

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 84/76

NOVEMBER

M. SLUIJTER

ENKELE RANDWAARDEPROBLEMEN UIT DE ELECTROSTATICA

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
—AMSTERDAM—

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Enkele randwaardeproblemen uit de electrostatica

door

M. Sluijter

ABSTRACT

Een aantal basistechnieken van de theorie van randwaardeproblemen wordt behandeld, zoals de methode van beelden, conforme afbeeldingen en ontwikkelen in eigenfuncties.

Enkele toepassingen op het gebied van de electrostatica worden behandeld.

TREFWOORDEN: *Randwaardeproblemen, Electrostatica.*

INHOUD

1. Voorwoord	<i>i</i>
2. Inleiding	1
3. Begin- en randvoorwaarden	2
4. Existentie en eenduidigheid	3
5. Toepassingsgebieden	3
6. Scheiding van variabelen.	4
7. Formulering van het probleem	6
8. Het randwaardeprobleem voor ϕ	7
9. Methode der beelden	9
10. Lijnbronnen	12
11. Transformatie van het assenstelsel	16
12. De stellingen van Gauss, Green en Stokes	18
13. Fourierreeksen	20
14. Een puntbron tussen twee vlakke platen	23
15. Puntbron op de as van een oneindige cylinder.	25
16. Momentane puntbron tussen twee vlakke platen	27
17. Puntbron in oneindige cylinder (niet op de as).	30
18. Eenduidigheid en existentie van oplossingen	32
19. De integraalformule van Poisson	35
Literatuur.	37

1. VOORWOORD

Het volgende is een uitbreiding van een scriptie bij een tentamen randwaardeproblemen van Prof.dr. H.A. Lauwerier. Een aantal opmerkingen van hem zijn hierin verwerkt, evenals suggesties van medewerkers en assistenten van de afdeling toegepaste wiskunde van het Mathematisch Centrum.

2. INLEIDING

In dit rapport worden enkele problemen uit de electrostatica bestudeerd. Het gaat hierbij om een puntbron tussen twee vlakke platen en een puntbron in een oneindige cylinder. Alvorens deze problemen uitgebreid te behandelen, geven we een overzicht van de benodigde wiskundige theorie van randwaardeproblemen.

Het onderwerp randwaardeproblemen, dat beter de klassieke theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen kan worden genoemd, houdt zich in hoofdzaak bezig met de bestudering van drie partiële differentiaalvergelijkingen:

- (a) de potentiaalvergelijking of vergelijking van Laplace
- (b) de golfvergelijking
- (c) de warmte- of diffusievergelijking.

De vergelijking van Laplace wordt in de drie ruimtecoördinaten x, y, z gegeven door

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

ook wel met behulp van de Laplaciaan Δ verkort geschreven als

$$(2.1) \quad \Delta \phi = 0.$$

Evenzo wordt de golfvergelijking in de drie ruimtecoördinaten x, y, z en de tijdsvariabele t gegeven door

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

ook wel met behulp van de d'Alembertiaan \square verkort geschreven als

$$- \square \phi = 0.$$

De warmtevergelijking is de vergelijking

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

We kunnen meteen al opmerken dat een opdracht als bijvoorbeeld "los vergelijking (2.1) op" onjuist gesteld is. Als ϕ een oplossing is van (2.1), dan is ook $\phi + C$ voor een willekeurige constante C een oplossing. Als ϕ en ψ twee oplossingen van (2.1) zijn, dan is $a\phi + b\psi$ voor willekeurige a en b uit \mathbb{R} ook een oplossing van (2.1).

Hetzelfde geldt voor oplossingen van vergelijking (2.2) en (2.3). Ook kunnen we nog opmerken dat $\phi + \psi$ een oplossing is van (2.2) (of (2.3)) als ϕ een oplossing is van (2.1) en ψ een oplossing van (2.2) (of (2.3)).

Gewoonlijk verwachten we van een probleem dat het ten eerste oplosbaar is en ten tweede precies één oplossing heeft. De manier om te zorgen dat we ten hoogste één oplossing hebben is het opleggen van randvoorwaarden. Deze moeten dan wel zodanig zijn dat het probleem ook tenminste één oplossing heeft. Ter vergelijking kan men denken aan een tweede orde gewone differentiaalvergelijking op een begrensd interval.

3. BEGIN- EN RANDVOORWAARDEN

Laat een begrensd gebied D in \mathbb{R}^3 gegeven zijn; een gebied is een open samenhangende verzameling. Zij ∂D de rand van D , $\partial D = \bar{D} \cap (\mathbb{R}^3 \setminus D)$. Zij gevraagd een functie ϕ die binnen D aan (2.1) voldoet. Om een zinvol probleem te krijgen komen de volgende extra voorwaarden, randvoorwaarden genaamd, in aanmerking.

- (a) Dirichlet voorwaarde: $\phi = f$ op ∂D , d.w.z. de waarde van ϕ op de rand wordt voorgeschreven. In het speciale geval $f \equiv 0$ spreken we van homogene randvoorwaarde.
- (b) Neumann voorwaarde: $\frac{\partial \phi}{\partial n} = f$ op ∂D , d.w.z. de flux van ϕ over de rand wordt voorgeschreven: $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ is de normaalafgeleide van ϕ .
- (c) Gemengde randvoorwaarde: $\frac{\partial \phi}{\partial n} + h\phi = f$ op ∂D .

Nu kan bewezen worden dat er precies één ϕ is die binnen D aan (2.1) voldoet en op de rand ∂D aan één van de hier gegeven randvoorwaarden als ten eerste de rand van f niet te onregelmatig is en ten tweede de functie f in de randvoorwaarde voldoende glad is. Het probleem is dan goed gesteld.

De randvoorwaarden die we hier hebben gegeven worden ook gebruikt bij de vergelijkingen (2.2) en (2.3), maar bij die vergelijkingen moet ook een beginvoorwaarde worden gegeven: de waarde van ϕ in ieder punt van D moet op een vast tijdstip, gewoonlijk $t = 0$, gegeven worden.

Voor D kan ook een onbegrensd gebied worden genomen. We moeten dan randvoorwaarden "in het oneindige" opleggen.

4. EXISTENTIE EN EENDUIDIGHEID

Om een indruk te geven van het soort bewijzen dat hierbij gebruikt wordt, tonen we in §18 de existentie en eenduidigheid van een oplossing van vergelijking (2.1) in een begrensd gebied met Dirichlet randvoorwaarde aan.

De eenduidigheid is gewoonlijk het eenvoudigst en gaat met behulp van het zogenaamde maximumprincipe. De existentie is in het algemeen veel moeilijker. Bij specifieke problemen is het dikwijls eenvoudiger de existentie van een oplossing te bewijzen door het probleem op te lossen (in zekere zin doen we dit in §6 voor een bepaalde klasse problemen).

Een fysische aanpak is de volgende: vergelijking (2.1) met Dirichlet voorwaarde is een wiskundig model van een geleider van vorm ∂D met lading f . De oplossing ϕ is de elektrische potentiaal binnen deze geleider. Het is fysisch duidelijk dat deze potentiaal bestaat en uniek is.

Het bezwaar van dit existentiebewijs is dat we moeten aannemen dat het wiskundig model ((2.1) met Dirichlet voorwaarde) de correcte beschrijving is van de fysische situatie. Dit is nogal onbevredigend en bovendien niet helemaal waar. De voornaamste reden om algemene existentiebewijzen te zoeken is echter toch wel dat dit een eerste stap is voor het bewijzen van existentie van oplossingen voor ingewikkelde problemen.

5. TOEPASSINGSGEBIEDEN

Als we een vast lichaam (met vorm D) met een temperatuur van 20° in een bad vloeistof leggen dat op een constante temperatuur van 0° wordt gehouden, dan zal na enige tijd het lichaam een temperatuur van 0° hebben. De temperatuur $\phi(x,y,z,t)$ in het lichaam wordt in goede benadering beschreven door de oplossing van de warmtevergelijking (2.3) binnen D met homogene rand-

voorwaarde op ∂D . Dat dit alleen een benadering is volgt al uit het feit dat het lichaam volgens het model pas na oneindig lange tijd een temperatuur van 0° heeft, hetgeen kennelijk in strijd met de ervaring is.

De golfvergelijking wordt gebruikt om allerlei verschijnselen waarbij trillingen een rol spelen te beschrijven, zoals bijvoorbeeld de beschrijving van een trillende snaar (dan een \bar{e} ndimensionale golfvergelijking), problemen van geluidsoverbrenging en problemen uit de electrodynamica.

Veelal bevat vergelijking (2.2) een factor C^{-2} voor de term $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$, maar deze kan worden "weggeschaald" door op de nieuwe tijdsvariabele $t' = ct$ over te gaan. Op deze manier kan ook ϕ dimensieloos worden gemaakt.

De potentiaalvergelijking wordt gebruikt om problemen te beschrijven waarbij gravitatie een rol speelt en in het bijzonder voor problemen uit de electrostatica, waar we in §7 en 8 uitgebreid op terugkomen.

6. SCHEIDING VAN VARIABELEN

Stel eens dat een oplossing $\phi(x,y,z)$ van vergelijking (2.1) is te schrijven als

$$(6.1) \quad \phi(x,y,z) = f(x)g(y)h(z).$$

Invullen in (2.1) en delen door $f(x)g(y)h(z)$ levert:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{1}{h(z)} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0.$$

De drie termen in het linkerlid zijn onafhankelijk van elkaar. In het bijzonder zijn de eerste twee samen onafhankelijk van de derde. Dat wil zeggen dat er een constante C_1 bestaat zodat

$$\frac{1}{h(z)} \frac{d^2 h}{dz^2} = -C_1$$

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g}{dy^2} = C_1.$$

Er is dan ook een constante C_2 (herhaling van hetzelfde argument) zodat

$$(6.2) \quad \frac{1}{h(z)} \frac{d^2 h}{dz^2} = -C_1$$

$$(6.3) \quad \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2} = -C_2$$

$$(6.4) \quad \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g}{dy^2} = C_1 + C_2.$$

Dit zijn drie gewone differentiaalvergelijkingen waarvan we de algemene oplossingen zonder moeite kunnen opschrijven. We krijgen drie functies f, g en h , gekoppeld door de constanten C_1 en C_2 ; laten we deze functies aanduiden met $f(x, -C_2)$, $g(y, C_1 + C_2)$ en $h(z, -C_1)$.

Tot nu toe is dit alleen formeel gemanipuleer met formules: we hebben maar aangenomen dat (6.1) geldt en we hebben ook nog gedeeld door $f(x)g(y)h(z)$. Maar we kunnen nu als het ware andersom gaan redeneren. Het is immers zeker wel waar dat voor alle C_1 en C_2 het product $f(x, -C_2)g(y, C_1 + C_2)h(z, -C_1)$ een oplossing is van (2.1) en ook iedere lineaire combinatie van zulke producten.

Zij nu een gebied D gegeven waarbinnen ϕ aan (2.1) moet voldoen terwijl op ∂D moet gelden $\phi = \psi$ voor zekere gegeven ψ . Als we nu deelverzamelingen A en B van \mathbb{R} kunnen vinden zodanig dat voor alle $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \partial D$ geldt:

$$(6.5) \quad \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{C_1 \in A} \sum_{C_2 \in B} f(\bar{x}, -C_2)g(\bar{y}, C_1 + C_2)h(\bar{z}, -C_1),$$

dan is kennelijk

$$(6.6) \quad \phi(x, y, z) = \sum_{C_1 \in A} \sum_{C_2 \in B} f(x, -C_2)g(y, C_1 + C_2)h(z, -C_1),$$

een oplossing van (2.1) die voldoet aan $\phi = \psi$ op ∂D . Op grond van de eenduidigheid is dit ook de oplossing.

Als de rand ∂D en de randfunctie ψ zodanig zijn dat de ontwikkeling (6.5) mogelijk is, dan kunnen we dus het probleem oplossen; dit is een existentiebewijs voor dit soort problemen.

Als het gebied D een kubus is, dan is de ontwikkeling in de functies f, g en h voor de hand liggend. Als echter D bijvoorbeeld een bol is, dan zal het gewoonlijk verstandig zijn eerst vergelijking (2.1) in bolcoördinaten te schrijven en dan pas te splitsen in functies f, g en h (en dan natuurlijk $f(r)$, $g(\theta)$ en $h(\psi)$ (zie §11)).

De hier beschreven techniek wordt het scheiden van variabelen genoemd; de functies f , g en h heten bouwstenen.

7. FORMULERING VAN HET PROBLEEM

In de volgende paragrafen zullen een aantal toepassingen behandeld worden van het scheiden van variabelen. Een methode die nog niet genoemd is, maar die wel gebruikt zal worden, is de methode der beelden (§9 en §10). §10 is de enige waarin tweedimensionale problemen ter sprake zullen komen. Hoewel de vergelijkingen (2.1), (2.2) en (2.3) ook in één- en tweedimensionale vorm gebruikt worden (en dan ook essentieel andere oplossingen kunnen hebben) zullen wij ons concentreren op driedimensionale problemen. Bovendien beperken wij ons tot vergelijking (2.1) met homogene randvoorwaarden. Dit alles om een zekere samenhang te krijgen; de hier gebruikte technieken zijn overigens ook toepasbaar op andere problemen.

Als referentiekader gebruiken we de electrostatica; alle toepassingen zijn van de volgende vorm: gevraagd de potentiaal t.g.v. een puntbron in aanwezigheid van een geaarde geleider. Onder een puntbron of puntlading (evenals onder een testlading) verstaat men een lading, die in één punt geconcentreerd is.

Interactie tussen deeltjes wordt beschreven met behulp van het begrip veld. Het veld van een puntlading kan worden waargenomen door een testlading in de ruimte te plaatsen en de kracht te meten die de testlading ondervindt. Bij nauwkeurige metingen blijkt het veld zich met een eindige snelheid voort te planten (in vacuum de lichtsnelheid). Een elektrisch veld is dus een fysische realiteit en het heeft dus zin te spreken over bijvoorbeeld het veld van een puntbron in een verder lege ruimte.

Twee deeltjes met lading e resp. e_1 op een afstand r van elkaar oefenen op elkaar een kracht

$$F = \frac{-e_1 e}{R^2}$$

uit, gericht langs de verbindingslijn. De potentiële energie is dan

$$U = \frac{ee_1}{R} .$$

U is gedefinieerd door de relatie

$$F = - \frac{dU}{dR}$$

en dus slechts op een constante na bepaald.

In feite is F natuurlijk een vector \vec{F} . In de electrostatica wordt de veldsterkte \vec{E} gedefinieerd door

$$\vec{E} = \frac{1}{e_1} \vec{F}.$$

De potentiaal, een scalar, die in de electrostatica met ϕ wordt aangeduid, wordt gedefinieerd door

$$\vec{E} = \nabla\phi.$$

De betekenis van het teken ∇ komt in §12 ter sprake. Waar het ons hier om gaat is dat de potentiaal ten gevolge van een puntbron met lading e in de oorsprong in een verder lege ruimte gelijk is aan

$$(7.1) \quad \phi = \frac{e}{R}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ook de potentiaal is slechts op een constante na bepaald, maar door de keuze (7.1) is $\phi = 0$ alleen als $R = \infty$. Een gevolg daarvan is dat de potentiaal op een geaarde geleider (al dan niet in aanwezigheid van een puntbron) nul is.

Als in de ruimte een puntbron aanwezig is en een geaarde geleider van een eenvoudige geometrische gedaante, dan kunnen we de potentiaal dikwijls bepalen met behulp van de methode der beelden. Als dat niet lukt, dan moeten we gebruik maken van één van de wetten van Maxwell.

8. HET RANDWAARDEPROBLEEM VOOR ϕ

Uit de wetten van Maxwell volgt dat in vacuum voor de potentiaal ϕ moet gelden:

$$(8.1) \quad \Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

waar c de lichtsnelheid is. Eventueel aanwezige geleiders worden uitgedrukt in de randvoorwaarden; als de geleiders geaard zijn, is $\phi = 0$ op de geleiders. Indien een puntbron, b.v. in de oorsprong, aanwezig is, dan zal in de puntbron niet voldaan zijn aan (8.1): we weten dat daar de potentiaal

oneindig is (want $\phi = \frac{e}{R}$, (7.1)). In het wiskundig model kunnen we dit uitdrukken door de oorsprong als een extra randpunt op te vatten. Als randvoorwaarde eisen we dan dat

$$(8.2) \quad \left| \phi(x,y,z) - \frac{e}{R} \right| \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow 0.$$

Bij de invoering van \vec{E} en ϕ in §7 hebben we een enigszins ongebruikelijke schaling gehanteerd. Gewoonlijk wordt gesteld, dat de potentiaal t.g.v. een puntbron met lading q in de oorsprong in een verder lege ruimte, gelijk is aan

$$\frac{q}{4\pi\epsilon R},$$

waar ϵ een medium-afhankelijke constante is (in vacuum 8.85×10^{-12} farad/meter). We zullen q steeds zo gekozen denken, dat $q/4\pi\epsilon = 1$.

We zullen ons verder bezighouden met het geval van een stilstaande, continu aanwezige puntbron, op twee uitzonderingen na: in §10 zullen lijnbronnen ter sprake komen en in §16 behandelen we een voorbeeld van een momentane puntbron. Maar afgezien van dit laatste voorbeeld is overal ϕ onafhankelijk van de tijd en we kunnen (8.1) dus vervangen door

$$(2.1) \quad \Delta\phi = 0.$$

In vacuum wordt vergelijking (2.1) geacht exact te zijn, maar hij geldt ook in vele homogene, isotrope, niet geleidende media. In de directe omgeving van een puntbron mogen we niet meer genoeg nemen met de idealisatie, dat we een puntbron als punt zonder uitgebreidheid opvatten: bij afstanden van de orde $h/mc \approx 10^{-10}$ cm. gaan quantumeffecten een rol spelen.

Als een puntbron in de oorsprong aanwezig is, dan geldt (2.1) niet in de oorsprong. We kunnen nu (2.1) vervangen door

$$(8.3) \quad \Delta\phi = 4\pi\delta(R).$$

$\delta(R)$ is geen functie (hoewel dikwijls δ -functie genoemd), maar een distributie. We willen niet dieper ingaan op de theorie van de distributies en vatten (8.3) alleen op als verkorte schrijfwijze voor

$$(8.4) \quad \begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ buiten } R = 0 \\ (8.2) \text{ geldt.} \end{cases}$$

We kunnen dus $\delta(R)$ definiëren als

$$\delta(R) = \frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{R}.$$

OPMERKING. Distributies worden gewoonlijk ingevoerd met behulp van functionaalanalyse. Zie b.v. [16, hoofdstuk 6]. Om enig idee te geven van de δ -distributie zonder dergelijke hulpmiddelen het volgende: Zij ψ een functie gedefinieerd op $(-\infty, \infty)$, continu en begrensd. De rij functies s_k heet een δ -benaderende rij als

$$(8.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_k(x) \psi(x) dx = \psi(0).$$

Een voorbeeld van zo'n rij is de rij $\{s_k\}$ gedefinieerd door

$$(8.6) \quad s_k(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \exp[-k^2(x^2 + y^2 + z^2)].$$

De δ -distributie verkrijgt men wanneer men in (8.5) de (klassieke niet toegestane) verwisseling van limiet en integratie toepast, zodat we dan formeel kunnen opschrijven

$$(8.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \psi(x) dx = \psi(0).$$

In het linkerlid staat echter geen integraal meer in de gebruikelijke zin. Door verschuiving krijgen we de relatie

$$(8.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \psi(x) dx = \psi(a).$$

We zullen deze laatste twee formules nog enkele malen gebruiken.

9. METHODE DER BEELDEN

Zij gegeven een puntbron in $(0, 0, a)$ en zij het gehele xy -vlak een geaarde geleider. Wat is de potentiaal?

Het is duidelijk dat $\phi = 0$ voor $z \leq 0$. Verder is de potentiaal t.g.v. de puntbron alleen: $[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{-\frac{1}{2}}$. Als we nu een tegengesteld geladen puntbron in $(0,0,-a)$ plaatsen en de geleider even wegdenken, dan is de potentiaal ϕ' t.g.v. de twee puntbronnen:

$$(9.1) \quad \phi' = [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{-\frac{1}{2}} - [x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

ϕ' voldoet aan $\phi'(x,y,0) = 0$. Als we nu ϕ definiëren als $\phi = \phi'$ voor $z \geq 0$, $\phi = 0$ voor $z \leq 0$, dan is aan alle voorwaarden voldaan en ϕ is dus de juiste oplossing van het probleem.

VOORBEELD 9.1. Een puntbron in $(0,a,b)$; het xy -vlak en het xz -vlak zijn geaarde geleiders.

Op dezelfde wijze als hierboven vinden we:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \phi = & [x^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2]^{-\frac{1}{2}} - [x^2 + (y+a)^2 + (z-b)^2]^{-\frac{1}{2}} + \\ & - [x^2 + (y-a)^2 + (z+b)^2]^{-\frac{1}{2}} + [x^2 + (y+a)^2 + (z+b)^2]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

VOORBEELD 9.2. Een puntbron tussen twee vlakke geaarde platen.

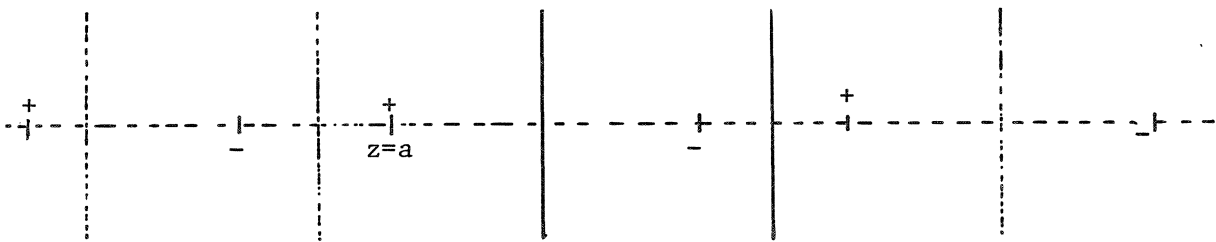


fig. 1

De puntbron in $z = a$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; platen $\{z=0\}$ en $\{z=L\}$.

Spiegelen levert negatieve beelden in $z = 2kL+a$ en positieve beelden in $z = 2kL-a$ ($k \in \mathbb{Z}$). Enige voorzichtigheid is nu geboden: we kunnen niet opschrijven

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [r^2 + (z - (2kL+a))^2]^{-\frac{1}{2}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} [r^2 + (z + (2kL-a))^2]^{-\frac{1}{2}}$$

want beide reeksen divergeren. Dit was ook wel te voorzien, want de reeksen beschrijven resp. de potentiaal t.g.v. een oneindig aantal negatieve puntladingen en een oneindig aantal positieve puntladingen. Het is nu ook op fysische gronden in te zien hoe we de bronnen moeten combineren om een convergent resultaat te krijgen:

$$(9.3) \quad \phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ [r^2 + (z - (2kL+a))^2]^{-\frac{1}{2}} - [r^2 + (z + (2kL-a))^2]^{-\frac{1}{2}} \}.$$

We kunnen ons afvragen wat het numerieke gedrag van dit resultaat is. We zullen aan deze formule het meeste hebben als alleen de bron en hoogstens de eerste paren reflecties een belangrijke bijdrage leverend.w.z. als we het veld willen bepalen in een punt dichtbij de puntbron.

VOORBEELD 9.3. Een puntbron buiten een geaarde bol.

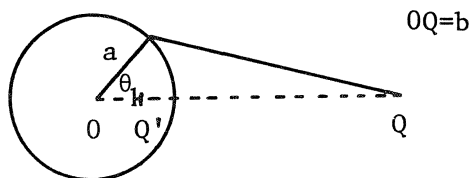


fig. 2

Bol om de oorsprong, puntbron in $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, $z = b$.

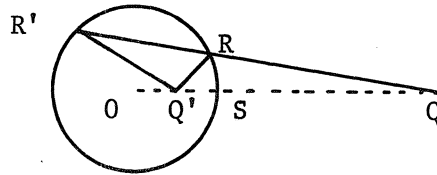


fig. 3

We zoeken een punt Q' met lading q' op OQ (op grond van symmetrie), zodat

$$\frac{1}{QR} = \frac{q'}{Q'R} , \quad \frac{1}{QR'} = \frac{q'}{Q'R'} .$$

Q' bestaat en ligt op de poollijn van Q t.o.v. de cirkel; er geldt

$$OQ' = a^2 b^{-1} .$$

Om de lading q' te bepalen kijken we naar S . De potentiaal t.g.v. Q is daar $(b-a)^{-1}$, die t.g.v. Q' is

$$q' (a - a^2 b^{-1})^{-1} .$$

Dus

$$q' = -ab^{-1} .$$

De potentiaal in een willekeurig punt $P = (R, \theta)$ met $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en θ de hoek tussen PO en OQ is nu:

$$\phi = [R^2 + b^2 - 2bR\cos\theta]^{-\frac{1}{2}} - a[b^2 R^2 + a^4 - 2a^2 b R \cos\theta]^{-\frac{1}{2}} .$$

10. LIJNBronnen

In het tweedimensionale geval kan de methode der beelden aanzienlijk uitgebreid worden, door gebruik te maken van conforme afbeeldingen.

De vergelijking

$$\Delta\phi = \delta(x)\delta(y)$$

staat voor een lijnbron, dat is een lading die uniform op de z -as is geconcentreerd. Als geen geleiders aanwezig zijn, dan is

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \ln r + c, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dit is het tweedimensionale analogon van $\phi = \frac{1}{r} + c$ in drie dimensies. We zien dat we nu niet door de keuze van c kunnen zorgen dat $\phi = 0$ voor $r = \infty$. Fysisch was dit ook wel te voorzien, immers de lading is op de (oneindige) z -as aanwezig. We kiezen nu c zodanig, dat de berekeningen het eenvoudigste worden (hier bijvoorbeeld is het wel zo eenvoudig $c = 0$ te stellen).

Het idee van de conforme afbeelding berust op het volgende resultaat uit de functietheorie: een functie $\phi(x,y)$ die voldoet aan $\Delta\phi = 0$ kunnen we opvatten als het reële deel van een functie $f(v)$, $v = x + iy$. Nu volgt (uit de vergelijkingen van Cauchy-Riemann) dat ook het imaginaire deel ψ van f voldoet aan $\Delta\psi = 0$, zodat $\Delta f = 0$. Een conforme afbeelding $\gamma: v \mapsto w$ is nu zodanig, dat ook $\Delta f(w) = 0$ en bovendien een logaritmische singulariteit van $f(v)$ in v_0 afgebeeld wordt op een logaritmische singulariteit van $f(w)$ in $w_0 = \gamma(v_0)$.

Stel nu eens (zie onderstaande figuur) dat gevraagd wordt de functie die aan $\Delta\phi = \delta(\vec{r} - \vec{r}_P)$ voldoet binnen S , terwijl $\phi = 0$ op de rand S (\vec{r} is de vector (x,y) , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

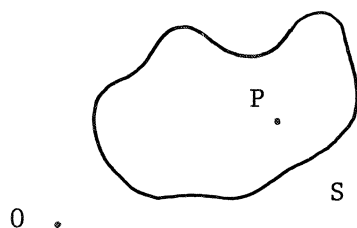


fig. 4

Als we nu een conforme afbeelding $\gamma: z \mapsto w$ kunnen vinden, die het gebied binnen S afbeeldt op het bovenhalfvlak in het w -vlak en S op de reële as in het w -vlak (zie onderstaande figuur), dan kunnen we in het w -vlak direct

$$\bullet P' = \gamma(P)$$

$$\text{-----} S' = \gamma(S)$$

fig. 5

zeggen dat

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(w - \bar{w}_p)}{(w - w_p)}.$$

In het z -vlak is de gezochte ϕ dan:

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(\gamma^{-1} w - \bar{w}_p)}{(\gamma^{-1} w - w_p)},$$

en de potentiaal van een lijnbron, evenwijdig aan de z -as, door P binnen een geaard cilindrisch oppervlak $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in S\}$ is hier dan het reële deel van.

VOORBEELD 10.1. Een lijnbron op de z -as binnen een geaarde cylinder met straal 1.

De afbeelding $\gamma: v \mapsto w = (v - v_0)/(v - \bar{v}_0)$ beeldt het bovenhalfvlak af op het inwendige van een cirkel met straal 1, de reële as op de rand van de cirkel en het punt v_0 op het middelpunt van de cirkel. De potentiaal t.g.v. een lijnbron in v_0 in het bovenvlak met als randvoorwaarde $\phi = 0$ op de reële as is $\phi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(v - \bar{v}_0)}{(v - v_0)}$. De gezochte ϕ is dus het reële deel van $-\frac{1}{2\pi} \ln w$, een resultaat dat we ook wel direct hadden kunnen opschrijven.

VOORBEELD 10.2. Als voorbeeld 10.1, maar de lijnbron niet op de z -as.

De afbeelding $\gamma: v \mapsto w = (v - a)/(1 - \bar{v}a)$ beeldt de eenheidscirkel op zichzelf af en i.h.b. het punt $(x, y) = (a, 0)$ op de oorsprong. In het w -vlak is $\phi = -\frac{1}{2\pi} \ln w$ en de gezochte ϕ is dus het reële deel van $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{(v - a)}{(1 - \bar{v}a)}$.

VOORBEELD 10.3. Een lijnbron tussen twee vlakke platen.

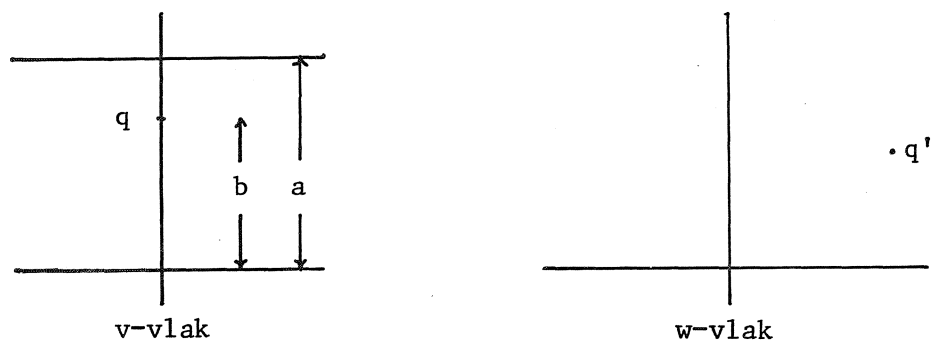


fig. 6

De afbeelding $\gamma: v \mapsto w = e^{\pi z/a}$ beeldt het gebied tussen de platen af op het bovenhalfvlak. De lijnlading in $v = bi$ gaat over in een lijnlading in $w = e^{\pi bi/a}$. In het w -vlak is

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \ln (w - e^{-\pi bi/a}) / (w - e^{\pi bi/a})$$

en dus is de gezochte ϕ het reële deel van

$$\frac{1}{2\pi} \ln (e^{\pi zi/a} - e^{-\pi bi/a}) / (e^{\pi zi/a} - e^{\pi bi/a}),$$

ofwel van

$$\frac{1}{2\pi} \ln [e^{-2\pi bi} \sin \frac{z+b}{2} / \sin \frac{z-b}{2}].$$

VOORBEELD 10.4. Een lijnbron in aanwezigheid van een halfoneindige geleider.

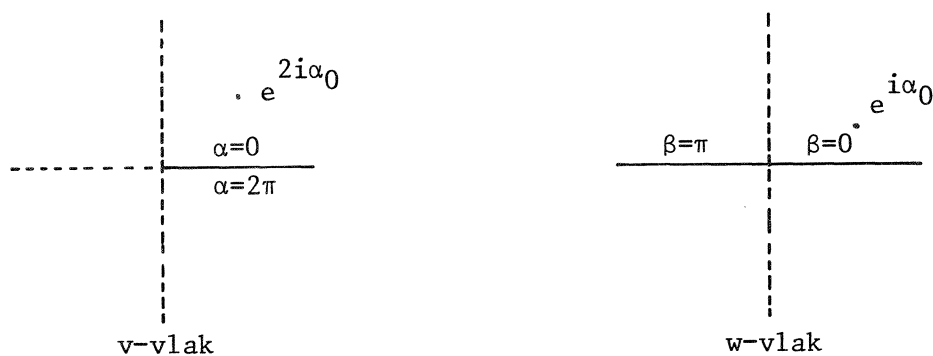


fig. 7

De afbeelding gedefinieerd door $v = w^2$ beeldt het v -vlak af op het

bovenhalfvlak en de halfoneindige positieve reële as op de reële as in het w-vlak. In het w-vlak is

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \ln (re^{i\alpha} - e^{i\alpha_0}) / (re^{i\alpha} - e^{-i\alpha_0}).$$

De gezochte ϕ is dus het reële deel van

$$\frac{1}{2\pi} \ln (\sqrt{r} e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha_0}) / (\sqrt{r} e^{i\alpha/2} - e^{i\alpha_0}).$$

Enige voorzichtigheid is hier geboden. In het v-vlak eisen we dat het argument $\alpha \in [0, 2\pi)$. Hierdoor kan de logaritmische singulariteit van ϕ in $e^{-i\alpha_0}$ niet bereikt worden.

11. TRANSFORMATIE VAN HET ASSENSTELSEL

De meest gebruikte coördinatenstelsels zijn, afgezien van het Cartesische, cylindercoördinaten en bolcoördinaten. Als x , y en z de gebruikelijke Cartesische coördinaten zijn, dan worden de cylindercoördinaten r , θ , z gedefinieerd door

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ (11.1) \quad y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

en de bolcoördinaten r , θ , ψ door

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \psi \\ (11.2) \quad y &= r \sin \theta \sin \psi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Om $\Delta\phi$ in cylinder- en bolcoördinaten te kunnen schrijven, maken we gebruik van de algemene uitdrukking voor de Laplaciaan in orthogonale coördinaten u_1 , u_2 , u_3 (SPIEGEL [19]):

$$(11.3) \quad \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \right].$$

Hierbij worden de h_i gedefinieerd door de relatie:

$$(11.4) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2.$$

Om bijvoorbeeld de h_i in de cylindercoördinaten te bepalen schrijven we $dx^2 = (dr \cos \theta)^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2$ enz., wat uiteindelijk $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$ levert, zodat $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$ en de Laplaciaan in de cylindercoördinaten wordt:

$$(11.4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Analoog vinden we voor de Laplaciaan in bolcoördinaten:

$$(11.5) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}.$$

Als we nu in de vergelijking $\Delta\phi = 0$ in cylindercoördinaten variabelen scheiden, $\phi = f(r)g(\theta)h(z)$, dan krijgen we de volgende drie gewone differentiaalvergelijkingen:

$$(11.6) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(-C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) f(r) = 0$$

$$(11.7) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} g(\theta) + C_2 g(\theta) = 0$$

$$(11.8) \quad \frac{d^2}{dz^2} h(z) + C_1 h(z) = 0.$$

Vergelijking (11.6) definieert een nieuwe klasse functies, Besselfuncties, ofwel cilindrische harmonischen. Als $C_1 = -k^2$ en $C_2 = +m^2$ de functies $J_m(kr)$ en $Y_m(kr)$, en als $C_1 = +k^2$ en $C_2 = +m^2$ de functies $I_m(kr)$ en $K_m(kr)$.

In een aantal toepassingen is op grond van symmetrie-overwegingen in te zien dat de oplossing onafhankelijk van θ moet zijn, zodat dan de tweede vergelijking vervalt en in de eerste $C_2 = 0$ (of $m = 0$).

$J_0(x)$ en $Y_0(x)$ zijn oscillerend (voor x groot gedraagt $J_0(x)$ zich ongeveer als $\sqrt{2/\pi x} \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$), $K_0(x)$ is monotoon dalend en $I_0(x)$ monotoon stijgend.

Voor verdere informatie over Besselfuncties zij verwezen naar BOWMAN [4] of WATSON [23], of het betreffende hoofdstuk in bijvoorbeeld BATEMAN [2] of BYERLY [5]. Het is ook nuttig hoofdstuk 9 van ABRAMOWITZ & STEGUN [1] eens door te kijken.

Het variabelen scheiden in het geval de Laplaciaan in bolcoördinaten is gegeven, komt ter sprake in §19. Ook daar vinden we een nieuwe klasse functies, de Legendre polynomen of spherische harmonischen. Verdere informatie over andere assenstelsels zoals parabolische en elliptische kan men bijvoorbeeld vinden in STRATTON [20], p.126 e.v.

12. DE STELLINGEN VAN GAUSS, GREEN EN STOKES

Hoewel we van deze stellingen verder geen gebruik maken, vermelden we ze hier toch even. We zullen ons daartoe even met vectoranalyse bezig moeten houden.

We definiëren de vector differentiaaloperator del: ∇ als de vector

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Als ϕ een scalar is, dan is de divergentie $\nabla\phi$ van ϕ de vector

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right).$$

Als \vec{v} een vector (v_1, v_2, v_3) is, dan is het inproduct $\nabla \cdot \vec{v}$ de scalar

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3},$$

en het uitproduct $\nabla * \vec{v}$ de vector

$$\nabla * \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right).$$

In het bijzonder geldt voor de Laplaciaan:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla.$$

Als ϕ een functie is gedefinieerd op een begrensde gebied D , dan is de inhoudsintegraal van ϕ over D de uitdrukking

$$\iiint_D \phi \, dV.$$

Het ruimte-element dV is in algemene orthogonale coördinaten u_1, u_2, u_3 gelijk aan $h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ (zie §11). Zo is de inhoudsintegraal over de eenheidskubus met zijden $(0,1)$ gelijk aan

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi \, dx dy dz$$

en de inhoudsintegraal over een cylinder met straal 1 en hoogte h :

$$\int_0^1 \int_0^h \int_0^{2\pi} \phi \, r \, d\theta dz dr.$$

De oppervlakte-integraal van ϕ over de rand ∂D is de uitdrukking

$$\int \int_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

$d\vec{s}$ is hier de normaal op het oppervlakte-element ds met als lengte de oppervlakte van ds . Met de eenheidsnormaal \vec{n} kunnen we hiervoor ook schrijven

$$\int \int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds.$$

Zij nu D een begrensde gebied en \vec{v} een vector.

Divergentiestelling van Gauss

$$\int \int \int_D \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \int \int_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Dikwijls wordt deze stelling geformuleerd met i.p.v. \vec{v} de vector $\nabla\phi$ voor één of andere scalaire ϕ :

$$\int \int \int_D \Delta\phi \, dV = \int \int_{\partial D} \nabla\phi \cdot d\vec{s}.$$

BEWIJS. SPIEGEL [19], p.117. \square

Eerste stelling van Green

$$\int \int \int_D [\phi \Delta\psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)] dV = \int \int_{\partial D} (\phi \nabla\psi) \cdot d\vec{s}.$$

BEWIJS. Kies $\vec{v} = \phi \nabla \psi$ in de stelling van Gauss en gebruik

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi (\nabla \cdot \nabla) \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) = \phi \Delta \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi). \quad \square$$

Tweede stelling van Green

$$\iiint_D (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = \iint_{\partial D} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{s}.$$

BEWIJS. Trek van de eerste stelling van Green, zoals hier gegeven, dezelfde relatie met ϕ en ψ verwisseld af. \square

Stelling van Stokes

$$\iint_s \nabla * \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_{\partial s} \vec{v} \cdot \vec{t} ds,$$

s een begrensde oppervlak in \mathbb{R}^3 , $d\sigma$ het oppervlakte-element, \vec{n} de normaal op het oppervlak, \vec{t} de raaklijn aan de rand.

BEWIJS. SPIEGEL [19], p.127. \square

13. FOURIERREEKSEN

Het zou te ver voeren hier de theorie van Fourierreeksen uitgebreid te behandelen, zodat we volstaan met enkele opmerkingen.

Iedere functie f van begrensde variatie, gedefinieerd op het interval $(0, \pi)$, heeft een convergente Fourierreeks

$$(13.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

en er geldt puntsgewijs

$$(13.2) \quad \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx,$$

waarbij

$$(13.3) \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Verder geldt

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} \sin a\lambda \sin ax da$$

en

$$(13.4) \quad \int_0^{\infty} f(\lambda) \sin a\lambda d\lambda = \tilde{f}(a)$$

heet de sinusgetransformeerde van f . Als we in de uitdrukking voor $f(x)$ de integraties verwisselen, dan krijgen we

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \sin a\lambda \sin ax da \right] f(\lambda) d\lambda$$

en vergelijken we dit met (8.8), dan blijkt, althans formeel, te gelden dat

$$(13.5) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin a\lambda \sin ax da = \delta(\lambda-x).$$

Als literatuur bevelen we het zeer leesbare boekje van BYERLY [5] aan, hoewel daar natuurlijk niet de notatie $\delta(\lambda-x)$ voorkomt, aangezien die nog niet bestond.

Men lette er op dat de constante term voor de integraal niet door alle schrijvers hetzelfde wordt gekozen.

Als een functie $f(r)$ van begrensde variatie is gegeven op een interval $(-a, a)$, dan kan $f(r)$ ontwikkeld worden in Besselfuncties. Als bijvoorbeeld $f(-a) = f(a) = 0$, dan kan f geschreven worden als

$$(13.6) \quad f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(\mu_m r),$$

waarbij de μ_m zodanig gekozen zijn dat $J_n(\mu_m a) = 0$. Ook nu bestaat een analogon van de sinusgetransformeerde: de Hankelgetransformeerde.

Bij de eerste toepassingen hebben we niet meer theorie nodig. We maken gebruik van tafels van Hankeltransforms, i.h.b. van de tafel van Hankeltransforms van orde 0 in ERDÉLYI [8], Vol. 2. In deze tafel staat aan de linkerkant $f(x)$, aan de rechterkant

$$(13.7) \quad g(y) = \int_0^{\infty} f(x) J_0(xy) (xy)^{\frac{1}{2}} dx, \quad y > 0.$$

In de volgende paragrafen blijkt hoe we dit kunnen toepassen.

Wat we hopen duidelijk te maken is, dat voor het oplossen van eenvoudige problemen een uitgebreide kennis van de theorie van distributies en van Fourier- en Besselfuncties niet nodig is: enige basiskennis en gebruik maken van formules is voldoende.

Wel hebben we nog de formule voor de A_m in (13.6) nodig. Uit (13.6) volgt:

$$\int_0^a r J_n(\mu_\rho r) f(r) dr = \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} A_m r J_n(\mu_\rho r) J_n(\mu_m r) dr.$$

Nu geldt dat voor $\rho \neq m$:

$$(13.8) \quad \int_0^a r J_n(\mu_\rho r) J_n(\mu_m r) dr = 0,$$

zodat

$$(13.9) \quad A_m = \frac{\int_0^a r f(r) J_n(\mu_m r) dr}{\int_0^a r [J_n(\mu_m r)]^2 dr},$$

of, door gebruik te maken van

$$(13.10) \quad \int_0^a r [J_n(\mu_m r)]^2 dr = \frac{1}{2} a^2 [J_{n+1}(\mu_m a)]^2,$$

$$(13.11) \quad A_m = \frac{2}{a^2 [J_{n+1}(\mu_m a)]^2} \int_0^a r f(r) J_n(\mu_m r) dr.$$

14. EEN PUNTBRON TUSSEN TWEE VLAKKE PLATEN

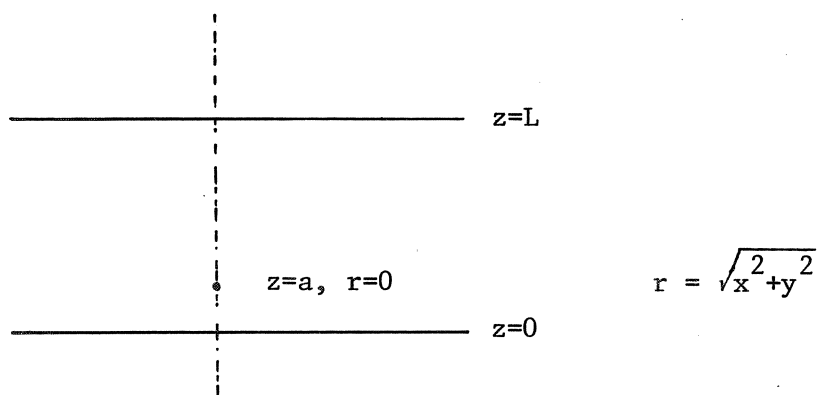


fig. 8

Een eerste oplossing hebben we reeds gevonden in §9. We zoeken nu een oplossing van het randwaardeprobleem

$$(14.1) \quad \Delta\phi = \delta(x)\delta(y)\delta(z-a)$$

$$(14.2) \quad \phi \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad r \rightarrow \infty$$

$$(14.3) \quad \phi = 0 \quad \text{als} \quad z = 0$$

$$(14.4) \quad \phi = 0 \quad \text{als} \quad z = L.$$

We schrijven nu ϕ als $\phi_1 + \phi_2$, waarbij ϕ_1 voldoet aan (14.1) en (14.2), d.w.z. $\phi_1 = [r^2 + (z-a)^2]^{-\frac{1}{2}}$. We krijgen dan voor ϕ_2 een probleem als (14.1)-(14.4) maar nu

$$(14.5) \quad \Delta\phi_2 = 0$$

$$(14.6) \quad \phi_2 \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad r \rightarrow \infty$$

$$(14.7) \quad \phi_2 = -\phi_1 \quad \text{als} \quad z = 0$$

$$(14.8) \quad \phi_2 = -\phi_1 \quad \text{als} \quad z = L.$$

Het is nu een aanmerkelijke vereenvoudiging niét de ϕ_1 van hierboven, maar

$$(14.9) \quad \phi_1 = [r^2 + (z-a)^2]^{-\frac{1}{2}} - [r^2 + (z+a)^2]^{-\frac{1}{2}},$$

d.w.z. we spiegelen de bron t.o.v. $z = 0$. Het voordeel is nu dat $\phi_1 = 0$ als $z = 0$, zodat (14.7) vereenvoudigt tot

$$(14.10) \quad \phi_2 = 0 \quad \text{als} \quad z = 0.$$

Het is duidelijk dat ϕ_2 alleen afhangt van r en z . Als we variabelen scheiden met de Laplaciaan in cylindercoördinaten, krijgen we (11.6) en (11.8) (en $C_2 = 0$ in (11.6)). We kiezen $C_1 = -k^2$ en als algemene oplossing van (11.6) krijgen we $f(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr)$, als algemene oplossing van (11.8) $h(z) = Csh(kz) + Dch(kz)$. Door $B = 0$ te stellen en $D = 0$ (omdat $h(0) = 0$ op grond van (14.10)) hebben we dus als bouwstenen $J_0(kr)sh(kz)$. We zoeken nu voor ϕ_2 een uitdrukking van de vorm

$$\sum_k \alpha_k(a,L) J_0(kr) sh kz,$$

of

$$\int \alpha_k(a,L) J_0(kr) sh kz dk,$$

met nader te bepalen α_k en sommatie- resp. integratiegrenzen.

Zowel de reeks- als de integraalvoorstelling kunnen gebruikt worden. Dat we de voorkeur geven aan de integraalvoorstelling, berust op het feit dat we beschikken over tabellen met Hankeltransforms (ERDÉLYI [8]). We vinden dan:

$$\int_0^\infty \alpha_k J_0(kr) sh kL dk = [r^2 + (L+a)^2]^{-\frac{1}{2}} - [r^2 + (L-a)^2]^{-\frac{1}{2}} = -\phi_1(r,L),$$

ofwel (om in het linkerlid de vorm $\int_0^\infty f(x) J_0(xy) \sqrt{xy} dx$ te verkrijgen):

$$\int_0^\infty \frac{\alpha_k sh kL}{\sqrt{k}} J_0(kr) \sqrt{kr} dk = \frac{\sqrt{r}}{[r^2 + (L+a)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{r}}{[r^2 + (L-a)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nu zoeken we het rechterlid op en vinden:

$$\frac{\alpha_k \operatorname{sh} kL}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(e^{-k(L+a)} - e^{-k(L-a)} \right),$$

zodat

$$\alpha_k = \frac{-2e^{-kL} \operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kL}$$

en

$$\phi_2 = -2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-kL} \operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kL} \operatorname{sh} kz J_0(kr) dk.$$

$\phi_1 + \phi_2$ is gelijk aan de ϕ in (9.3), op grond van de eenduidigheid een manier om dergelijke gelijkheden te vinden.

15. PUNTBRON OP DE AS VAN EEN ONEINDIGE CYLINDER

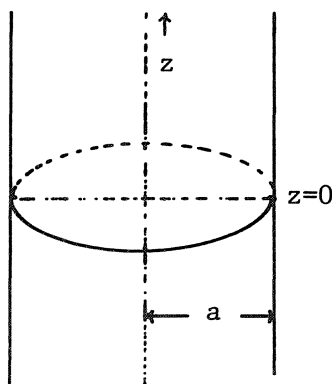


fig. 9

Wij schrijven weer ϕ als $\phi_1 + \phi_2$ met

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Voor ϕ_2 kiezen we nu i.p.v. de bouwstenen $J_0(kr)$ sh kz de bouwstenen $I_0(kr) \cos kz$ (door $C_1 = +k^2$ te kiezen). We zoeken de oplossing in de vorm

$$(15.1) \quad \phi_2 = \int_0^{\infty} \alpha(k, a) I_0(kr) \cos kz \, dk.$$

$\alpha(k, a)$ moet dus voldoen aan

$$(15.2) \quad \phi_2(a, z) = \int_0^{\infty} \alpha(k, a) I_0(ka) \cos kz \, dk = \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} = -\phi_1(a, z).$$

We kunnen nu de formule van Basset gebruiken:

$$(15.3) \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(ka) \cos kz \, dk.$$

Als we (15.2) en (15.3) vergelijken, dan volgt meteen:

$$\alpha(k, a) = -\frac{2}{\pi} \frac{K_0(ka)}{I_0(ka)}$$

en dus is

$$(15.4) \quad \phi_2(r, z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(ka) I_0(kr)}{I_0(ka)} \cos kz \, dk$$

en de volledige oplossing is dus, als we de formule van Basset voor ϕ_1 gebruiken:

$$(15.5) \quad \phi(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(ka) K_0(kr) - K_0(ka) I_0(kr)}{I_0(ka)} \cos kz \, dk.$$

Natuurlijk is formule (15.3) de reden dat we $I_0(kr) \cos kz$ als bouwstenen voor ϕ_2 gebruikt hebben. Het is dikwijls verstandig meerdere combinaties bouwstenen te bekijken en dan pas een keuze te maken. Verder merken we op dat we, door de straal van de cylinder naar oneindig te laten gaan, kunnen concluderen dat:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(kr) \cos kz \, dk.$$

16. MOMENTANE PUNTBRON TUSSEN TWEE VLAKKE PLATEN

In deze paragraaf hebben we enkele resultaten over de distributie $\delta(x)$ nodig. In de eerste plaats de relaties

$$(16.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin kct \sin k_1 ct \, dt = \delta(k-k_1)$$

en

$$(16.2) \quad \int_0^{\infty} r J_0(mr) J_0(m_1 r) \, dr = \delta(m-m_1).$$

Verder zullen we nog een formule voor de potentiaal van een momentane puntbron gebruiken. Maar ook hier geldt dat, als we deze drie formules voor waar aannemen, het rekenen er mee niet moeilijk is.

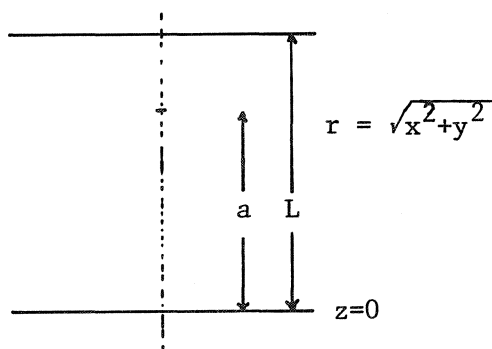


fig. 10

Het probleem wordt gegeven door het randwaardeprobleem

$$(16.3) \quad \Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\delta(t-t_0), \quad 0 < z < L$$

$$(16.4) \quad \phi \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

$$(16.5) \quad \phi = 0 \quad \text{als} \quad z = 0$$

$$(16.6) \quad \phi = 0 \quad \text{als} \quad z = L.$$

We schrijven weer $\phi = \phi_1 + \phi_2$, waarbij ϕ_1 de potentiaal is t.g.v. een momentane puntbron in $r = 0$, $z = a$ en een tegengesteld geladen momentane puntbron in $r = 0$, $z = -a$, zodat evenals in §14 $\phi_1 = 0$ als $z = 0$. Voor ϕ_1 geven we zonder bewijs (zie MORSE & FESBACH [14]) de formule

$$(16.7) \quad \phi_1 = \frac{\delta\left[\frac{1}{c}\sqrt{r^2 + (z-a)^2} - (t-t_0)\right]}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} - \frac{\delta\left[\frac{1}{c}\sqrt{r^2 + (z+a)^2} - (t-t_0)\right]}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}}.$$

(Fysisch gezien zijn dit twee bolvormige potentiaalwanden die zich met een radiële snelheid c uitbreiden.) Nu moet ϕ_2 voldoen aan de golfvergelijking met rechterlid 0, aan de randvoorwaarden (16.4) en (16.5) en aan $\phi_2 = -\phi_1$ als $z = L$. Variabelen scheiden levert weer een aantal combinaties bouwstenen. We kiezen daaruit de combinatie

$$J_0(mr) \sin kct \left\{ \begin{array}{ll} \sin \sqrt{k^2 - m^2} z & k^2 > m^2 \\ \text{sh } \sqrt{m^2 - k^2} z & k^2 < m^2 \end{array} \right\}.$$

Het probleem is nu een $f(k,m)$ te vinden, die ook van t_0 , a en L mag afhangen, zodanig dat

$$(16.8) \quad \iint f(k,m) J_0(mr) \sin kct \left\{ \begin{array}{ll} \sin \sqrt{k^2 - m^2} L & k^2 > m^2 \\ \text{sh } \sqrt{m^2 - k^2} L & k^2 < m^2 \end{array} \right\} dk dm = -\phi_1(r, L, t)$$

Laten we nu even de volgende afkortingen invoeren:

$$a_1 = L + a, \quad a_2 = L - a,$$

$$F(k,m) = f(k,m) \left\{ \begin{array}{ll} \sin \sqrt{k^2 - m^2} & k^2 > m^2 \\ \text{sh } \sqrt{m^2 - k^2} & k^2 < m^2 \end{array} \right\}$$

We "vermenigvuldigen" (16.8) links en rechts met $\int_{-\infty}^{\infty} \sin k_1 ct dt$ en krijgen dan door gebruik te maken van (8.8):

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int \int F(k,m) J_0(mr) \sin k_1 ct \, dk \, dm \sin k_1 ct \, dt = \\
& = 2\pi c \int \int F(k,m) J_0(mr) \delta(k-k_1) \, dk \, dm = 2\pi c \int F(k_1,m) J_0(mr) \, dm = \\
& = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(r,L,t) \sin k_1 ct \, dt = \\
& = \frac{1}{\sqrt{r^2+a_1^2}} \sin(k_1 ct_0 + k_1 \sqrt{r^2+a_1^2}) - \frac{1}{\sqrt{r^2+a_2^2}} \sin(k_1 ct_0 + k_1 \sqrt{r^2+a_2^2}).
\end{aligned}$$

Nu "vermenigvuldigen" we met $1/2\pi c \int_0^{\infty} r J_0(m_1 r) \, dr$ en krijgen:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \int r F(k_1,m) J_0(mr) J_0(m_1 r) \, dm \, dr = F(k_1, m_1) = \\
& = \frac{1}{2\pi c} \int_0^{\infty} r J_0(m_1 r) \left\{ \frac{\sin(k_1 ct_0 + k_1 \sqrt{r^2+a_1^2})}{\sqrt{r^2+a_1^2}} - \frac{\sin(k_1 ct_0 + k_1 \sqrt{r^2+a_2^2})}{\sqrt{r^2+a_2^2}} \right\} dr = \\
& = \frac{1}{2\pi c \sqrt{m_1}} \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \sqrt{m_1 r} J_0(m_1 r) \left\{ \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r^2+a_1^2}} \left[e^{ik_1 \sqrt{r^2+a_1^2}} e^{ik_1 ct_0} + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - e^{-ik_1 \sqrt{r^2+a_1^2}} e^{-ik_1 ct_0} \right] + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r^2+a_2^2}} \left[e^{ik_1 \sqrt{r^2+a_2^2}} e^{ik_1 ct_0} - e^{-ik_1 \sqrt{r^2+a_2^2}} e^{-ik_1 ct_0} \right] \right\} dr = \\
& = \begin{cases} \frac{-1}{\pi c \sqrt{k_1^2 - m_1^2}} \sin(k_1 ct_0 + L \sqrt{k_1^2 - m_1^2}) \sin a \sqrt{k_1^2 - m_1^2} & k_1^2 > m_1^2 \\ \frac{-1}{\pi c \sqrt{m_1^2 - k_1^2}} e^{-L \sqrt{m_1^2 - k_1^2}} \sin k_1 ct_0 \operatorname{sh} a \sqrt{m_1^2 - k_1^2} & k_1^2 < m_1^2 \end{cases} .
\end{aligned}$$

17 PUNTBron IN ONEINDIGE CYLINDER (NIET OP DE AS)

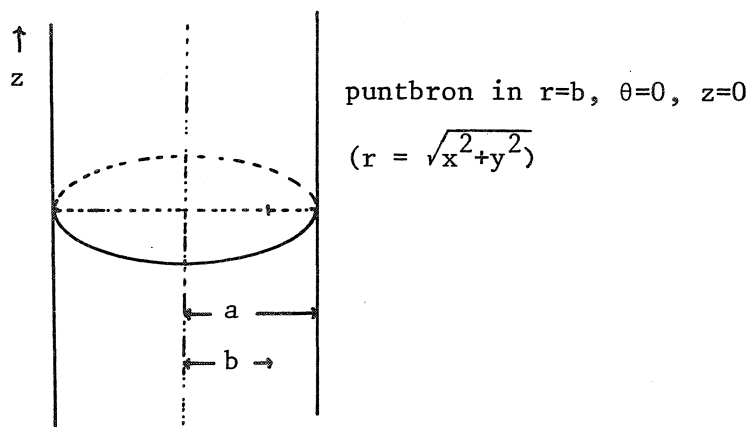


fig. 11

Er zijn verschillende methoden om dit probleem aan te pakken. Eén mogelijkheid wordt behandeld in SMYTHE [18], §5.298. De oplossing wordt gezocht in de vorm

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ns} e^{-\mu_n z} J_s(\mu_n r) \cos s(\theta - \theta_0),$$

waar de μ_n voldoen aan $J_s(\mu_n a) = 0$. De bepaling van de coëfficiënten A_{rs} wordt echter op een wat merkwaardige wijze uitgevoerd. We zullen daarom de oplossing uit CARLSLAW & JAEGER [6], §14.13 geven.

De Laplace transform van een functie $f(t)$ wordt gegeven door

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Met partiële integratie volgt hieruit dat de Laplace transform van $df(t)/dt$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \\ &= -f(0) + s\bar{f}(s). \end{aligned}$$

Verder volgt uit (8.7) dat

$$\int_0^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}.$$

Het boek van CARLSLAW & JAEGER handelt over de warmtevergelijking. In §14.13 wordt de oplossing gezocht van het probleem van een momentane warmtebron op $t = 0$ in een oneindige cylinder, dus van de vergelijking

$$\Delta\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t} = \delta(r-b)\delta(\theta)\delta(z)\delta(t).$$

De oplossing wordt gevonden door eerst de Laplace transform van deze vergelijking op te lossen, dus

$$\Delta\bar{\phi} - s\bar{\phi} = \frac{1}{2}\delta(r-b)\delta(\theta)\delta(z),$$

en het gevonden resultaat terug te transformeren. Maar door in de voor $\bar{\phi}$ gevonden uitdrukking $s = 0$ te stellen en het resultaat met 2 te vermenigvuldigen, vinden we precies een oplossing van ons probleem. We vinden (cf. (14.13)(5)):

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\theta \sum_m \frac{e^{-\mu_m |z|}}{\mu_m} \frac{J_n(\mu_m r) J_m(\mu_m b)}{[J'_n(\mu_m a)]^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2-\delta_{0n}) J_n(\mu_m b)}{\mu_m a J_{n+1}^2(\mu_m a)} J_n(\mu_m r) \cos n\theta e^{-\mu_m |z|} \\ &\quad \text{met } \delta_{0n} = 1 \text{ als } n=0, 0 \text{ als } n \neq 0. \end{aligned}$$

Voor een gesloten cylinder $0 \leq z \leq L$, en de puntbron in $z = c$, vinden we met de methode der beelden voor $z < c$:

$$\phi = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (2-\delta_{0n}) \frac{\text{sh } \mu_m (L-c) \text{sh } \mu_m z}{\text{sh } \mu_m L} \frac{J_n(\mu_m b) J_n(\mu_m r)}{\mu_m J_{n+1}^2(\mu_m a)} \cos n\theta.$$

Voor $z > c$ moeten we z vervangen door $L - c$ en c door $L - c$. Als we $b = 0$ kiezen, dus de puntbron op de as, dan krijgen we (de n -sommatie vervalt en we

houden alleen $n = 0$ over):

$$\phi = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \mu_m (L-c) \operatorname{sh} \mu_m z}{\operatorname{sh} \mu_m L} \frac{J_0(\mu_m r)}{\mu_m J_1^2(\mu_m a)} \quad \text{voor } z < c.$$

Evenzo is voor de oneindige cylinder met de puntbron op de as in $z = 0$:

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_m |z|} J_0(\mu_m r)}{\pi a^2 \mu_m J_1^2(\mu_m a)}.$$

Deze uitdrukking is (op grond van eenduidigheid) gelijk aan de uitdrukking (15.5).

18. EENDUIDIGHEID EN EXISTENTIE VAN OPLOSSINGEN

Als voor een tweemaal continu differentieerbare functie f , $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ geldt $d^2 f/dx^2 \geq 0$, dan neemt f zijn maximum aan in a of in b . Een dergelijke stelling geldt voor de Laplace operator en heet het maximumprincipe:

Maximumprincipe. Zij $\Delta u \geq 0$ in een begrensde gebied D . Als u zijn maximum M aanneemt in het inwendige van D , dan $u \equiv M$ in D ; u neemt dus zijn maximum op de rand aan.

Gevolg. Zij $u = 0$ op ∂D en $\Delta u \geq 0$ in D . Dan $u \leq 0$ in D . Bovendien als $\Delta u = 0$ en $u = 0$ op ∂D , dan $u \equiv 0$ in \bar{D} .

Zij nu ϕ een oplossing van

$$(18.1) \quad \begin{cases} \Delta \phi = f & \text{in } D \\ \phi = g & \text{op } \partial D, \end{cases}$$

die in D tweemaal continu differentieerbaar is en continu in \bar{D} , d.w.z.

$\phi \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$. Stel dat D begrensd is. Als zowel ϕ_1 en ϕ_2 oplossingen zijn, dan voldoet $u = \phi_1 - \phi_2$ aan $\Delta u = 0$ in D , $u = 0$ op ∂D , dus $u \equiv 0$ in \bar{D} . De oplossing ϕ van (18.1) is dus eenduidig (als we tenminste eisen $\phi \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$).

De eenduidigheid is niet altijd te bewijzen voor een onbegrensd gebied,

omdat het maximum principe niet zonder meer geldt voor een onbegrensd gebied. Echter wel als we een groeiconditie opleggen (principe van PHRAGMÈN-LINDELÖF [7]). We hebben steeds geëist dat $\phi = 0$ in het oneindige, waardoor aan een dergelijke groeiconditie zeker is voldaan.

We geven nu het existentiebewijs van PERRON (uit [7] hoofdstuk 2) voor de oplossing van (18.1) over een begrensd gebied D .

Bij een functie $f \in C^0(\bar{D})$, ($f \in C^k(D)$ als f k x differentieerbaar is met continue k -de afgeleide in D), en een bol $S \subset D$ kunnen we een functie $M_S[f]$ vinden die overal in D gelijk is aan f , behalve in S . In S vervangen we f door de harmonische functie v die op ∂S gelijk is aan f , d.w.z. v is de oplossing van

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0 && \text{in } S \\ v &= f && \text{op } \partial S.\end{aligned}$$

v bestaat: dit bewijzen we in de volgende paragraaf. Nu is dus

$$M_S[f](x) = \begin{cases} v(x) & \text{in } S \\ f(x) & \text{in } \bar{D} \setminus S. \end{cases}$$

Als onafhankelijk van de keuze van S altijd geldt dat $f(x) \leq M_S[f](x)$ $\forall x \in D$, dan heet f subharmonisch. Als f subharmonisch is en bovendien $f \leq g$ (g uit (18.1)), dan heet f een subfunctie van g .

Het bewijs verloopt nu in de volgende stappen: Eerst laten we zien dat de gezochte u subharmonisch is en dus een subfunctie van g . Dan beschouwen we de klasse F van alle subfuncties van g , en laten vervolgens zien dat $\sup_{v \in F} v$ de gezochte u is.

(a) u subharmonisch: Als $u \in C^2(D)$ en $\Delta u = 0$ dan zeker $\Delta u \geq 0$. De functie $z(x) = u(x) - M_S[u](x)$ voldoet voor iedere S aan

$$\begin{aligned}\Delta z &\geq 0 && \text{in } S \\ z &= 0 && \text{op } \partial S.\end{aligned}$$

Volgens het maximumprincipe is $z \leq 0$ in S , dus $u(x) \leq M_S[u](x)$ in S .

Buiten S is $u(x) = M_S[u](x)$, dus voor alle $x \in D$ is voldaan aan $u(x) \leq M_S[u](x)$, d.w.z. u is subharmonisch.

(b) u is subfunctie van g : $u = g$ op ∂D , dus ook $u \leq g$ op ∂D .

(c) Zij F de verzameling van alle subfuncties van g .

- $F \neq \emptyset$, want $-\max_{\xi \in \partial D} |\phi(\xi)| \in F$

- F is naar boven begrensd door $\max_{\xi \in \partial D} |\phi(\xi)|$

- Als $v_1, \dots, v_n \in F$, dan $v \in F$ waar v voor iedere x gedefinieerd is

als $\max_{i=1 \dots n} v_i(x)$. (Immers $v_i(x) \leq M_S[v_i](x) \leq M_S[v](x)$ voor alle i .)

(d) Zij $u(x) = \sup_{v \in F} v(x)$. Dan is u harmonisch. Kies $S \subset D$ willekeurig en

zij $S_0 \subset S$ een bol binnen S . Kies $w_1 \in F$ vast en definieer voor alle

$w \in F$: $\bar{w}(x) = \max(w_1(x), w(x))$. Zij $\bar{F} = \{\bar{w} \mid w \in F\}$. Dan is $u(x) =$

$= \sup_{v \in \bar{F}} v(x)$.

Kies een rij punten x_j , die dicht liggen in S , en daarbij functies

$\bar{w}_{j,k} \in \bar{F}$ zo, dat

$$0 \leq u(x_j) - \bar{w}_{j,k}(x_j) \leq k^{-1}, \quad j, k \in \mathbb{N}.$$

Definieer daarmee de rij \bar{w}_k als $\bar{w}_k(x) = M_S[\max(\bar{w}_{1,k}, \dots, \bar{w}_{k,k})]$. Dan is

$\bar{w}_k \in \bar{F}$ en bovendien $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{w}_k(x_j) = u(x_j)$. De \bar{w}_k zijn uniform begrensd

en harmonisch in S , zodat hun eerste afgeleiden uniform begrensd zijn

in S_0 en dus zijn de \bar{w}_k equicontinu. Volgens de stelling van Arzéla-

Ascoli convergeren de \bar{w}_k uniform naar u in S_0 en dus is u harmonisch

in S_0 . Overdek nu D met dergelijke S_0 .

(e) $u = g$ op ∂D . Dit laten we zien door u in te klemmen tussen twee functies

$v_1(x; \varepsilon) \leq u(x) \leq v_2(x; \varepsilon)$ als volgt:

Voor $\xi \in \partial D$ definiëren we een barrièrefunctie $w_\xi(x)$ van ξ , een zodanige

functie dat

w_ξ superharmonisch in D ($w(x) \geq M_S[w](x) \forall S \subset D$)

$w_\xi \in C^0(\bar{D})$

$w_\xi > 0$ in $D \setminus \{\xi\}$ en $w_\xi(\xi) = 0$.

ξ heet een regulier randpunt als voor ξ een barrièrefunctie bestaat.

Zij nu ξ regulier. Wegens de continuïteit van ϕ bestaat $\forall \varepsilon > 0$ een

constante k , zodat

$v_1(x) = g(\xi) - \varepsilon - k w_\xi(x)$ subfunctie van g

en

$v_2(x) = g(\xi) + \varepsilon + k w_\xi(x)$ superfunctie van g (d.w.z. superharmonisch en $v_2 \geq g$ op ∂D).

Dan is voor alle $x \in D$

$$g(\xi) - \varepsilon - k w_{\xi}(x) \leq u(x) \leq g(\xi) + \varepsilon + k w_{\xi}(x) \Rightarrow$$

$$|u(x) - g(\xi)| \leq \varepsilon + k w_{\xi}(x).$$

Laat nu x naar ξ naderen, dan

$$|u(x) - g(\xi)| < 2\varepsilon$$

voor $|x-\xi|$ zo klein dat $|k w_{\xi}(x)| < \varepsilon$. Hieruit volgt dat

$$u(\xi) = g(\xi).$$

Deze laatste stap van het bewijs gaat er wel vanuit dat ξ een regulier randpunt is, zodat existentie van een oplossing bewezen is voor "reguliere randen" ∂D .

Er zijn voldoende voorwaarden te geven die garanderen dat een rand regulier is. In niet al te pathologische gevallen is hier wel aan voldaan (zie [7],[9]).

OPMERKING. Zoals opgemerkt hebben we het bewijs uit [7]. Op p.27 staat daar een storende drukfout: in de tweede regel van het bewijs van opmerking 2.3 staat $\Delta z \geq 0$. Dit moet zijn $\Delta z \leq 0$. We hebben op dit punt overigens een ander, en naar ons gevoel voor de handligger, bewijs gegeven dan in [7]; ook verder konden we enige vereenvoudigingen aanbrengen.

19. DE INTEGRAALFORMULE VAN POISSON

Om het existentiebewijs af te ronden laten we zien dat het randwaardeprobleem

$$(19.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{als } x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u = \rho & \text{als } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

een oplossing heeft. Dit is tevens een illustratie van het gebruik van bolcoördinaten. Volgens (11.5) is de Laplacian in bolcoördinaten:

$$(19.2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} .$$

We scheiden variabelen door op $R(r)f(\theta)g(\psi)$ de Laplacian toe te passen en krijgen dan de drie gewone differentiaalvergelijkingen:

$$(19.3) \quad \frac{d^2 f}{d\psi^2} + C_1 f = 0$$

$$(19.4) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) + \left(C_2 - \frac{C_1}{\sin^2 \theta} \right) g = 0$$

$$(19.5) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{C_2}{r^2} R = 0.$$

Het is nu gebruikelijk voor C_1 en C_2 te kiezen: $C_1 = m^2$ en $C_2 = n(n+1)$. Dan heeft (19.5) als (één van de) oplossingen $R = r^n$. (19.3) heeft als algemene oplossing $f = A \cos m\psi + B \sin m\psi$. In (19.4) substitueren we $\cos \theta = \mu$ en krijgen dan de vergelijking

$$\frac{d}{d\mu} \left((1-\mu^2) \frac{dg}{d\mu} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] g = 0.$$

Hierdoor wordt een nieuwe klasse functies gedefinieerd, de Legendre functies $P_{n,m} = \sqrt{1-\mu^2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z)$. Nu kunnen we een voldoende gladde functie $\rho(\theta, \psi)$ (de randfunctie in (19.1)) ontwikkelen als:

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \psi) = & \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n,0} P_n(\cos \theta) + \\ & + \sum_{m=1}^n (a_{n,m} \cos m\psi + b_{n,m} \sin m\psi) P_{n,m}(\cos \theta)], \end{aligned}$$

waarbij

$$a_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \rho(\theta, \psi) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta d\psi$$

$$a_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \rho(\theta, \psi) P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\psi \sin \theta \, d\theta d\psi$$

$$b_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \rho(\theta, \psi) P_{n,m}(\cos \theta) \sin m\psi \sin \theta \, d\theta d\psi.$$

De oplossing van (19.1) is dan

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} r^n [a_{n,0} P_n(\cos \theta) + \\ + \sum_{m=1}^n (a_{n,m} \cos m\psi + b_{n,m} \sin m\psi) P_{n,m}(\cos \theta)].$$

Gebruik makend van $P_n(1) = 1$, $P_{n,m}(1) = 0$, $m = 1, \dots, n$ krijgen we dan

$$4\pi u(r, 0, 0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos \theta) \right] \rho(\theta, \psi) \sin \theta \, d\theta d\psi,$$

en met de somformule

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos \theta) = \frac{1-r^2}{(1-2r \cos \theta + \cos^2 \theta)^{3/2}}$$

levert dit (na een kleine draaiing):

$$4\pi u(r, \theta, \phi) = (1-r)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho(\theta', \psi') \sin \theta' \, d\theta' d\psi'}{[r^2 - 2r(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi - \psi')) + 1]^{3/2}}.$$

Dit wordt wel de integraalformule van Poisson genoemd.

LITERATUUR

- [1] ABRAMOWIZ, M. & A.I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*.
- [2] BATEMAN, H., *Partial differential equations of mathematical physics*,
Dover Publications, 1944.
- [3] BELL, E.T., *Men of mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1937.
- [4] BOWMAN, *Introduction to Bessel functions*, Dover Publications, New York,
1958.
- [5] BYERLY, *An elementary treatise on Fourier's series*, Dover Publications,
New York, 1959 (herdruk van editie 1893).

- [6] CARLSLAW, H.S. & J.C. JAEGER, *Conduction of heat in solids* (second edition), Oxford University Press, London, 1959.
- [7] COOLEN e.a., *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen*, MC Syllabus 9.1., Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- [8] ERDÉLYI e.a., *Tables of integral transforms, I, II, III*, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [9] GARABEDIAN, P.R., *Partial differential equations*, Wiley, New York, 1964.
- [10] GRATTAN-GUINNESS, I./FOURIER, J., *Joseph Fourier, A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat*, M.I.T. Press, Cambridge (Mass.), 1972.
- [11] HOCHSTAD, H., *The functions of mathematical physics*, Wiley-Interscience, New York, 1971.
- [12] LAUWERIER, H.A., *Randwaarde problemen*, M.C. Syllabus 3.1, 3.2, 3.3, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1967.
- [13] LAUWERIER, H.A., *Asymptotic Analysis*, Mathematical Centre Tracts 54, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1974.
- [14] MORSE, P.M. & H. FESHBACH, *Methods of theoretical physics, I, II*, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [15] PROTTER, M.H. & H.F. WEINBERGER, *Maximum Principles*, Prentice Hall, 1967.
- [16] RUDIN, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [17] SMITH, D.E., *History of mathematics I, II*, Dover Publications, New York, 1958 (herdruk van editie 1923).
- [18] SMYTHE, W.R., *Static and dynamic electricity*, McGraw-Hill, New York, 1950.
- [19] SPIEGEL, M.R., *Vector analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [20] STRATTON, J.A., *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [21] STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*, Aula 195, Utrecht, 1965.
- [22] TREVES, F., *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1975.

[23] WATSON, G.N., *Theory of Bessel functions*, Cambridge University Press,
London, 1922.

ONTVANGEN 1 6 DEC. 1976