stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE TN 87/77 APRIL

E.J.M. VELING

EEN ELECTRISCH HARTMODEL

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O).

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 34C25, 78A35

Een electrisch hartmodel

door

E.J.M. Veling

SAMENVATTING

Een electrisch model, waarin een T-periodiek veranderende condensator is opgenomen, wordt opgesteld voor de beschrijving van de werking van de linker hartkamer. De bijbehorende differentiaalvergelijking is niet-lineair. De unieke oplossing met periode T wordt benaderd. Bij variatie van een parameter worden gemiddelde spanning en stroom over de periode T met elkaar vergeleken. Het verband tussen deze gemiddelden wordt berekend na eliminatie van de parameter.

TREFWOORDEN: *Niet-lineaire differentiaalvergelijking, periodieke oplossing, contractie afbeelding.*

1. PROBLEEMSTELLING

Bij de beschrijving van de werking van de linker hartkamer is het nuttig hiervoor een electrisch model te beschouwen. Dit model bestaat uit een periodiek veranderende condensator ($C^*(t)$) die de spierelasticiteit voorstelt. Het model bestaat verder uit twee stroomkringen (A,B). De stroomkring A stelt de veneuze (of atriale) vulling voor; de stroomkring B de ejectie in het arteriële systeem. Beide stroomkringen bevatten een diode (mitraal- en aortakleppen). De belasting van het hart (V_B) kan gevarieerd worden. De spanning op punt M (zie fig. 1) stelt de druk in de linker ventrikel voor; de stroom door R_B de ejectiestroom. Deze twee grootheden worden bij het hart gemeten. Hun gemiddelden worden tegen elkaar uitgezet. De verkregen grafiek is een karakterisatie van het hart. Voor het schema van dit circuit zie fig. 1. Er geldt steeds $V_B > V_A$. Laat V^* de spanning voorstellen op het punt S in dit circuit, en i_A^*, i_B^*, i_C^* de stromen door de verschillende stroomkringen, dan zijn er drie fasen te onderscheiden:

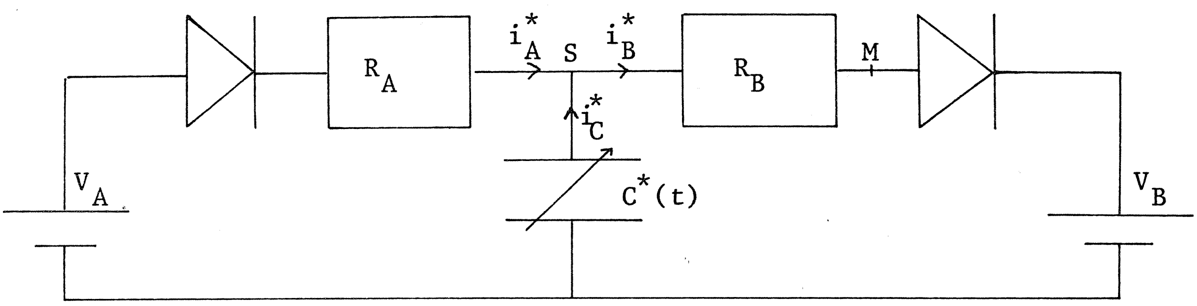
fase 1: $V^* < V_A$, $i_A^* \neq 0$, $i_B^* = 0$,
fase 2: $V_A < V^* < V_B$, $i_A^* = i_B^* = 0$,
fase 3: $V_B < V^*$, $i_A^* = 0$, $i_B^* \neq 0$.

Voor deze drie fasen gelden nu de volgende differentiaalvergelijkingen;
$C^* = C^*(t)$

fase 1: $C^* \dfrac{dV^*}{dt} + \dfrac{dC^*}{dt} V^* + \dfrac{V^* - V_A}{R_A} = 0, \qquad i_A^* = \dfrac{V_A - V^*}{R_A}$,

fase 2: $C^* \dfrac{dV^*}{dt} + \dfrac{dC^*}{dt} V^* = 0,$

fase 3: $C^* \dfrac{dV^*}{dt} + \dfrac{dC^*}{dt} V^* + \dfrac{V^* - V_B}{R_B} = 0, \qquad i_B^* = \dfrac{V^* - V_B}{R_B}$.



Figuur 1

Met behulp van de volgende schaling

$$V = V^*/V_A, \quad \mu = V_B/V_A, \quad C(t) = R_A\, C^*(t), \quad i = R_A/V_A\, i^*, \quad \gamma = R_B/R_A$$

kunnen deze vergelijkingen als volgt worden samengevat:

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{dC}{dt} V + (V-1)\,\theta\,(-V+1) + \frac{V-\mu}{\gamma}\,\theta(V-\mu) = 0,$$

met $\theta(x) = 0,\ \ x < 0,\ \ \theta(x) = 1,\ \ x > 0$. Dan geldt $i_A = 1 - V$, $i_B = (V-\mu)/\gamma$.

Met een willekeurige waarde voor V op $t = t_0$ is deze vergelijking oplosbaar: het niet-lineaire karakter treedt op bij de overgang tussen de verschillende fasen. Voor elke fase is de oplossing voor een functie C(t) met $C(t) > 0$ en $1/C(t)$ integreerbaar algemeen voor te stellen uitgedrukt in $V_i = V(t_i)$ met $t = t_i$ het begintijdstip voor de beschrijving van de betreffende fase. Een oplossing zal dus in het algemeen impliciet gedefinieerde relaties bevatten voor de waarden t_i, $i \geq 1$.

fase 1: $$V(t) = \left(\int_{t_1}^{t} e^{\int_{t_1}^{\tau} \frac{1}{C(\tau')} d\tau'} d\tau + K_1\right) \frac{1}{C(t)}\, e^{-\int_{t_1}^{t} \frac{1}{C(\tau)} d\tau},$$

met $V(t_1) = V_1$ $(= K_1/C(t_1))$,

fase 2: $V(t) = K_2/C(t)$,

met $V(t_2) = V_2$ $(= K_2/C(t_2))$,

fase 3: $$V(t) = \left(\frac{\mu}{\gamma}\int_{t_3}^{t} e^{\frac{1}{\gamma}\int_{t_3}^{\tau}\frac{1}{C(\tau')}d\tau'} d\tau + K_3\right)\frac{1}{C(t)}\, e^{-\frac{1}{\gamma}\int_{t_3}^{t}\frac{1}{C(\tau)}d\tau},$$

met $V(t_3) = V_3$ $(= K_3/C(t_3))$.

Daar de functie $C(t)$ periodiek met periode T wordt verondersteld, kan men zich afvragen of het systeem ook een T-periodieke oplossing toelaat. Deze eigenschap zal afhangen van de periodieke functie $C(t)$. In de Appendix zal bewezen worden dat er inderdaad een unieke T-periodieke oplossing bestaat indien de functie $C(t)$ de vorm heeft van een blokfunctie (zie hieronder). De overgang op de nieuwe grootheid $w(t) = C(t)\ V(t)$ is daarbij van nut.

Bij benadering zal de T-periodieke oplossing worden berekend en met behulp van deze oplossing zullen de gemiddelde waarden van V en i_B worden bepaald:

$$\bar{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt, \quad \bar{i}_B = \frac{1}{T}\int_0^T i_B(t)dt, \quad i_B = \frac{V-\mu}{\gamma}.$$

Uiteindelijk zal $\bar{i}_B$ worden vergeleken met de gemiddelde spanning in het punt M : $\bar{V}_M = \bar{V} - \gamma\bar{i}_B$. Het zal blijken dat dit verband, bij verandering van de variabele μ, bij benadering lineair is en de vorm heeft $\bar{V}_M = V_0 - \lambda\bar{i}_B$, $\lambda > 0$, na eliminatie van μ. De waarden V_0,λ zullen bepaald worden.

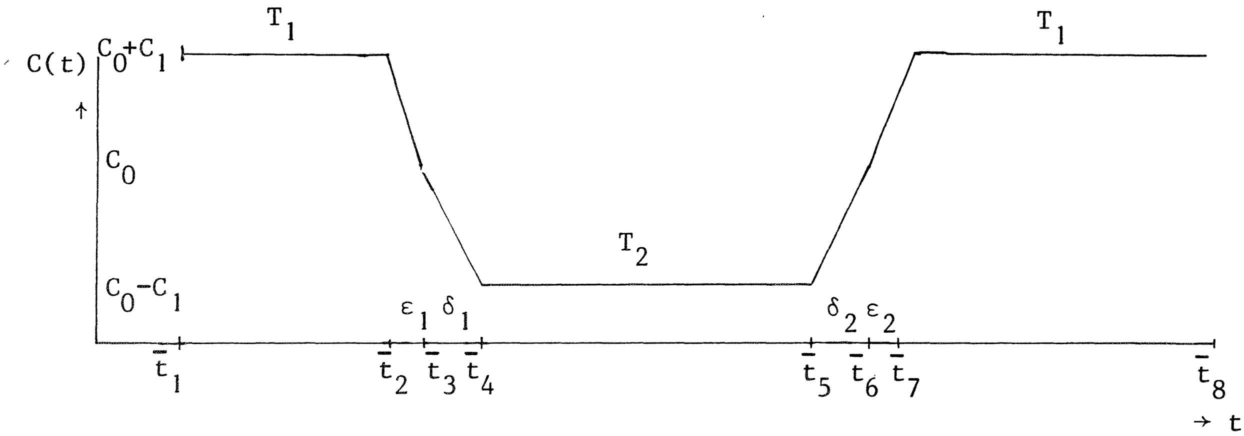
2. BEREKENING OPLOSSING MODEL MET DE KEUZE VAN EEN BLOKFUNCTIE VOOR C(t)

In het vervolg beperken wij ons tot een blokfunctie voor $C(t)$:

$$C(t) = \begin{cases} C_0 + C_1 & , \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2, \quad \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = T_1 \\ C_0 + C_1 - \dfrac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2), & \bar{t}_2 < t < \bar{t}_3, \quad \bar{t}_3 - \bar{t}_2 = \varepsilon_1 \\ C_0 - \dfrac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3) & , \bar{t}_3 < t < \bar{t}_4, \quad \bar{t}_4 - \bar{t}_3 = \delta_1 \\ C_0 - C_1 & , \bar{t}_4 < t < \bar{t}_5, \quad \bar{t}_5 - \bar{t}_4 = T_2 \\ C_0 - C_1 + \dfrac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5), & \bar{t}_5 < t < \bar{t}_6, \quad \bar{t}_6 - \bar{t}_5 = \delta_2 \\ C_0 + \dfrac{C_1}{\varepsilon_3}(t-\bar{t}_6) & , \bar{t}_6 < t < \bar{t}_7, \quad \bar{t}_7 - \bar{t}_6 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$\text{met } \bar{t}_7 - \bar{t}_1 = T,$$

zie fig. 2; hierbij is verondersteld dat $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 << \delta_1 \sim \delta_2 << T_1 \sim T_2$. De essentiële moeilijkheden bij de oplossing van dit model bestaan uit de impliciete relaties voor de tijdstippen t_i, $i \geq 1$. Voor een berekening van de gemiddelden $\bar{V}_M$, $\bar{i}_B$ zijn deze grootheden noodzakelijk.



Figuur 2

Door de speciale (en fysisch zinvolle) keuze van de functie $C(t)$ zijn de impliciete relaties echter oplosbaar, terwijl de oplossing expliciet is voor te stellen. Tevens kan de middeling worden uitgevoerd op de orde δ_i nauwkeurig.

Bij de beschrijving van de oplossing is het noodzakelijk de volgende gevallen te beschouwen:

geval A: $\mu < \dfrac{C_0+C_1}{C_0} < \dfrac{C_0}{C_0-C_1} < \dfrac{C_0+C_1}{C_0-C_1}$,

geval B: $\dfrac{C_0+C_1}{C_0} < \mu < \dfrac{C_0}{C_0-C_1} < \dfrac{C_0+C_1}{C_0-C_1}$,

geval C: $\dfrac{C_0+C_1}{C_0} < \dfrac{C_0}{C_0-C_1} < \mu < \dfrac{C_0+C_1}{C_0-C_1}$.

Stel dat $t = t_0$, $\bar{t}_1 < t_0 < \bar{t}_2$, $V = 1$ en dat het systeem verkeert in fase 2, dan geldt $\frac{dV}{dt} = 0$ en volgt $V \equiv 1$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}_2$. Vanaf dit tijdstip is het nu mogelijk verder te rekenen en met twee nader te preciseren benaderingen tijdens dit proces blijkt het mogelijk een T-periodieke oplossing te bepalen. Voor geval A zal de rekenwijze worden uitgewerkt, voor de twee overige gevallen (B,C) zullen de resultaten worden vermeld.

Notatie

De oplossing zal stuksgewijs bestaan uit continue functies V_i; bij elke V_i behoort een constante K_i; de tijdstippen $\bar{t}_i$ hebben betrekking op de functie $C(t)$; de tijdstippen t_i hebben betrekking op de overgang van het systeem naar een andere fase.

Geval A, $\mu < \dfrac{C_0+C_1}{C_0}$

Gegeven is $V = 1$, $t = \bar{t}_2$, met systeem in fase 2. Voor $\bar{t}_2 < t < \bar{t}_3$ geldt $C(t) = C_0 + C_1 - \frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)$; de nu geldende differentiaalvergelijking luidt

$$\frac{d}{dt}(CV) = 0,$$

met $V(\bar{t}_2) = 1$, dus

$$V_1(t) = \frac{C_0+C_1}{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}, \qquad t > \bar{t}_2 ,$$

zolang fase 2 geldt en $t < \bar{t}_3$.

$$V_1(\bar{t}_3) = \frac{C_0+C_1}{C_0} > \mu,$$

vanwege de aanname in geval A.

Dus er is een waarde $t = t_1 < \bar{t}_3$, waarvoor $V_1(t_1) = \mu$ en waarna fase 3 optreedt, omdat V over de grenswaarde μ heenschiet. De oplossing $V_1(t)$ geldt dus voor $\bar{t}_2 < t < t_1$. De waarde t_1 volgt uit

$$V_1(t_1) = \mu: \; t_1 = \bar{t}_2 + \frac{\varepsilon_1}{C_1}(C_0+C_1)(\frac{\mu-1}{\mu}).$$

Voor $t_1 < t < \bar{t}_3$ geldt

$$C(t) = C_0 + C_1 - \frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2);$$

de nu geldende differentiaalvergelijking luidt:

$$C(t)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{-C_1}{\varepsilon_1}\right)V + \frac{V-\mu}{\gamma} = 0,$$

met $V(t_1) = \mu$. Algemene oplossing homogeen deel

$$V(t) = \frac{K_2}{C(t)}\, e^{-\frac{1}{\gamma}\int_{t_1}^{t} \frac{1}{C(\tau)}\, d\tau} ;$$

particuliere oplossing $V_p = \frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1-C_1\gamma}$. Er volgt met gebruik maken van $V_1(t_1) = \mu$

$$V_2(t) = \frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1-C_1\gamma} + \frac{K_2}{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}\, e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}{(C_0+C_1)/\mu}\right)},$$

met $V_2(t_1) = \mu$, dus

$$V_2(t) = \frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1 - C_1\gamma} + \frac{(C_0+C_1)\left(\frac{-C_1\gamma}{\varepsilon_1 - C_1\gamma}\right)}{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}\, e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}{(C_0+C_1)/\mu}\right)}, \quad t > t_1,$$

zolang fase 3 geldt en $t < \bar{t}_3$.

Uit de differentiaalvergelijking volgt, daar

$$\frac{-C_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\gamma} < 0 \quad \text{en} \quad \frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1 - C_1\gamma} < 0 < \mu,$$

dat zolang $V_2 > \mu$, $\frac{dV_2}{dt} > 0$, dus zeker $V_2(\bar{t}_3) > \mu$. Dit betekent dat de oplossing $V_2(t)$ geldt voor $t_1 < t < \bar{t}_3$.

Voor $\bar{t}_3 < t < \bar{t}_4$ geldt $C(t) = C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)$; de nu geldende differentiaalvergelijking luidt

$$C(t)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{-C_1}{\delta_1}\right)V + \frac{V-\mu}{\gamma} = 0,$$

met $V(\bar{t}_3) = V_2(\bar{t}_3)$. Op analoge wijze geldt nu

$$V_3(t) = \frac{\delta_1\mu}{\delta_1 - C_1\gamma} + \frac{K_3}{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}\, e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-\frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}{C_0}\right)},$$

met $V_3(\bar{t}_3) = V_2(\bar{t}_3)$.

$$V_2(\bar{t}_3) = \frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1 - C_1\gamma} + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)\cdot\left(\frac{-C_1\gamma}{\varepsilon_1 - C_1\gamma}\right) e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right)},$$

$$V_3(\bar{t}_3) = \frac{\delta_1\mu}{\delta_1 - C_1\gamma} + \frac{K_3}{C_0},$$

dus

$$K_3 = C_0\left[\frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1-C_1\gamma}-\frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)\cdot\left(\frac{-C_1\gamma}{\varepsilon_1-C_1\gamma}\right) e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right)}\right].$$

Ook nu weer blijkt, daar $\frac{-C_1}{\delta_1} + \frac{1}{\gamma} < 0$ en $\frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} < 0 < \mu$, uit de differentiaalvergelijking dat zolang $V_3 > \mu$,

$$\frac{dV_3}{dt} > 0;$$

dit betekent dat $V_3(t)$ geldt voor $\bar{t}_3 < t < \bar{t}_4$.

Voor $\bar{t}_4 < t < \bar{t}_5$ geldt $C(t) = C_0 - C_1$; de nu geldende differentiaalvergelijking luidt

$$(C_0-C_1)\,\frac{dV}{dt} + \frac{V-\mu}{\gamma} = 0,$$

met $V(\bar{t}_4) = V_3(\bar{t}_4)$, dus

$$V_4(t) = \mu + K_4\, e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)},$$

$$V_3(\bar{t}_4) = \frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma}+\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)\left[\frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1-C_1\gamma} - \frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)\left(\frac{-C_1\gamma}{\varepsilon_1-C_1\gamma}\right) e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right)}\right] *$$

$$e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)},$$

$$V_4(\bar{t}_4) = \mu + K_4.$$

Door $V_3(\bar{t}_4)$ te benaderen tot op orde ε_1 en δ_1^2 nauwkeurig volgt voor K_4

$$K_4 = \frac{\delta_1\mu}{\delta_1 - C_1\gamma}\left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)}\right) +$$

$$+ \left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)} - \mu + O(\varepsilon_1) + O(\delta_1^2).$$

De oplossing V_4 zal voor $\bar{t}_4 < t < \bar{t}_5$ steeds groter zijn dan μ; voor $t = \bar{t}_5$ benadert V_4 de waarde μ exponentieel; voor $t > \bar{t}_5$ geldt de differentiaalvergelijking

$$C(t)\,\frac{dV}{dt} + \left(\frac{C_1}{\delta_2}\right)V + \frac{V-\mu}{\gamma} = 0,$$

dus de oplossing zal verder dalen en snel onder $V = \mu$ gaan. De bijbehorende oplossing is te bepalen; daar de bijdrage van deze oplossing in de berekening van het gemiddelde $\bar{V}$ echter een exponentieel kleine bijdrage geeft, benaderen wij de oplossing door te stellen dat op $t = \bar{t}_5 = t_2$, $V = \mu$ en dat het systeem in fase 2 verkeert.

Voor $\bar{t}_5 < t < \bar{t}_6$ geldt $C(t) = C_0 - C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)$; de nu geldende differentiaalvergelijking luidt

$$\frac{d}{dt}(CV) = 0,$$

met $V(\bar{t}_5) = \mu$, dus

$$V_5(t) = \frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0-C_1+\frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}, \qquad t > \bar{t}_5,$$

zolang fase 2 geldt en $t < \bar{t}_6$, dan

$$V_5(\bar{t}_6) = \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu;$$

de aanname onder geval A impliceert

$$\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu < \left(1/\left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)\right)\mu < 1.$$

Dus er is een waarde $t = t_3 < \bar{t}_6$, waarvoor $V_5(t_3) = 1$ en waarna fase 1 optreedt, omdat V onder de grenswaarde 1 schiet. De oplossing $V_5(t)$ geldt dus voor $\bar{t}_5 < t < t_3$. De waarde t_3 volgt uit

$$V_5(t_3) = 1 : t_3 = \bar{t}_5 + \frac{\delta_2}{C_1}(C_0-C_1)(\mu-1).$$

Voor $t_3 < t < \bar{t}_6$ geldt

$$C(t) = C_0 - C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5);$$

de nu geldende differentiaalvergelijking luidt

$$C(t)\,\frac{dV}{dt} + \left(\frac{C_1}{\delta_2}\right)V + V - 1 = 0,$$

met $V(t_3) = 1$. Algemene oplossing homogeen deel

$$V(t) = \frac{K_6}{C(t)}\, e^{-\int_{t_3}^{t} \frac{1}{C(\tau)}\,d\tau}\ ;$$

particuliere oplossing $V_p = \dfrac{\delta_2}{C_1+\delta_2}$. Er volgt met gebruik maken van $V_5(t_3) = 1$

$$V_6(t) = \frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \frac{K_6}{C_0-C_1+\frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}\, e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1+\frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}{(C_0-C_1)\mu}\right)},$$

met $V_6(t_3) = 1$, dus

$$V_6(t) = \frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \frac{(C_0-C_1)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)}{C_0-C_1+\frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}\, e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1+\frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}{(C_0-C_1)\mu}\right)},\quad t > t_3,$$

zolang fase 1 geldt en $t < \bar{t}_6$. Uit de differentiaalvergelijking volgt, daar

$\frac{C_1}{\delta_2} + 1 > 0$ en $\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} < 1$ dat zolang $\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} < V_6 < 1$, $\frac{dV_6}{dt} < 0$, dus zeker $V_6(\bar{t}_6) < 1$. Dit betekent dat de oplossing $V_6(t)$ geldt voor $t_3 < t < \bar{t}_6$. Voor $\bar{t}_6 < t < \bar{t}_7$ geldt

$$C(t) = C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6);$$

de nu geldende differentiaalvergelijking luidt

$$C(t)\,\frac{dV}{dt} + \left(\frac{C_1}{\varepsilon_2}\right)V + V - 1 = 0,$$

met $V(\bar{t}_6) = V_6(\bar{t}_6)$. Op analoge wijze geldt nu

$$V_7(t) = \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \frac{K_7}{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)}\, e^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)}{C_0}\right)},$$

met $V_7(\bar{t}_6) = V_6(\bar{t}_6)$.

$$V_6(\bar{t}_6) = \frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right) e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)},$$

$$V_7(\bar{t}_6) = \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \frac{K_7}{C_0},$$

dus

$$K_7 = C_0\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} - \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right].$$

Ook nu weer blijkt, daar $\frac{C_1}{\varepsilon_2} + 1 > 0$ en $\frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} < 1$, uit de differentiaalvergelijking dat zolang

$$\frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} < V_7 \quad 1, \quad \frac{dV_7}{dt} < 0,$$

dus zeker $V_7(\bar{t}_7) < 1$. Dit betekent dat de oplossing $V_7(t)$ geldt voor $\bar{t}_6 < t < \bar{t}_7$.

Voor $\bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T$ geldt $C(t) = C_0 + C_1$; de nu geldende differentiaalvergelijking luidt

$$(C_0+C_1)\,\frac{dV}{dt} + V - 1 = 0,$$

met $V(\bar{t}_7) = V_7(\bar{t}_7)$, dus

$$V_8(t) = 1 + K_8\, e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)},$$

$$V_7(\bar{t}_7) = \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \frac{C_0\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} - \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right]}{C_0+C_1} * \varepsilon^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)},$$

$$V_8(\bar{t}_7) = 1 + K_8.$$

Door $V_7(\bar{t}_7)$ te benaderen tot op orde ε_2 en δ_2^2 nauwkeurig volgt voor K_8

$$K_8 = \frac{C_0}{C_0+C_1}\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right]$$

$$- 1 + O(\varepsilon_2) + O(\delta_2^2).$$

De oplossing V_8 zal voor $\bar{t}_7 < t < \bar{t}_8$ steeds kleiner zijn dan 1; voor $t = \bar{t}_8$ benadert V_8 de waarde 1 exponentieel; voor $t > \bar{t}_8$ geldt de differentiaalvergelijking

$$C(t)\,\frac{dV}{dt} + \left(\frac{-C_1}{\varepsilon_1}\right)V + V - 1 = 0,$$

dus de oplossing zal verder stijgen en snel over de waarde $V = 1$ schieten. De bijbehorende oplossing is weer te bepalen; daar de bijdrage van deze oplossing in de berekening van het gemiddelde $\bar{V}$ echter een exponentieel kleine bijdrage geeft, benaderen wij de oplossing door te stellen dat op

$t = \bar{t}_8 = t_4$, $V = 1$ en dat het systeem in fase 2 verkeert. Dan kunnen wij de oplossing voortzetten met $V_1(t+T)$, daar op $t = \bar{t}_8$ de beginwaarde dezelfde is als voor $t = \bar{t}_2$. Wij hebben zo een benadering gekregen voor een T-periodieke oplossing.

Geval B en C

Bij het berekenen van de oplossing in geval A blijkt de functie V_1 op het interval $\bar{t}_2 < t < \bar{t}_3$ het waardebereik $[1,\mu]$ te omvatten op grond van de gemaakte aannamen; tevens bleek V_5 op het interval $\bar{t}_5 < t < \bar{t}_6$ hetzelfde interval te omvatten. In geval B is dit voor de functie V_1 niet, en voor V_5 nog wel het geval, terwijl in geval C de functies V_1 en V_5 een kleiner bereik hebben.

$$V_1(t) = \frac{C_0+C_1}{C_0+C_1 - \frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}, \quad \bar{t}_2 < t < \bar{t}_3, \quad V_1(\bar{t}_2) = 1, \quad V_1(\bar{t}_3) = \frac{C_0+C_1}{C_0},$$

$$V_5(t) = \frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0-C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}, \quad \bar{t}_5 < t < \bar{t}_6, \quad V_5(\bar{t}_5) = \mu, \quad V_5(\bar{t}_6) = \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu.$$

	$V_1(\bar{t}_3)$	$V_5(\bar{t}_6)$
geval A, $\mu < \frac{C_0+C_1}{C_0}$	$> \mu$	< 1
geval B, $\frac{C_0+C_1}{C_0} < \mu < \frac{C_0}{C_0-C_1}$	$< \mu$	< 1
geval C, $\frac{C_0}{C_0-C_1} < \mu < \frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}$	$< \mu$	> 1

Dit heeft tot gevolg dat er enige verschillen optreden in deze gevallen bij de berekening van de functies, volgend op V_1 en V_5, omdat het systeem dan in een andere fase verkeert. De voorwaarde $\mu < \frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}$ in geval C treedt naar voren om ervoor te zorgen dat het bereik van de functies V_5 en V_6 samen wel het interval $[1,\mu]$ omvat.

OVERZICHT RESULTATEN

GEVAL A

fase 2

$$V_1(t) = \frac{(C_0+C_1)}{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}, \quad \bar{t}_2 < t < t_1, \quad t_1 = \bar{t}_2 + \frac{\varepsilon_1}{C_1}(C_0+C_1)\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right).$$

fase 3

$$V_2(t) = \frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1-C_1\gamma} + \frac{(C_0+C_1)\left(\frac{-C_1\gamma}{\varepsilon_1-C_1\gamma}\right)}{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)} e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0+C_1-\frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}{(C_0+C_1)/\mu}\right)}, \quad t_1 < t < \bar{t}_3.$$

fase 3

$$V_3(t) = \frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} + \frac{C_0\left[\frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1-C_1\gamma} - \frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)\left(\frac{-C_1\gamma}{\varepsilon_1-C_1\gamma}\right)e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right)}\right]}{C_0-\frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)} *$$

$$* \; e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-\frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}{C_0}\right)}, \quad \bar{t}_3 < t < \bar{t}_4.$$

fase 3

$$V_4(t) = \mu + \left\{\frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} + \left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)\left[\frac{\varepsilon_1\mu}{\varepsilon_1-C_1\gamma} - \frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)\left(\frac{-C_1\gamma}{\varepsilon_1-C_1\gamma}\right)e^{\frac{\varepsilon_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right)}\right] *\right.$$

$$\left. * \; e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)} - \mu\right\} * e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)}, \quad \bar{t}_4 < t < \bar{t}_5.$$

$$V_4(t) = \mu + \left[\left(\frac{\delta_1\mu}{\delta_1 - C_1\gamma}\right)\left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)}\right) + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right)e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)} - \mu\right] *$$

$$* \; e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)} + O(\delta_1^2) + O(\varepsilon_1), \quad \bar{t}_4 < t < \bar{t}_5,$$

$$V_4(t) = \mu + \left[\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) - \mu\right]e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)} + O(\delta_1) + O(\varepsilon_1), \qquad \bar{t}_4 < t < \bar{t}_5.$$

fase 2

$$V_5(t) = \frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0-C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}, \quad \bar{t}_5 < t < t_3, \qquad t_3 = \bar{t}_5 + \frac{\delta_2}{C_1}(C_0-C_1)(\mu-1).$$

fase 1

$$V_6(t) = \frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \frac{(C_0-C_1)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)}{C_0-C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)} e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1+\frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}{(C_0-C_1)\mu}\right)}, \qquad t_3 < t < \bar{t}_6.$$

fase 1

$$V_7(t) = \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \frac{C_0\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} - \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right]}{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)} *$$

$$* \; e^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)}{C_0}\right)}, \qquad \bar{t}_6 < t < \bar{t}_7.$$

fase 1

$$V_8(t) = 1 + \left\{\frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0}{C_0+C_1}\right)\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} - \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right] *\right.$$

$$\left. * \, e^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)} - 1\right\} * e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)}, \qquad \bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T,$$

$$V_8(t) = 1 + \left\{\left(\frac{C_0}{C_0+C_1}\right)\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right] - 1\right\} *$$

$$* \, e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)} + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_2), \qquad \bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T,$$

$$V_8(t) = 1 + \left[\left(\frac{C_0-C_1}{C_0+C_1}\right)\mu - 1\right] e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)} + O(\delta_2) + O(\varepsilon_2), \quad \bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T.$$

GEVAL B

fase 2

$$V_1(t) = \frac{(C_0+C_1)}{C_0+C_1 - \frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}, \qquad \bar{t}_2 < t < \bar{t}_3.$$

fase 2

$$V_2(t) = \frac{(C_0+C_1)}{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}, \quad \bar{t}_3 < t < t_1, \quad t_1 = \bar{t}_3 + \frac{\delta_1}{C_1}\left(C_0 - \frac{C_0+C_1}{\mu}\right).$$

fase 3

$$V_3(t) = \frac{\delta_1\mu}{\delta_1 - C_1\gamma} + \frac{\left(\frac{C_1\gamma}{C_1\gamma-\delta_1}\right)\ (C_0+C_1)}{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}\ e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}{(C_0+C_1)/\mu}\right)}, \qquad t_1 < t < \bar{t}_4.$$

fase 3

$$V_4(t) = \mu + \left\{\left(\frac{C_1\gamma}{C_1\gamma-\delta_1}\right)\left[\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right)e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)} - \mu\right]\right\}e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)},$$

$$\bar{t}_4 < t < \bar{t}_5,$$

$$V_4(t) = \mu + \left[\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) - \mu\right]e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)} + O(\delta_1), \qquad \bar{t}_4 < t < \bar{t}_5.$$

fase 2

$$V_5(t) = \frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0-C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}, \quad \bar{t}_5 < t < t_3, \quad t_3 = \bar{t}_5 + \frac{\delta_2}{C_1}(C_0-C_1)(\mu-1).$$

fase 1

$$V_6(t) = \frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \frac{(C_0-C_1)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)}{C_0-C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}\ e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0-C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}{(C_0-C_1)\mu}\right)}, \qquad t_3 < t < \bar{t}_6.$$

fase 1

$$V_7(t) = \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \frac{C_0\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} - \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right]}{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)} *$$

$$* \ e^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)}{C_0}\right)}, \qquad \bar{t}_6 < t < \bar{t}_7.$$

fase 1

$$V_8(t) = 1 + \left\{\frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0}{C_0+C_1}\right)\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} - \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right)e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right] *\right.$$

$$\left. * \, e^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0+C_1}{C_0}\right)} - 1\right\} * e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)}, \qquad \bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T,$$

$$V_8(t) = 1 + \left\{\left(\frac{C_0}{C_0+C_1}\right)\left[\frac{\delta_2}{C_1+\delta_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\delta_2}\right) e^{-\frac{\delta_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)}\right] - 1\right\} *$$

$$* \, e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)} + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_2), \qquad \bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T,$$

$$V_8(t) = 1 + \left[\left(\frac{C_0-C_1}{C_0+C_1}\right)\mu - 1\right]e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)} + O(\delta_2)+O(\varepsilon_2), \quad \bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T.$$

<u>GEVAL C</u>

fase 2

$$V_1(t) = \frac{(C_0+C_1)}{C_0+C_1 - \frac{C_1}{\varepsilon_1}(t-\bar{t}_2)}, \qquad \bar{t}_2 < t < \bar{t}_3.$$

fase 2

$$V_2(t) = \frac{(C_0+C_1)}{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}, \qquad \bar{t}_3 < t < t_1, \qquad t_1 = \bar{t}_3 + \frac{\delta_1}{C_1}\left(C_0 - \frac{C_0+C_1}{\mu}\right).$$

fase 3

$$V_3(t) = \frac{\delta_1\mu}{\delta_1-C_1\gamma} + \frac{\left(\frac{C_1\gamma}{C_1\gamma-\delta_1}\right)\ (C_0+C_1)}{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}\ e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}{(C_0+C_1)/\mu}\right)}, \qquad t_1 < t < \bar{t}_4.$$

fase 3

$$V_4(t) = \mu + \left\{\left(\frac{C_1\gamma}{C_1\gamma-\delta_1}\right)\left[\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) e^{\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)} - \mu\right]\right\} e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)}, \qquad \bar{t}_4 < t < \bar{t}_5,$$

$$V_4(t) = \mu + \left[\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) - \mu\right] e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)} + O(\delta_1), \qquad \bar{t}_4 < t < \bar{t}_5.$$

fase 2

$$V_5(t) = \frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0-C_1 + \frac{C_1}{\delta_2}(t-\bar{t}_5)}, \qquad \bar{t}_5 < t < \bar{t}_6.$$

fase 2

$$V_6(t) = \frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)}, \quad \bar{t}_6 < t < t_3, \quad \bar{t}_3 = \bar{t}_6 + \frac{\varepsilon_2}{C_1}((C_0-C_1)\mu - C_0).$$

fase 3

$$V_7(t) = \frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \frac{(C_0-C_1)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\varepsilon_2}\right)}{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)} e^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0 + \frac{C_1}{\varepsilon_2}(t-\bar{t}_6)}{(C_0-C_1)\mu}\right)}, \qquad t_3 < t < \bar{t}_7.$$

fase 3

$$V_8(t) = 1 + \left[\frac{\varepsilon_2}{C_1+\varepsilon_2} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0+C_1}\right)\mu\left(\frac{C_1}{C_1+\varepsilon_2}\right) e^{-\frac{\varepsilon_2}{C_1}\ln\left(\frac{C_0+C_1}{(C_0-C_1)\mu}\right)} - 1\right] *$$

$$* \; e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)}, \qquad \bar{t}_7 < t < \bar{t}_8 = \bar{t}_2 + T,$$

$$V_8(t) = 1 + \left[\left(\frac{C_0-C_1}{C_0+C_1}\right)\mu - 1\right] e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)} + O(\varepsilon_2), \quad t_7 < t < \bar{t}_8 = t_2 + T.$$

3. BEREKENING GEMIDDELDEN $\bar{V}_M$, $\bar{i}_B$ BIJ DE GEGEVEN FUNCTIE C(t)

Voor de gemiddelde waarde van V_M geldt

$$T\bar{V}_M = \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_2+T} V_M(t)dt = \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_2+T} (V(t)-i_B\gamma)dt = \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_2+T} V(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} i_B\gamma\, dt,$$

daar enkel voor $t_1 < t < t_2$ $i_B \neq 0$, dus

$$T\bar{V}_M = \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_2+T} V(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{V(t)-\mu}{\gamma}\gamma\, dt = \left(\int_{\bar{t}_2}^{t_1} + \int_{t_2}^{\bar{t}_2+T}\right) V(t)dt + \mu(t_2-t_1).$$

Voor de gemiddelde waarde van i_B geldt

$$T\bar{i}_B = \int_{t_1}^{t_2} \frac{V(t)-\mu}{\gamma}\, dt = \frac{1}{\gamma}\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt - \frac{\mu}{\gamma}(t_2-t_1).$$

De berekening van $\bar{V}_M$ en $\bar{i}_B$ zullen wij uitvoeren tot op orde $\delta_1^2, \delta_2^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ nauwkeurig. Dit betekent dat de integralen over de intervallen van lengte ε_i worden opgenomen in de orde-term.

Beschouwen wij eerst O(1)-termen, dan leveren enkel de integralen behorend bij V_4 en V_8 bijdragen. Voor de drie gevallen A,B,C zijn de functies V_4 en V_8 identiek indien termen van orde δ_i, ε_i worden verwaarloosd.

$$\int_{\bar{t}_4}^{\bar{t}_5} V_4(t)dt = \int_{\bar{t}_4}^{\bar{t}_5}\left(\mu + K_4\, e^{-\frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}(t-\bar{t}_4)}\right)dt =$$

$$= T_2\mu + \gamma(C_0-C_1)K_4\left(1 - e^{-\frac{T_2}{\gamma(C_0-C_1)}}\right)$$

en

$$\int_{\bar{t}_7}^{\bar{t}_8} V_8(t)dt = \int_{\bar{t}_7}^{\bar{t}_8}\left(1 + K_8\, e^{-\frac{1}{(C_0+C_1)}(t-\bar{t}_7)}\right)dt =$$

$$= T_1 + (C_0+C_1)K_8\left(1 - e^{-\frac{T_1}{(C_0+C_1)}}\right).$$

Voer de volgende notaties in:

$$\alpha = 1 - e^{-\frac{T_2}{\gamma(C_0-C_1)}}, \qquad \beta = 1 - e^{-\frac{T_1}{(C_0+C_1)}}.$$

Dit levert met de eerste orde benadering voor K_4 en K_8:

$$K_4 \simeq \frac{C_0+C_1}{C_0-C_1} - \mu, \qquad K_8 \simeq \left(\frac{C_0-C_1}{C_0+C_1}\right)\mu - 1$$

voor $\bar{V}_M$ en $\bar{i}_B$:

$$T\bar{V}_M = T_1 + (C_0+C_1)\left[\left(\frac{C_0-C_1}{C_0+C_1}\right)\mu - 1\right]\beta + \mu T_2,$$

$$T\bar{i}_B = \frac{1}{\gamma}\left\{T_2\mu + \gamma(C_0-C_1)\left[\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) - \mu\right]\alpha\right\} - \frac{\mu}{\gamma}T_2 =$$

$$= (C_0+C_1)\alpha - (C_0-C_1)\mu\alpha.$$

Eliminatie van μ levert

$$\mu = \frac{(C_0+C_1)\alpha - T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha},$$

en dus tenslotte het verband tussen $\bar{V}_M$ en $\bar{i}_B$ (met $\theta_1 = \frac{T_1}{T}$, $\theta_2 = \frac{T_2}{T}$)

$$(C_0-C_1)\alpha\bar{V}_M + [\theta_2 T + (C_0-C_1)\beta]\bar{i}_B = (C_0-C_1)\alpha\theta_1 + (C_0+C_1)\alpha\theta_2.$$

Om de berekening van de termen van orde δ_1, δ_2 uit te voeren, moeten wij de gevallen A, B, C onderscheiden. De resultaten van de verschillende integraties worden hieronder samengevat.

<u>GEVAL A, integraties</u>

$$\int_{\bar{t}_3}^{\bar{t}_4} V_3(t)\,dt = \int_{\bar{t}_3}^{\bar{t}_4}\left[\frac{\delta_1\mu}{\delta_1 - C_1\gamma} + \frac{K_3}{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}\, e^{-\frac{\delta_1}{\gamma C_1}\ln\left(\frac{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}{C_0}\right)}\right] dt =$$

(integrand ontwikkelen naar δ_1)

$$= \int_{\bar{t}_3}^{\bar{t}_4} \frac{C_0+C_1}{C_0 - \frac{C_1}{\delta_1}(t-\bar{t}_3)}\, dt + O(\delta_1^2) = \delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) + O(\delta_1^2),$$

$$\int_{\bar{t}_4}^{\bar{t}_5} V_4(t)dt = T_2\mu + \gamma(C_0+C_1)\alpha - \gamma(C_0-C_1)\mu\alpha + \delta_1\left[\mu + \left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\right]\alpha + $$
$$+ O(\delta_1^2) + O(\varepsilon_1),$$

$$\int_{\bar{t}_5}^{t_3} V_5(t)dt = \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\mu + O(\delta_2^2),$$

$$\int_{t_3}^{\bar{t}_6} V_6(t)dt = \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right) + O(\delta_2^2),$$

$$\int_{\bar{t}_7}^{\bar{t}_8} V_8(t)dt = T_1 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$
$$+ \delta_2\, C_0\left[\frac{1}{C_1} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{-1}{C_1} - \frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)\right)\right]\beta +$$
$$+ O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_2).$$

GEVAL B, integraties

$$\int_{\bar{t}_3}^{t_1} V_2(t)dt = \delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{(C_0+C_1)/\mu}\right) + O(\delta_1^2),$$

$$\int_{t_1}^{\bar{t}_4} V_3(t)dt = \delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{(C_0+C_1)/\mu}{C_0-C_1}\right) + O(\delta_1^2),$$

$$\int_{\bar{t}_4}^{\bar{t}_5} V_4(t)dt = T_2\mu + \gamma(C_0+C_1)\alpha - \gamma(C_0-C_1)\mu\alpha +$$
$$+ \delta_1\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\left[-\mu + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right)\ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)\right]\alpha + O(\delta_1^2),$$

$$\int_{\bar{t}_5}^{t_3} V_5(t)dt = \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\mu + O(\delta_2^2),$$

$$\int_{t_3}^{\bar{t}_6} V_6(t)dt = \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right) + O(\delta_2^2),$$

$$\int_{\bar{t}_7}^{\bar{t}_8} V_8(t)dt = T_1 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$

$$+ \delta_2\, C_0\left[\frac{1}{C_1} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{-1}{C_1} - \frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)\right)\right]\beta + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_2).$$

GEVAL C, integraties

$$\int_{\bar{t}_3}^{t_1} V_2(t)dt = \delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{(C_0+C_1)/\mu}\right) + O(\delta_1^2),$$

$$\int_{t_1}^{\bar{t}_4} V_3(t)dt = \delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{(C_0+C_1)/\mu}{C_0-C_1}\right) + O(\delta_1^2),$$

$$\int_{\bar{t}_4}^{\bar{t}_5} V_4(t)dt = T_2\mu + \gamma(C_0+C_1)\alpha - \gamma(C_0-C_1)\mu\alpha +$$

$$+ \delta_1\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\left[-\mu + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right) + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right)\ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)\right]\alpha + O(\delta_1^2),$$

$$\int_{\bar{t}_5}^{\bar{t}_6} V_5(t)dt = \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) + O(\delta_2^2),$$

$$\int_{\bar{t}_7}^{\bar{t}_8} V_8(t)dt = T_1 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta + O(\varepsilon_2).$$

De gemiddelden $\bar{V}_M$, $\bar{i}_B$ kunnen nu worden bepaald; de resultaten luiden:

GEVAL A: $\bar{V}_M$, $\bar{i}_B$

$$T\bar{V}_M = \left(\int_{\bar{t}_2}^{t_1} + \int_{t_2}^{\bar{t}_2+T}\right) V(t)dt + \mu(t_2-t_1) =$$

$$= \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\mu + \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right) +$$

$$+ T_1 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$

$$+ \delta_2\beta\ C_0\left[\frac{1}{C_1} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{-1}{C_1} - \frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)\right)\right] +$$

$$+ \mu(T_2+\delta_1) + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) =$$

$$= T_1 + \mu T_2 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$

$$+ \delta_1\mu + \delta_2\left[\mu\beta + \beta\frac{C_0}{C_1}(1-\mu) + \left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)(1-\beta)\mu\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\beta\mu\ln\mu\right] +$$

$$+ O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2),$$

$$T\bar{I}_B = \frac{1}{\gamma}\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt - \frac{\mu}{\gamma}(t_2-t_1) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[\delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)\right] + \frac{1}{\gamma}[T_2\mu + \gamma(C_0+C_1)\alpha - \gamma(C_0-C_1)\mu\alpha] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\ \delta_1\alpha\left[\mu + \left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\right] - \frac{\mu}{\gamma}(T_2+\delta_1) + O(\delta_1^2) + O(\varepsilon_1) =$$

$$= (C_0+C_1)\alpha - (C_0-C_1)\mu\alpha + \delta_1\left[\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) - \mu\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)\right] +$$

$$+ O(\delta_1^2) + O(\varepsilon_1).$$

Hieruit volgt

$$\mu = \frac{(C_0+C_1)\alpha - T\bar{I}_B + \delta_1\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)}{(C_0-C_1)\alpha + \delta_1\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)} + O(\delta_1^2) + O(\varepsilon_1) =$$

$$= \frac{(C_0+C_1)\alpha - T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha} + \delta_1 \frac{1}{(C_0-C_1)\alpha}\left[\left((C_0+C_1)\alpha - T\bar{i}_B\right)\left(\frac{-(1-\alpha)}{\alpha\gamma(C_0-C_1)}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)\right] + O(\delta_1^2) + O(\varepsilon_1) =$$

$$= \frac{(C_0+C_1)\alpha - T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha} + O(\delta_1) + O(\varepsilon_1).$$

<u>GEVAL B: $\bar{V}_M$, i_B</u>

$$T\bar{V}_M = \delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right) +$$

$$+ \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\mu + \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right) +$$

$$+ T_1 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$

$$+ \delta_2\beta\, C_0\left[\frac{1}{C_1} + \left(\frac{C_0-C_1}{C_0}\right)\mu\left(\frac{-1}{C_1} - \frac{1}{C_1}\ln\left(\frac{C_0}{(C_0-C_1)\mu}\right)\right)\right] +$$

$$+ \mu\left(T_2 + \delta_1\left(1 - \frac{1}{C_1}\left(C_0 - \frac{C_0+C_1}{\mu}\right)\right)\right) + O(\delta_1^2) + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_1) =$$

$$= T_1 + \mu T_2 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$

$$+ \delta_1\left[-\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right) + \left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\left(1 + \ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right)\right)\right] +$$

$$+ \delta_2\left[\beta\mu + \beta\frac{C_0}{C_1}(1-\mu) + \left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)(1-\beta)\mu\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) + \left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\beta\mu\ln\mu\right] +$$

$$+ O(\delta_1^2) + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2).$$

$$T\bar{i}_B = \frac{1}{\gamma}\,\delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0+C_1}{(C_0-C_1)\mu}\right)\Big] +$$

$$\frac{1}{\gamma}[T_2\mu + \gamma(C_0+C_1)\alpha - \gamma(C_0-C_1)\mu\alpha] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\,\delta_1\alpha\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\left[-\mu + \left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right)\left(1 + \ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)\right)\right] +$$

$$- \frac{\mu}{\gamma}\left(T_2 + \delta_1\left(\frac{C_1-C_0}{C_1} + \frac{C_0+C_1}{C_1\mu}\right)\right) + O(\delta_1^2) =$$

$$= (C_0+C_1)\alpha - (C_0-C_1)\mu\alpha +$$

$$+ \delta_1\left(\frac{\alpha-1}{\gamma}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\left(1 + \ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)\right) + \delta_1\mu\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right) + O(\delta_1^2).$$

Nu geldt voor $T\bar{i}_B$ niet meer de lineaire afhankelijkheid van μ zoals in geval A; ontwikkelen naar δ_1 geeft

$$\mu = \frac{(C_0+C_1)\alpha-T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha} + \delta_1\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)}{(C_0-C_1)\alpha}\left[-\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\left(1 + \ln\left(\frac{C_0-C_1}{C_0+C_1}\right)\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\left(\frac{(C_0+C_1)\alpha-T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\right) +$$

$$\left. - \left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{(C_0+C_1)\alpha-T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\right)\right] + O(\delta_1^2) =$$

$$= \frac{(C_0+C_1)\alpha-T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha} + \delta_1\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)}{(C_0-C_1)\alpha}\left[-\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(1 - \frac{T\bar{i}_B}{(C_0+C_1)\alpha}\right) - \frac{T\bar{i}_B}{C_1\alpha}\right] + O(\delta_1^2).$$

GEVAL C: $\bar{V}_M$, $\bar{i}_B$

$$T\bar{V}_M = \delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right) + \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) +$$

$$+ T_1 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$

$$+ \mu\left(T_2 + \delta_1\left(1 - \frac{1}{C_1}\left(C_0 - \frac{C_0+C_1}{\mu}\right)\right)\right) + O(\delta_1^2) + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) =$$

$$= T_1 + \mu T_2 + (C_0-C_1)\mu\beta - (C_0+C_1)\beta +$$

$$+ \delta_1\left[-\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)+\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\left(1+\ln\left(\frac{C_0\mu}{C_0+C_1}\right)\right)\right] +$$

$$+ \delta_2\mu\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) + O(\delta_1^2) + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2).$$

$$T\bar{i}_B = \frac{1}{\gamma}\left[\delta_1\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0+C_1}{(C_0-C_1)\mu}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma}[T_2\mu + \gamma(C_0+C_1)\alpha - \gamma(C_0-C_1)\mu\alpha] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\,\delta_1\alpha\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\left[-\mu+\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right)\left(1+\ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)\right)\right] +$$

$$- \frac{\mu}{\gamma}\left(T_2+\delta_1\left(\frac{C_1-C_0}{C_1}+\frac{C_0+C_1}{C_1\mu}\right)\right) + O(\delta_1^2) =$$

$$= (C_0+C_1)\alpha - (C_0-C_1)\mu\alpha +$$

$$+ \delta_1\left(\frac{\alpha-1}{\gamma}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\left(1+\ln\left(\frac{(C_0-C_1)\mu}{C_0+C_1}\right)\right) +$$

$$+ \delta_1\mu\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right) + O(\delta_1^2).$$

Dit geeft, identiek geval B

$$\mu = \frac{(C_0+C_1)\alpha-T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha} + \delta_1\,\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)}{(C_0-C_1)\alpha}\left[-\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(1-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0+C_1)\alpha}\right)-\frac{T\bar{i}_B}{C_1\alpha}\right] + O(\delta_1^2).$$

4. VERBAND TUSSEN $\bar{V}_M$ en $\bar{i}_B$ NA ELIMINATIE VAN μ

Substitutie van de gevonden formules voor μ in de uitdrukkingen voor $\bar{V}_M$ levert de volgende resultaten met

$$\theta_1 = \frac{T_1}{T},\quad \theta_2 = \frac{T_2}{T},\quad \alpha = 1 - e^{-\frac{T_2}{\gamma(C_0-C_1)}},\quad \beta = e^{-\frac{T_1}{(C_0+C_1)}}:$$

GEVAL A

$$(C_0-C_1)\alpha\ \bar{V}_M+\bar{i}_B\Big\{\theta_2T+(C_0-C_1)\beta+\delta_1\Big[1-\Big(\frac{1-\alpha}{\alpha\gamma}\Big)\Big(\frac{\theta_2T}{(C_0-C_1)}\Big)+\beta\Big)\Big]+$$

$$+\delta_2\Big[\beta-\beta\frac{C_0}{C_1}+\Big(\frac{C_0-C_1}{C_1}\Big)(1-\beta)\ln\Big(\frac{C_0}{C_0-C_1}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{C_0-C_1}{C_1}\Big)\beta\ \ln\Big(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\Big)\Big]\Big\}=$$

$$=(C_0-C_1)\alpha\theta_1+(C_0+C_1)\alpha\theta_2+$$

$$+\delta_1\Big[(\theta_2+(C_0-C_1)\frac{\beta}{T})\Big(-\Big(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\Big)+\Big(\frac{C_0+C_1}{C_1}\Big)\ln\Big(\frac{C_0}{C_0-C_1}\Big)\Big)\Big(\frac{1-\alpha}{\gamma}\Big)\Big]+$$

$$+\delta_1\Big(\frac{(C_0+C_1)\alpha}{T}\Big)+$$

$$+\delta_2\Big[\Big(\frac{(C_0+C_1)\alpha}{T}\Big)\Big(\beta-\beta\frac{C_0}{C_1}+\Big(\frac{C_0-C_1}{C_1}\Big)(1-\beta)\ln\Big(\frac{C_0}{C_0-C_1}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{C_0-C_1}{C_1}\Big)\beta\ \ln\Big(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\Big)\Big)\Big]+$$

$$+\delta_2\ \frac{(C_0-C_1)C_0\alpha\beta}{TC_1}+O(\delta_1^2)+O(\delta_2^2)+O(\varepsilon_1)+O(\varepsilon_2).$$

GEVAL B

$$(C_0-C_1)\alpha\ \bar{V}_M+\bar{i}_B\Big\{\theta_2T+(C_0-C_1)\beta+$$

$$+\delta_1\Big[(\theta_2+(C_0-C_1)\frac{\beta}{T})\Big(\frac{1-\alpha}{\gamma}\Big)\Big(\Big(\frac{C_0+C_1}{C_1}\Big)\ln\Big(1-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0+C_1)\alpha}\Big)+\frac{T}{C_1\alpha}\Big)+$$

$$-\frac{(C_0-C_1)}{C_1}-\frac{(C_0-C_1)}{T}\ \alpha\Big(\frac{C_0+C_1}{C_1}\Big)\ln\Big(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\Big)\Big]+$$

$$+$$

$$+ \delta_2\left[\beta-\beta\frac{C_0}{C_1}+\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)(1-\beta)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)+\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\beta\ln\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\right)\right]\Bigg\} =$$

$$= (C_0-C_1)\alpha\theta_1 + (C_0+C_1)\alpha\theta_2 + \delta_1\left[\left(\frac{(C_0-C_1)\alpha}{T}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0+C_1}\right)\right] +$$

$$+ \delta_2\left\{\left(\frac{(C_0-C_1)\alpha}{T}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}\right)\left[\beta-\beta\frac{C_0}{C_1}+\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)(1-\beta)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\beta\ln\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\right)\right] + \left(\frac{(C_0-C_1)\alpha}{T}\right)\beta\frac{C_0}{C_1}\right\} +$$

$$+ O(\delta_1^2) + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2).$$

<u>GEVAL C</u>

$$(C_0-C_1)\alpha\bar{V}_M + \bar{i}_B\Big\{\theta_2 T + (C_0-C_1)\beta +$$

$$+ \delta_1\left[(\theta_2+(C_0-C_1)\tfrac{\beta}{T})\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)\left(\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(1-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0+C_1)\alpha}\right)+\frac{T}{C_1\alpha}\right) +\right.$$

$$\left. - \frac{(C_0-C_1)}{C_1} - \left(\frac{(C_0-C_1)\alpha}{T}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0+C_1}{C_0-C_1}-\frac{T\bar{i}_B}{(C_0-C_1)\alpha}\right)\right] +$$

$$+ \delta_2\left(\frac{C_0-C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right)\Big\} =$$

$$= (C_0-C_1)\alpha\theta_1 + (C_0+C_1)\alpha\theta_2 +$$

$$+ \delta_1\left(\frac{(C_0-C_1)\alpha}{T}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0+C_1}\right) +$$

$$+ \delta_2\left(\frac{(C_0-C_1)\alpha}{T}\right)\left(\frac{C_0+C_1}{C_1}\right)\ln\left(\frac{C_0}{C_0-C_1}\right) +$$

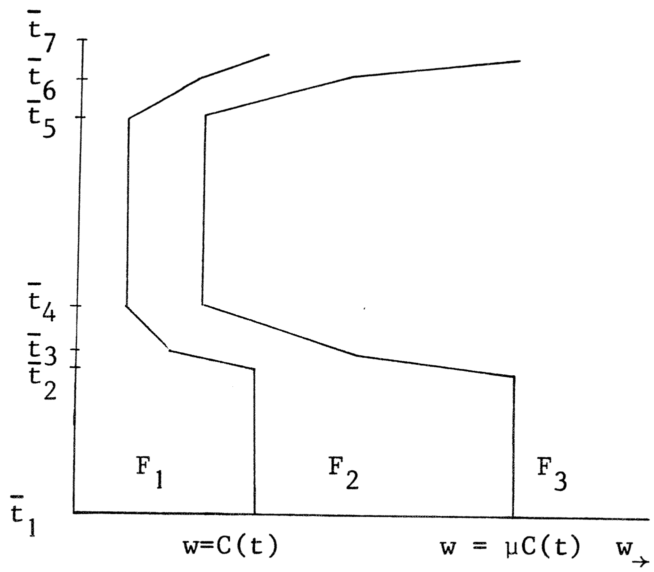
$$+ O(\delta_1^2) + O(\delta_2^2) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2).$$

APPENDIX

Stel w(t) = C(t)V(t), dan gaat de differentiaalvergelijking over in

$$\frac{d}{dt} w = -\left(\frac{w}{C(t)} - 1\right)\theta\left(-\frac{w}{C(t)} + 1\right) - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{w}{C(t)} - \mu\right)\theta\left(\frac{w}{C(t)} - \mu\right).$$

Geven wij het rechterlid aan met g(C(t),w) = f(t,w), dan kunnen wij in het (t,w)-vlak, $\bar{t}_1 \leq t \leq \bar{t}_1 + T = \bar{t}_7$ de eigenschappen van f(t,w) onderzoeken. Bij de gegeven functie C(t) is het mogelijk het (t,w)-vlak op te splitsen in 3 gebieden, overeenkomend met de drie fasen 1,2,3: F_1, F_2, F_3. Vanwege de periodiciteit in t is het voldoende t te beperken tot het interval $[\bar{t}_1, \bar{t}_1+T]$. De begrenzingen van de gebieden worden bepaald door de lijnen w = C(t) en w = μC(t), zie fig. 3.



<u>Figuur 3</u>

Er geldt:

$(t,w) \in F_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} w > 0$,

$(t,w) \in F_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} w = 0$; de oplossing in het (t,w)-vlak wordt voorgesteld door een rechte lijn, evenwijdig met de t-as, zolang echter $(t,w) \in F_2$ blijft,

$(t,w) \in F_3 \Rightarrow \frac{d}{dt} w < 0$.

De drie gevallen A,B,C, die wij eerder hebben onderscheiden worden bepaald in het (t,w)-vlak door de ligging van $\mu(C_0-C_1)$ ten opzichte van C_0 en door de ligging van μC_0 ten opzichte van C_0+C_1. Bij voorbaat is verondersteld dat $\mu(C_0-C_1) < C_0 + C_1$; indien $\mu(C_0-C_1) > C_0+C_1$ dan zou de weinig interessante oplossing $w \equiv w_0$ met $C_0+C_1 < w_0 < \mu(C_0-C_1)$ kunnen optreden.

STELLING A (Hale [1], Chapter 1, Theorem 3.1). *Als* $f(t,w)$ *continu is in* $D \subset \mathbb{R}^2$ *en locaal Lipschitz continu met betrekking tot* w *in* D, *dan bestaat er voor elke* $(t_0,w_0) \in D$ *een unieke oplossing* $w(t,t_0,w_0)$, $w(t_0,t_0,w_0) = w_0$ *van de vergelijking* $\frac{d}{dt} w = f(t,w)$, *gaande door* (t_0,w_0). *Verder geldt dat het gebied in* $\mathbb{R}^3$, *waar* $w(t,t_0,w_0)$ *bestaat,* E, *open is en* $w(t,t_0,w_0)$ *is continu in* E.

$f(t,w)$ heet *locaal Lipschitz continu met betrekking tot* $w \in D$ als voor elke gesloten deelverzameling U in D er een constante $k = k_U$ bestaat, zodat

$$|f(t,w)-f(t,w)| \leq k_U|w-v|, \qquad \text{voor } (t,w),(t,v) \in U.$$

TOEPASSING VAN STELLING A

Stel $D = [\bar{t}_1,\bar{t}_1+T] \times [0,w_+]$, met $w_+ > \mu(C_0+C_1)$, w_+ verder willekeurig; $f(t,w)$ is continu in D en $f(t,w)$ Lipschitz continu met betrekking tot w in D, want

$$(t,w_1),(t,w_2) \in F_1 \quad |f(t,w_1)-f(t,w_2)| = \frac{1}{C(t)}|w_1-w_2| \leq \frac{1}{C_0-C_1}|w_1-w_2|,$$

$$(t,w_1),(t,w_2) \in F_3 \quad |f(t,w_1)-f(t,w_2)| = \frac{1}{\gamma C(t)}|w_1-w_2| \leq \frac{1}{\gamma(C_0-C_1)}|w_1-w_2|,$$

en ook de andere mogelijkheden geven analoge schattingen. Dus $w(t,\bar{t}_1,w(\bar{t}_1))$ is uniek en continu in $t,\bar{t}_1$ en $w(\bar{t}_1)$.

STELLING B (Hale [1], vergelijk Chapter 0, Theorem 3.1). *Als* J *een gesloten deelinterval is van* $\mathbb{R}^1$ *en* $T\colon J \to J$ *een contractie afbeelding op* J, *dan bezit* T *een uniek dekpunt* $\bar{w}$ *in* J *en voor* w_0 *in* J *willekeurig,* *convergeert de rij* $\{w_{n+1} = Tw_n, \quad n = 0,1,2,\ldots\}$ *naar* $\bar{w}$, $n \to \infty$ *en* $|\bar{w}-w_n| \le \lambda^n |w_1-w_0|/(1-\lambda)$, waarbij λ *de contractie constante is voor* T *op* J, $\lambda < 1$.

Als J een deelverzameling is van $\mathbb{R}^1$ en T een afbeelding van J naar een gesloten interval J' (T: J $\to$ J'), dan is T een contractie op J als er een λ bestaat, $0 \le \lambda < 1$ zodanig dat $|Tx-Ty| \le \lambda|x-y|$, $x,y \in J$; λ heet *de contractie constante voor* T *op* J.

TOEPASSING VAN STELLING B

Stel $J = [0,w_+]$ en definieer T als volgt:

$$T(u) = w(\bar{t}_1+T,\bar{t}_1,u) = v(\bar{t}_1), \qquad u \in [0,w_+],$$

waarbij $w(\bar{t}_1+T,\bar{t}_1,u)$ de oplossing is van de differentiaalvergelijking op tijdstip $\bar{t}_1+T$, met als beginwaarde $w(\bar{t}_1) = u$; u willekeurig, $u \in J$. Uit stelling A volgt dat $v(\bar{t}_1) = w(\bar{t}_1+T,\bar{t}_1,u)$ uniek is en continu in elk argument en zelfs $0 < w(\bar{t}_1) < w_+$, daar $f(0,t) > 0$ en $f(w_+,t) < 0$, $\bar{t}_1 \le t \le \bar{t}_1 + T$, dus $v(\bar{t}_1) \in J$.

Wij zullen nu aantonen dat T een contractie is op J, dus dat er een λ bestaat, $0 \le \lambda < 1$, zodanig dat

$$|Tu_1-Tu_2| \le \lambda|u_1-u_2|.$$

Een royale bovengrens voor λ zal blijken te zijn

$$\lambda = \max\left(e^{-\frac{T_2}{\gamma(C_0-C_1)}}, e^{-\frac{T_1}{C_0+C_1}}, e^{-\frac{T_1}{\gamma(C_0+C_1)}}\right).$$

Afhankelijk van de waarden u_1, u_2 (met $u_1 < u_2$) dienen wij enige gevallen te onderscheiden; voor elk van de volgende gevallen A,B,C,D zullen wij een deelinterval I van $[\bar{t}_1,\bar{t}_1+T]$aangeven, waarop een bovengrens voor de contactie constante kan worden gegeven. Voor t-waarden buiten dit interval geldt dat daar deze constante niet vergroot kan worden, omdat altijd hetzij beide functies $w_i = w(t_1,\bar{t}_1,u_i)$, $i = 1,2$, constant zijn, hetzij w_1 stijgend, w_2 niet-stijgend, hetzij w_1 dalend, w_2 niet-dalend is. Ook is het nog mogelijk dat

w_1, w_2 beide stijgen of dalen, maar deze situatie geeft analoog aan waarden van $t \in I$ een contractie.

GEVAL A

Stel $(\bar{t}_1, u_i) \in F_1$, $i = 1,2$, dan geldt dat de krommen $w_i(t) = w(t,\bar{t}_1,u_i)$ voor $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_1 + T_1$, $i = 1,2$ zeker in gebied F_1 zullen lopen; de algemene oplossing luidt

$$w_i(t) = \left(\int_{\bar{t}_1}^{t} e^{\int_{\bar{t}_1}^{\tau} \frac{1}{C(\tau')} d\tau'} d\tau + u_i\right) e^{-\int_{\bar{t}_1}^{t} \frac{1}{C(\tau)} d\tau},$$

dus

$$|w_1(\bar{t}_1+T_1)-w_2(\bar{t}_1+T_1)| = |u_1-u_2|\, e^{-\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_1+T} \frac{1}{C(\tau)} d\tau} =$$

$$= |u_1-u_2|\, e^{-\frac{T_1}{C_0+C_1}};$$

in dit geval is I dus $[\bar{t}_1, \bar{t}_1+T_1]$.

GEVAL B

Stel $(\bar{t}_1, u_i) \in F_3$, $i = 1,2$, dan geldt dat de krommen $w_i(t) = w(t,\bar{t}_1,u_i)$ voor $\bar{t}_1 < t < \bar{t}_1 + T_1$, $i = 1,2$ zeker in gebied F_3 zullen lopen; de algemene oplossing luidt

$$w_i(t) = \left(\frac{\mu}{\gamma} \int_{\bar{t}_1}^{t} e^{\frac{1}{\gamma}\int_{\bar{t}_1}^{\tau} \frac{1}{C(\tau')} d\tau'} d\tau + u_i\right) e^{-\frac{1}{\gamma}\int_{\bar{t}_1}^{t} \frac{1}{C(\tau)} d\tau},$$

dus analoog geval A:

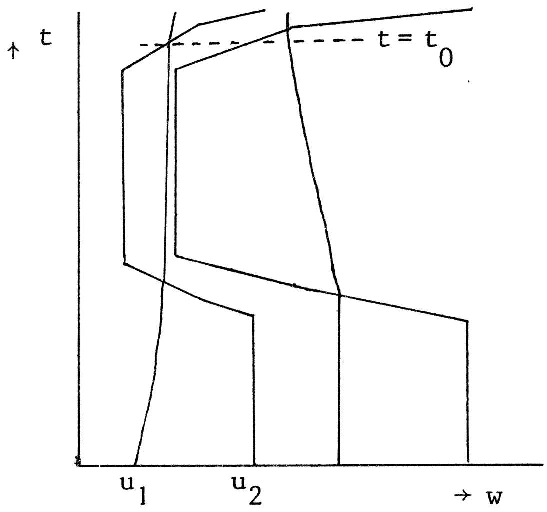
$$|w_1(\bar{t}_1+T_1)-w_2(\bar{t}_1+T_1)| = |u_1-u_2|\, e^{-\frac{T_1}{\gamma(C_0+C_1)}};$$

in dit geval is I dus ook $[\bar{t}_1, \bar{t}_1+T_1]$.

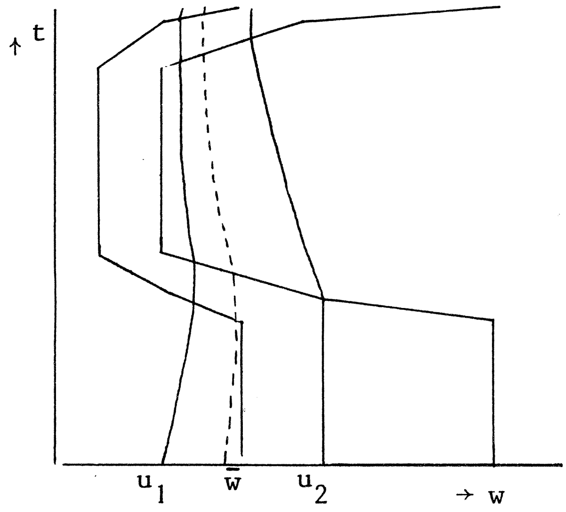
GEVAL C

Stel $(\bar{t}_1,u_1) \in F_1$, $(\bar{t}_1,u_2) \in F_2$; stel $C_0 + C_1 - u_1 = \mu$, $u_2 - (C_0+C_1) = \nu$. Er kunnen zich nu 3 gevallen voordoen, afhankelijk of de kromme $w_1(t)$ voor $\bar{t}_4 < t < \bar{t}_5$ door gebied F_1, F_2 of F_3 verloopt (resp. geval C_1,C_2,C_3); zie fig.4 voor C_2, fig. 5 voor C_3. In geval C_3 kan er een contractie constante bepaald worden op het interval $[\bar{t}_4,\bar{t}_5]$, analoog als onder geval A en B. Geval C_2 zal hieronder worden uitgewerkt; geval C_1 gaat analoog geval C_2.

Stel $t = t_0$ het tijdstip, waarop $w_1(t)$ F_2 verlaat.



figuur 4, C_2



figuur 5, C_3

Er geldt:

$|w_1(\bar{t}_1+T)-w_2(\bar{t}_1+T)| < |w_1(t_0)-w_2(t_0)| =$

$\mu(C_0-C_1)-w_1(t_0) + w_2(t_0) - \mu(C_0-C_1)$;

$C_0 + C_1 - w_1(\bar{t}_1+T_1) = \rho_1\mu, \quad \rho_1 < 1$;

$w_2(\bar{t}_5) - \mu(C_0-C_1) = \rho_2(w_2(\bar{t}_4)-\mu(C_0-C_1)) < \rho_2(w_2(\bar{t}_1) - \rho(C_0-C_1)) =$

$\rho_2(\nu + C_0+C_1 - \mu(C_0-C_1))$;

$w_1(t_0) > w_1(\bar{t}_1+T_1)$; $w_2(t_0) < w_2(\bar{t}_5)$, dus

$|w_1(\bar{t}_1+T)-w_2(\bar{t}_1+T)| <$

$\mu(C_0-C_1) - w_1(t_0) + w_2(t_0) - \mu(C_0-C_1) <$
$\mu(C_0-C_1) - (C_0+C_1) + (C_0+C_1) - w_1(t_0) + w_2(\bar{t}_5) - \mu(C_0-C_1) <$
$\mu(C_0-C_1) - (C_0+C_1) + \rho_1\mu + \rho_2\nu + \rho_2(C_0+C_1 - \mu(C_0-C_1)) =$
$\rho_1\mu + \rho_2\nu + (\rho_2-1)(C_0+C_1 - \mu(C_0-C_1)) < \max(\rho_1,\rho_2)(\mu+\nu) =$
$\max(\rho_1,\rho_2)\ |u_1-u_2|;$

in dit geval is I dus $[\bar{t}_1,\bar{t}_1+T_1] \cup [\bar{t}_4,\bar{t}_4+T_2]$.

GEVAL D

Stel $(\bar{t}_1,u_1) \in F_2$, $(\bar{t}_1,u_2) \in F_3$, dan geldt dat de krommen $w_i(t)$, $i = 1,2$ voor $\bar{t}_4 < t < \bar{t}_4 + T_2$ zeker in gebied F_3 zullen lopen en daar kan een contractie constante bepaald worden, analoog als onder geval A en B.

Het niet behandelde geval $(\bar{t}_1,u_1) \in F_1$, $(\bar{t}_1,u_2) \in F_3$ is te beschouwen als een combinatie van geval C en D.

Toepassing van stelling B levert een uniek dekpunt $\bar{w}$, dus $w(\bar{t}_1+T,\bar{t}_1,\bar{w}) = \bar{w}$. Vanwege de uniciteit, volgend uit stelling A volgt dus het bestaan van een unieke periodieke oplossing, die uniform asymptotisch stabiel is. In fig. 5 is de kromme $w(t,\bar{t}_1,\bar{w})$ geschetst.

LITERATUUR

[1] HALE, J.K., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New-York, 1969.