stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE TN 62/71 NOVEMBER

M. BAKKER

ANALYTISCHE ASPEKTEN VAN EEN MINIMAXPROBLEEM

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

0. Inleiding

In deze skriptie wordt aandacht besteed aan n^e graads polynomen van de vorm

$$(0.1) \qquad P_n(x) = 1 + x + \dots + \frac{x^p}{p!} + c_{p+1}\, x^{p+1} + \dots + c_n x^n,$$

waarbij de koëfficiënten $c_{p+1}, \dots, c_n$ nog onbepaald zijn. Omdat kennelijk geldt

$$\frac{d^i}{dx^i} P_n(x) \Big|_{x=0} = 1, \qquad i = 0, \dots, p,$$

heet $P_n(x)$ een p^e orde nauwkeurige benadering van e^x in de oorsprong, omdat de eerste $p + 1$ afgeleiden van e^x in 0 eveneens de waarde 1 hebben.

Polynomen van deze vorm spelen een belangrijke rol bij de numerieke oplossing van lineaire beginwaardeproblemen van de vorm

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\vec{u} = D\vec{u}, & t_0 < t \leq T, \\ \vec{u} = \vec{u}_0, & t = t_0, \end{cases}$$

waarbij D een reële m×m matrix is met uitsluitend niet-positieve eigenwaarden δ_j $(j=1,\dots,m)$ en spektraalradius $\sigma(D) = \max_{j=1,\dots,m} |\delta_j|$.

Men kan de oplossing $\vec{u}$ van dit probleem in de punten $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_N = T$ benaderen door de vektoren $\vec{u}_k^{\,*}$ $(k=0,\dots,N)$, die gegenereerd worden volgens het iteratieschema

$$(0.3) \qquad \begin{cases} \vec{u}_0^{\,*} = \vec{u}_0, & \\ \vec{u}_{k+1}^{\,*} = P_n(\tau_k D)\vec{u}_k^{\,*}, & k = 0, \dots, N-1, \\ \tau_k = t_{k+1} - t_k, & k = 0, \dots, N-1, \\ P_n(\tau_k D) = I + \tau_k D + \dots + \frac{\tau_k^p}{p!} D^p + c_{p+1}\tau_k^{p+1} D^{p+1} + \dots + c_n \tau_k^n D^n, & \end{cases}$$

waar I de m×m eenheidsmatrix is. $P_n(\tau_k D)$ heet de door $P_n(x)$ gegenereerde polynoomoperator. Omdat $P_n(\tau_k D)$ een p^e orde nauwkeurige benadering is van de exponentiële operator

$$\exp(\tau_k D) = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau_k^i}{i!} D^i,$$

terwijl de vektor

$$\vec{u}(t) = \exp((t-t_0)D)\vec{u}_0, \quad t_0 \leq t \leq T$$

de exakte oplossing van (0.2) is, zeggen we dat het iteratieschema (0.3) p^e orde nauwkeurig is.

De grootte van τ_k in (0.3) hangt samen met de maximaal toegestane afbreekfout, die het gevolg is van de polynoombenadering van $\exp(\tau_k D)$, en met de numerieke stabiliteit van schema (0.3). Dat laatste houdt in, dat de door de rekenmachine gemaakte afrondfouten niet zodanig mogen aangroeien, dat zij afbreekfouten gaan overheersen. Bewezen kan worden, dat een voorwaarde voor de demping van de afrondfouten is, dat de spektraalradius van de polynoomoperator $P_n(\tau_k D)$ niet groter is dan 1. Dat houdt dus in, dat

$$|P_n(\tau_k \delta_j)| \leq 1, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Een korte berekening toont aan, dat τ_k, wat de numerieke stabiliteit betreft, maximaal gekozen kan worden, als

$$\tau_k = \frac{\beta}{\sigma(D)},$$

waar β het grootste positieve getal is waarvoor geldt

$$(0.4) \qquad |P_n(x)| \leq 1, \quad -\beta \leq x \leq 0.$$

Deze β hangt af van n, p en $c_{p+1}, \ldots, c_n$.

Voor een optimale numerieke stabiliteit moeten we dus $c_{p+1}, \ldots, c_n$ zo bepalen, dat voor een zo groot mogelijke β formule

(0.4) geldt. Deze β geven we aan met

$$\beta_{max}(n,p) = \sup_{c_{p+1},\ldots,c_n} \beta(n,p;c_{p+1},\ldots,c_n).$$

Een polynoom van de vorm (0.1), gedefinieërd op $[-\beta,0]$, waarvoor (0.4) geldt, heet een stabiliteitspolynoom, als $\beta < \beta_{max}(n,p)$ en een optimaal stabiliteitspolynoom, als $\beta = \beta_{max}(n,p)$. Omdat we het polynoom (0.1) niet op zijn numerieke, maar op zijn analytische eigenschappen beschouwen, zullen we het niet stabiliteitspolynoom, maar minimaxpolynoom noemen, dit vanwege de minimaxeigenschappen.

In deze skriptie wordt naast een abstrakte probleemstelling en een schets van de konstruktie van optimale stabiliteitspolynomen de analytische konstruktie van enkele stabiliteitspolynomen van lagere orde gegeven.

Hierbij wordt voornamelijk gebruik gemaakt van de eigenschappen van Tchebycheffpolynomen van de eerste soort en van de lineaire programmering. Verder wordt aangetoond, dat

$$\beta_{max}(n,p)$$

kwadratisch is in n, i.e.

$$\beta_{max}(n,p) = c(p)n^2 + o(n^2),\ 0 < c(p) \leq 2.$$

Dit wordt aangetoond door de konstruktieve bepaling van een majorant en een minorant van $\beta_{max}(n,p)$, beide kwadratisch in n. Om de lezer een indruk te geven van het gedrag van optimale stabiliteitspolynomen, zijn in deze skriptie ook de grafieken opgenomen van gemodificeerde optimale stabiliteitspolynomen. Deze grafieken zijn door de X1-plotter van het Mathematisch Centrum getekend aan de hand van invoergegevens, ontleend aan [2]. De modifikatie houdt in, dat het interval $[-\beta_{max}(n,p),0]$ is getransformeerd tot het interval $[-1,+1]$.

Tenslotte wil ik de heer P.J. van der Houwen bedanken voor de kritische kanttekeningen en de heer J.M. Anthonisse voor het computerwerk, aan de hand waarvan ik een groot deel van paragraaf 5 heb kunnen schrijven.

1. Probleemstelling

$P_n(x)$ is een n^e graads polynoom in x van de vorm

$$(1.1) \qquad P_n(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^p}{p!} + c_{p+1}x^{p+1} + \ldots + c_n x^n,$$

waar de koëfficiënten $c_{p+1}, \ldots, c_n$ nog onbepaald zijn. Daar blijkbaar geldt, dat

$$(1.2) \qquad \frac{d^i}{dx^i} P_n(x) \Big|_{x=0} = 1, \qquad i = 0, \ldots, p,$$

is $P_n(x)$ een p^e orde nauwkeurige benadering van e^x in 0.

Het gaat er nu om, koëfficiënten $c_{p+1}, \ldots, c_n$ zodanig te bepalen, dat voor een zo groot mogelijke $\beta > 0$ geldt

$$(1.3) \qquad |P_n(x)| \leq 1, \quad -\beta \leq x \leq 0.$$

We lichten dit toe aan het eenvoudigste voorbeeld:

$$P_2(x) = 1 + x + c_2 x^2.$$

Daar $P_2(x)$ voor negatieve c_2 op een veel kleiner interval tussen -1 en +1 begrensd is dan voor positieve c_2, beperken we ons tot positieve c_2. We gaan nu na voor welke $x \leq 0$ geldt

$$-1 \leq P_2(x) \leq 1.$$

Kennelijk geldt, dat

$$P_2(x) \leq 1, \quad -\frac{1}{c_2} \leq x \leq 0.$$

Verder geldt, dat

$$P_2(x) \geq 1 - \frac{1}{4c_2}, \quad -\frac{1}{c_2} \leq x \leq 0.$$

Het is dus duidelijk, dat de maximale β, waarvoor (1.3) in het geval $n = 2$, $p = 1$ geldt, de waarde 8 heeft.

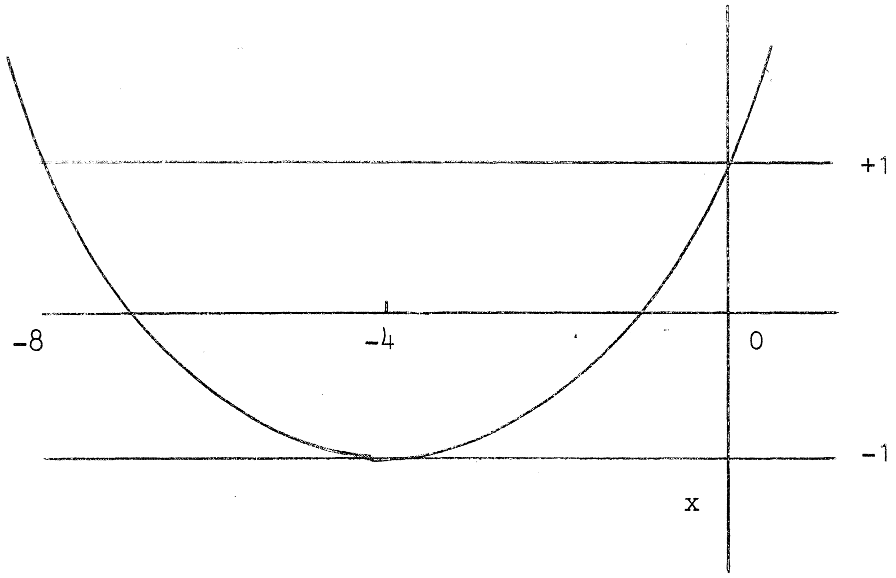

fig. 1.1. Optimaal polynoom $P_2(x)$.

$P_2(x)$ is dus in het optimale geval van de vorm

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{8}x^2.$$

Na dit voorbeeld geven we een abstraktere formulering van het probleem.

Laat $P_n(x)$ van de vorm (1.1) zijn. We definiëren nu bij vaste $\beta > 0$ en willekeurige $c_{p+1}, \ldots, c_n$

(1.4) $$M_{n,p}(\beta; c_{p+1}, \ldots, c_n) = \max_{-\beta \leq x \leq 0} P_n(x) .$$

Verder definiëren we $m_{n,p}(\beta)$ als volgt

$$(1.5)\qquad m_{n,p}(\beta) = \inf_{c_{p+1},\ldots,c_n} M_{n,p}(\beta;c_{p+1},\ldots,c_n).$$

Daar $M_{n,p}(\beta;c_{p+1},\ldots,c_n) \geq 1$, omdat $P_n(x)$ tenminste één keer de waarde 1 aanneemt op $[-\beta,0]$, geldt kennelijk ook, dat

$$(1.6)\qquad m_{n,p}(\beta) \geq 1.$$

Nu hangt $m_{n,p}(\beta)$ kontinu af van β. Daar er enerzijds β's zijn te bedenken, waarvoor $m_{n,p}(\beta) = 1$ en er anderzijds β's zijn, waarvoor $m_{n,p}(\beta) > 1$, zoals we in §3 zullen bewijzen, moet er een maximale β zijn, waarvoor $m_{n,p}(\beta)$ nog juist gelijk 1 is.

We definiëren dus

$$\beta_{max}(n,p) = \sup\{\beta \mid m_{n,p}(\beta) = 1\}.$$

Zoals we in de volgende paragrafen zullen bewijzen, is deze $\beta_{max}(n,p)$ asymptotisch evenredig met n^2.

Stel nu $\beta \leq \beta_{max}(n,p)$. Een polynoom $P_n(x)$ van de vorm (1.1), waarvoor (1.3) geldt, noemen we nu een minimaxpolynoom, vanwege het minimale maximum, en wel een zwak minimaxpolynoom, als $\beta < \beta_{max}(n,p)$ en een sterk minimaxpolynoom, als $\beta = \beta_{max}(n,p)$.

Daar de sterke minimaxpolynomen (zie fig. 1.2, ..., 1.6) al uitvoerig zijn behandeld in [1], [2], vermelden we daaruit slechts de volgende stelling:

Laat $P_n(x)$ van de vorm (1.1) zijn, gedefiniëerd op $[-\beta,0]$ en laat de kromme van $P_n(x)$ $n - p$ keer beurtelings aan de lijnen $y = \pm 1$ raken. Als dan tevens geldt

$$P_n(-\beta) = (-1)^n,$$

dan is $\beta = \beta_{max}(n,p)$. Bewijs zie [1], p. 27.

Hoewel deze stelling niet het bestaan van dergelijke polynomen impliceert, kan ze toch als leidraad dienen bij de - analytische of numerieke - konstruktie van sterke minimaxpolynomen. We passen dit hier toe op het polynoom

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + c_3x^3.$$

We moeten dus een punt x_0 vinden, waarvoor geldt óf

$$\begin{cases} P_3(x_0) = -1, \\ P_3'(x_0) = 0, \end{cases}$$

óf

$$\begin{cases} P_3(x_0) = 1, \\ P_3'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Het eerste stelsel heeft geen reële oplossingen, het tweede heeft als oplossing $x_0 = -4$ en $c_3 = \frac{1}{16}$. Vervolgens kan $\beta_{max}(3,2)$ bepaald worden als maximaal getal waarvoor geldt

$$P_3(x) \geq -1, \quad x \geq -\beta_{max}(3,2).$$

Daar $P_3(x)$ in $x = -\frac{4}{3}$ het lokale minimum $\frac{13}{27}$ aanneemt, is $\beta_{max}(3,2)$ gelijk aan het nulpunt van de vergelijking

$$2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^3 = 0.$$

Het blijkt, dat $\beta_{max}(3,2) \approx 6.26$.

Tenslotte geven we nog voor $p = 1, \ldots, 5$ de benaderde waarden van

$$c_p = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{max}(n,p)}{n^2}, \text{ overgenomen uit [2].}$$

p	c_p
1	2
2	.82
3	.50
4	.33
5	.26

Tabel 1

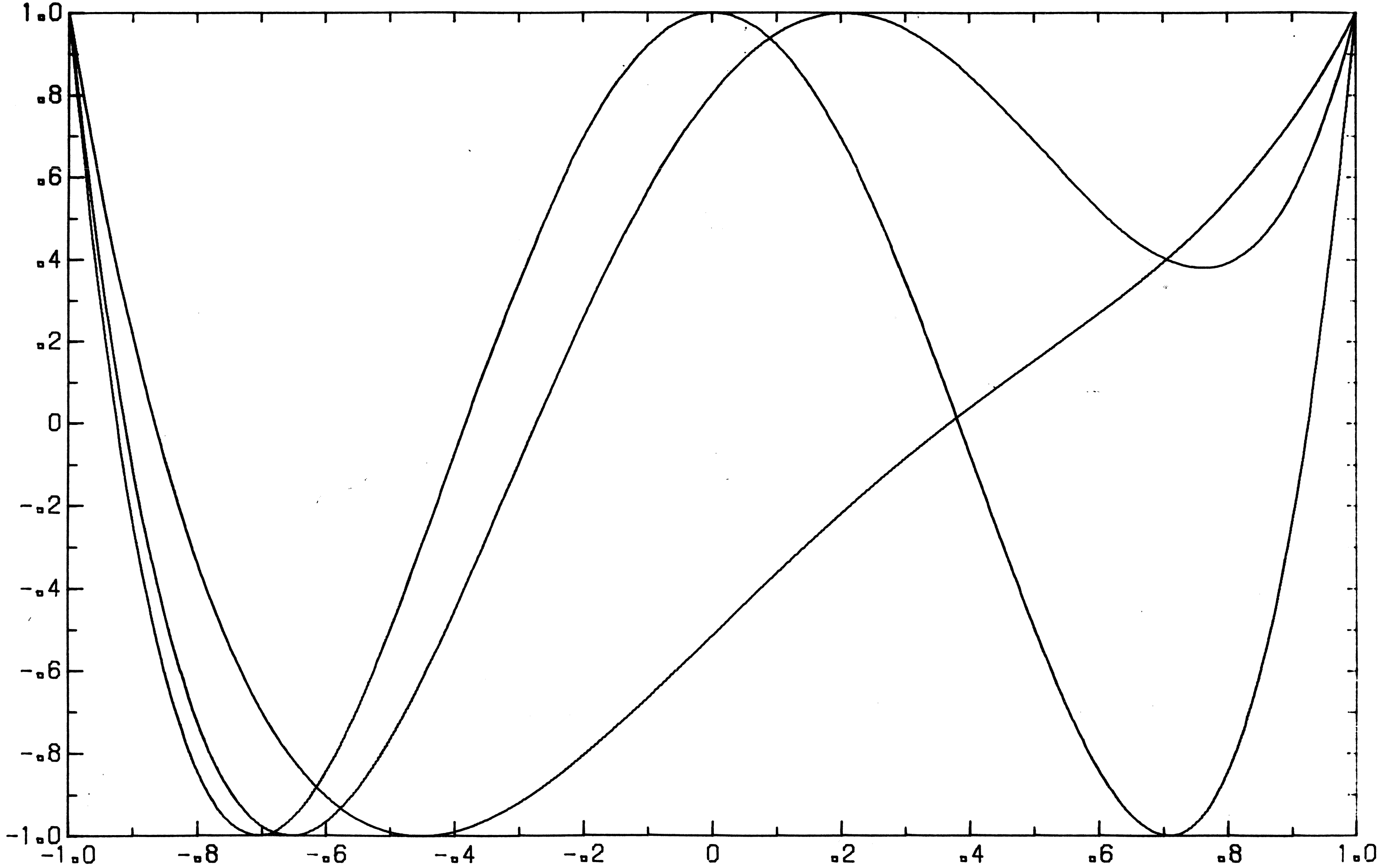

fig. 1.2. $P_4(\frac{1}{2}\beta_{max}(4,p)(x-1))$, $p = 1, 2, 3$.

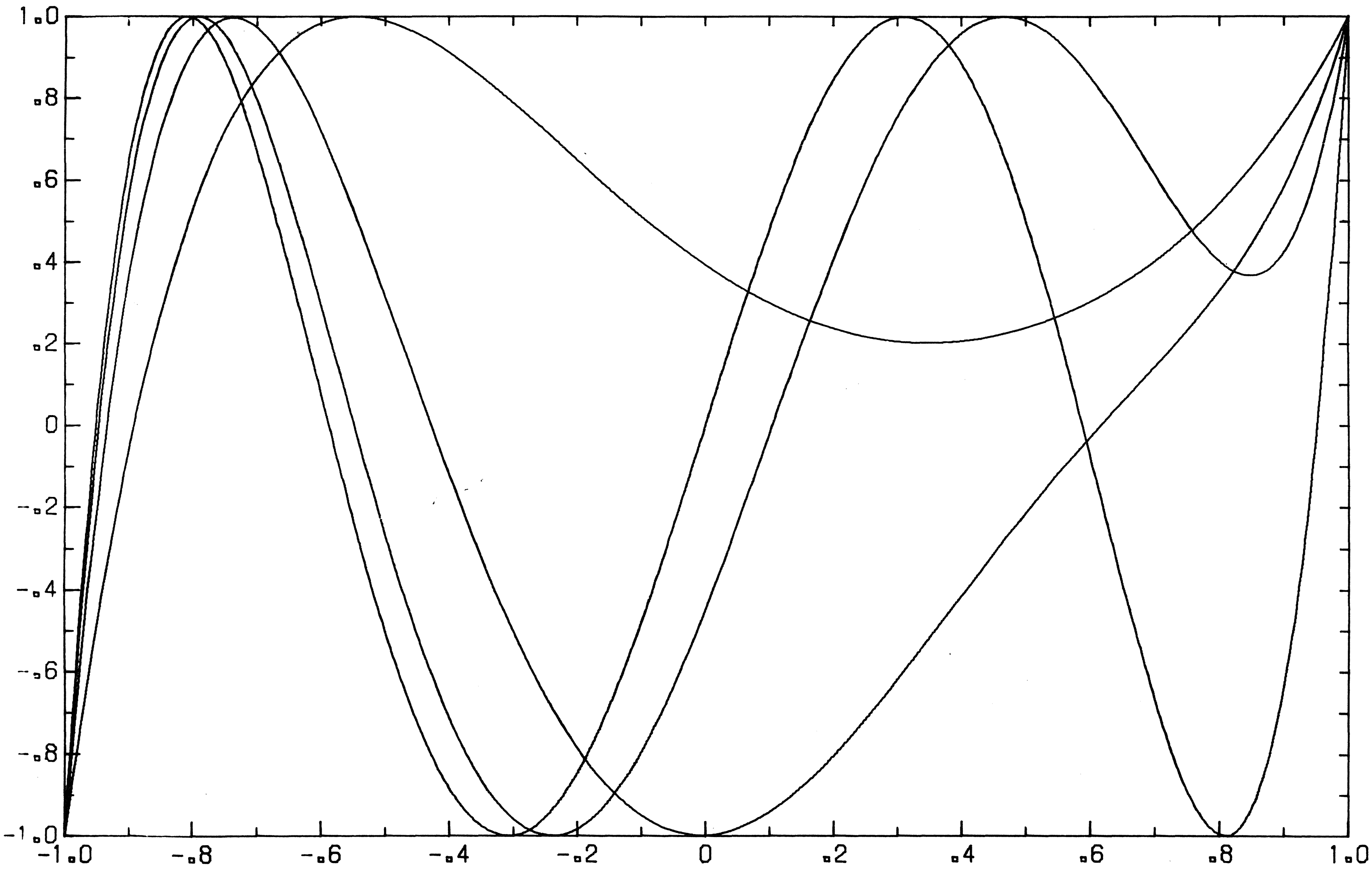

fig. 1.3. $P_5(\frac{1}{2}\beta_{max}(5,p)(x-1))$, $p = 1, \ldots, 4$.

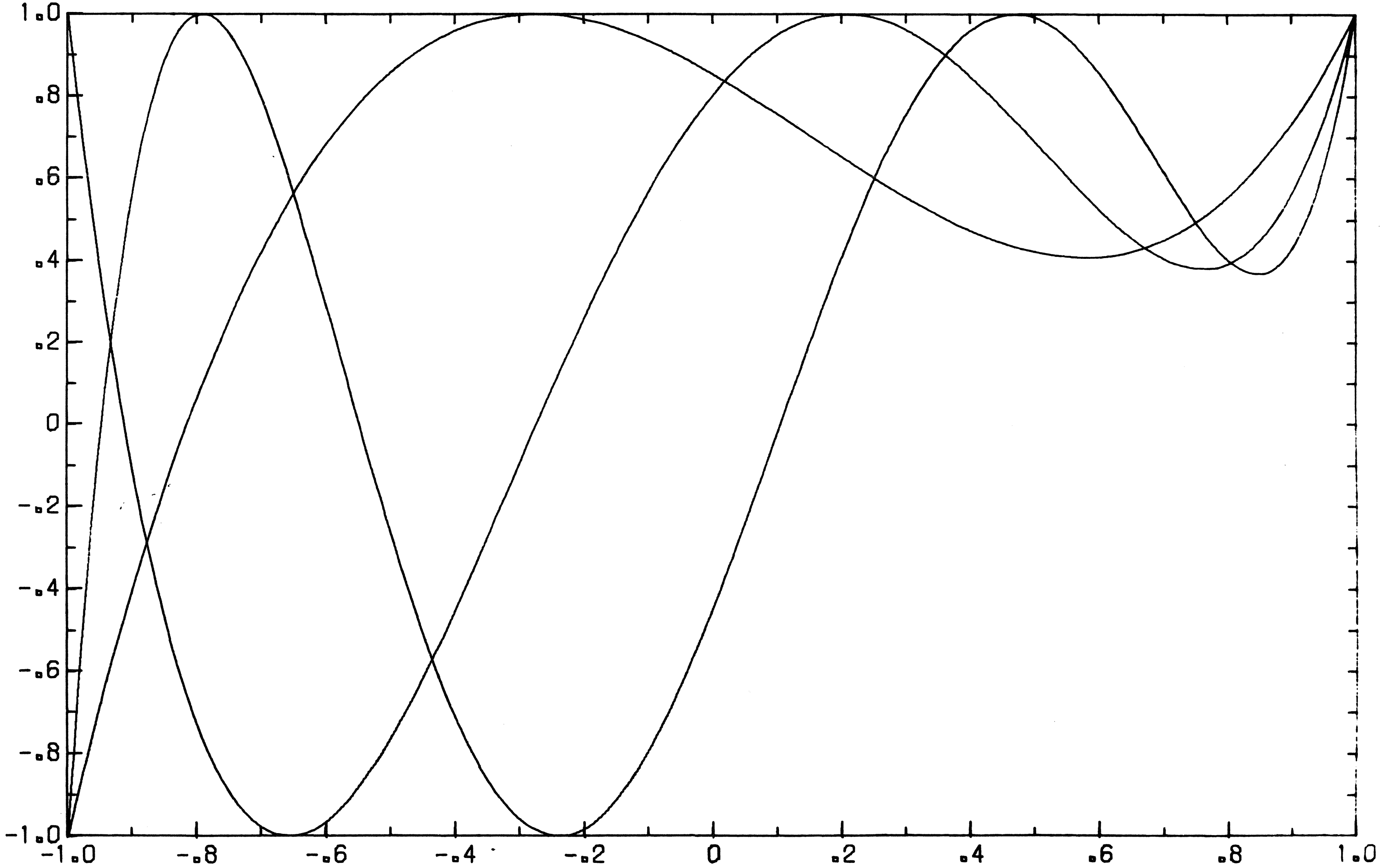

fig. 1.4. $P_n(\frac{1}{2}\beta_{max}(n,2)(x-1))$, $n = 3, 4, 5$.

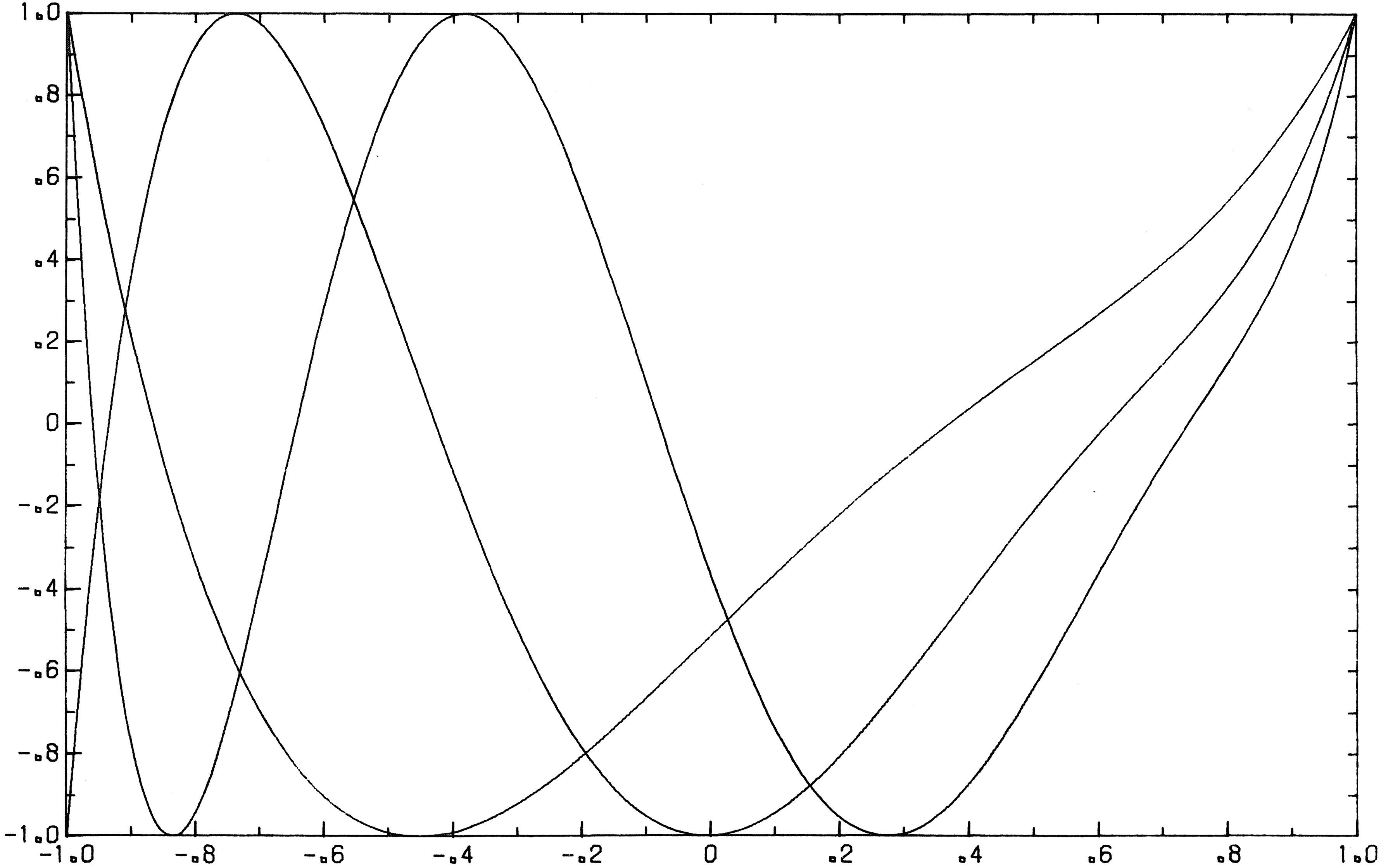

fig. 1.5. $P_n(\frac{1}{2}\beta_{max}(n,3)(x-1))$, $n = 4, 5, 6$.

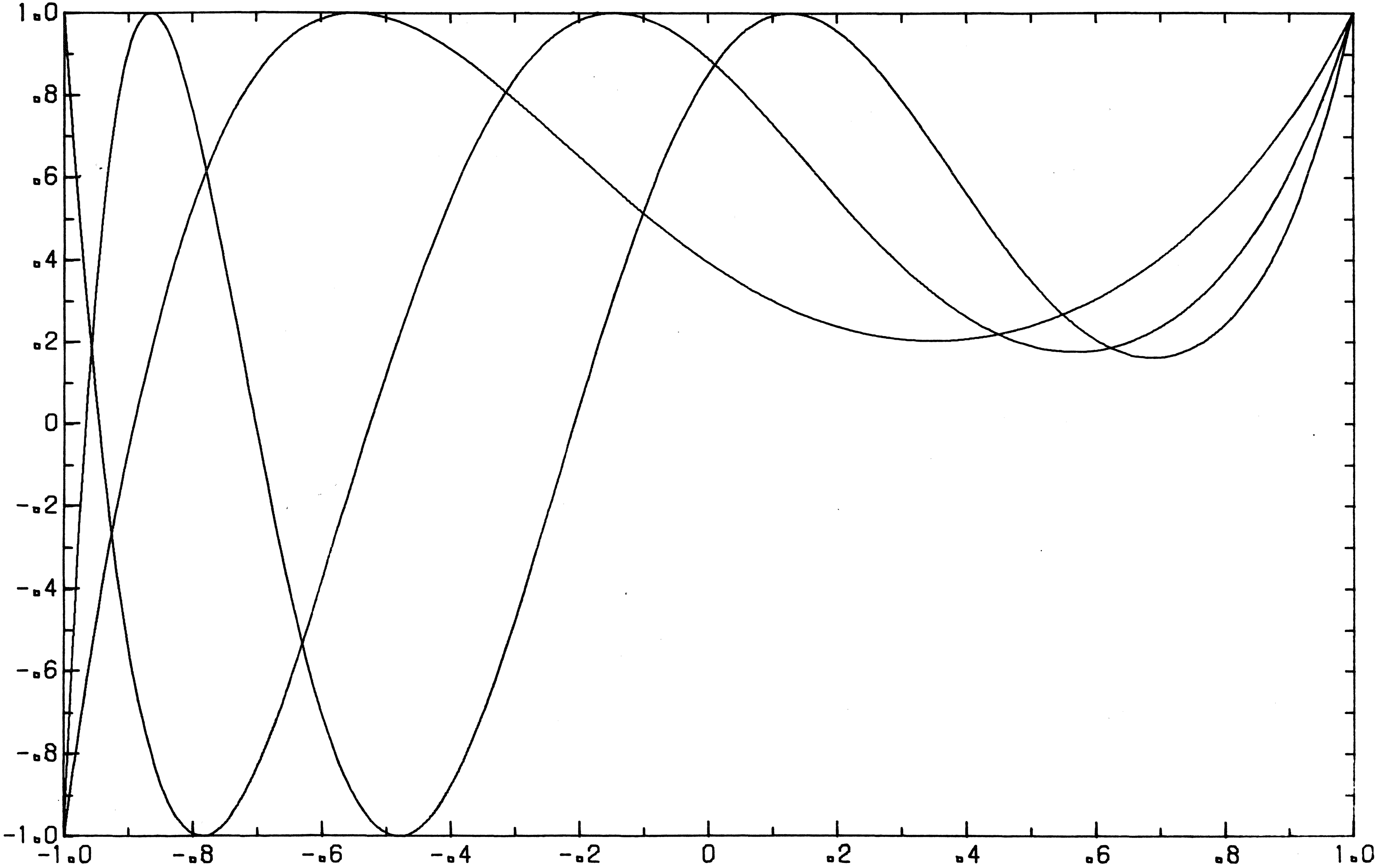

fig. 1.6. $P_n(\frac{1}{2}\beta_{max}(n,4)(x-1))$, n = 5, 6, 7.

2. Bovengrenzen van $\beta_{max}(n,p)$

Zoals we in §1 al terloops opmerkten, is $\beta_{max}(n,p)$ asymptotisch evenredig met n^2, dat wil zeggen

$$(2.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{max}(n,p)}{n^2} = c_p, \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

waar c_p een eindig positief getal is met $0 < c_p \leq 2$.

Zonder c_p expliciet uit te rekenen - wat erg lastig is - kunnen we (2.1) bewijzen, door aan te tonen, dat geldt

$$(2.2) \qquad m_p \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{max}(n,p)}{n^2} \leq M_p, \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

waar m_p en M_p eindige positieve getallen zijn met

$$(2.2a) \qquad 0 < m_p < M_p \leq 2.$$

In deze § bewijzen we het bestaan van een kwadratische bovengrens van $\beta_{max}(n,p)$. We maken hiervoor gebruik van het volgende.

Lemma 2.1. Gegeven een n^e graads polynoom $p_n(x)$, gedefinieerd op $[-1,1]$ en begrensd tussen -1 en +1 op dat interval. We definiëren voor $i = 1, \ldots, n$ μ_i als volgt:

$$\mu_i = \max_{-1\leq x\leq 1} \left|\frac{d^i}{dx^i} p_n(x)\right|.$$

Voor μ_i geldt dan de ongelijkheid

$$(2.3) \qquad \mu_i \leq \frac{n^2(n^2-1)\ldots(n^2-(i-1)^2)}{1.3\ldots(2i-1)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Verder geldt het gelijkteken alleen dan, als $p_n(x) \equiv T_n(x)$, waarbij $T_n(x)$ het Tchebycheffpolynoom van de eerste soort is (voor definitie zie §3). Dit lemma is afkomstig van W.A. Markoff.

Bewijs: Zie [3], blz. 82.

Laat nu $P_n(x)$ van de vorm (1.1) zijn, gedefinieerd op $[-\beta,0]$, terwijl (1.3) geldt. Stellen we

$$x = \frac{\beta}{2}(y-1), \quad -1 \leq y \leq 1,$$

dan definiëren we $Q_n(y)$ als volgt:

$$Q_n(y) = P_n(\tfrac{1}{2}\beta(y-1)), \quad -1 \leq y \leq 1. \tag{2.4}$$

Toepassing van formule (1.2) geeft

$$\frac{d^i}{dy^i} Q_n(y) \Big|_{y=1} = (\frac{\beta}{2})^i, \qquad i = 1, \ldots, p. \tag{2.5}$$

Volgens lemma 2.1 geldt evenwel

$$\left|\frac{d^i}{dy^i} Q_n(y)\right|_{y=1} \leq \frac{n^2 \ldots (n^2-(i-1)^2)}{1.3\ldots(2i-1)}, \qquad i = 1, \ldots, p, \tag{2.6}$$

omdat $Q_n(y)$ tussen -1 en +1 begrensd is op $[-1,+1]$.
Hieruit volgt voor β de ongelijkheid

$$\beta \leq 2\left[\frac{n^2(n^2-1)\ldots(n^2-(i-1)^2)}{1.3\ldots(2i-1)}\right]^{\frac{1}{i}}, \qquad i = 1, \ldots, p. \tag{2.7}$$

Daar het rechterlid van (2.7) monotoon dalend is in i, zoals gemakkelijk is aan te tonen, en de ongelijkheid (2.7) opgaat voor iedere β, waarvoor relatie (1.3) geldt, komen we samenvattend tot de konklusie

$$\beta_{max}(n,p) \leq 2\left[\frac{n^2(n^2-1)\ldots(n^2-(p-1)^2)}{1.3\ldots(2p-1)}\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p = 1, \ldots, \tag{2.8}$$

Uit (2.8) volgt dan, dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{max}(n,p)}{n^2} \leq 2(1.3\ldots(2p-1))^{-\frac{1}{p}}, \qquad p = 1, \ldots, \tag{2.9}$$

waarmee het bestaan van een kwadratische majorant

$M_p n^2 = 2[1.3\ldots(2p-1)]^{-\frac{1}{p}} n^2$ van $\beta_{max}(n,p)$ is aangetoond. We merken nog op, dat het gelijkteken in (2.8) alleen optreedt, als $p = 1$, zoals we in §4 zullen bewijzen. In de volgende §§ zullen we het bestaan van een kwadratische minorant van $\beta_{max}(n,p)$ aantonen.

Tot slot van deze § geven we nog een tabel van M_p voor $p = 1, \ldots, 15$.

p	M_p
1	2
2	1.15470
3	0.81096
4	0.62479
5	0.50809
6	0.42811
7	0.36988
8	0.32559
9	0.29077
10	0.26268
11	0.23953
12	0.22014
13	0.20365
14	0.18946
15	0.17711

Tabel 2

Bovengrenzen van $\dfrac{\beta_{max}(n,p)}{n^2}$, $p = 1, \ldots, 15$.

3. Representatie van $P_n(x)$ door middel van Tchebycheffpolynomen; positiviteit

We definiëren het Tchebycheffpolynoom van de eerste soort $T_n(x)$ als volgt:

(3.1) $$T_n(x) = \cos n(\arccos x),\ n \geq 0,\quad -1 \leq x \leq 1.$$

Als we $x = \cos \phi$ substitueren, wordt dit

(3.1a) $$T_n(\cos \phi) = \cos n\phi,\ n \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Uit (3.1a) volgt de ekwivalente rekurrente definitie van $T_n(x)$, die ook voor $|x| > 1$ geldt:

(3.2) $$T_0(x) \equiv 1,\quad T_1(x) = x,$$
$$T_n(x) = 2x\ T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\quad n > 1.$$

Een andere ekwivalente definitie van $T_n(x)$, hoewel niet voor de hand liggend, is

(3.3) $$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-n)_i (n)_i}{(\frac{1}{2})_i\ i!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^i,$$

waarbij voor een reëel getal a $(a)_i$ als volgt is gedefinieerd

$$(a)_0 = 1,\ (a)_i = a(a+1)\ \dots\ (a+i-1),\quad i \geq 1.$$

Voor het bewijs van de ekwivalentie van (3.1) en (3.3) zie [4], blz. 62.

We vermelden een aantal eigenschappen van het Tchebycheffpolynoom, die we nodig hebben voor de oplossing van het probleem uit §1.

(3.4) $$|T_n(x)| \leq 1,\quad -1 \leq x \leq 1;$$

(3.4a) $$|T_n(x)| = 1 \iff x = \cos \frac{i\pi}{n},\qquad i = 0, \dots, n.$$

Dit volgt onmiddellijk uit (3.1a).

$$(3.5) \qquad \frac{d^i}{dx^i} T_n(x) \Big|_{x=1} = \frac{n^2(n^2-1)\ldots(n^2-(i-1)^2)}{1.3\ldots(2i-1)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(3.5) volgt uit (3.3) door differentiatie.

We bekijken nu weer het probleem uit §1. $P_n(x)$ is weer van de vorm (1.1) en is gedefinieerd op $[-\beta,0]$. We kunnen $P_n(x)$ dan als volgt schrijven:

$$(3.7) \qquad P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(1 + \frac{2x}{\beta}), \quad -\beta \leq x \leq 0.$$

Toepassing van de vergelijkingen (1.2) leidt tot de volgende betrekkingen voor a_j:

$$(3.8) \qquad \sum_{j=0}^{n} t_{ij} a_j = (\frac{\beta}{2})^i, \qquad i = 0, \ldots, p,$$

waarbij t_{ij} als volgt is gedefinieerd:

$$(3.9) \qquad t_{ij} = \frac{d^i}{dx^i} T_j(x) \Big|_{x=1} = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \dfrac{j^2(j^2-1)\ldots(j^2-(i-1)^2)}{1.3\ldots(2i-1)}, & i = 1, \ldots, p. \end{cases}$$

Het belang van de representatie (3.7) van $P_n(x)$ blijkt uit de volgende

Stelling 3.1. Laat $P_n(x)$ van de vorm (3.7) zijn, gedefinieerd op $[-\beta,0]$ en laten voor de koëfficiënten a_j de relaties (3.8) gelden. Dan volgt uit de ongelijkheden

$$(3.10) \qquad a_j \geq 0, \qquad j = 0, \ldots, n-1, \quad a_n > 0$$

de ongelijkheid

$$(3.11) \qquad |P_n(x)| \leq 1, \quad -\beta \leq x \leq 0.$$

Bewijs

$$|P_n(x)| = |\sum_{j=0}^{n} a_j\, T_j(1 + \tfrac{2x}{\beta})| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \,.\, |T_j(1 + \tfrac{2x}{\beta})| =$$

$$= \overset{(3.10)}{\ldots} = \sum_{j=0}^{n} a_j |T_j(1 + \tfrac{2x}{\beta})| \leq \overset{(3.4)}{\ldots} \leq \sum_{j=0}^{n} a_j = \overset{(3.8)}{\ldots} = 1.$$

Hieruit volgt dus, dat

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -\beta \leq x \leq 0.$$

Uit het voorgaande blijkt dat we, om een zo groot mogelijke β te krijgen, een maximale β moeten bepalen waarvoor de vergelijkingen (3.8) met de nevenvoorwaarden (3.10) oplosbaar zijn. De maximaliteit van β is echter voorwaardelijk en wel met betrekking tot de positiviteit van a_j. Slechts in één geval is de maximaliteit absoluut, nl. $p = 1$.

We lichten dit toe aan het geval $p = 1$.

Uitwerking van de relaties (3.8) geeft

$$(3.12) \quad \begin{cases} \sum_{j=0}^{n} a_j = 1; \\ \sum_{j=1}^{n} j^2 a_j = \frac{\beta}{2}. \end{cases}$$

Hieruit volgt door eliminatie

$$(3.13) \quad \begin{cases} \beta = 2(n^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (n^2 - j^2) a_j), \\ 1 = \sum_{j=0}^{n} a_j. \end{cases}$$

Het is duidelijk, dat de maximale β, waarvoor (3.12) een oplossing heeft, die aan (3.8) voldoet, gelijk is aan $2n^2$. Het bijbehorende minimaxpolynoom is van de vorm

$$(3.14) \qquad P_n(x) = T_n(1 + \frac{x}{n^2}), \quad -2n^2 \leq x \leq 0.$$

Daar het polynoom (3.14) $n - 1$ keer afwisselend aan de lijnen $y = \pm 1$ raakt en bovendien geldt

$$P_n(-2n^2) = (-1)^n,$$

voldoet $P_n(x)$ dus aan alle voorwaarden van stelling 1.1. Het hier gevonden polynoom is dus tevens een sterk minimaxpolynoom.

Voor $p = 1$ ging alles nog vrij eenvoudig. Voor hogere p is het niet alleen moeilijker (3.8) op te lossen, maar ook is het niet mogelijk daardoor $\beta_{max}(n,p)$ te berekenen. Bekijken we bijvoorbeeld het geval $p = 2$, $n = 4$, dan vinden we, dat de maximale β waarvoor de relaties (3.8) en (3.10) oplosbaar zijn, gelijk is aan 10, terwijl volgens numerieke berekeningen $\beta_{max}(4,2)$ de waarde 12.0 ... heeft. Hieruit blijkt, dat we niet mogen verwachten, door middel van de in deze § beschreven methode een sterk minimaxpolynoom te vinden. Maar wel zijn de daardoor bepaalde β's kwadratisch in n, zoals in de volgende §§ zal blijken.

4. Methode der lineaire programmering

Volgens de vorige § moeten we een maximale β vinden, waarvoor het stelsel

$$(4.1) \qquad \sum_{j=0}^{n} t_{ij} a_j = \left(\frac{\beta}{2}\right)^i, \qquad i = 0, \ldots, p,$$

omder de nevenvoorwaarden

$$(4.2) \qquad a_j \geq 0, \qquad j = 0, \ldots, n-1, \quad a_n > 0,$$

oplosbaar is.

Volgens de theorie der lineaire programmering kunnen we dit probleem op de volgende manier aanpakken:

1° We bepalen bij vaste β de algemene oplossing van (4.1) en passen deze bij (4.2) aan.

2° Daarna leggen we aan de algemene oplossing de konditie op, dat a_n maximaal is.

3° Tenslotte bepalen we de grootste β, waarvoor aan 1° en 2° voldaan is.

Voorbeeld p = 1, n = 2.

Het stelsel

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ \qquad a_1 + 4a_2 = \frac{1}{2}\beta, \end{cases}$$

heeft als algemene oplossing

$$\begin{cases} a_0 = 3x + 1 - \frac{1}{8}\beta, \\ a_1 = -4x \qquad\qquad , \\ a_2 = \quad x \qquad + \frac{1}{8}\beta, \end{cases}$$

waarbij x een vrije parameter is. Uit de ongelijkheden (4.2) volgt, dat

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\beta-1\right) \leq x \leq 0.$$

Aan deze ongelijkheid kan slechts voldaan worden, als $\beta \leq 8$. a_2 is kennelijk maximaal, als $x = 0$. De maximale β, waarvoor (4.1) en (4.2) oplosbaar zijn in het geval $p = 1$, $n = 2$ is dus gelijk aan 8.
De algemene oplossing van (4.1) is van de vorm

$$(4.3) \qquad a_j = x_j + f_j, \qquad j = 0, \ldots, n,$$

waar f_j een partikuliere oplossing is van het stelsel (4.1) en x_j de algemene oplossing van het homogene stelsel

$$(4.4) \qquad \sum_{j=0}^{n} t_{ij}\, x_j = 0, \qquad i = 0, \ldots, p.$$

De partikuliere oplossing van (4.1) kan bepaald worden door geschikte a_j ongelijk 0 te kiezen en de overige a_j nul te stellen. De oplossing van (4.4) kan in principe berekend worden door $x_{p+1}, \ldots, x_n$ vrij te kiezen en x_i voor $i \leq p$ in $x_{i+1}, \ldots, x_n$ uit te drukken door middel van teruglopende rekursie. Dit is mogelijk, omdat $t_{ij} = 0$, voor $i > j$. Het stelsel (4.4) kan evenwel eenvoudiger opgelost worden, omdat (4.4) ekwivalent is aan het stelsel

$$(4.5) \qquad \sum_{j=0}^{n} s_{ij}\, x_j = 0, \qquad i = 0, \ldots, p,$$

waarbij s_{ij} bepaald wordt door de formule

$$(4.6) \qquad s_{ij} = \prod_{k=0,k\neq i}^{p} \frac{k^2-j^2}{k^2-i^2}, \qquad i = 0, \ldots, p, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Het bewijs van de ekwivalentie van (4.4) en (4.5) berust op Gaussische eliminatie en kan gegeven worden door middel van volledige induktie naar p. We zullen het niet geven, omdat het weliswaar niet moeilijk is, maar veel schrijfwerk kost.

Daar nu geldt

$$s_{ij} = \delta_{ij}, \quad i,j \leq p,$$

waarbij δ_{ij} het Kroneckersymbool is, kan de oplossing van (4.1) als volgt geschreven worden

$$(4.7) \quad \begin{cases} a_i = f_i - \sum_{j=p+1}^{n} s_{ij} x_j, & i = 0, \ldots, p, \\ a_i = x_i + f_i, & i = p+1, \ldots, n, \end{cases}$$

waarbij x_i $(i=p+1,\ldots,n)$ vrij te kiezen parameters zijn.
Invulling van (4.2) geeft voor x_i de nevenvoorwaarden

$$(4.8) \quad \begin{cases} \sum_{j=p+1}^{n} s_{ij} x_j \leq f_i, & i = 0, \ldots, p, \\ x_i \geq -f_i, \; i = p+1, \ldots, n-1, \quad x_n > -f_n. \end{cases}$$

We passen het voorgaande toe op het geval $p = 2$. Een partikuliere oplossing van (4.1) is dan

$$(4.9) \quad \begin{aligned} f_0 &= \frac{3\beta^2}{4n^2} - \frac{1}{2}\beta + 1, \\ f_1 &= -\frac{3\beta^2}{4(n^2-1)} + \frac{1}{2}\beta, \\ f_n &= \frac{3\beta^2}{4n^2(n^2-1)}, \\ f_j &= 0, \qquad\qquad j = 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

De algemene oplossing van (4.1) wordt dan, na toepassing van de formules (4.6) en (4.7)

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{3\beta^2}{4n^2} - \dfrac{1}{2}\beta + 1 - \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{j=3}^{n} (j^2-1)(j^2-4)x_j, \\ a_1 = \dfrac{-3\beta^2}{4(n^2-1)} + \dfrac{1}{2}\beta + \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{j=3}^{n} j^2(j^2-4) \quad x_j, \\ a_2 = \qquad\qquad - \dfrac{1}{12}\displaystyle\sum_{j=3}^{n} j^2(j^2-1) \quad x_j, \\ a_j = x_j, \qquad\qquad j = 3, \ldots, n-1, \\ a_n = x_n + \dfrac{3\beta^2}{4n^2(n^2-1)}, \end{cases}$$

waarbij $x_3, \ldots, x_n$ nog onbepaalde parameters zijn. Uit de ongelijkheid $a_2 \geq 0$ volgt, dat

$$(4.10) \qquad x_n \leq - \frac{1}{n^2(n^2-1)} \sum_{j=3}^{n-1} j^2(j^2-1)x_j.$$

Uit de ongelijkheid $a_j \geq 0$, $j = 3, \ldots, n-1$, volgt

$$(4.11) \qquad x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 3, \ldots, n-1.$$

Uit (4.10) en (4.11) volgt, dat $x_n \leq 0$. a_n is dus maximaal, als $x_n = 0$. Hieruit volgt dan weer, dat $x_j = 0$, $j = 3, \ldots, n-1$. De uiteindelijke oplossing is dus $a_j = f_j$ $(j=0,\ldots,n)$, waarbij f_j wordt gegeven door (4.9). Nu moeten we nog bepalen, voor welke β $f_j \geq 0$ is. Uit $f_1 \geq 0$ volgt, dat

$$(4.12) \qquad 0 \leq \beta \leq \frac{2}{3}(n^2-1).$$

Uit $f_0 \geq 0$ volgt voor $n > 3$, dat

$$(4.13) \qquad \beta \geq \frac{1}{3}n^2\left(1 + \sqrt{1-\frac{12}{n^2}}\right)$$

of

$$(4.13a) \qquad \beta \leq \frac{1}{3}n^2(1 - \sqrt{1-\frac{12}{n^2}}).$$

Uit $f_n > 0$ volgt, dat $|\beta| > 0$.

Samenvattend komen we tot de konklusie, dat $f_j \geq 0$, als geldt

$$(4.14) \qquad \frac{1}{3}n^2(1 + \sqrt{1-\frac{12}{n^2}}) \leq \beta \leq \frac{2}{3}(n^2-1), \quad n > 3$$

of

$$(4.14a) \qquad 0 < \beta \leq \frac{1}{3}n^2(1 - \sqrt{1-\frac{12}{n^2}}), \qquad n > 3.$$

Voor $n = 3$ geldt slechts, dat $0 < \beta \leq \frac{2}{3}(n^2-1)$.
De maximale β, waarvoor het stelsel (4.1) onder de nevenvoorwaarden (4.2) oplosbaar is in het geval $p = 2$, is dus $\frac{2}{3}(n^2-1)$. Het bijbehorende minimax polynoom is

$$P_n(x) = \frac{2n^2+1}{3n^2} + \frac{n^2-1}{3n^2} T_n(1 + \frac{3x}{n^2-1}), \quad -\frac{2}{3}(n^2-1) \leq x \leq 0.$$

Behalve in het geval $n = 3$ raakt dit polynoom geen $n - 2$ keer aan de lijnen $y = \pm 1$, zodat aan de voorwaarde van stelling 1.1 niet voldaan is. Het polynoom is dus geen sterk minimaxpolynoom, maar wel is β kwadratisch in n.

Voor $p = 1$ is het iets eenvoudiger om het stelsel (4.1) op de in deze § beschreven methode op te lossen. We zullen dit niet doen, omdat we dit geval al op een andere manier hebben opgelost, terwijl het resultaat hetzelfde is, namelijk $\beta = 2n^2$, $a_n = 1$, $a_j = 0$, $j = 0, \ldots, n-1$.
We hebben nu dus voor de gevallen $p = 1,2$ het bestaan van een kwadratische minorant van $\beta_{max}(n,p)$ bewezen.

Voor $p > 2$ is het erg lastig, de in deze § beschreven techniek met de hand toe te passen. We zullen dan ook een andere methode gebruiken, die we in de volgende paragraaf zullen bespreken.

Tenslotte geven we voor p = 3, 4, 5 nog enkele voorwaardelijk maximale β's, die volgens de techniek der lineaire programmering op de EL X8 van het Mathematisch Centrum werden berekend. Opgemerkt moet nog worden, dat deze techniek faalt voor $p+1 \leq n < 2p$.

n \ p	3	4	5
6	.33730	-	- -
7	.29960	-	- -
8	.31799	.20229	- -
9	.34493	.19090	- -
10	.33580	.20992	.14166
11	.35992	.21542	.13500
12	.35370	.22483	.15279
13	.34872	.22726	.15419
14	.35325	.22801	.16148
15	.35797	.23099	.16239
16	.35494	.23308	.16119
17	.35813	.23095	.16741
18	.36037	.23517	.16834
19	.35844	.23719	.17112
20	.36090	.23706	.17001

Tabel 3

5. Direkte bepaling van analytische oplossingen; ondergrenzen van $\beta_{max}(n,p)$.

Bij het oplossen van het stelsel (4.1) bleken na aanpassing aan de voorwaarden (4.2) slechts weinig koëfficiënten groter dan 0 te zijn en wel alleen a_n in het geval $p = 1$ en alleen a_0 en a_n in het geval $p = 2$. We hadden deze oplossingen ook direkt kunnen vinden door alle a_j op a_n, respektievelijk a_0 en a_n, na nul te stellen en het stelsel (4.1) op te lossen. We krijgen dan dezelfde resultaten, zoals gemakkelijk is na te gaan. Het ligt dus voor de hand, dat dit procédé te generaliseren is voor $p > 2$. Het probleem is alleen, de geschikte a_j's ongelijk nul te stellen, zodat de positiviteit behouden blijft. Op grond van X8-resultaten komen we tot de volgende keus van positieve a_j. We definiëren

$$k = [\frac{n}{2p}]$$

en stellen nu

$$a_j \begin{cases} \neq 0, & j = 0,\ 2k,\ \ldots,\ 2(p-2)k,\ n \\ = 0, & \text{voor overige } j, \end{cases}$$

en proberen daarna het stelsel (4.1) op te lossen. Dat komt neer op het oplossen van een hogeremachtsvergelijking in β van de graad $p - 1$.

We passen dit toe op het geval $p = 3$ en $n = 6$. We stellen a_0, a_2 en a_3 ongelijk 0. (4.1) wordt dan

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 + a_6 &= 1\ , \\ 4a_2 + 36a_6 &= \tfrac{1}{2}\beta, \\ 4a_2 + 420a_6 &= \tfrac{1}{4}\beta^2, \\ 2688a_6 &= \tfrac{1}{8}\beta^3. \end{aligned}$$

Uit de laatste drie vergelijkingen destilleren we de vergelijking

$$\beta^2 - 14\beta + 28 = 0,$$

met als wortels

$$\beta = 7 \pm \sqrt{21}.$$

We proberen hiervan de grootste wortel $\beta = 7 + \sqrt{21}$. De koëfficiënten krijgen dan de waarden

$$a_6 = \frac{14+3\sqrt{21}}{384},$$

$$a_2 = \frac{70+7\sqrt{21}}{128},$$

$$a_0 = \frac{20-3\sqrt{21}}{48}$$

en zijn kennelijk alle positief.

Algemeen krijgen we voor $p = 3$ en $n = 6k$ oplossingen van de vorm

$$\beta = 8k^2 - 1 + \sqrt{25.6k^4 - \frac{16}{3}k^2 + \frac{11}{15}},$$

$$a_{6k} = \frac{\frac{3}{4}\beta^2 - \frac{1}{2}(4k^2-1)\beta}{1152k^4},$$

$$a_{2k} = \frac{\frac{1}{2}(36k^2-1)\beta - \frac{3}{4}\beta^2}{128k^4},$$

$$a_0 = \frac{3\beta^2-2(40k^2-1)\beta+576k^4}{576k^4},$$

waarbij $k = [\frac{n}{6}]$; a_0, a_{2k} en a_{6k} zijn alle positief.
Kennelijk geldt hier

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta}{n^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\beta}{36k^2} = \frac{2}{9}(1+\sqrt{.4}) \approx .36277.$$

Voor het geval $p = 3$, $n = 6k$ heeft $\beta_{max}(n,p)$ dus een minorant, kwadratisch in n.

We hebben in het geval $p = 3$ nu een analytische oplossing van (4.1) gekonstrueerd voor het geval n een veelvoud van 6 is. Er blijven dus nog vijf andere gevallen over. Berekeningen met de X8 hebben aangetoond, dat de grootheid β/n^2 dan weliswaar monotoon stijgt, maar dat de koëfficiënten a_j pas op den duur niet-negatief worden. We zouden dus een iets andere keus van a_j moeten maken. Daar dit een bijzonder bewerkelijke zaak is, nemen we onze toevlucht tot een kunstgreep, te meer, daar het ons slechts begonnen is om de vaststelling van een positieve ondergrens van $\beta_{max}(n,p)/n^2$.

We kiezen opnieuwe $a_0, a_{2k}, \ldots, a_{2k(p-2)}, a_n$ ongelijk 0, waarbij $k = [\frac{n}{2p}]$ en vullen dit in (4.1) in.
We krijgen dan het stelsel

$$(5.1) \qquad \sum_{j=0}^{p-2} t_{i2kj}\, a_{2kj} + t_{in} a_n = \left(\frac{\beta}{2}\right)^i, \qquad i = 0, \ldots, p.$$

We delen nu linker- en rechterlid door n^{2i} en krijgen dan

$$(5.2) \qquad \sum_{j=0}^{p-2} \frac{t_{i2kj}}{n^{2i}}\, a_{2kj} + \frac{t_{in}}{n^{2i}}\, a_n = \left(\frac{\beta}{2n^2}\right)^i, \qquad i = 0, \ldots, p.$$

Uit de limietovergang in (5.2) volgt het stelsel

$$(5.3) \qquad \sum_{j=0}^{p-1} t'_{ij}\, b_j = (\beta')^i, \qquad i = 0, \ldots, p,$$

met

$$\beta' = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta}{2n^2},$$

$$(5.4)\qquad b_j = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_{2kj}, & j = 0, \ldots, p-2, \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n, & j = p-1, \end{cases}$$

$$t'_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 0,\ j = 0, \ldots, p-1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} t_{i2kj}, & i = 1, \ldots, p-1,\ j = 0, \ldots, p-2, \\ \lim\limits_{n\to\infty} t_{in}, & i = 1, \ldots, p-1,\ j = p-1. \end{cases}$$

Deze limietovergang is geoorloofd, daar de oplossingen van (5.2) kontinu afhangen van $\frac{t_{i2kj}}{n^{2i}}$ $(j=0,\ldots,p-2)$ en $\frac{t_{in}}{n^{2i}}$.

Uit berekeningen volgt, dat

$$(5.5)\qquad t'_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{j}{p}\right)^{2i} \frac{1}{1.3\ldots(2i-1)}, & i = 1, \ldots, p,\ j = 0, \ldots, p-2. \\ 1, & i = 0,\ j = 0, \ldots, p-1, \\ \frac{1}{1.3\ldots(2i-1)}, & i = 1, \ldots, p,\ j = p-1. \end{cases}$$

We hoeven dus slechts uit het stelsel (5.3) een vergelijking in β' te verkrijgen door eliminatie en van de oplossingen de grootste te kiezen waarvoor de oplossingen $b_0, \ldots, b_{p-1}$ van (5.3) positief zijn. Op de manier kan men voor willekeurige p een ondergrens van $c_p = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_{max}(n,p)/n^2$ bepalen. We hebben dit voor p = 1, ..., 15 gedaan en de resultaten m_p getabelleerd. Ter vergelijking hebben we daarnaast nog eens de c_p en de M_p uit §1 en §2 getabelleerd. Voor p = 1, ..., 15 is nu dus het kwadratische karakter van $\beta_{max}(n,p)$ bewezen.

p	m_p	c_p	M_p
1	2	2	2
2	0.66667	0.82	1.15470
3	0.36277	0.50	0.81096
4	0.23888	0.33	0.62479
5	0.17403	0.26	0.50809
6	0.13495	-	0.42811
7	0.10915	-	0.36988
8	0.091019	-	0.32559
9	0.077658	-	0.29077
10	0.067454	-	0.26268
11	0.059437	-	0.23953
12	0.052991	-	0.22014
13	0.047707	-	0.20365
14	0.043323	-	0.18946
15	0.03956	-	0.17711

Tabel 4

Literatuur

[1] Houwen, P.J. van der, One step methods for linear initial value problems I; polynomial methods, M.C. report TW119, Mathematisch Centrum (1970).

[2] Houwen, P.J. van der, Kok, J., Numerical solutions of a minimax problem, M.C. report TW123/71, Mathematisch Centrum (1971).

[3] Todd, John (editor), Survey of numerical analysis, MacGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1962).

[4] Szegö, G., Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1967).

[5] Pillis, John de, Linear Algebra, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York (1969).