bij de afleiding van stelling 1 voor $L = \Delta$, een variant van het gewone tweede theorema van Green in orthogonaal kromlijnige coördinaten $\{\xi\}$ worden gebruikt. Met voor $\alpha(\xi)$ en $\beta(\xi)$ dezelfde eisen als bij (7) luidt dit:

$$\int_G \cdots \int \beta(\xi).\Delta\{\alpha\ (\xi)\} = \oint\!\!\oint_\Gamma \beta(\xi).\ \frac{\partial(\alpha(\xi))}{\partial \underline{n}}\ d\Gamma.$$

Het stelsel (13) in stelling 1 krijgt hiermee de eenvoudiger vorm:

$$\begin{cases} \Delta\{\psi(\xi)\} = F_u - \nabla.\underline{F} & ,\ \text{voor } \{\xi\} \in G, \\ \psi(\xi) = 0 & ,\ \text{voor } \{\xi\} \in \Gamma, \\ \underline{n}.\underline{F} + \dfrac{\partial\psi(\xi)}{\partial \underline{n}} = 0 & ,\ \text{voor } \{\xi\} \in \tilde{\Gamma}. \end{cases} \qquad (18)$$

Stelling 3. Opdat voor $L = \Delta$, bij $u(\xi) \in U$ een geadjungeerde functie $\psi(\xi)$ bestaat is nodig dat geldt:

$$\int_G \cdots \int F_u dG = 0.$$

Bewijs: Met behulp van (18) vindt men:

$$\int_G \cdots \int \Delta\{\psi(\xi)\}dG = \int_G \cdots \int (F_u - \nabla.\underline{F})dG = \int_G \cdots \int F_u dG - \oint\!\!\oint_\Gamma \underline{n}.\underline{F}d\Gamma$$

en $$\int_G \cdots \int \Delta\{\psi(\xi)\}dG = \oint\!\!\oint_\Gamma \frac{\partial\{\psi(\xi)\}}{\partial\ \underline{n}}\ d\Gamma = - \oint\!\!\oint_\Gamma \underline{n}.\underline{F}.d\Gamma$$

Hieruit volgt: $\int_G \cdots \int F_u dG = 0.$

Dat $N(\xi)$ voor $L = \Delta$ gelijk is aan $\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\underline{n}}$ volgt ook eenvoudig uit de definitie van $N(\xi)$.

Voor $L = \Delta$ geldt: $a^{ik}(x) = \delta^{ik}$ zodat geldt:

$$n(x) = a^{ik}(x)n_k(x)\,\frac{\partial(\psi(x))}{\partial x^i} = \frac{\partial(\psi(x))}{\partial\underline{n}} \quad \text{en } N(\xi) = \frac{\partial(\psi(x(\xi)))}{\partial\underline{n}} .$$

Het stelsel (18) wordt nu nader bepaald voor verschillende coördinaten stelsels.

a) Cartesiaanse coördinaten in R_n

$$\begin{cases} \Delta\{\psi(x)\} = F_u - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}\{F_{u_x j}\}, & \text{voor } \{x\}\in G, \\ \psi(x) = 0 & \text{, voor } \{x\}\in \Gamma, \\ n_j . F_{u_x j} + \frac{\partial\{\psi(x)\}}{\partial\underline{n}} = 0 & \text{, voor } \{x\}\in \hat{\Gamma}. \end{cases} \qquad (19)$$

b) Cilindercoördinaten in R_3

$\xi_1 = r;\ \xi_2 = \theta;\ \xi_3 = z.$

$$T:\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta, \\ x_3 = z. \end{cases}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2.$$

$$h_1 = h_3 = 1;\ h_2 = r.$$

$$\nabla.\underline{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\{h_1h_2h_3F_{u_\xi j}\}}{\partial\xi^j}$$

$$= \frac{\partial F_{u_r}}{\partial r} + \frac{1}{r}F_{u_r} + \frac{\partial F_{u_\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial F_{u_z}}{\partial z} .$$

Substitutie hiervan in (18) levert:

$$\begin{cases} \Delta\{\psi\ (r,\theta,z)\} = F_u \quad \dfrac{\partial F_{u_r}}{\partial r} - \dfrac{\partial F_{u_\theta}}{\partial \theta} - \dfrac{\partial F_{u_z}}{\partial z} - \dfrac{1}{r} F_{u_r}, & \text{voor } \{\xi\} \in G, \\ \psi(r,\theta,z) = 0\ , & \text{voor } \{\xi\} \in \Gamma, \\ \underline{n}.\begin{Bmatrix} F_{u_r} \\ F_{u_\theta} \\ F_{u_z} \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial\phi(r,\theta,z)}{\partial \underline{n}} = 0 & \text{voor } \{\xi\} \in \tilde{\Gamma}. \end{cases} \qquad (20)$$

c) Bolcoördinaten in R_3.

$\xi_1 = r;\ \xi_2 = \theta;\ \xi_3 = \phi$

$$T: \begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\phi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\phi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \\ \\ h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\theta \end{array}$$

$$\nabla.\underline{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial(h_1 h_2 h_3 F_{u_{\xi}i})}{\partial \xi j}$$

$$= \frac{\partial F_{u_r}}{\partial r} + \frac{1}{r} F_{u_r} + \frac{\partial F_{u_\theta}}{\partial \theta} + \text{cotg}\theta.\ F_{u_\theta} + \frac{\partial F_{u_\phi}}{\partial \phi}$$

Substitutie hiervan in (18) levert

$$\begin{cases} \Delta\{\psi(r,\theta,\phi) = F_u - \dfrac{\partial F_{u_r}}{\partial r} - \dfrac{\partial F_{u_\theta}}{\partial \theta} - \dfrac{\partial F_{u_\phi}}{\partial \phi} - \dfrac{1}{r} F_{u_r} - \text{cotg}\theta\ .\ F_{u_\theta}, \text{ voor } \{\xi\} \in G \\ \psi(r,\theta,\phi) = 0 \qquad , \text{ voor } \{\xi\} \quad \Gamma, \\ \underline{n}.\begin{bmatrix} F_{u_r} \\ F_{u_\theta} \\ F_{u_\phi} \end{bmatrix} + \dfrac{\partial\psi(r,\theta,\phi)}{\partial \underline{n}} = o, \text{ voor } \{\xi\} \in \tilde{\Gamma}. \end{cases} \qquad (21)$$

6 Een constructieve methode

In dit hoofdstuk wordt m.b.v. Fourier ontwikkeling een constructieve methode ontwikkeld voor een groep van problemen, waarbij op grond van de structuur van $F(u(\xi), u_{\xi_1}, \ldots, u_{\xi_m}, \xi)$ kan worden aangenomen dat er juist een functie $\hat{u}(\xi) \in U$ bestaat, terwijl er behalve $\hat{u}(\xi)$ geen stationaire oplossingen zijn. De methode is verder beperkt tot problemen waarbij geldt:

G is een cirkelvormig gebied met straal R.

$$L = \Delta \text{ in cirkelcoördinaten } r \text{ en } \theta = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2}\right].$$

$$U = \{u(r,\theta); u(r,\theta) \in D_1' \wedge \Delta\{u(r,\theta)\} = f(r,\theta) \wedge f(r,\theta) \in C[G \cup \Gamma]\}.$$

$$\begin{aligned} F(u(r,\theta), u_r, u_\theta, r, \theta) = {} & a(r,\theta)u^2 + b(r,\theta)u_r^2 + c(r,\theta)u_\theta^2 + d(r,\theta)uu_r \\ & + e(r,\theta)uu_\theta + g(r,\theta)u_r u_\theta + h(r,\theta)u \\ & + j(r,\theta)u_r + k(r,\theta)u_\theta + l(r,\theta). \qquad (22) \end{aligned}$$

Hierbij geldt: $a(r,\theta) \in C[G \cup \Gamma]$, ..., $l(r,\theta) \in C[G \cup \Gamma]$.

Neem aan dat er een particuliere oplossing van $\Delta\{u(r,\theta)\} = f(r,\theta)$, $u_0(r,\theta)$, gevonden kan worden, die in een tweemaal term voor term differentieerbare Fourier reeks ontwikkeld kan worden.

$$u_0(r,\theta) = \frac{c_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n(r)\cos(n\theta) + d_n(r)\sin(n\theta)\}.$$

Voor een op G gedefinieerde willekeurige harmonische functie bestaat de formele Fourier ontwikkeling:

$$w(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

$$\hat{u}(r,\theta) = u_0(r,\theta) + w(r,\theta).$$

De Fourier ontwikkeling van de gezochte functie $\hat{u}(r,\theta)$ is dus:

$$\hat{u}(r,\theta) = \frac{a_0+c_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(\tfrac{r}{R})^n + c_n(r)\}\cos(n\theta)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n(\tfrac{r}{R})^n + d_n(r)\}\sin(n\theta). \qquad (23)$$

Hierin zijn alleen de constanten $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ onbekend. Het stelsel (13) of direct (20) uit stelling 1 is hier:

$$\begin{cases} \Delta\{\psi(r,\theta)\} = F_{\hat{u}} - \frac{\partial}{\partial r} F_{\hat{u}_r} - \frac{\partial}{\partial\theta} F_{\hat{u}_\theta} - \frac{1}{r} F_{\hat{u}_r}, \\ \psi(R,\theta) = 0, \\ \frac{\partial\psi(R,\theta)}{\partial r} = - F_{\hat{u}_r}\Big|_R . \end{cases} \qquad (24)$$

Substitutie van (22) en daarna van (23) levert:

$$\begin{cases} \Delta\{\psi(r,\theta)\} = \alpha_0(r)+\beta_0(r)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n(r) + \beta_n(r)a_n + \gamma_n(r)b_n)\cos(n\theta) \\ \qquad + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n(r) + \varepsilon_n(r)a_n + \lambda_n(r)b_n)\sin(n\theta), \\ \psi(R,\theta) = 0, \\ \frac{\partial\psi(R,\theta)}{\partial r} = A_0 + B_0a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_na_n + C_nb_n)\cos(n\theta) \end{cases}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (D_n + E_na_n + G_nb_n)\sin(n\theta). \quad (25)$$

De functies $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$, ..., $\lambda_n(t)$ en de constanten $A_0, B_0, \ldots, G_n$ kan men bepalen door de substituties uit te voeren. In dit hoofdstuk is alleen de structuur van (25) van belang.

Neem nu aan dat $\psi(r,\theta)$ in een tweemaal term voor term differentieerbare Fourier reeks ontwikkeld kan worden. Formeel en legaal kan dan worden genoteerd:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\psi(r,\theta) &= x_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \{x_n(r)\cos(n\theta) + y_n(r)\sin(n\theta)\}, \\
\frac{\partial\psi(R,\theta)}{\partial r} &= x_0'(R) + \sum_{n=1}^{\infty} \{x_n'(R)\cos(n\theta) + y_n'(R)\sin(n\theta), \\
\Delta\{\psi(r,\theta)\} &= x_0''(r) + \frac{1}{r}x_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n\{x_n(r)\}\cos(n\theta) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} L_n\{y_n(r)\}\sin(n\theta). \qquad (26)
\end{aligned}
\right.
$$

Hierin is L_n de differentiaal operator: $\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right]$.

Bij het hier gestelde probleem bestaat er juist één functie $\psi(r,\theta)$. Vanwege de eenduidigheid van de Fourier ontwikkeling mogen de in (25) en (26) overeenkomstige Fourier ontwikkelingen term voor term worden gelijk gesteld. Dit levert (27),(28) en (29).

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_0(R) &= 0, \\
x_n(R) &= 0, \quad n=1,2, \ldots , \\
y_n(R) &= 0, \quad n=1,2, \ldots .
\end{aligned}
\right. \qquad (27)
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_0'(R) &= A_0 + B_0 a_0, \\
x_n'(R) &= A_n + B_n a_n + C_n b_n, \quad n=1,2, \ldots , \\
y_n'(R) &= D_n + E_n a_n + G_n b_n, \quad n=1,2, \ldots .
\end{aligned}
\right. \qquad (28)
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_0''(r) + x_0'(r).\frac{1}{r} &= \alpha_0(r) + \beta_0(r).a_0, \\
L_n\{x_n(r)\} &= \alpha_n(r) + \beta_n(r)a_n + \gamma_n(r)b_n, \quad \text{voor } n=1,2, \ldots , \\
L_n\{y_n(r)\} &= \delta_n(r) + \varepsilon_n(r)a_n + \lambda_n(r)b_n, \quad \text{voor } n=1,2, \ldots .
\end{aligned}
\right. \qquad (29)
$$

Stel: $P\{\alpha_n(r)\}$ = een particuliere oplossing van $L_n\{x_n(r)\} = \alpha_n(r)$ enz.

De oplossingen van (29) kan men dan formeel noteren als:

$$\begin{cases} x_0(r) = K_0 + N_0 \ln(r) + P\{\alpha_0(r)\} + a_0 . P\{\beta_0(r)\}, \\ x_n(r) = K_n r^n + N_n . r^{-n} + P\{\alpha_n(r)\} + a_n . P\{\beta_n(r)\} + b_n . P\{\gamma_n(r)\}, \\ y_n(r) = H_n r^n + M_n r^{-n} + P\{\delta_n(r)\} + a_n . P\{\varepsilon_n(r)\} + b_n . P\{\lambda_n(r)\}. \end{cases} \tag{30}$$

$\Delta\{\psi(r,\theta)\}$ heeft geen singulariteit in de oorsprong. Dit ziet men b.v. aan (22). Hieruit volgt:

$$N_0 = 0,\ N_n = 0,\ M_n = 0. \ (n=1,2,\ldots.)$$

(27),(28) en (30) leveren nu een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in K_0 en a_0 en voor elke n een stelsel van 4 lineaire vergelijkingen in K_n, H_n, a_n en b_n.
Uitsluitend op grond van deze stelsels lineaire vergelijkingen zou men nu drie gevallen kunnen onderscheiden:

1e) Een of meer stelsels zijn strijdig.
2e) Alle stelsels leveren eenduidige oplossingen voor k_0, a_0, K_n, H_n, a_n en b_n $(n=1,2,\ldots)$.
3e) Een of meer stelsels zijn afhankelijk.

Bij 1e) levert de methode geen oplossing, of men heeft ten onrechte aangenomen dat er een functie $\hat{u}(r,\theta)$ bestaat.
Bij 3e) levert de methode oneindig veel "oplossingen". Men heeft dan ten onrechte aangenomen dat er juist één functie $\hat{u}(r,\theta)$ bestaat. Als 3e) optreedt houdt dit overigens niet in dat er oneindig veel stationaire oplossingen bestaan.

Zouden er b.v. twee bestaan dan is het gelijk stellen van de overeenkomstige grootheden van (25) en (26) niet legaal omdat er dan twee functies $\psi(r,\theta)$ bestaan. De afleiding is dan verder niet geldig.
Bij 2e) levert de methode juist één functie $\hat{u}(r,\theta)$. Deze functie vindt men door de gevonden waarden van $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ in (23) te substitueren.
Als niet zeker is dat er juist één functie $\hat{u}(r,\theta)$ bestaat dan staat dit na het bereiken van 2e) i.v.m. de beperkingen t.a.v. de Fourier ontwikkelingen van $\hat{u}(r,\theta)$ en $\psi(r,\theta)$ nog niet onomstotelijk vast.
Een toepassing van de methode vindt men in 7.4.

7. Toepassingen

7.1 Stel: $L = \Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x^{n^2}}\right]$,

$F(u(x), u_x, x) = au(x', \ldots, x^n) + b(x', \ldots, x^n)$,

hierin is a constant, $a \neq 0$.

De structuur van $F(u(x), u_x, x)$ maakt in dit geval het bestaan van een functie $\hat{u}(x)$ onmogelijk. Er kan dus geen geadjungeerde functie $\psi(x)$ bestaan. Dat dit waar is toont men b.v. ook aan met behulp van stelling 3:

$$\int_G \!\!\cdots\!\! \int F_u dG = \int_G \!\!\cdots\!\! \int a dG \neq 0.$$

7.2 Stel: $L = \Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x^{n^2}}\right]$,

$F(u(x), u_x, x) = au^2(x) + b(x).u(x) + c(x)$

hierin is a constant, $a \neq 0$,

$E_1 \cup E2$ is leeg.

Voor de geadjungeerde functie $\psi(x)$ geldt:

$$\begin{cases} \Delta\{\psi(x)\} = F_u - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial xj} \{F_{u_x j}\} = 2au(x) + b(x), \ \{x\} \in G, \\ \psi(x) = 0, \quad \text{voor } \{x\} \in \Gamma, \\ \frac{\partial\psi(x)}{\partial \underline{n}} = - n_j . F_{u_x j} = 0, \quad \text{voor } \{x\} \in \Gamma \end{cases} \tag{31}$$

Voor $u(x) \in U$ geldt: $\quad \Delta\{u(x)\} = d(x) \qquad (32)$

Uit (31) en (32) volgt: $\begin{cases} \Delta\Delta\{\psi(x)\} = 2ad(x) + \Delta\{b(x)\} , \ \{x\} \in G, \\ \psi(x) = 0, \quad \{x\} \in T, \\ \frac{\partial\{\psi(x)\}}{\partial \underline{n}} = 0 , \quad \{x\} \in T. \end{cases}$

Dit is de niet homogene biharmonische vergelijking met de vereiste randvoorwaarden. Hierdoor wordt juist één functie $\psi(x)$ bepaald. Er bestaat dus precies één stationaire oplossing. Deze vindt men door uit het bovenstaande stelsel $\Delta\{\psi(x)\}$ te berekenen. Substitutie hiervan in:

$$\Delta\{\psi(x)\} = 2au(x) + b(x),$$

uit (31) levert de gezochte stationaire oplossing. De structuur van $F(u(x), u_x, x)$ sluit het niet bestaan van een relatief minimum uit. De gevonden stationaire oplossing is kennelijk de functie $\hat{u}(x)$.

7.3 In deze toepassing wordt een radiaal symmetrisch probleem voor de vergelijking van Poisson op een cirkelvormig gebied met straal R behandeld. Een directe afleiding is hier eenvoudiger dan het aanpassen van de methode uit hoofdstuk 6.

$$U = \left\{ u(r);\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du(r)}{dr}\right) = f(r) \wedge r \in [0,R] \cap f(r) \in C\ [0,r] \right\}$$

Een particuliere oplossing van $\Delta\{u(r)\} = f(r)$ is:

$$u_0(r) = \int_0^r \frac{ds}{s} \int_0^s t\,.f(t)\ dt.$$

Elke harmonische functie voor dit probleem kan geschreven worden als $w(r) = a \ln(r) + b$. Hierin zijn a en b willekeurige constanten. Elke functie $u(r) \in U$ kan dus geschreven worden als:

$$u(r) = \int_0^r \frac{ds}{s} \int_0^s t.f(t)\ dt + a \ln r + b. \qquad (33)$$

Uit de continuiteit van $\Delta\{u(r)\}$ volgt : $a = 0$.
Voor een stationaire oplossing moet gelden:

$$\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^R F_u.r.dr = 0$$, (stelling 3), ofwel:

$$\int_0^R r.F_u.dr = 0 \qquad (34)$$

Substitutie van $F(u(r), u'(r), r)$ en (33) in (34) levert een vergelijking in de onbekende constante b. De oplossingen van b leveren in (33) gesubstitueerd een verzameling functies waarbinnen de stationaire oplossingen moeten worden gezocht.

Voorbeeld: Stel: $F(u(r), u'(r), r) = \{u(r)\}^2$,

$f(r) = -k$, k is constant.

$$u(r) = -\int_0^r \frac{ds}{s} \int_0^s t.\,k.dt + b = -\frac{k}{4} r^2 + b.$$

$$F_u = 2\,u(r).$$

Substitutie in (34) levert : $b = \dfrac{kR^2}{8}$.

Hieruit volgt: $\hat{u}(r) = \frac{k}{8}\{R^2 - 2r^2\}$.

Deze functie wordt gegenereerd door als randvoorwaarde $u(R) = -\frac{1}{8} kR^2$ op te leggen.
Men vindt b ook door substitutie van $u(r) = -\frac{k}{4} r^2 + b$ in:

$$\frac{\partial}{\partial b}\left\{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^R \{u(r)\}^2.r.dr\right\} = 0.$$

7.4 In dit voorbeeld zal een eenvoudige toepassing worden gegeven van de in hoofdstuk 6 besproken constructieve methode.

$$U = \left\{u(r,\Theta);\ \Delta\{u(r,\Theta)\} = 8r \sin\Theta \cap u(r,\Theta) \in D_1'\right\}.$$

G is een cirkelvormiggebied met straal R.

$$F\{u(r,\Theta),\ u_r,\ u_\Theta\ ,\ r,\Theta\} = \tfrac{1}{2}\{u^2(r,\Theta) + u_r^2(r,\Theta) + \frac{1}{r^2}\, u_\Theta^2(r,\Theta)\}$$

Een particuliere oplossing van $\Delta\{u(r,\Theta)\} = 8r \sin\Theta$ is $u_0(r,\Theta) = r^3 \sin\Theta$. De Fourrierontwikkeling van de functie $\hat{u}(r,\Theta)$ is dus: ,(zie (23)),

$$\hat{u}(r,\Theta) = \frac{a_0}{2} + r^3 \sin\Theta + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\Theta) + b_n \sin(n\Theta)\} \left(\frac{r}{R}\right)^n \quad (35)$$

Voor de geadjungeerde functie $\psi(r,\Theta)$ van $\hat{u}(r,\Theta)$ geldt:

$$\Delta\{\psi(r,\Theta)\} = F_{\hat{u}} - \frac{\partial}{\partial r}\{F_{\hat{u}_r}\} - \frac{\partial}{\partial\Theta}\{F_{\hat{u}_\Theta}\} - \frac{1}{r}F_{\hat{u}_r}$$

Substitutie van F en $\hat{u}(r,\Theta)$ hierin levert:

$$\Delta\{\psi(r,\Theta)\} = \frac{a_0}{2} + (r^3 - 8r)\sin\Theta + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\Theta) + b_n\sin(n\Theta)\}\left(\frac{r}{R}\right)^n \qquad (36)$$

De randvoorwaarden voor $\psi(r,\Theta)$ zijn (37) en (38):

$$\psi(R,\Theta) = 0 \qquad (37)$$

$\psi_r(R,\Theta) = - F_{u_r}\Big|_R = - u_r(R,\Theta)$, substitutie van (35) levert:

$$\psi_r(R,\Theta) = -3R^2\sin\Theta - \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\Theta) + b_n\sin(n\Theta)\}\frac{n}{R} \qquad (38)$$

Aannemende dat $\psi(r,\Theta)$ in een Fourierreeks die tweemaal term voor term mag worden gedifferentieerd volgt nu:

$$\psi(r,\Theta) = x_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(r)\cos(n\Theta) + y_n(r)\sin(n\Theta), \qquad (39)$$

$$\psi_r(r,\Theta) = x_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(r)\cos(n\Theta) + y_n'(r)\sin(n\Theta), \qquad (40)$$

$$\Delta\{\psi(r,\Theta)\} = x_0''(r) + \frac{1}{r}x_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n\{x_n(r)\}\cos(n\Theta) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n\{y_n(r)\}\sin(n\Theta) \qquad (41)$$

Hierin is: $L_n = \left[\frac{d^2\ldots}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\ldots}{dr} - \frac{n^2\ldots}{r^2}\right]$.

Het gelijkstellen van (36) en (41) levert een reeks van differentiaalvergelijkingen op:

$$\begin{cases} x_0''(r) + \frac{1}{r}\, x_0'(r) = \frac{a_0}{2} \quad , \\ L_n\{x_n(r)\} = a_n(\frac{r}{R})^n \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ L_1\{y_1(r)\} = r^3 - 8r + b_1\, \frac{r}{R} \, , \\ L_n\{y_n(r)\} = b_n(\frac{r}{R})^n \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

De oplossingen hiervan zijn:

$$\begin{cases} x_0(r) = K_0 + N_0 \ln r + a_0(\frac{r^2}{8}) \quad , \\ x_n(r) = K_n r^n + N_n r^{-n} + a_n \left\{ \frac{r^{n+2}}{4\, R^n(n+1)} \right\} , \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ y_1(r) = H_1 r + M_1 r^{-1} + \frac{1}{24}\, r^5 - r^3 + b_1(\frac{r^3}{8R}) \quad , \\ y_n(r) = H_n r^n + M_n r^{-n} + b_n \left\{ \frac{r^{n+2}}{4\, R^n(n+1)} \right\} \quad , \quad (n = 2, 3, \ldots). \end{cases} \tag{42}$$

Omdat $\Delta\{\psi(r,\Theta)\} \leqslant C\ [G]$ moet gelden:

$$N_0 = 0,\ N_n = 0 \text{ en } M_n = 0 \ , \quad (n = 1, 2, 3, ..).$$

Het gelijkstellen van (37) met (39) en (38) met (40) levert de randvoorwaarden waarmee de nog onbekende constanten K_0, K_n, H_n, a_0, a_n en b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ kunnen worden bepaald:

$$\begin{cases} x_0(R) = 0 \quad ; \quad x_0'(R) = 0 \quad , \\ x_n(R) = 0 \quad ; \quad x_n'(R) = -\, a_n \cdot \frac{n}{R} \quad , \quad (n = 1, 2, ..) \ , \\ y_1(R) = 0 \quad ; \quad y_1'(R) = -\, b_n \cdot \frac{1}{R} - 3R^2 \ , \\ y_n(R) = 0 \quad ; \quad y_n'(R) = -\, b_n - \frac{n}{R} \quad , \quad (n = 2, 3, ..) \ . \end{cases} \tag{43}$$

Uit (42) en (43) volgt:
$$\begin{cases} a_n = 0 \ , \ (n = 0, 1, 2..) \\ b_n = 0 \ , \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ b_1 = -\dfrac{2R^5 + 12R^3}{3R^2 + 12} \ . \end{cases}$$

Substitutie hiervan in (35) levert $\hat{u}(r,\Theta)$.

$$\hat{u}(r,\Theta) = \sin\Theta \left\{ r^3 - rR^2\left(\frac{2R^2 + 12}{3R^2 + 12}\right)\right\}$$

Deze functie wordt gegenereerd door als randfunctie op te leggen:

$$\hat{u}(R,\Theta) = \sin\Theta \left\{ \frac{R^5}{3R^2 + 12} \right\}.$$

8. Bibliografie

[1] I.M. Gelfand and S.V. Fomin:
Calculus of variations.
Prentice-Hall, Inc. 1963.

[2] S.G. Mikhlin:
Linear equations of mathematical physics.
Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1967.

[3] R. Timman:
Optimization theory for ordinary differential equations.
The journal of engenering mathematics.
Vol. 1, no.3, p.p. 159-185, 1967.

[4] I.S. Sokolnikoff:
Tensor analysis.
John Wiley and Sons, Inc. 1951.