Stichting
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam

TW 14

Over een reeks van Schlömilch

J. Kemperman

mei 1951

MATHEMATISCH CENTRUM

Afd. Toegepaste Wiskunde.

Rapport TW no. 14.

Datum: Mei 1951.

Auteur: J. Kemperman.

Titel: Over een reeks van Schlömilch.

Over een reeks van Schlömilch.

Inleiding.

Gevraagd werd de reeksen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx)}{m} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

en

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx)J_{2n}(my)}{m} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

te sommeren voor $0 < |x| \leq 2\pi$ resp. $0 < |x| + |y| \leq 2\pi$. Hierin is $J_n(z)$ de Besselfunctie van orde n.

In dit rapport zullen we de reeksen

(1) $$A_{n,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(mx)}{m^k}$$

en

(2) $$B_{n,\nu,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(mx)J_\nu(my)}{m^k}$$

expliciet sommeren tot een eenvoudige functie (in x resp. x en y) onder volgende onderstellingen.

a) x en y zijn positieve reële getallen.

b) $n \geq 0$, $\nu \geq 0$ en $k \geq 1$ zijn gehele getallen.

c) In (1) is k+n even; in (2) is k+n+ν even.

Wegens

$$A_{n,k} = \left[B_{n,0,k}\right]_{y=0}$$

zou het eigenlijk voldoende zijn ons te beperken tot de berekening van $B_{n,\nu,k}$. Evenwel is verhoudingsgewijs de berekening van $A_{n,k}$ veel eenvoudiger en daarom hebben we deze in een aparte paragraaf vooraf laten gaan.

Wat betreft de resultaten:

I. $A_{n,k}$ wordt gegeven door formule (6) of (7). Hierin is $\{x\} = x - 2\pi\left[\frac{x}{2\pi}\right]$ en is $\left[\xi + 2\pi B\right]^h$ een symbolische schrijfwijze van de som

$$\sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} \xi^{h-j}(2\pi)^j B_j ,$$

waarin B_j het j-de getal van Bernoulli voorstelt.

Ter illustratie: voor $0 < x \leq 2\pi$ geldt

$$A_{2n+1,1} = \frac{1}{2n+1} \qquad \text{als } n \geq 1$$

$$= 1 - \frac{1}{4} x \qquad \text{als } n = 0 .$$

Verder geldt voor $2\pi \leq x \leq 4\pi$ en $n \geq 1$

$$A_{2n+1,1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{2(-1)^n}{2n+1} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{x^2}}\; Q_{2n} \left(\frac{2\pi}{x}\right)$$

waarin

$$Q_{2n}(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left[(2n+1)\arcsin \xi\right]$$

het 2n-de polynoom van Tschebyscheff (van de tweede soort) voorstelt. Tenslotte

$$A_{1,1} = 1 - \frac{1}{4} x + 2\sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{x^2}}$$

voor $2\pi \leq x \leq 4\pi$.

II. Aangegeven wordt hoe men $B_{n,\nu,k}$ kan berekenen. Alleen voor het bijzondere geval $k = 1$ is deze berekening geheel uitgewerkt.

In het geval $0 \leq y \leq x$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ wordt $B_{2n+1,2\nu,1}$ gevonden door combinatie van de formules (13), (15), (23) en (24).

In het geval $0 \leq x \leq y$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ wordt $B_{2n+1,2\nu,1}$ gevonden door combinatie van de formules (13), (29) en (14), (30), (33) en (34).

Ter illustratie:

$$B_{1,0,1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(mx)J_0(my)}{m}$$

wordt voor $0 \leq y \leq x$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ gegeven door

$$B_{1,0,1} = \frac{2}{\pi}\, E\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{4} x ,$$

en voor $0 \leq x \leq y$ met $0 < x + y < 2\pi$ door

$$B_{1,0,1} = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) K\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{4} x .$$

van de hierin voorkomende integralen

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

en

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx$$

staan tabellen ter beschikking (zie E. JAHNKE and F. EMDE, Tables of functions 1945, blz. 85).

De sommering van (1) en (2) berust op de bekende integraalformule

(3) $$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\,(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta,$$

geldig voor n geheel ≥ 0. Verder maken we gebruik van de formules

(4) $$V_{2k}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{1}{(2k)!} \left[\{x\} + 2\pi B \right]^{2k}$$

$(k = 1,2,3,\dots)$ en

(5) $$V_{2k+1}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{1}{(2k+1)!} \left[\{x\} + 2\pi B \right]^{2k+1}$$

$(k = 0,1,2,\dots)$; zie K. KNOPP, Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen, Leipzig 1931, blz. 541. Hierin is

$$\{x\} = x - 2\left[\frac{x}{2\pi}\right],$$

dus gelijk aan de "afstand" van x tot het dichtstbijzijnde punt $2\pi h \leqq x$ (h geheel). Verder moet in (4) en (5) de vorm $\left[\xi + 2\pi B\right]^h$ beschouwd worden als de symbolische schrijfwijze voor

$$\xi^h + \binom{h}{1}\xi^{h-1}\, 2\pi B_1 + \binom{h}{2}\xi^{h-2}\, 4\pi^2 B_2 + \dots + \binom{h}{h}(2\pi)^h B_h,$$

waarin B_j $(j = 1,2,\dots)$ de getallen van Bernoulli voorstellen. En wel is

$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0$$

en

$$B_1 = -\frac{1}{2}\,;\; B_2 = \frac{1}{6}\,;\; B_4 = -\frac{1}{30}\,;\; B_6 = \frac{1}{42} \text{ enz.}$$

Opgemerkt moet nog worden, dat in het geval $k = 0$ formule (5) niet geldt, wanneer x een veelvoud is van 2π.

1. De sommering van $A_{n,k}$.

Uit (1) en (3) volgt

$$A_{n,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\,(n\theta - mx\sin\theta)\,d\theta.$$

In het geval $k \geqq 2$ is verwisseling van sommatie en integratie toegestaan. We vinden

$$A_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\theta\, d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx\sin\theta)}{m^k}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin n\theta\, d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx\sin\theta)}{m^k} \quad .$$

Als n even is, dan is hierin de tweede integraal nul. Daar in dit geval bovendien k even verondersteld werd, volgt wegens (4) voor $k \geqq 1$

$$A_{2n,2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} V_{2k}(x \sin\theta) \cos 2n\theta \, d\theta.$$

Analoog met (5) voor $k \geqq 1$

$$A_{2n+1,2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} V_{2k+1}(x \sin\theta) \sin (2n+1)\theta \, d\theta .$$

Een nauwkeurige analyse van de verwisseling van sommatie en integratie leert, dat dit ook geldt voor k = 0, mits $x \neq 0$.

Gebruik makend van het laatste lid van (4) en (5) vinden we tenslotte

(6) $A_{2n,2k}(x) =$

$$\frac{(-1)^{k-1}}{\pi} \frac{1}{(2k)!} \int_0^{\pi/2} \left[\{x \sin\theta\} + 2\pi B \right]^{2k} \cos 2n\theta \, d\theta$$

voor $k \geqq 1$, en

(7) $A_{2n+1,2k+1}(x) =$

$$\frac{(-1)^{k-1}}{\pi} \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^{\pi/2} \left[\{x \sin\theta\} + 2\pi B \right]^{2k+1} \sin(2n+1)\theta \, d\theta$$

voor $k \geqq 0$. Wegens

$$\int \sin^{2h}\theta \cos 2n\theta \, d\theta = \frac{(-1)^h}{2^{2h+1}} \sum_{i=0}^{2h} (-1)^i \binom{2h}{i} \frac{\sin(n+h-i)2\theta}{n+h-i}$$

en analoge formules, kan men uit (6) en (7) de gezochte functies $A_{2n,2k}$ en $A_{2n+1,2k+1}$ gemakkelijk berekenen. En wel is voor $0 < x \leqq 2\pi$ deze functie een polynoom in x ten hoogste van de graad 2k resp. 2k+1.

Ter illustratie beschouwen we de functie

$$A_{2n+1,1}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx)}{m} .$$

Deze wordt wegens (7) en $B_1 = -\frac{1}{2}$ gegeven door

$$A_{2n+1,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\pi - \{x \sin\theta\} \right] \sin(2n+1)\theta \, d\theta ,$$

geldig voor $x \neq 0$. Hieruit volgt voor $0 < x \leqq 2\pi$

$$A_{2n+1,1}(x) = \frac{1}{2n+1} \qquad \text{voor } n = 1,2,3,\ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{4} x \qquad \text{voor } n = 0$$

en verder voor $2\pi \leq x \leq 4\pi$

$$A_{2n+1,1}(x) = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \cos\,(2n+1)\,\Theta_0 \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

(met $\Theta_0 = \text{arc sin}\,(\frac{2\pi}{x})$, $0 < \Theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$), en

$$A_{1,1}(x) = 1 - \frac{1}{4}\,x + 2\sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{x^2}}.$$

2. De sommering van $B_{n,\nu,k}$.

Uit (2) en (3) volgt

$$B_{n,\nu,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k}\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} \cos\,(n\theta - m\,x\,\sin\theta)\,d\theta \int_0^{\pi} \cos(\nu\varphi - my\,\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Voor $k \geq 2$ en voor $k = 1$ met $x \neq 0$ (of $y \neq 0$) is de verwisseling van sommatie en integratie toegestaan. We vinden

$$B_{n,\nu,k} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^k}\left[\cos\,n\theta\,\cos(mx\,\sin\theta) + \sin\,n\theta\,\sin(mx\sin\theta)\right]$$
$$\left[\cos\,\nu\varphi\,\cos(my\,\sin\varphi) + \sin\nu\varphi\,\sin(my\sin\varphi)\right].$$

Als n en ν van dezelfde pariteit zijn (beide even of beide oneven) dan volgt hieruit

$$B_{n,\nu,k} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \cos\,n\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\,\nu\varphi\,d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx\,\sin\theta)\cos(my\,\sin\varphi)}{m^k}$$
$$+ \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \sin\,n\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\nu\varphi\,d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx\,\sin\theta)\sin(my\,\sin\varphi)}{m^k}.$$

Zijn daarentegen n en ν van verschillende pariteit, dan hebben we

$$B_{n,\nu,k} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \cos\,n\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\,\nu\varphi\,d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx\,\sin\theta)\sin(my\,\sin\varphi)}{m^k}$$
$$+ \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \sin\,n\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\nu\varphi\,d\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx\,\sin\theta)\cos(my\,\sin\varphi)}{m^k}.$$

In verband met de gemaakte veronderstelling, dat $n + \nu + k$ even is, is in het eerste geval k even en in het tweede geval k oneven. We beperken ons verder tot het tweede geval (in het eerste geval verloopt de berekening geheel analoog).

Wegens

$$\sin\,\xi\,\cos\eta = \tfrac{1}{2}\sin\,(\xi + \eta) + \tfrac{1}{2}\sin\,(\xi - \eta)$$

en (5) vinden we, als n en ν van verschillende pariteit zijn,

$$(8)\quad B_{n,\nu,2k+1} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \left[V_{2k+1}(x\,\sin\theta + y\,\sin\varphi)\sin(n\theta + \nu\varphi)\right.$$
$$\left. + V_{2k+1}(x\,\sin\theta - y\,\sin\varphi)\sin(n\theta - \nu\varphi)\right]\,d\theta\,d\varphi.$$

Gebruik makend van het laatste lid van (5) vinden we nu $B_{n,\nu,2k+1}$ (n en ν van verschillende pariteit) als de som van een eindig aantal dubbelintegralen. Elk van deze dubbelintegralen kan elementair worden geintegreerd.

Ter illustratie zullen we berekenen

$$B_{2n+1,2\nu,1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(mx)J_{2\nu}(my)}{m} .$$

Wegens

$$V_1(x) = \tfrac{1}{2}(\pi - \{x\})$$

volgt uit (8)

$$(9) \quad B_{2n+1,2\nu,1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \, d\varphi$$

$$- \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{x \sin\theta + y \sin\varphi\} \sin((2n+1)\theta + 2\nu\varphi) d\theta \, d\varphi$$

$$- \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{x \sin\theta - y \sin\varphi\} \sin((2n+1)\theta - 2\nu\varphi) d\theta \, d\varphi.$$

We zullen aannemen, dat

$$(10) \quad x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \; ; \; 0 < x + y \leq 2\pi .$$

Dan is voor $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ en $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\{x \sin\theta + y \sin\varphi\} - (x \sin\theta + y \sin\varphi) = 0$$

en verder $\quad \{x \sin\theta - y \sin\varphi\} - (x \sin\theta - y \sin\varphi) = 0$ of 2π,

al naar gelang $x \sin\theta - y \sin\varphi$ positief of negatief is.

Wegens (9) vinden we dus

$$(11) \quad B_{2n+1,2\nu,1} = \frac{1}{2n+1}\delta_\nu^0 - \frac{2x}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \, d\varphi$$

$$- \frac{2y}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\nu\varphi \sin\varphi \, d\varphi - \mathcal{J}.$$

Hierin is $\delta_\nu^0 = 0$ of 1, al naar gelang $\nu \geq 1$ of $= 0$.

Verder hebben we

$$(12) \quad \mathcal{J} = \frac{2}{\pi}\int_{\mathcal{G}} \sin((2n+1)\theta - 2\nu\varphi) d\theta \, d\varphi ,$$

waarin $\mathcal{G}$ het gedeelte van het vierkant $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ voorstelt, alwaar

$$x \sin\theta - y \sin\varphi < 0$$

geldt.

We kunnen (11) herleiden tot

$$(13) \qquad B_{2n+1,2\nu,1} = \frac{1}{2n+1}\,\delta^{\circ}_{\nu} - \tfrac{1}{4}\,x\,\delta^{\circ}_{n}\,\delta^{\circ}_{\nu} - \mathfrak{J}$$

$$+ (-1)^{n+\nu}\,\frac{y}{\pi^2}\,\frac{1}{2n+1}\,\frac{4\nu}{4\nu^2-1}\ .$$

Dus resteert nog slechts het probleem de integraal $\mathfrak{J}$ te bepalen. En wel is $\mathfrak{J}$ een functie van n, ν en y/x, welke nul is voor $y = 0$ (dan is $\mathfrak{g}$ namelijk leeg), en welke voor $x = 0$ en $y > 0$ (dan vult $\mathfrak{g}$ het hele vierkant op) gelijk is aan

$$(14) \qquad \frac{1}{2n+1} = M_{n,0} \quad \text{of} \quad \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\,\frac{1-(-1)^{\nu}}{\nu} = M_{n,\nu}$$

al naar gelang $\nu = 0$ of $\nu \geq 1$.

Opm. We zullen gebruik maken van de polynomen van Tschebyscheff. Deze worden gedefinieerd door

$$T_n(\xi) = \cos\,(n \operatorname{arc}\cos\xi)$$

en

$$Q_{n-1}(\xi) = \frac{U_n(\xi)}{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\sin\,(n \operatorname{arc}\cos\xi).$$

Hiervoor geldt (zie E. MADELUNG, Die mathematische Hilfsmittel des Physikers, New York, 1943, blz. 55)

$$\cos(2\,n \operatorname{arc}\sin\xi) = (-1)^n\,T_{2n}(\xi) \quad ;$$

$$\cos((2n+1)\operatorname{arc}\sin\xi) = (-1)^n\,U_{2n+1}(\xi) \quad ;$$

$$\sin(2n \operatorname{arc}\sin\xi) = (-1)^{n+1}\,U_{2n}(\xi) \quad ;$$

$$\sin((2n+1)\operatorname{arc}\sin\xi) = (-1)^n\,T_{2n+1}(\xi)\ .$$

Uit (12) volgt

$$(15) \qquad \mathfrak{J} = \frac{2}{\pi}\,(\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2)$$

met

$$(16) \qquad \mathfrak{J}_1 = \int_{\mathfrak{g}} \sin(2n+1)\theta \quad \cos 2\nu\varphi \quad d\theta\ d\varphi$$

en

$$(17) \qquad \mathfrak{J}_2 = \int_{\mathfrak{g}} \cos(2n+1)\theta \quad \sin 2\nu\varphi \quad d\theta\ d\varphi\ .$$

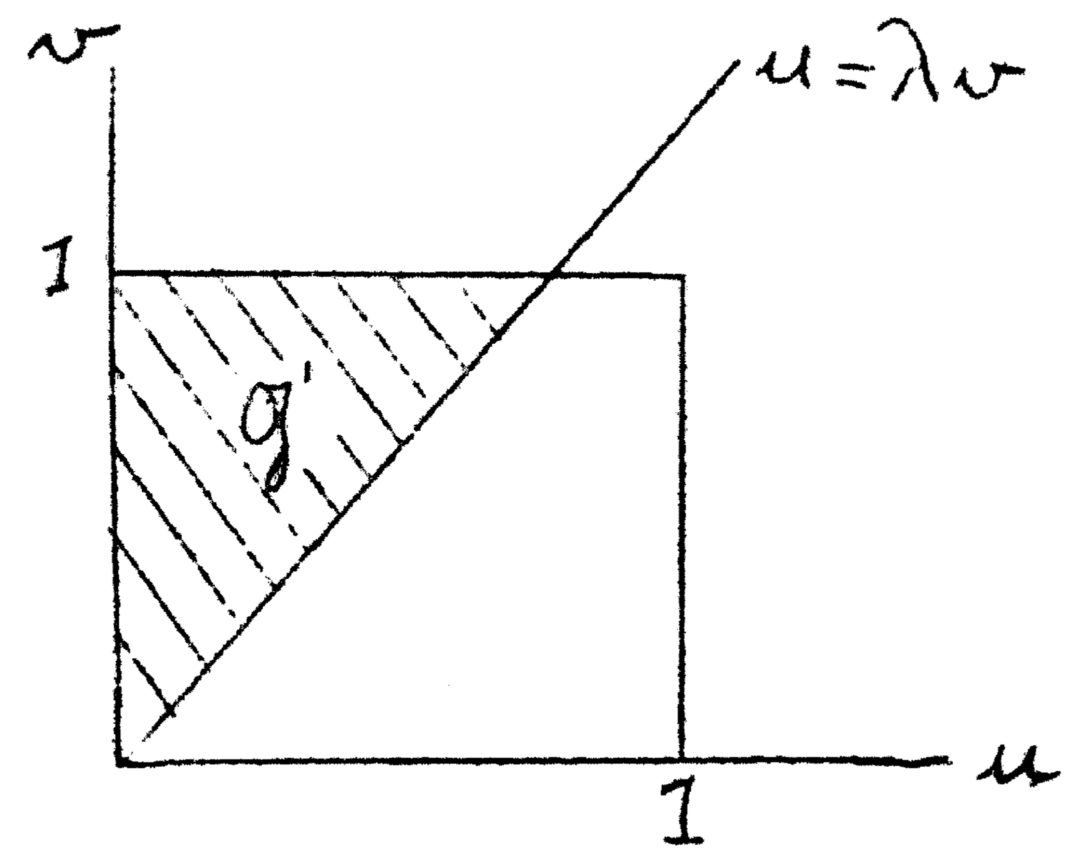
We beschouwen eerst het geval $x \geq y$ d.w.z. $\lambda \leq 1$, als

$$(18) \qquad \lambda = \frac{y}{x}\ .$$

Door de transformatie

(19) $\quad u = \sin\theta \quad ; \quad v = \sin\varphi ,$

gaat $\mathcal{G}$ over in het deel $\mathcal{G}'$ van het vierkant $\mathcal{W}'$ (met $0 \leqq u \leqq 1$ en $0 \leqq v \leqq 1$), alwaar $\frac{u}{v} < \lambda$ geldt.



Het ligt dus voor de hand om in (16) en (17) eerst de integratie naar θ , en pas daarna de integratie naar φ uit te voeren. Stellen we

(20) $\quad \sin\theta_0 = \lambda \sin\varphi \qquad\qquad (0 \leqq \theta_0 \leqq \frac{\pi}{2})$

dan vinden we uit (16)

$$\mathfrak{J}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \; d\varphi \int_0^{\theta_0} \sin (2n+1)\theta \; d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \; \frac{1-\cos(2n+1)\theta_0}{2n+1} \; d\varphi ,$$

ofwel

(21) $$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{\pi}{2}\delta_{\nu}^{0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\nu\varphi \; \cos (2n+1)\theta_0 \; d\varphi\right].$$

Analoog volgt uit (17)

(22) $$\mathfrak{J}_2 = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\nu\varphi \; \sin(2n+1)\theta_0 \; d\varphi .$$

We beschouwen eerst $\mathfrak{J}_2$. Wegens $v = \sin\varphi$ hebben we

$$\sin (2n+1)\theta_0 = \sin ((2n+1)\text{arc} \sin \lambda v) = (-1)^n \, T_{2n+1}(\lambda v)$$

en

$$\sin 2\nu\varphi = (-1)^{\nu+1} \, U_{2\nu}(v) = (-1)^{\nu+1}\sqrt{1-v^2}\; Q_{2\nu-1}(v)$$

en (22) gaat dus over in

(23) $$\mathfrak{J}_2 = \frac{(-1)^{n+\nu+1}}{2n+1} \int_0^1 T_{2n+1}(\lambda v) \; Q_{2\nu-1}(v) \; dv .$$

De integrand van de laatste integraal is een polynoom in v, en deze integraal kan dus onmiddellijk worden bepaald. Daar $T_{2n+1}(\xi)$ een oneven polynoom is van de graad 2n+1, is $\mathfrak{J}_2$ een oneven polynoom in $\lambda = \frac{y}{x}$ van ten hoogste de graad 2n+1.

Opm. Formule (23) heeft alleen zin voor $\nu \geqq 1$. Uit (22) blijkt, dat $\mathfrak{J}_2 = 0$, als $\nu = 0$.

Tenslotte beschouwen we $\mathfrak{J}_1$. Wegens

$$\cos(2n+1)\theta_0 = \cos((2n+1)\arc\sin\lambda v)$$
$$= (-1)^n U_{2n+1}(\lambda v) = (-1)^n\sqrt{1-\lambda^2 v^2}\, Q_{2n}(\lambda v)$$

en

$$\cos 2\nu\varphi = \cos(2\nu \arc\sin v) = (-1)^\nu T_{2\nu}(v),$$

gaat (21) over in

$$(24)\qquad \mathfrak{J}_1 = \frac{\pi\,\delta_\nu^0}{4n+2} + \frac{(-1)^{n+\nu+1}}{2n+1}\int_0^1 Q_{2n}(\lambda v)\, T_{2\nu}(v)\sqrt{\frac{1-\lambda^2 v^2}{1-v^2}}\, dv\,.$$

Daar $Q_{2n}(\xi)$ en $T_2(\xi)$ even polynomen zijn in ξ (van de graad 2n resp. 2ν) wordt door (24) de berekening van $\mathfrak{J}_1$ dus herleid tot de berekening van de elliptische integralen

$$(25)\qquad S_h = \int_0^1 \frac{v^{2h}\, dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}} \qquad (h = 0,1,\dots,n+\nu).$$

De integralen S_h kunnen worden uitgedrukt in de (uitvoerig getabelleerde) „volledige" elliptische integralen

$$K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}} \quad \text{en} \quad E(\lambda) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\lambda^2 v^2}{1-v^2}}\, dv$$

$(0 < \lambda^2 < 1)$. En wel geldt vooreerst

$$(26)\qquad S_0 = K(\lambda)\ ; \qquad S_1 = \frac{1}{\lambda^2}\,(K(\lambda) - E(\lambda))\,.$$

Verder bewijst men met partiele integratie gemakkelijk de recursieformule

$$(27)\qquad S_h = \frac{2h-2}{2h-1}(1+\lambda^2)\, S_{h-1} - \frac{2h-3}{2h-1}\, S_{h-2}\,,$$

geldig voor $h \geqq 2$. Uit (26) en (27) kan men S_h recursief bepalen b.v.

$$S_2 = \frac{2+\lambda^2}{3\lambda^2}\,K(\lambda) - \frac{2+2\lambda^2}{3\lambda^2}\,E(\lambda)\,.$$

<u>Conclusie</u>. In het geval $0 \leq y \leq x$ met $0 < x + y \leq 2\pi$ kan de grootheid $B_{2n+1,2\nu,1}$ worden berekend uit de formules (13), (15), (23) en (24).

Alvorens het geval $y \geq x$ te behandelen geven we eerst een <u>Toepassing</u>. Zij $\nu = n = 0$. Wegens $Q_o = 1$ en $T_o = 1$ volgt Uit (24).

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\pi}{2} - E(\lambda).$$

Verder hebben we wegens (22) $\mathfrak{J}_2 = 0$, en dus wegens (15)

$$\mathfrak{J} = 1 - \frac{2}{\pi} \; E(\lambda) \; .$$

Uit (13) volgt tenslotte

$$(28) \quad B_{1,0,1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(mx)J_0(my)}{m} = \frac{2}{\pi} E(\tfrac{y}{x}) - \frac{1}{4} x \; ,$$

geldig voor $0 \leq y \leq x$ en $0 < x + y \leq 2\pi$. Merk op, dat voor $0 \leq \lambda \leq 1$ de functie $E(\lambda)$ monotoon afneemt en dat $E(0) = \frac{\pi}{2}$, $E(1) = 1$.

Tenslotte beschouwen we het geval $y \geq x$ d.w.z. $\mu \leq 1$, als

$$(29) \quad \mu = \frac{x}{y} \; .$$

Zij $\mathcal{G}$ het vierkant $\left[0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ en } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right]$. Dan wordt

$$M_{n,\nu} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{G}} \sin\,((2n+1)\theta \; - 2\nu\varphi\,)d\theta\,d\varphi$$

door (14) gegeven. In plaats van $\mathfrak{J}$ zullen we berekenen

$$(29) \quad \bar{\mathfrak{J}} = M_{n,\nu} - \mathfrak{J} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathcal{G} - \mathcal{O}} \sin((2n+1)\theta \; - 2\nu\varphi)\;d\theta\,d\varphi.$$

En wel is

$$(30) \quad \bar{\mathfrak{J}} = \frac{2}{\pi} (\bar{\mathfrak{J}}_1 - \bar{\mathfrak{J}}_2)$$

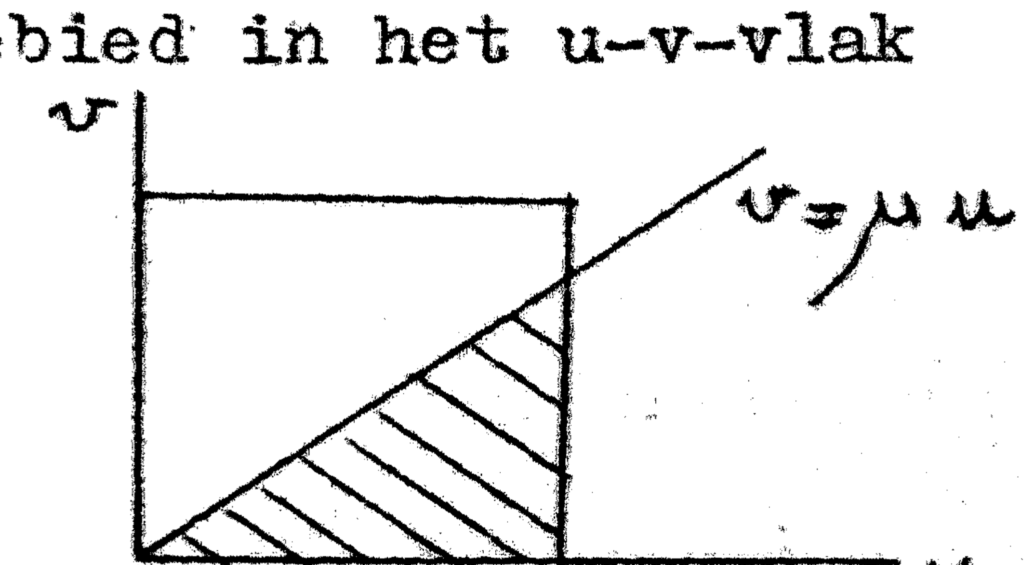
met

$$(31) \quad \bar{\mathfrak{J}}_1 = \int_{\mathcal{G} - \mathcal{O}} \sin\,(2n+1)\theta \;\; \cos\,2\nu\varphi \;\; d\theta \;\, d\varphi$$

en

$$(32) \quad \bar{\mathfrak{J}}_2 = \int_{\mathcal{G} - \mathcal{O}} \cos\,(2n+1)\theta \;\; \sin\,2\nu\varphi \;\; d\theta\,d\varphi \, .$$

Door de transformatie (19) gaat het gebied $\mathcal{G} - \mathcal{O}$ over in het volgende, gearceerde gebied in het u-v-vlak



Het ligt dus voor de hand in (31) en (32) eerst de integratie naar φ, en daarna de integratie naar θ uit te voeren. Passen we daarna de transformatie $u = \sin\theta$ toe, dan volgt na enige berekening (analoog met (23) en (24))

$$(33) \quad \bar{\mathfrak{J}}_1 = \frac{(-1)^{n+\nu+1}}{2\nu} \int_0^1 T_{2n+1}(u)\ Q_{2\nu-1}(\mu u) \sqrt{\frac{1-\mu^2u^2}{1-u^2}}\, du$$

voor $\nu \geqq 1$,

$$(33)' \quad \bar{\mathfrak{J}}_1 = (-1)^n \int_0^1 T_{2n+1}(u) \arcsin(\mu u) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

voor $\nu = 0$;

$$(34) \quad \bar{\mathfrak{J}}_2 = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2\nu} + \frac{(-1)^{n+\nu+1}}{2\nu} \int_0^1 Q_{2n}(u)\ T_{2n}(\mu u)\, du,$$

voor $\nu \geqq 1$ (voor $\nu = 0$ hebben we $\bar{\mathfrak{J}}_2 = 0$). Voor de berekening van $\bar{\mathfrak{J}}_1$ en $\bar{\mathfrak{J}}_2$ uit (33) en (34) gelden dezelfde opmerkingen als voor de berekening van $\mathfrak{J}_1$ en $\mathfrak{J}_2$ uit (23) en (24).

Conclusie. In het geval $0 \leqq x \leqq y$ met $0 < x + y \leqq 2\pi$ kan de grootheid $B_{2n+1,2\nu,1}$ worden berekend uit de formules (13), (29) en (14), (30), (33) en (34).

Toepassing. Zij weer $\nu = n = 0$. Dan is $\bar{\mathfrak{J}}_2 = 0$ en wordt $\bar{\mathfrak{J}}_1$, wegens (33)' en $T_1(\xi) = \xi$, gegeven door

$$\bar{\mathfrak{J}}_1 = \int_0^1 \arcsin(\mu u) \frac{u\, du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\int_0^1 \arcsin(\mu u)\, d\sqrt{1-u^2}$$

$$= \mu \int_0^1 \sqrt{\frac{1-u^2}{1-\mu^2u^2}}\, du$$

ofwel

$$\bar{\mathfrak{J}}_1 = E(\mu) - (1-\mu^2)\, K(\mu).$$

Uit (30) volgt nu

$$\bar{\mathfrak{J}} = \frac{2}{\pi} \left[E(\mu) - (1-\mu^2)\, K(\mu) \right]$$

en dus met (29) en (14)

$$\mathfrak{J} = M_{00} - \bar{\mathfrak{J}} = 1 - \frac{2}{\pi} \left[E(\mu) - (1-\mu^2)\, K(\mu) \right].$$

Met (13) vinden we tenslotte wegens $\mu = \frac{x}{y}$

$$(35) \quad B_{1,0,1} = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right) K\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{4}x,$$

geldig voor $0 \leqq x \leqq y$ en $0 < x + y \leqq 2\pi$.