

Mathematisch Centrum.

Afd. Toegepaste Wiskunde.

Rapport TW no. 12.

Datum: Februari 1951.

Auteur: J. Kemperman.

Titel: De daling van het phreatisch oppervlak
boven een drain.

Het probleem. Een homogeen zandpakket met doorlatendheid k meter/dag rust op een horizontale, ondoorlaatbare kleilaag, en wordt aan weerszijden begrensd door evenwijdige kanalen (afstand $2L$ meter), waarin de waterspiegel een gegeven hoogte H boven de kleilaag heeft. Midden tussen de kanalen (en evenwijdig hiermede) bevindt zich een drain op een hoogte h boven de kleilaag. Gevraagd wordt voor de stationnaire toestand (indien deze bestaat) de hoogte te berekenen van het phreatisc oppervlak recht boven de drain, wanneer uit de drain Q m³ water (per strekkende meter en per dag) wordt weggepompt. Dit probleem zal exact worden opgelost. Een goed bruikbare oplossing vinden we in het geval, dat de drain op de kleilaag rust (zie formule (54)).

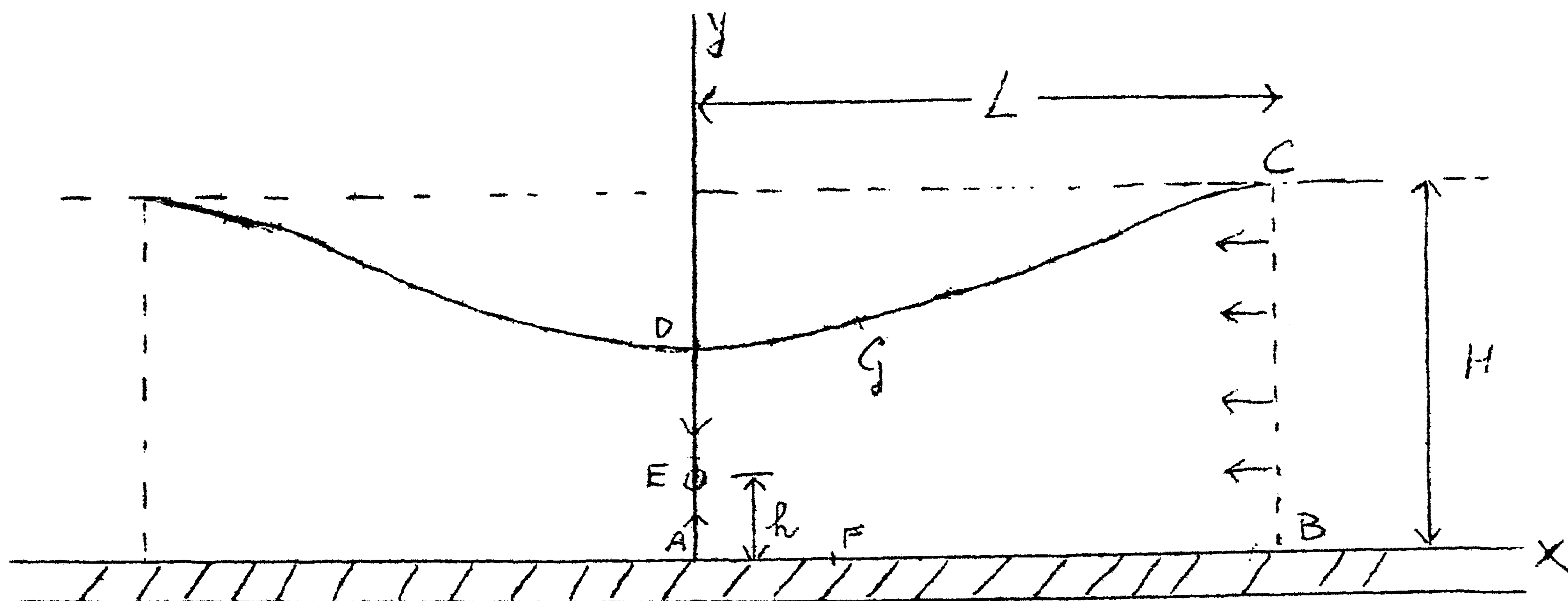


Fig. 1. Het $z = x + iy$ -vlak.

De stroomsnelheid ligt altijd in een vlak loodrecht op de drain en het gestelde probleem is dus essentieel twee-dimensionaal; in fig. 1 is een dwarsdoorsnede loodrecht op de drain weergegeven. In E bevindt zich de drain, waarvan we de afmetingen verwaarlozen. In D en C heeft de phreatische kromme een horizontale raaklijn.

Laten U en V de componenten zijn van de stroom-snelheid en zij $\varphi(x, y)$ de zoetwater-potentiaal (met de bovenzijde van de kleilaag als nul-niveau). Dan volgt uit de wet van Darcy

$$(1) \quad U = -k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{en} \quad V = -k \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

en uit de continuïteitsvergelijking

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

In elk punt P van de phreatische kromme is de zoetwaterpotentiaal gelijk aan de hoogte van P boven de kleilaag. Wanneer $y = f(x)$ de (gevraagde) gedaante van deze kromme voorstelt, dan geldt dus

$$(3) \quad \varphi(x, f(x)) = f(x).$$

Omdat de phreatische kromme bovendien een stroomlijn is, hebben we voor elk punt van deze kromme

$$\frac{V}{U} = f'(x).$$

Door de relatie (3) te differentieren, vinden we nu voor de phreatische kromme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{V}{U} = \frac{V}{U}$$

en geldt dus wegens (1)

$$(4) \quad U^2 + V^2 + k V = 0.$$

In het bijzonder geldt in de punten C en D, dat $U = V = 0$. Verder merken we op, dat de stroming horizontaal is langs de lijnen AB en BC en verticaal langs de lijn AD.

Wanneer we nu de complexe snelheid

$$(5) \quad w = u + iv = -U + iV$$

invoeren, dan correspondeert met de gesloten kromme EABCDE in het $z = x + iy$ -vlak de volgende kromme Γ in het w -vlak (het z.g. hodo-graphenvlak).

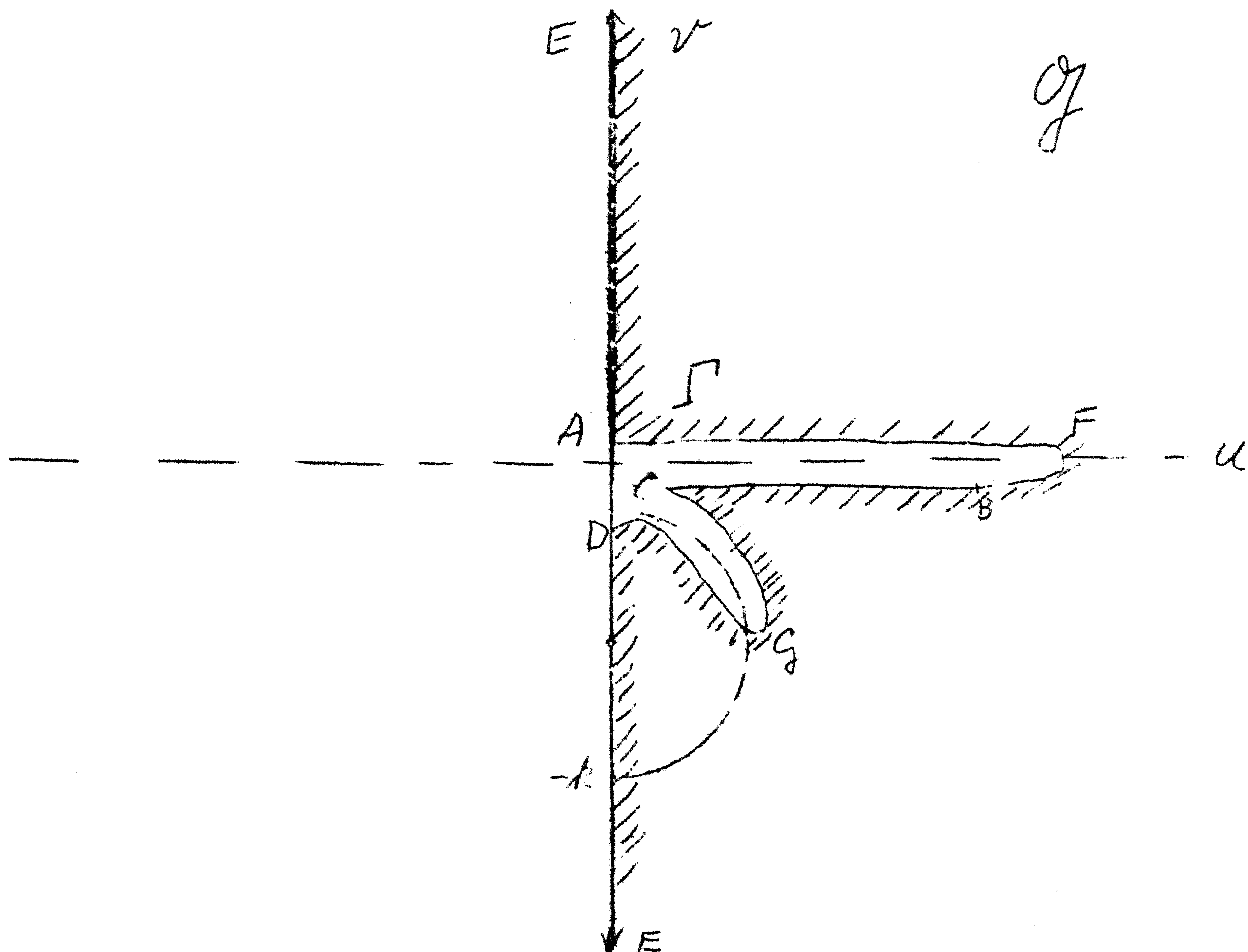


Fig. 2. Het $w = u + iv$ -vlak.

Immers wegens (4) correspondeert met de phreatische kromme een deel van de cirkel $u^2 + v^2 + kv = 0$ (waarbij de punten C en D beide corresponderen met het punt $w = 0$). Het punt G is het enige buigpunt van de phreatische kromme, terwijl F het punt voorstelt van de lijn AB, waar de (horizontale) stroomsnelheid maximaal is. Met het (in het z-vlak gelegen binnengebied van het contour EABCDE correspondeert het rechts van Γ gelegen gebied $\mathcal{G}$ in het w-vlak.

Wegens (2) is bij de functie $\varphi(x,y)$ een geconjugeerde reële functie $\psi(x,y)$ te vinden, zodanig dat geldt

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{U}{k} = -\frac{u}{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{V}{k} = -\frac{v}{k}, \end{aligned}$$

en wel is $\varphi(x,y)$ door (6) op een constante na bepaald. De functie

$$(7) \quad \Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

is nu een analytische functie van $z = x + iy$ voor elk van E verschillend punt (x,y) tussen de krommen $y = 0$ en $y = f(x)$. Uit (6) volgt

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{u}{k} + i \frac{v}{k},$$

ofwel

$$(8) \quad k \frac{d\Omega}{dz} = w.$$

Langs een stroomlijn geldt

$$k d\psi = k \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + k \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = V dx - U dy = 0$$

en de stroomlijnen hebben dus de vergelijking $\psi(x,y) = \text{constant}$. We zullen de functie $\psi(x,y)$ zodanig kiezen, dat langs de stroomlijn BAE geldt $\psi(x,y) = 0$.

Uit de drain E wordt $Q \text{ m}^3$ water weggepompt per strekkende meter en per dag. De helft hiervan wordt geleverd door het rechter kanaal. Dus geldt voor de lijn BC

$$\frac{1}{2} Q = - \int_0^H U(L,y) dy = k \int_0^H \frac{\partial \psi(L,y)}{\partial y} dy = k \psi(L,H)$$

en de stroomlijn CDE heeft dus de vergelijking $\psi(x,y) = \frac{Q}{2k}$. Tenslotte merken we op, dat in het drain-punt E moet gelden $\varphi = -\infty$, en dat langs de lijn BC de potentiaal φ een constante waarde H aanneemt.

Uit bovenstaande opmerkingen volgt, dat de analytische functie $\Omega(z)$ het binnengebied van de kromme EABCDE conform afbeeldt op het volgende gebied h in het Ω -vlak

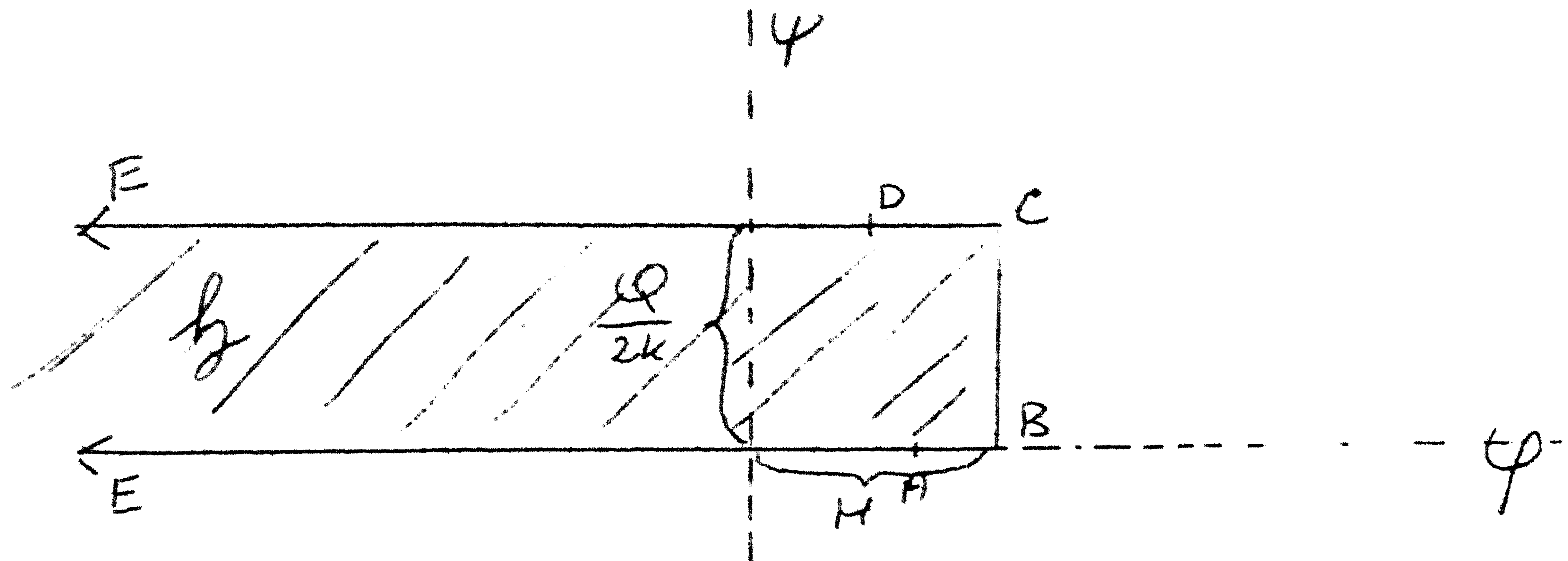


Fig. 3. Het $\Omega = \varphi + i\psi$ -vlak.

Het gebied h in het Ω -vlak wordt door de betrekking (8) conform afgebeeld op het gebied η in het w -vlak (zie fig. 2), zodanig dat het oneindig verre punt invariant is, en het punt C in de oorsprong wordt afgebeeld. Men kan bewijzen, dat er, op één vrijheidsgraad na, slechts één afbeelding is, welke aan deze voorwaarden voldoet. Evenwel is in het w -vlak de ligging van de punten F en G onbekend, waardoor we totaal over drie vrijheidsgraden beschikken. De bijbehorende parameters dienen achteraf zodanig te worden gekozen, dat in het z -vlak de lijnstukken AE, AB en BC de gegeven lengtes h resp. L resp. H aannemen. We zullen nu (met een drietal vrije parameters) de genoemde afbeelding expliciet aangeven.

De transformatie

$$(9) \quad \eta = - \cosh \left\{ \frac{2k\pi}{Q} (\Omega - H) \right\}$$

beeldt het gebied h op de volgende wijze conform af op de bovenste helft van het η -vlak

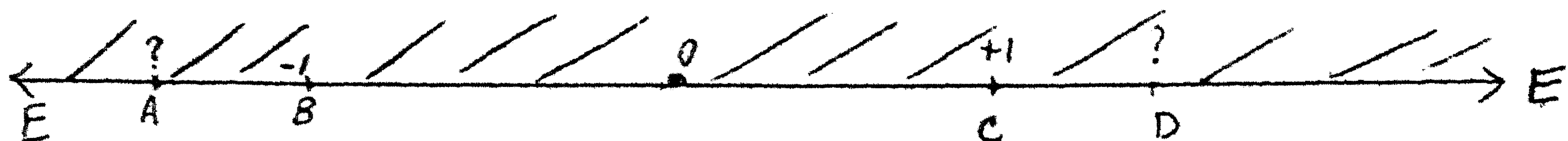


Fig. 4. Het η -vlak.

De transformatie *)

*) De punten F en G corresponderen met de punten waarvoor geldt $\frac{dw}{dt} = 0$. Uit (10) volgt nu gemakkelijk, dat met F en G in het t -vlak de wortels corresponderen van de vergelijking $t^2 + \pi(\mu - \lambda)t - (1 + \lambda\pi + \mu\pi) = 0$ en wel is $t_F > +1$ en $t_G < -1$.

$$(10) \quad \frac{1}{w} = -\frac{i}{k} \left[\lambda \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - \mu \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{\pi} \arcsin t - \frac{1}{2} \right],$$

waarin λ en μ positieve reële constanten voorstellen, beeldt het gebied $\mathcal{U}$ in het w -vlak op de volgende wijze af op de bovenste helft van het t -vlak.

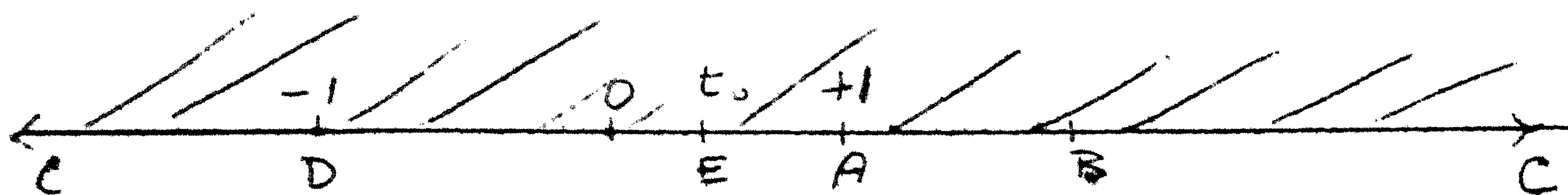


fig. 5. Het t -vlak.

In formule (10) definieren we $\sqrt{1+t}$ als volgt: voor t reëel en > -1 is deze wortel positief, voor t reëel en < -1 stellen we $\sqrt{1+t} = i \sqrt{-t-1}$, terwijl voor de waarden t boven de reële as de analytische voortzetting geldt. Dus als

$$t + 1 = r e^{i\theta} \quad \text{met } r > 0 \quad \text{en } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

dan is

$$\sqrt{1+t} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \text{met } \sqrt{r} > 0.$$

Analoog, als $t - 1 = r e^{i\theta}$ met $r > 0$ en $0 \leq \theta \leq \pi$,

$$\text{dan } \sqrt{1-t} = -i \sqrt{r} \quad \text{met } \sqrt{r} > 0.$$

Tenslotte definieren we

$$\arcsin t = \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}},$$

waarbij de integratie geschiedt langs het rechte lijnstuk, dat de punten 0 en t verbindt, en waarin $\sqrt{1-s^2}$ analoog met $\sqrt{1-t^2}$ wordt gedefinieerd. In het bijzonder geldt dus voor $t > 1$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{2} + i \int_1^t \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{\pi}{2} + i \ln(t + \sqrt{t^2-1})$$

en voor $t < -1$

$$\arcsin t = -\frac{\pi}{2} - i \int_1^t \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = -\frac{\pi}{2} + i \ln(-t + \sqrt{t^2-1}),$$

waarin $\ln \rho$ reëel is voor $\rho > 0$.

Nu geldt voor de drain E, dat $w = \infty$, en wegens (10) correspondeert dus in het t -vlak met E de reële waarde t_0 met $-1 < t_0 < 1$ en

$$(11) \quad \lambda \sqrt{\frac{1+t_0}{1-t_0}} - \mu \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} + \frac{1}{\pi} \arg \sin t_0 - \frac{1}{2} = 0.$$

Voor $\lambda > 0$ en $\mu > 0$ is het linkerlid van (11) in het interval $-1 < t_0 < +1$ een monotoon van $-\infty$ tot $+\infty$ toenemende functie en bestaat dus precies één waarde t_0 , waarvoor (11) geldt.

De laatste schakel van de afbeelding tussen $\mathcal{H}$ en $\mathcal{G}$ is de conforme afbeelding van de bovenste helft van het η -vlak op de bovenste helft van het t -vlak, zodanig dat met $\eta = \infty$ het punt $t = t_0$ (beide behorende bij de drain E) en met $\eta = +1$ het punt $t = \infty$ (beide behorend bij C) correspondeert. Deze afbeelding wordt gegeven door

$$(12) \quad \eta = \frac{t-a}{t-t_0} \quad \text{ofwel} \quad t = \frac{t_0 \eta - a}{\eta - 1},$$

waarin a een positieve constante $> 2-t_0$ voorstelt. De formules (9), (10) en (12) geven de gezochte conforme afbeelding tussen het gebied $\mathcal{H}$ in het Ω -vlak en het gebied $\mathcal{G}$ in het w -vlak. In deze afbeelding zijn $\lambda > 0$, $\mu > 0$ en a vrije reële parameters. Wanneer λ en μ gegeven zijn, dan volgt uit (14) éénvoudig de bijbehorende waarde t_0 (met $-1 < t_0 < +1$); de constante a moet voldoen aan $a > 2-t_0$.

Met de punten A en D in het z -vlak corresponderen in het t -vlak de punten $t = +1$ resp. $t = -1$, en dus in het η -vlak (wegens (12)) de punten

$$(13) \quad \eta_A = \frac{1-a}{1-t_0} \quad \text{resp.} \quad \eta_D = \frac{1+a}{1+t_0}.$$

Zij φ_A resp. φ_D de potentiaal in A resp. D (in het bijzonder is φ_D gelijk aan de gezochte lengte van het lijnstuk AD in het z -vlak). Dan geldt wegens (9)

$$(14) \quad \eta_A = -\cosh \left\{ \frac{2k\pi}{Q} (H - \varphi_A) \right\} \quad \text{en} \quad \eta_D = +\cosh \left\{ \frac{2k\pi}{Q} (H - \varphi_D) \right\}.$$

Uit (13) en (14) blijkt, dat φ_A en φ_D bekend zijn, zodra de constanten a en t bekend zijn (en omgekeerd).

Zij t^* een punt in het complexe t -vlak met $\text{Im}(t^*) \geq 0$; met t^* correspondeert een (voorlopig nog onbekend) punt z^* in het z -vlak gelegen op of binnen de contour EABCDE. Uit (10) volgt de complexe snelheid $w = u + iv = -U + iV$ in het punt z^* en uit (12) en (9) vinden we de complexe potentiaal $\Omega = \varphi + i\psi$ in het punt z^* . Ten einde bij t^* het bijbehorende punt z^* te bepalen, maken we gebruik van de betrekking (8). Deze geeft

$$(14) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{k}{w} \frac{\frac{d\eta}{dt}}{\frac{d\eta}{d\Omega}}.$$

Wegens (9) hebben we

$$\frac{d\eta}{d\Omega} = - \frac{2k\pi}{Q} \sinh \left\{ \frac{2k\pi}{Q} (\Omega - H) \right\} = - \frac{2k\pi}{Q} \sqrt{\eta^2 - 1}$$

en met (12) volgt nu

$$(15) \quad \frac{d\eta}{d\Omega} = - i \frac{2k\pi}{Q} \frac{\sqrt{2(a-t_0)}}{t-t_0} \sqrt{t - \frac{t_0+a}{2}}.$$

Verder geldt wegens (12)

$$\frac{d\eta}{dt} = - \frac{a-t_0}{(t-t_0)^2},$$

en uit (14), (15) en (10) vinden we tenslotte

$$(16) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{P}{(t-t_0)\sqrt{t-b}} \left[\lambda \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - \mu \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{\pi} \arcsin t - \frac{1}{2} \right]$$

met

$$(17) \quad P = \frac{Q}{2k\pi} \sqrt{\frac{a-t_0}{2}} \quad \text{en} \quad b = \frac{t_0+a}{2} > 1.$$

We merken op, dat wegens (11) het rechterlid van (16) eindig is voor $t = t_0$.

We beschikken nu over de volgende relaties

$$\overline{AE} = h, \quad \overline{AB} = L, \quad \overline{BC} = H,$$

(geldig in het z -vlak), waarin h , L en H gegeven lengtes voorstellen. Dit is equivalent met

$$(18) \quad z_A - z_E = - i h$$

$$(19) \quad z_B - z_A = + L$$

$$(20) \quad z_C - z_B = + i H.$$

Met z_E , z_A , z_B en z_C corresponderen in volgorde de punten $t = t_0$, $t = +1$, $t = b$ en $t = \infty$. Dus wegens (16) is formule (18) equivalent met

$$(21) \quad h = P \int_{t_0}^1 \left[\lambda \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - \mu \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \frac{1}{\pi} \arcsin t - \frac{1}{2} \right] \frac{dt}{(t-t_0)\sqrt{b-t}}$$

Analoog volgt uit (19)

$$(22) \quad L = P \int_1^b \left[\lambda \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} + \mu \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + \frac{1}{\pi} \ln (t + \sqrt{t^2-1}) \right] \frac{dt}{(t-t_0)\sqrt{b-t}}$$

en uit (20)

$$(23) \quad H = P \int_b^{\infty} \left[\lambda \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} + \mu \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + \frac{1}{\pi} \ln (t + \sqrt{t^2 - 1}) \right] \frac{dt}{(t-t_0)\sqrt{t-b}}.$$

De berekening van $\varphi_D = AD$ wordt als volgt uitgevoerd.

1. We kiezen vooreerst twee positieve constanten λ en μ .
2. Daarna bepalen we het reële getal t_0 met $|t_0| < 1$ uit vergelijking (11).
3. Vervolgens kiezen we een reële constante $a > 2-t_0$.
4. Stel $\rho = \frac{1+a}{1+t_0}$. Dan volgt uit (13) en (14)

$$(24) \quad H - \varphi_D = \frac{Q}{2k\pi} \text{Arc Cosh } \rho = \frac{Q}{2k\pi} \ln (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}),$$

waarmee we de potentiaal φ_D bepalen, behorende bij de gemaakte keuze van λ , μ en a .

5. Uit (21), (22) en (23) bepalen we de bijbehorende lengtes h , H en L ; de voorkomende constanten P en b worden door (17) gegeven.

De vorm van het phreatische oppervlak kan als volgt worden bepaald. Met de phreatische kromme DC correspondeert in het t -vlak het lijnstuk $t \leq -1$ op de reële as. Stellen we aldaar $t = -\tau$ dan wordt (16)

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{P}{(\tau+t_0)\sqrt{\tau+b}} \left\{ \lambda \sqrt{\frac{\tau-1}{\tau+1}} + \mu \sqrt{\frac{\tau+1}{\tau-1}} + \frac{1}{\pi} \ln (\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}) + i \right\}$$

waaruit volgt

$$(25) \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{P}{(\tau+t_0)\sqrt{\tau+b}}$$

en

$$(26) \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} \left[\lambda \sqrt{\frac{\tau-1}{\tau+1}} + \mu \sqrt{\frac{\tau+1}{\tau-1}} + \frac{1}{\pi} \ln (\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}) \right];$$

hierin worden P en b weer door (17) gegeven. Met het punt C d.w.z. met $\tau = +\infty$ correspondeert een hoogte $y = H$. Voor de phreatische kromme ($1 \leq \tau < \infty$) volgt nu uit (25) door integratie

$$(27) \quad H - y = \frac{Q}{2k\pi} \left[\ln \left\{ \tau + a + 2\sqrt{\frac{a-t_0}{2}} \sqrt{\tau + \frac{a+t_0}{2}} \right\} - \ln(\tau + t_0) \right].$$

Bij gegeven waarde y kan men uit (27) de bijbehorende waarde τ bepalen (als wortel van een zekere vierkantsvergelijking) en uit (26) volgt dan de helling $\frac{dx}{dy}$ voor het overeenkomstige punt van de phrea-

tische kromme. Dit stelt ons in staat de phreatische kromme te benaderen met een gebroken lijn.

Het geval, waarbij de drain op de kleilaag rust.

In dit geval zullen de punten A en E samenvallen, en geldt dus $t_0 = 1$ (zie fig. 5). Wegens (11) hebben we nu $\lambda = 0$. Zoals behoort, volgt dan uit (21), dat $h = 0$.

In plaats van de lengtes L , H en $H - \varphi_D$ introduceren we de dimensieloze grootheden

$$(28) \quad L' = \frac{k\pi}{Q} L; H' = \frac{k\pi}{Q} H; \Delta' = \frac{k\pi}{Q} (H - \varphi_D).$$

Verder voeren we een reële grootheid δ ($0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$) in, welke gedefinieerd wordt door

$$(29) \quad \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = e^{-\Delta'}.$$

We zullen bewijzen, dat in het onderhavige geval de formules (22) en (23) kunnen worden herleid tot de betrekking

$$(30) \quad \frac{H'}{K(\sin \delta)} - \frac{L'}{K(\cos \delta)} = \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi/2} \left\{ \frac{K(\sin \varphi)}{K(\sin \delta)} - \frac{K(\cos \varphi)}{K(\cos \delta)} \right\} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$$

Dit is een transcendente vergelijking, waaruit bij gegeven H' en L' de hoek δ en dus de gezochte waarde $\Delta' = \ln \cotg \frac{\delta}{2}$ kan worden berekend. In formule (30) is $K(k)$ de elliptische integraal

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (k^2 < 1),$$

waarvan uitvoerige tabellen ter beschikking staan (zie Jahnke-Emde, blz. 85).

Voor het bewijs van (30) merken we op, dat wegens $t_0 = 1$ uit (17), (22) en (23) volgt

$$(31) \quad L' = \frac{1}{2} \sqrt{b-1} \left\{ \mu J_1 + \frac{1}{\pi} J_1 \right\}$$

en

$$(32) \quad H' = \frac{1}{2} \sqrt{b-1} \left\{ \mu J_2 + \frac{1}{\pi} J_2 \right\}$$

met

$$J_1 = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{b-t}}, \quad J_2 = \int_b^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t-b}},$$

$$J_1 = \int_1^b \frac{\ln(t+\sqrt{t^2-1}) dt}{(t-1)\sqrt{b-t}}, \quad J_2 = \int_b^\infty \frac{\ln(t+\sqrt{t^2-1}) dt}{(t-1)\sqrt{t-b}}.$$

Hierin is $b = \frac{t_0 + a}{2} = \frac{1+a}{2}$ een reële constante > 1 . Verder geldt, dat $e = \frac{1+a}{1+t_0} = \frac{t_0+a}{2} = b$ (wegens $t_0 = 1$) en uit (24) volgt dus

$$(33) \quad \Delta' = \frac{k}{Q} \pi (H - \varphi_D) = \frac{1}{2} \ln (b + \sqrt{b^2 - 1}) .$$

Wanneer we stellen

$$(34) \quad \sin \delta = \sqrt{\frac{2}{b+1}} \quad , \quad \text{dus} \quad \cos \delta = \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}$$

($0 < \delta < \frac{\pi}{2}$), dan gaat (33) over in

$$\Delta' = \ln \cotg \frac{\delta}{2} ,$$

hetgeen equivalent is met (29). We moeten dus aantonen, dat (31) en (32) kunnen worden herleid tot (30), wanneer δ door (34) wordt gedefinieerd.

De integralen J_1 en J_2 kunnen direct worden uitgedrukt in de functie $K(k)$. En wel geldt

$$(35) \quad J_1 = \frac{2}{\sqrt{b+1}} K \left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \right) = \frac{2}{\sqrt{b-1}} \cos \delta K(\cos \delta)$$

en

$$(36) \quad J_2 = \frac{2}{\sqrt{b+1}} K \left(\sqrt{\frac{2}{b+1}} \right) = \frac{2}{\sqrt{b-1}} \cos \delta K(\sin \delta) ;$$

voor de afleiding zie W. Gröbner und N. Hofreiter, Integraltafel II, formule 222 2a en 222 2b; genoemde tabel zal voortaan worden geciteerd als "G.H.".

De integraal J_1 transformeren we volgens $s = \frac{t-1}{\beta}$ met $\beta = b-1$. Dan volgt

$$(37) \quad J_1 = \frac{1}{\sqrt{b-1}} \int_0^1 \frac{\ln(1+\beta s + \sqrt{2\beta s + \beta^2 s^2})}{s \sqrt{1-s}} ds = \frac{g(\beta)}{\sqrt{b-1}} .$$

Nu hebben we (zie G.H. II, 222 2b)

$$\frac{dg(\beta)}{d\beta} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s} \sqrt{2\beta s + \beta^2 s^2}} = \frac{2}{\sqrt{\beta(\beta+2)}} K \left(\sqrt{\frac{\beta}{\beta+2}} \right)$$

en wegens $g(0) = 0$ volgt dus

$$g(\beta) = \int_0^{\beta-1} \frac{2}{\sqrt{\xi(\xi+2)}} K \left(\sqrt{\frac{\xi}{\xi+2}} \right) d\xi .$$

De laatste integraal transformeren we volgens $\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{\epsilon' + 2}}$;
wegens (34) vinden we dan

$$(38) \quad J_1 = \frac{4}{\sqrt{b-1}} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} K(\cos \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Op geheel analoge wijze volgt

$$(39) \quad J_2 = \frac{4}{\sqrt{b-1}} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} K(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Wegens (35), (36), (38) en (39) gaan de formules (31) en (32) over in

$$L' = \mu \cos \delta K(\cos \delta) + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} K(\cos \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$$

en

$$H' = \mu \cos \delta K(\sin \delta) + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} K(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Eliminatie van μ uit het laatste tweetal vergelijkingen geeft ten slotte de te bewijzen formule (30).

De functie $K(k)$ is voor $0 \leq k < 1$ een monotoon toenemende functie en dus geldt voor $\delta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{K(\sin \varphi)}{K(\sin \delta)} \geq 1 \geq \frac{K(\cos \varphi)}{K(\cos \delta)}.$$

Het rechterlid van (30) is blijkbaar positief en dus volgt

$$(40) \quad \frac{K(\cos \delta)}{K(\sin \delta)} > \frac{L'}{H'} = \frac{L}{H}.$$

We hebben (zie Jahnke-Emde, blz. 85) voor

$$\delta = \left(\frac{1}{10}\right)^0 = 0,0017 \text{ radiaal}$$

dat

$$\frac{K(\cos \delta)}{K(\sin \delta)} = \frac{7,737}{1,571} = 4,92.$$

Bij de toepassingen, die wij op het oog hebben is $\frac{L}{H} > 5$. Daar het linkerlid van (45) een monotoon afnemende functie van δ is, zal in deze gevallen gelden $\delta < 0,0017$ en we behoeven dus slechts het geval te beschouwen, dat δ zeer klein is.

Voor kleine waarden δ zullen we (30) vervangen door een veel eenvoudigere formule, welke in zeer goede benadering geldt. Daartoe maken we gebruik van de reeksontwikkelingen (zie Jahnke-Emde, blz. 73)

$$(41) \quad \frac{2}{\pi} K(k) = 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \dots$$

en

$$(42) \quad K(\sqrt{1-k^2}) = \ln \frac{4}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \dots \right\} \\ - \left\{ \frac{1}{4} k^2 + \frac{21}{128} k^4 + \frac{185}{1536} k^6 + \dots \right\},$$

welke convergent zijn voor $0 < k < 1$. Verder introduceren we de functies

$$(43) \quad M(k) = \frac{2}{\pi} K(k) - 1 \quad \text{en} \quad N(k) = K(\sqrt{1-k^2}) - \ln \frac{4}{k}$$

en de constanten

$$(44) \quad M = \int_0^{\pi/2} M(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \int_0^1 M(k) \frac{dk}{k\sqrt{1-k^2}},$$

en

$$(45) \quad N = \int_0^{\pi/2} N(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \int_0^1 N(k) \frac{dk}{k\sqrt{1-k^2}};$$

(aan de hand van de formules (41) en (42) gaat men gemakkelijk na, dat de integralen (44) en (45) convergeren).

Wanneer we stellen

$$(46) \quad u = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad \text{dus} \quad \sin \varphi = \frac{2u}{1+u^2}$$

dan volgt uit (41) en (44) gemakkelijk de reeksontwikkeling

$$(47) \quad M(\sin \varphi) = u^2 + \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{4} u^6 + \dots$$

terwijl uit (42) en (44) volgt

$$(48) \quad N(\sin \varphi) = \ln\left(\frac{2}{u}\right) \left(u^2 + \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{4} u^6 + \dots\right) - u^2 + \frac{3}{8} u^4 - \frac{11}{24} u^6 + \dots$$

Met behulp van (43), (44), (46) en $\varepsilon = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta$ vinden we

$$\frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi/2} K(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \int_{\delta}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} + M - \int_0^{\delta} M(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \\ = \int_{\varepsilon}^1 \frac{du}{u} + M - \int_0^{\varepsilon} M(\sin \varphi) \frac{du}{u}.$$

Passen we nu de ontwikkeling (47) toe, dan volgt onmiddellijk

$$(49) \quad \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi/2} K(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \ln \frac{1}{\varepsilon} + M - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{16} \varepsilon^4 - \frac{1}{24} \varepsilon^6 - \dots$$

Analoog concluderen we uit (43) en (45)

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} K(\cos \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} &= \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{4}{\sin \varphi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} + N - \int_0^{\delta} N(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \\ &= \int_{\varepsilon}^1 \ln \frac{2(1+u^2)}{u} \frac{du}{u} + N - \int_0^{\varepsilon} N(\sin \varphi) \frac{du}{u} . \end{aligned}$$

Passen we nu de ontwikkeling (48) toe, dan volgt na enige berekeningen

$$\begin{aligned} (50) \quad \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} K(\cos \varphi) \frac{d\varphi}{\sin \varphi} &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 + \ln 2 \ln \frac{1}{\varepsilon} + N + \frac{\pi^2}{24} \\ &\quad - \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{16} \varepsilon^4 + \frac{1}{24} \varepsilon^6 + \dots \right) - \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{64} \varepsilon^4 + \frac{1}{72} \varepsilon^6 + \dots \end{aligned}$$

Verder geldt wegens (43), (47) en (48)

$$(51) \quad \frac{2}{\pi} K(\sin \delta) = 1 + \varepsilon^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^4 + \frac{1}{4} \varepsilon^6 + \dots$$

en

$$(52) \quad K(\cos \delta) = \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) \left(1 + \varepsilon^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^4 + \frac{1}{4} \varepsilon^6 + \dots \right) - \frac{1}{8} \varepsilon^4 - \frac{1}{8} \varepsilon^6 - \dots$$

Gebruik makend van (49), (50), (51) en (52) volgt nu uit formule (30)

$$\begin{aligned} (53) \quad K(\cos \delta) \cdot H' - K(\sin \delta) L' &= \\ &= \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \frac{1}{8} \varepsilon^6 + \dots \right) \\ &\quad + \ln \frac{1}{\varepsilon} \left(M + \frac{3}{8} \varepsilon^4 + \frac{1}{16} \varepsilon^6 + \dots \right) \\ &\quad + M \ln 2 - N - \frac{\pi^2}{24} - p \varepsilon^2 - q \varepsilon^4 - r \varepsilon^6 - \dots \end{aligned}$$

waarin

$$p = N + \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{1}{8} M + \frac{1}{4} N + \frac{\pi^2}{96} - \frac{15}{64} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$r = \frac{1}{8} M + \frac{1}{4} N + \frac{\pi^2}{24} - \frac{53}{576} + \frac{5}{48} \ln 2 .$$

Wegens (51) en (52) volgt uit (53), dat voor kleine waarde ε in goede benadering geldt

$$H' \ln \frac{2}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} L' = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 + M \ln \frac{1}{\varepsilon} + M \ln 2 - N - \frac{\pi^2}{24} ,$$

welke vergelijking wegens (29) equivalent is met de vierkantsverge-

lijking

$$(54) \quad 0 = \Delta'^2 - 2 \Delta' (H' - M) + \pi L' - (\ln 4) (H' - M) - 2 N - \frac{\pi^2}{12},$$

waaruit Δ' gemakkelijk kan worden berekend. De constanten M en N, welke in (54) voorkomen, behoeven slechts eens voor altijd te worden berekend uit de integralen (44) en (45). Alleen dan kan bij gegeven waarden L' , H' , k en Q (vergelijk (28)) een zinvolle stationnaire situatie optreden, wanneer

1. Vergelijking (54) een reële positieve wortel Δ' heeft (ondermeer moet dus de discriminant van (54) positief zijn).
2. Deze wortel Δ' kleiner is dan H' .

Opm. 1. Een met (54) analoge vergelijking krijgt men in de benadering, waarin wordt aangenomen, dat de potentiaalfunctie $\varphi(x, y)$ van y onafhankelijk is. Uit (3) volgt dan

$$\phi(x, y) = \varphi(x) = f(x),$$

wanneer $y = f(x)$ de vergelijking is van de phreatische kromme. Per dag stroomt door elke doorsnede $x = \text{constant}$ $\frac{1}{2} Q \text{ m}^2$ water. Dus geldt

$$\frac{1}{2} Q = - f(x) U(x) = k f(x) \frac{df(x)}{dx}$$

en heeft $f(x)$ de vorm

$$f(x) = \sqrt{\frac{Q}{k} x + C},$$

waarin C een constante voorstelt. Uit de voorwaarde $f(L) = h$ volgt nu

$$f^2(x) - H^2 = \frac{Q}{k} (x - L).$$

Voor de daling $\Delta = H - f(0)$ van het phreatisch oppervlak geldt dus

$$\Delta^2 - 2 H \Delta + \frac{Q}{k} L = 0.$$

Voor de gereduceerde lengtes

$$L' = \frac{k\pi}{Q} L; \quad H' = \frac{k\pi}{Q} H; \quad \Delta' = \frac{k\pi}{Q} \Delta$$

vinden we tenslotte de vergelijking

$$\Delta'^2 - 2 H' \Delta' + \pi L' = 0,$$

welke zeer analoog aan (54) is.

Opm. 2. Ten einde na te gaan of de met (54) gevonden waarde $\varepsilon_0 = e^{-\Delta'}$ de juiste waarde voldoende benadert, dient men deze te substitueren in de exacte vergelijking (54). Indien daarbij "onvoldoende" aan deze vergelijking wordt voldaan, dan moet ε uit de transcendente vergelijking (53) worden opgelost. Dit kan alleen het geval zijn, wanneer ε_0 niet klein is, en is dus nooit het geval, wanneer $\frac{L}{H}$ voldoende groot is, zoals we aan de hand van de ongelijkheid (40) hebben geconstateerd.

Over de integralen (21), (22) en (23).

We beschouwen nu het algemene geval $-1 < t_0 < 1$. Zoals we hebben gezien, vereist de bepaling van de potentiaal φ_D de berekening van de integralen (21), (22) en (23). We zullen aangeven hoe deze berekening kan geschieden.

In verband met de vergelijking (11) voor t_0 , is het aan te bevelen de integraal (21) zonder meer numeriek te berekenen. De berekening van de integralen (22) en (23) kan worden vereenvoudigd; hun componenten, die λ of μ als factor bevatten, kunnen n.l. expliciet worden uitgedrukt in de volgende elliptische integralen

$$\left. \begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} \\ E(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} \end{aligned} \right\} \quad k^2 < 1; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} ,$$

waarvan uitvoerige tabellen beschikbaar zijn (zie Jahnke-Emde, blz. 62-72, 85). Gebruikelijk zijn verder de notaties

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) \quad \text{en} \quad E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k).$$

Met behulp van de formules G.H. II 222 2b, II 222 4b, II 221 13c volgt

$$(55) \quad \int_1^t \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \frac{dt}{(t-t_0)\sqrt{b-t}} = \frac{2}{\sqrt{b+1}} K(k) - \frac{2}{\sqrt{b-t_0}} \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} \left\{ [E(k) - K(k)] F(\varphi, k') + K(k) E(\varphi, k') \right\}$$

met

$$(56) \quad k = \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}; \quad k' = \sqrt{\frac{2}{b+1}}; \quad \varphi = \arcsin \frac{1+t_0}{2}.$$

Uit dezelfde formules volgt

$$(57) \quad \int_1^t \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \frac{dt}{(t-t_0)\sqrt{b-t}} = \frac{2}{\sqrt{b+1}} K(k) +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{b-t_0}} \sqrt{\frac{1+t_0}{1-t_0}} \left\{ [E(k) - K(k)] F(\varphi, k') + K(k) E(\varphi, k') \right\} ,$$

waarin k, k' en φ weer door (56) worden gegeven.

Met behulp van de formules G.H. II 222 2a, I 243 8a 9 en II 221 13b volgt verder

$$(58) \quad \int_0^\infty \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \frac{dt}{(t-t_0)\sqrt{t-b}} = \frac{2}{\sqrt{b+1}} \left[\frac{b-1}{b-t_0} K(k) - \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} \frac{1}{\sqrt{b-t_0}} \left\{ E(k) F(\varphi, k) - K(k) E(\varphi, k) \right\} \right]$$

met

$$(59) \quad k = \sqrt{\frac{2}{b+1}} \quad ; \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(1-t_0)(b+1)}{2(b-t_0)}} .$$

Uit dezelfde formules volgt

$$(60) \quad \int_0^\infty \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \frac{dt}{(t-t_0)\sqrt{t-b}} = \frac{2}{\sqrt{b+1}} \left[\frac{b+1}{b-t_0} K(k) + \sqrt{\frac{1+t_0}{1-t_0}} \frac{1}{\sqrt{b-t_0}} \left\{ E(k) F(\varphi, k) - K(k) E(\varphi, k) \right\} \right] ,$$

waarin k en φ weer door (59) worden gegeven.

Verder komt in (22) nog de volgende integraal voor.

$$(61) \quad R(b, t_0) = \int_0^b \frac{\ln(t+\sqrt{t^2-1})dt}{(t-t_0)\sqrt{b-t}}$$

Deze kan niet op eenvoudige wijze worden herleid tot bekende (getabelleerde) functies. Wanneer men $R(b, t_0)$ direct uit (61) zou bepalen, dan moet men voor elk paar waarden (b, t_0) een numerieke integratie toepassen. Er is een betere methode, die $R(b, t_0)$ geeft voor alle paren (b, t_0) waarvoor $\frac{1-t_0}{b-1}$ een constante waarde γ aanneemt. Indien men de integraal (61) transformeert volgens $s = \frac{t-1}{b-1}$ en men stelt

$$b-1 = \beta \quad \text{en} \quad \frac{1-t_0}{b-1} = \gamma ,$$

dan volgt

$$R(b, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^1 \frac{\ln(1+\beta s + \sqrt{2\beta s + \beta^2 s^2})}{(s+\gamma)\sqrt{1-s}} ds = \frac{1}{\sqrt{\beta}} g(\beta, \gamma) .$$

Er geldt

$$\frac{\partial}{\partial \beta} g(\beta, \gamma) = \int_0^1 \frac{s}{s+\gamma} \frac{ds}{\sqrt{(1-s)(2\beta s + \beta^2 s^2)}} = h(\beta, \gamma) .$$

De functie $h(\beta, \gamma)$ kan expliciet worden uitgedrukt in de bekende integralen $E(\varphi, k)$ en $F(\varphi, k)$ met behulp van de formules G.H. II 222 2b, II 222 4b, II 221 13b, en is dus eenvoudig te berekenen. Wegens $g(0, \gamma) = 0$ hebben we

$$\int_0^\beta h(\xi, \gamma) d\xi = g(\beta, \gamma) = \sqrt{\beta} \cdot R(\beta + 1, 1 - \beta \gamma),$$

waarmee $R(b, t)$ kan worden bepaald voor de paren (b, t_0) met $\frac{1-t_0}{b-1} = \gamma$. Analoge beschouwingen gelden voor de derde in (23) optredende integraal.

Literatuur.

E. Jahnke and F. Emde, Tables of functions, New York, 1945.

W. Gröbner und N. Hofreiter, Integraltafel I, II, Wien und Innsbruck 1950.