

Rapport T.W. 19

Overzicht van de voornaamste methoden voor de  
getijberekening in zeearmen en benedenrivieren.

door

T.C.Braakman en G.W.Veltkamp.

April

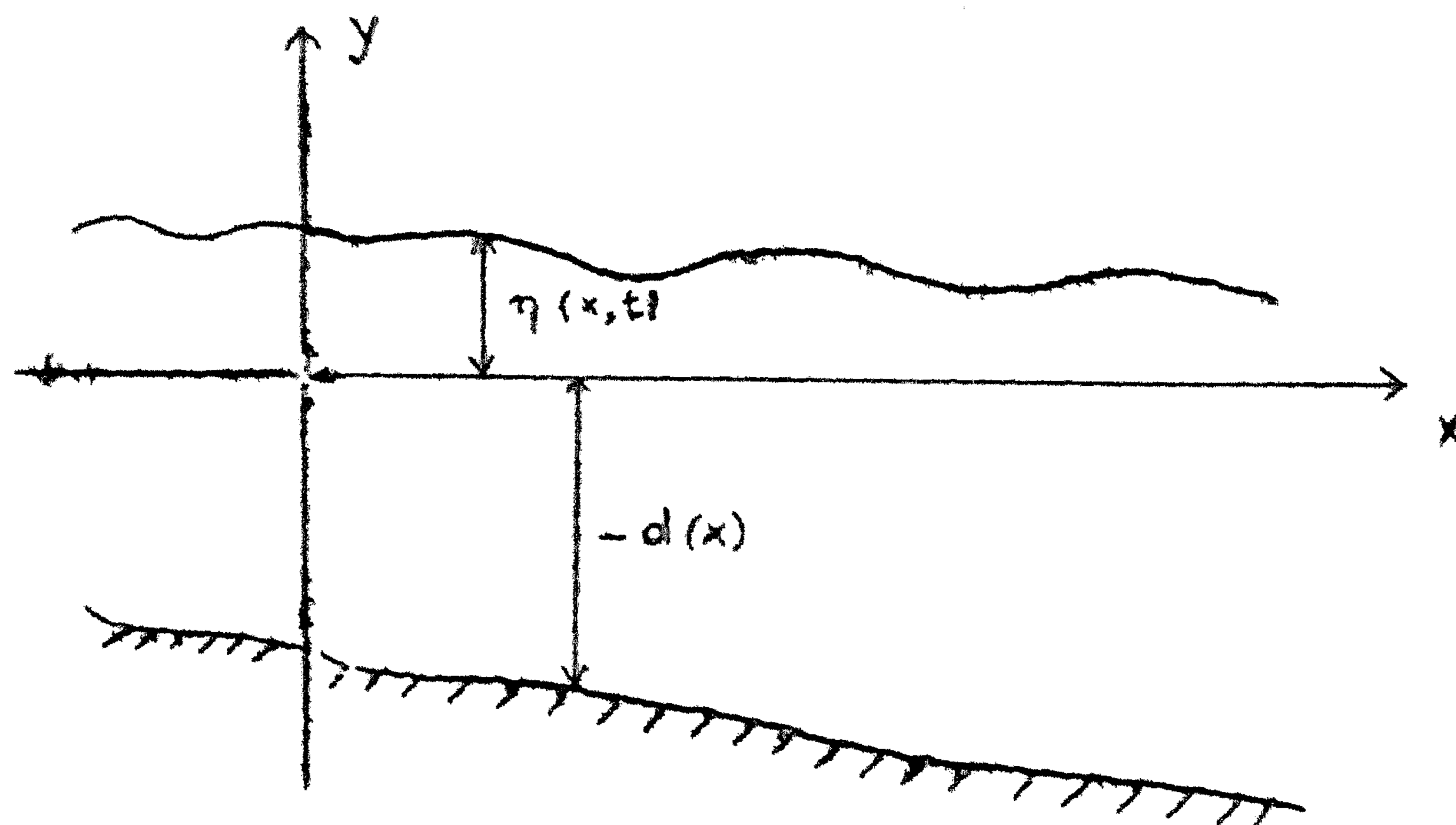
1953



Overzicht van de voornaamste methoden voor de getijberekening in zeearmen en benedenrivieren.

1. Afleiding der bewegingsvergelijkingen.

We nemen aan dat we te maken hebben met een bewegende, incompressiebele vloeistof zonder inwendige wrijving in een recht kanaal met evenwijdige, verticale wanden, waarin dwarsstromen verwaarloosd kunnen worden.  $y = \eta(x, t)$  geeft de stand van de vrije waterspiegel aan ten opzichte van een of ander horizontaal nulvlak  $y = 0$ , (b.v. NAP), terwijl de vergelijking van de bodem wordt gegeven door  $y = -d(x)$ .



De bewegingsvergelijkingen worden nu gegeven door de continuïteitsvergelijking en de vergelijkingen van Euler voor twee dimensies.

a. De continuïteitsvergelijking.

Wanneer we de horizontale snelheidscomponent  $v$  noemen en de verticale component  $u$ , luidt deze vergelijking:

$$v_x + u_y = 0 \quad (1.1)$$

b. De dynamische vergelijkingen.

Bij afwezigheid van uitwendige krachten, met uitzondering van de zwaartekracht, luiden de vergelijkingen van Euler:

$$\rho \frac{dv}{dt} \equiv \rho (v_t + vv_x + uv_y) = -p_x \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{du}{dt} \equiv \rho (u_t + vu_x + uu_y) = -p_y - \rho g \quad (1.3)$$

waarin  $\rho$  de dichtheid is, en  $p$  de overdruk ten opzichte van de atmosferische druk.

c. De randvoorwaarden.

Deze luiden

$$y = \eta(x, t) : p = 0 \quad (1.4)$$

$$u = \eta_t + v \cdot \eta_x \quad (1.5)$$

$$y = -d(x) : u = -v \cdot d_x \quad (1.6)$$

Teneinde de vergelijkingen te herleiden, integreren we (1.1) naar  $y$  tussen de grenzen  $-d$  en  $\eta$ . Dit levert:

$$u(\eta) - u(-d) = - \int_{-d}^{\eta} v_x dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} v dy + v(\eta) \cdot \eta_x + v(-d) \cdot d_x .$$



Uit (1.5) en (1.6) volgt echter, dat ook geldt:

$$u(\eta) - u(-d) = \eta_t + v(\eta) \cdot \eta_x + v(-d) \cdot d_x,$$

zodat:

$$\eta_t = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} v \, dy. \quad (1.7)$$

We nemen nu aan, dat het drukverval in verticale richting hetzelfde is als in de hydrostatica, m.a.w. we nemen aan, dat de verticale versnelling  $\frac{du}{dt}$  verwaarloosbaar is. Uit (1.3) volgt dan:

$$p_y = -\rho g. \quad (1.8)$$

Deze aanname is niet willekeurig, zie 2., opmerking a. Combinatie van (1.8) en (1.4) geeft direct:

$$p = \rho g(\eta - y),$$

zodat:

$$p_x = \rho g \cdot \eta_x,$$

dus onafhankelijk van  $y$  voor alle  $t$ . (1.2) levert, dat dan ook  $\frac{dv}{dt}$  onafhankelijk is van  $y$ , d.w.z.: de horizontale versnelling is in alle punten van een verticaal hetzelfde. We kunnen aannemen, dat op zeker tijdstip  $t = 0$ ,  $v_y = 0$  was. Hieraan is b.v. voldaan wanneer het water eens in rust is geweest. We zien echter, dat dan steeds geldt, dat  $v_y = 0$ , d.w.z.: ook de horizontale snelheid is voor alle punten van een verticaal hetzelfde. Bij bovengenoemde aanname gaat (1.2) derhalve over in:

$$v_t + vv_x + g\eta_x = 0. \quad (1.9)$$

Terwijl uit (1.7) volgt:

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} \{ v \cdot (\eta + d) \} = 0. \quad (1.10)$$

We hebben dus twee niet-lineaire eerste orde vergelijkingen voor  $\eta$  en  $v$ .

In de praktijk geeft (1.9) de toestand niet juist weer, daar we bij de waterbeweging te maken zullen hebben met een weerstandsterm. Deze moeten we daarom aan (1.9) toevoegen.

Voorts kunnen we de continuïteitsvergelijking (1.10) in lineaire gedaante brengen, door in te voeren de variabele  $Q(x,t)$ , dat is de stroom per tijdseenheid door een verticale doorsnede, dus

$$Q = bhv, \quad (1.11)$$

waarin  $b$  de breedte is van het kanaal en  $h(x,t) = \eta(x,t) + d(x)$  de hoogte van de waterspiegel boven de bodem. ( $b$  zullen we, hoewel de wanden van het kanaal tot nu toe evenwijdig zijn verondersteld, toch behandelen als een functie van  $x$ , daar  $b$  in de praktijk natuurlijk kleine afwijkingen zal vertonen; bij grotere afwijkingen zal men i.h.a. aparte stukken van het kanaal beschouwen, waarop  $b$  nagenoeg constant is.) Bij invoering van  $Q$  krijgt (1.9) een onprettige gedaante, zodat we beide variabelen naast elkaar zullen gebruiken. De algemene bewegingsvergelijkingen, waarvan uitgegaan zal worden bij de verschillende methoden voor de getijberekening, worden derhalve:



de continuïteitsvergelijking:

$$Q_x + b \cdot h_t + q_l = 0 \quad (1.12)$$

of, in de variabele  $v$ :

$$hv_x + vh_x + h_t + \frac{1}{b}(q_l + hv \cdot \frac{db}{dx}) = 0 \quad (1.12a)$$

en de dynamische vergelijking:

$$g \cdot h_x + vv_x + v_t + g(i_r - i_b) = 0. \quad (1.13)$$

Hierin is in de continuïteitsvergelijking toegevoegd de term  $q(x,t)$ . Onder  $q_l$  verstaan we een eventuele zijwaartse afvoer (lateral discharge) per tijds- en per lengte-eenheid uit het kanaal, b.v. wanneer naastliggende polders worden overstroomd.

In (1.13) stelt  $i_b$  de bodemhelling voor, dus  $i_b = d_x$ , terwijl  $g i_r$  de weerstand per massa-eenheid is. Empirisch is afgeleid, dat de weerstand niet lineair met  $v$  verloopt, maar evenredig is met  $v^2$  en wel volgens de formule van Chézy:

$$i_r = \frac{|v| \cdot v}{C^2 \cdot h_m}, \quad (1.14)$$

waarin  $C$  = de constante van Eytelwein en  $h_m$  = de hydraulische straal, d.i. de oppervlakte van een dwarsprofiel gedeeld door de "bevochtigde lengte" van de begrenzing van een dwarsprofiel.

In de beschouwde problemen veronderstellen we het dwarsprofiel steeds rechthoekig, dus  $h_m = \frac{bh}{b+2h}$ , terwijl ook wordt aangenomen, dat de breedte groot is ten opzichte van de diepte, dus  $h_m = h$  en (1.14) geeft:

$$i_r = \frac{|v| \cdot v}{C^2 \cdot h}. \quad (1.15)$$

Eventueel kan in  $i_r$  nog een term worden opgenomen, die de invloed weer weergeeft van een windkracht aan de oppervlakte. Hierop gaan we niet nader in.

## 2. Opmerkingen naar aanleiding van de bewegingsvergelijkingen.

a. Stoker en Friedrichs [10] herleiden de exacte vergelijkingen van Euler door de oplossing te ontwikkelen naar een parameter. In hun paragraaf over "shallow water theory" veronderstellen zij deze parameter klein en de vergelijkingen voor de eerste orde termen zijn dan juist de vergelijkingen (1.9) en (1.10) tezamen met  $\frac{du}{dt} = 0$ . De parameter, waarnaar ontwikkeld wordt, is het product van de kromming van het wateroppervlak en de diepte, in een bepaald punt op een bepaald tijdstip.

In het probleem van de getijberekening is deze parameter steeds klein, en daarom ligt de in 1. gemaakte veronderstelling, dat de verticale versnelling  $\frac{du}{dt}$  verwaarloosbaar is, voor de hand.



b. Als eerste benadering voor (1.12) en (1.13) kunnen we het geïdealiseerde geval nemen van de waterbeweging in een recht kanaal met rechthoekige doorsnede en horizontale bodem ( $i_b = 0$ ), zodat de waterdiepte  $h_0$  in de rusttoestand, een constante is. Verder veronderstellen we dat de variaties  $z(x,t)$  van de diepte klein zijn, vergeleken bij  $h_0$ . Dan geldt:  $Q = bh_0 v$ . Echter nemen we aan, dat  $v^2$  weer klein is ten opzichte van  $z$ , en dat er geen weerstand is. Hieruit volgt, dat  $vv_x = (\frac{v^2}{2})_x$  verwaarloosd mag worden ten opzichte van  $z_x$ , en dat  $i_r = 0$ . Verder is  $q_1 = 0$ . We houden dan over:

$$Q_x + bz_t = 0 \quad (2.1)$$

en:

$$gz_x + \frac{1}{bh_0} Q_t = 0 \quad (2.2)$$

waaruit direct volgt:

$$Q_{xx} = \frac{1}{gh_0} Q_{tt} \quad (2.3)$$

en:

$$z_{xx} = \frac{1}{gh_0} z_{tt} \quad (2.4)$$

Hieruit blijkt, dat (1.12) en (1.13) onder de gemaakte veronderstellingen overgaan in de één-dimensionale golfvergelijking. Tevens zien we, dat de theoretische voortplantingssnelheid van een storing in het wateroppervlak, gelijk is aan  $\sqrt{gh_0}$ . In de praktijk van de getijberekening zal dit niet het geval zijn, tengevolge van de verwaarloosde termen (vooral de weerstand  $g_i$  en op een benedenrivier de bovenafvoer).

c. We merken op, dat de vergelijkingen (1.12) en (1.13) equivalent zijn met de vergelijkingen uit de gasdynamica voor één dimensionale stroming van een polytroop gas met exponent  $\gamma = 2$ . Zie b.v. [9] en [10].

d. Wanneer we (1.12) en (1.13) willen gebruiken ter berekening van de waterbeweging in zeearmen of benedenrivieren onder invloed van de uit zee komende getijbeweging, is aan de gemaakte veronderstelling van een recht kanaal met evenwijdige, verticale wanden natuurlijk geenszins voldaan. We benaderen een benedenrivier echter door een aantal rechte stukken met rechthoekige doorsnede en een zeearm door een geulennet, uitgaande van waarnemingen. (Dit is b.v. uitgevoerd voor de Waddenzee door de Staatscommissie Zuiderzee [2].) Bovendien spelen in dit geval nog andere krachten een rol, zoals de Corioliskracht tengevolge van de aardrotatie en centrifugaalkrachten bij een gebogen geul of rivier alsmede de aantrekkingskracht van de maan. Deze worden echter verwaarloosd.

e. In (1.13) noemt men  $vv_x = (\frac{v^2}{2})_x$  de Bernouilli-term en  $gh_x$  de verhangterm. We kunnen voor (1.13) ook schrijven:

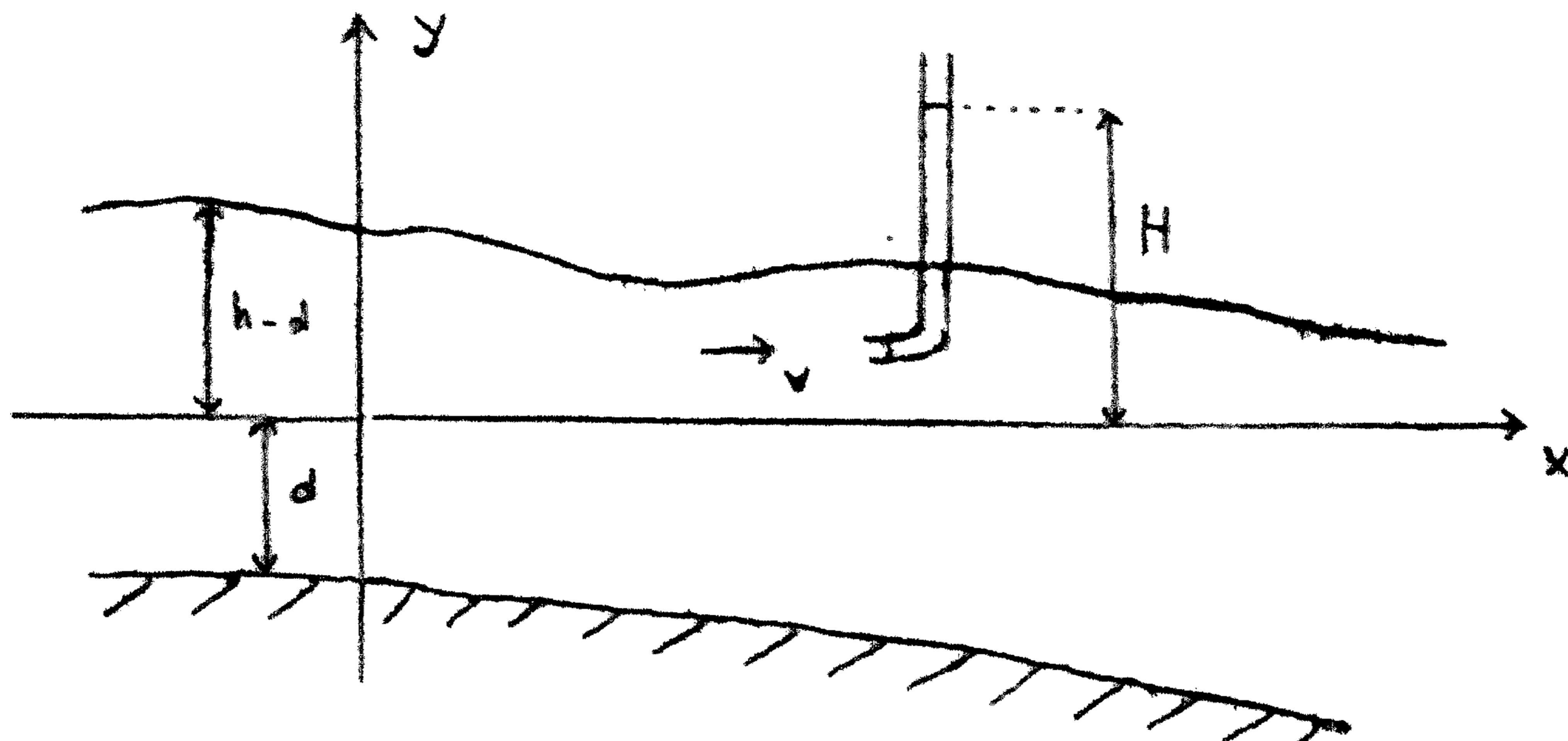


$$v_t + gH_x + gi_r = 0 \quad (2.5)$$

als

$$H = h - d + \frac{v^2}{2g}. \quad (2.6)$$

H is de hydraulische stijghoogte (energy-head); de hoogte boven het 0-niveau van de waterspiegel in een verticale buis met omgebogen uiteinde, dat tegen de stroom in gericht is (zie fig.)



Deze grootheid H is belangrijk bij knooppunten, waar meerdere kanalen samen komen. Hier geldt n.l.:

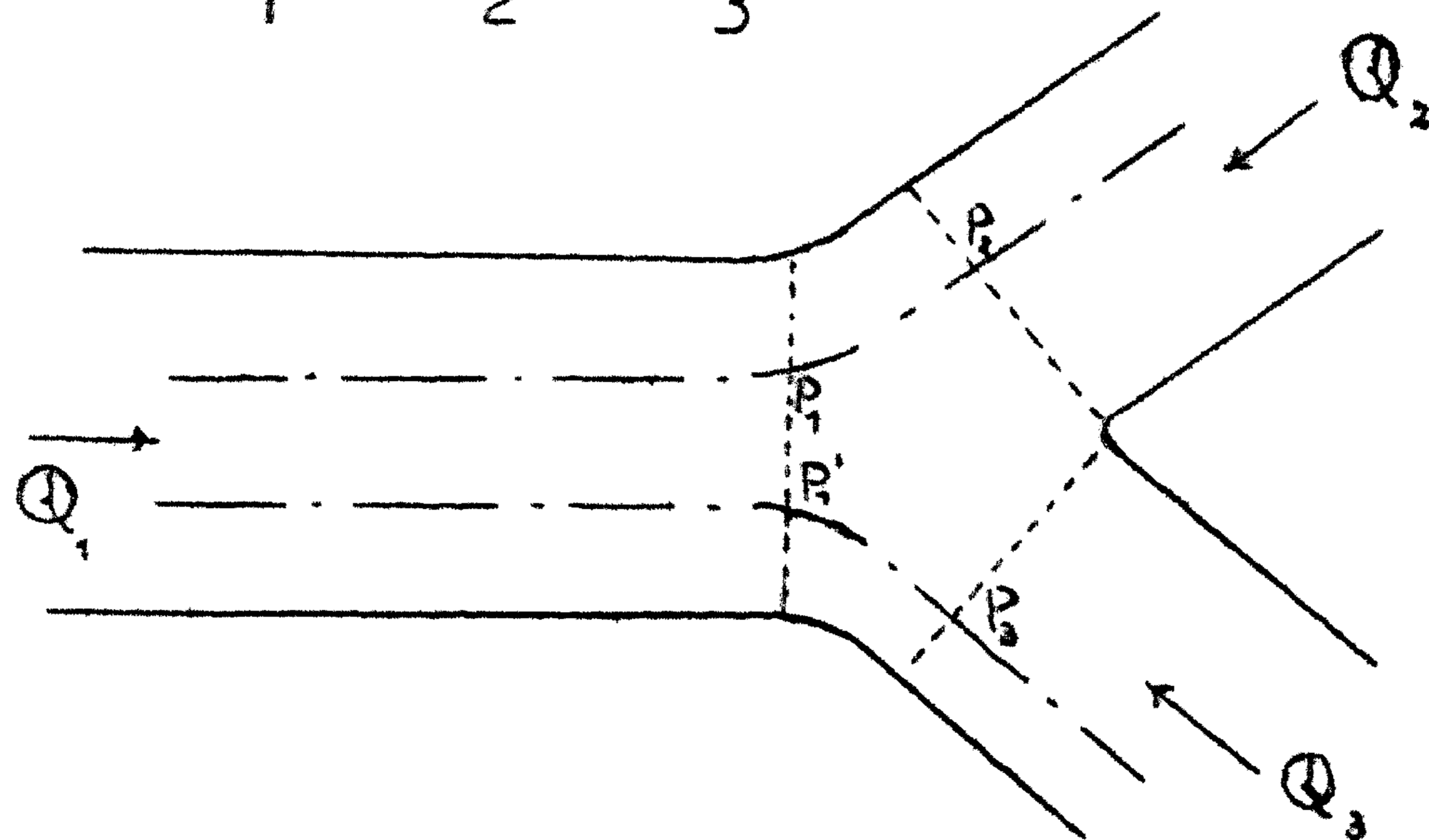
$$\sum Q_i = 0 \text{ (algebraïsche som)}$$

en

$$H_1 = H_2 = \dots = H_n.$$

(2.5) geldt n.l. niet alleen voor een geheel kanaal, maar ook langs iedere str omlijn. Integratie van (2.5) langs de korte stukjes  $P_1P_2$  of  $P_1P_3$  (zie fig.) geeft dan, bij verwaarlozing van het verlies door weerstand en versnelling (dus  $i_r \approx 0$ , en  $v_t \approx 0$  genomen langs de stukjes integratieweg) dat:

$$H_1 = H_2 = H_3.$$



In een knooppunt van een geulennet hebben we dus evenveel randvoorwaarden als onbekende variabelen. De uiteinden van geulen, die niet samenkomen met andere geulen, liggen hetzij bij de zee, alwaar  $h$  bekend is als functie van  $t$  uit waarnemingen, hetzij bij de kust, waar geldt dat  $Q = 0$ . Het aantal randvoorwaarden voor (1.12) en (1.13) is dus gelijk aan het aantal variabelen.

### 3. Overzicht van de oplosmethoden ten behoeve van de getijberekening.

Bij de berekening van de getijden zoeken we van de niet-lineaire vergelijkingen (1.12) en (1.13) periodieke oplossingen. Daar het voor periodieke functies meest geschikte formalisme (Fourier-analyse) bij



niet-lineaire vergelijkingen tot grote moeilijkheden aanleiding geeft, heeft men aanvankelijk vooral getracht, de vergelijkingen te lineariëren (lineaire methoden). Daarnaast bestaan de z.g. exacte methoden, die uitgaan van de volledige differentiaalvergelijkingen en waarbij het periodieke karakter van de optredende functies niet essentieel gebruikt wordt.

#### A. Lineaire methoden.

- 1) In de theorie van het ontstaan van getijden op oceanen (waar natuurlijk de maankrachten in de beschouwingen betrokken moeten worden) lineariseert men de vergelijkingen geheel, en laat men de weerstand weg (vgl. Lamb [3]).
- 2) Onder voorzitterschap van Lorentz heeft de Staatscommissie Zuiderzee van 1918 [2] berekeningen uitgevoerd in verband met de na het leggen van de Afsluitdijk te verwachten vloedhoogten. Lorentz lineariseerde de vergelijkingen geheel en verving de weerstandsterm op ingenieuze wijze door een lineaire term. Zodoende kreeg hij oplossingen met de frequentie van het hoofdgetij, het z.g.  $M_2$ -getij (maansgetij met periode van 12 uur 25 minuten), dat voor West-Europa overheersend is.

Mazure heeft in zijn dissertatie [5] in 1937 deze methode enigszins uitgebreid, terwijl Dronkers [8] ook hogere harmonischen berekent.

- 3) Hoewel geen mathematische methode, valt onder deze categorie ook het werk van van Veen [12], die met elektrische modellen werkt.

#### B. Exacte methoden.

- 1) Lorentz heeft ook een methode aangegeven voor het vinden van oplossingen in de vorm van machtreeksen. Na de Staatscommissie is door Dronkers [5], [9] met deze methode gewerkt.
- 2) Belangrijker zijn de pogingen om de vergelijkingen op te lossen met behulp van z.g. karakteristieke integratie. Het eerst werd dit gedaan in 1900 door Massau [1], doch zijn werk werd vergeten en pas in ca. 1945 herontdekt (vgl. Holsters [8]). Schönfeld heeft in zijn dissertatie [13] deze methode zeer verdiept en in tal van algemene beschouwingen over golfvoortplanting toegepast.

#### 4. De lineaire methode.

Lorentz deed zijn onderzoekingen naar aanleiding van de problemen ten aanzien van de afsluiting van de Zuiderzee. Hij kon daarom veronderstellen:  $q_1 = 0$  en  $i_b = 0$ . Bij benedenrivieren is tengevolge van de bovenafvoer in het algemeen de bodem niet horizontaal, dus  $i_b \neq 0$ . Mazure beschouwde dit geval.

Lorentz lineariseert (1.12) en (1.13) nu als volgt:

a. Stel weer:  $h(x,t) = h_0 + z(x,t)$  met  $h_0 =$  hoogte in de rusttoestand; dan is  $h_0$  constant, omdat  $i_b = 0$ , en hij veronderstelt:  $z \ll h_0$ .



b. Hij verwaarloost de Bernoulli-term  $vv_x$ ; eventueel brengt hij achteraf een correctie aan in de oplossing.

c. Voorts vervangt hij de kwadratische weerstandswet (1.15) door een lineaire:

$$i_r = kv. \quad (4.1)$$

Hierbij dient  $k$  voor iedere geul afzonderlijk te worden bepaald. De vergelijkingen gaan dan over in het volgende lineaire stelsel:

$$Q_x + bz_t = 0$$

en

$$z_x + \frac{1}{g}v_t + kv = 0 \quad (4.2)$$

of bij eliminatie van  $v$  met  $Q = bh_0v$  ( $b$  constant aangenomen)

$$Q_x + bz_t = 0 \quad (4.3)$$

$$Q_t + gkQ + bgh_0z_x = 0 \quad (4.4)$$

We kunnen dit lineaire stelsel integreren en in het bijzonder is een oplossing mogelijk, waarbij  $Q$  en  $z$  enkelvoudig harmonische functies zijn van de tijd met de frequentie van het  $M_2$ -getij, dus van de gedaante:

$$Q = Q_0(x) \cdot \cos(nt - \varphi(x)) \quad (4.5)$$

$$z = z_0(x) \cdot \cos(nt - \psi(x)) \quad (4.6)$$

met  $n =$  frequentie  $M_2$ -getij.

De vraag is nu, hoe  $k$  in (4.1) moet worden bepaald, opdat de zo verkregen oplossingen zo goed mogelijk de toestand weergeven, die beantwoordt aan de bewegingsvergelijking met kwadratische weerstand. Loré deed dit met behulp van een fysische voorwaarde, de z.g. arbeidsvoorwaarde, die we straks zullen behandelen. Mazure echter redeneerde als volgt:

Een stel oplossingen van (4.3) en (4.4) zal ook een oplossing zijn van (1.12) en (1.13), indien deze oplossingen bovendien voldoen aan de vergelijking, die men krijgt, door de linkerleden van (1.13) en (4.4) van elkaar af te trekken, en dit gelijk nul te stellen.

(1.13) wordt bij verwaarlozing van de Bernoulli-term en onder aannamen dat  $z \ll h_0$  (met subst. van (1.15)):

$$gz_x + v_t + g \cdot \frac{|v| \cdot v}{c^2 h_0} = 0$$

en (4.2) levert  $gz_x + v_t + gkv = 0$

Aftrekken levert de vergelijking, waaruit  $k$  bepaald moet worden:

$$\frac{|v| \cdot v}{c^2 h_0} - kv = 0 \quad (4.7)$$

We eisen bovendien, dat de oplossing de gedaante heeft:

$$v = v_0(x) \cdot \cos(nt - \varphi(x)) \quad (4.8)$$

met  $v_0(x) = \frac{Q_0(x)}{bh_0}$ .



(4.8) substitueren we in (4.7). Een Fourier-analyse levert:

$$|\cos(nt-\varphi)| \cdot \cos(nt-\varphi) = \frac{8}{\pi} \left\{ \frac{\cos(nt-\varphi)}{1.3} + \frac{\cos 3(nt-\varphi)}{1.3.5} - \frac{\cos 5(nt-\varphi)}{3.5.7} + \dots \right\}$$

waardoor uit (4.7) volgt:

$$\frac{8}{3\pi} \cdot \frac{v_0^2}{c^2 h_0} \cos(nt-\varphi) + \dots \text{ termen met hogere frequentie } \dots + \dots - kv_0 \cdot \cos(nt-\varphi) = 0$$

zodat we vinden dat de termen met  $M_2$ -frequentie tegen elkaar wegvallen, als:

$$k = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{v_0}{c^2 h_0} \quad (4.9)$$

Hier is  $v_0$  weliswaar een functie van  $x$ , maar door het nemen van gemiddelde waarden kunnen we voor niet te lange stukken van een geul  $k$  als constante beschouwen, die echter dus geul voor geul moet worden bepaald uit de waarnemingen.

(4.9) volgt ook uit Lorentz'arbeidsvoorwaarde, die luidt:

we bepalen voor iedere geul  $k$  zo, dat bij een volle stroomschommeling de negatieve arbeid van de fictieve door  $k$  bepaalde weerstand, gelijk is aan die van de werkelijke weerstand, die door  $C$  bepaald wordt.

Immers, de weerstand is  $g i_r$  en stellen we weer  $v = v_0 \cdot \cos(nt-\varphi)$ , dan is de bedoelde arbeid

$$\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} g i_r v \, dt \quad (4.10)$$

waarin  $i_r$  dus resp. wordt bepaald door (1.15) en (4.1).

Na deling door  $g v_0$  stelt (4.10) echter juist de eerste Fourier-coëfficiënt voor, bij ontwikkeling van  $i_r$ , zodat de arbeidsvoorwaarde aequivalent is met de methode van Mazure, daar deze  $k$  ook juist zodanig bepaalde, dat de Fourier-coëfficiënten met de  $M_2$ -frequentie tegen elkaar wegvielen.

Volgens de boven uiteengezette methode zijn door de Staatscommissie vele berekeningen uitgevoerd. Mazure heeft deze theorie ook geschikt gemaakt voor benedenrivieren, waar  $i_b \neq 0$  is en dus  $h_0$  een functie van  $x$ . Daar hierbij evenwel geen essentiële veranderingen in de methode optreden, laten we dit achterwege.

Voorts is het mogelijk ten koste van moeizame berekeningen analoog hogere harmonische termen te berekenen. Hiervoor verwijzen we echter naar [5] en naar een artikel van Dronkers. [8].

## 5. De exacte methode.

Bij deze methode verwaarloost Lorentz weliswaar de Bernoulli-term en neemt aan  $z \ll h_0$ , maar laat de weerstandsterm ongewijzigd.



(1.12) en (1.13) leveren:

$$Q_x + bz_t = 0 \quad (5.1)$$

$$Q_t + b \cdot \alpha z_x + \frac{\beta}{b} \cdot |Q| \cdot Q = 0 \quad (5.2)$$

met:  $\alpha = gh_0$  (5.3) en  $\beta = \frac{g}{c^2 h_0^2}$  (5.4)

Deze vergelijkingen worden eenvoudig van gedaante, door invoering van de nieuwe variabelen:

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt{\alpha}}, \quad \bar{Q} = \frac{\beta \cdot Q}{b}, \quad \bar{z} = \beta \sqrt{\alpha} \cdot z$$

De vergelijkingen leveren dan (strepen weer weggelaten):

$$Q_x + z_t = 0 \quad (5.5)$$

en

$$Q_t + z_x + |Q| \cdot Q = 0 \quad (5.6)$$

We stellen nu:

$$z = z_0(t) - z_1(t) \cdot x + \frac{1}{2} z_2(t) \cdot x^2 - \frac{1}{6} z_3(t) \cdot x^3 + \dots \quad (5.7)$$

$$Q = Q_0(t) - Q_1(t) \cdot x + \frac{1}{2} Q_2(t) \cdot x^2 - \frac{1}{6} Q_3(t) \cdot x^3 + \dots \quad (5.8)$$

We nemen aan, dat  $z_0(t)$  en  $Q_0(t)$  voor alle  $t$  bekend zijn (dus aangenomen dat de geul begint bij de zee, waar  $z = z_0(t)$  gemeten wordt).

De coëfficiënten worden dan achtereenvolgens bepaald uit:

$$Q_1(t) = \dot{z}_0(t) ; z_1(t) = \dot{Q}_0(t) + |Q_0(t)| \cdot Q_0(t) ;$$

$$Q_2(t) = \dot{z}_1(t) ; z_2(t) = \dot{Q}_1(t) - |Q_0(t)| \cdot Q_1(t) - |Q_1(t)| \cdot Q_0(t)$$

enz.

Heeft men zo enige coëfficiënten bepaald, dan kunnen met behulp van (5.7) en (5.8) de hoogte en de stroom aan het einde van de geul bepaald worden. ( $x=1$ ).  $l$  moet zo gekozen worden, dat de reeksen nog behoorlijk convergeren, zodat met niet teveel termen volstaan kan worden. In de praktijk kent men wel  $z_0(t)$ , maar niet  $Q_0(t)$ . Deze zal bij een onvertakte geul bekend zijn aan het andere uiteinde.

Men schat in dit geval  $Q_0(t)$  en gaat na of dit klopt. Reeds bij een onvertakte geul is het rekenwerk niet gering, bij een geulensstelsel wordt het enorm; de methode levert evenwel, vooral bij niet te grote  $l$ , zeer betrouwbare resultaten.



## 6. Karakteristiekentheorie.

De vergelijkingen (1.12a) en (1.13) zijn van het type

$$\begin{aligned} a_{11}u_x + a_{12}v_x + a_{13}u_y + a_{14}v_y &= h_1 \\ a_{21}u_x + a_{22}v_x + a_{23}u_y + a_{24}v_y &= h_2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

waarin  $a$  en  $h$  functies van  $u$ ,  $v$ ,  $x$  en  $y$  zijn.

We kunnen stelsels van dit type algemeen behandelen en in een vorm brengen, die geschikt is voor theoretische discussie en numerieke behandeling (zie Sauer [13], Courant-Friedrichs [9], Schönfeld [12]). Zij

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y) \quad (6.2)$$

een oplossing van (6.1). Zij  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  een kromme  $K$  in het  $x,y$ -vlak. Langs  $K$  nemen  $u$  en  $v$  de waarden  $u(s) = u(x(s),y(s))$  en  $v(s) = v(x(s),y(s))$  aan. Differentiatie naar  $s$  levert

$$\begin{aligned} u_x \dot{x} + u_y \dot{y} &= \dot{u} \\ v_x \dot{x} + v_y \dot{y} &= \dot{v} \end{aligned} \quad (6.3)$$

De afgeleiden  $u_x$  tot en met  $v_y$  moeten langs  $K$  voldoen aan de vergelijkingen (6.1) en (6.3). Indien de determinant  $\Delta$  van dit stelsel  $\neq 0$  is, kunnen  $u_x$  enz. dus langs  $K$  berekend worden. Interessanter is het indien  $K$  zodanig is, dat juist wel  $\Delta = 0$ . Dan is het stelsel alleen compatibel als de rang van de matrix van het inhomogene stelsel gelijk is aan de rang van die van het homogene stelsel. Indien deze dus 3 is (in het geval dat hij  $< 3$  is, kunnen we de vergelijking (6.1) veel eenvoudiger behandelen; we beschouwen dit verder niet) moet ook:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & h_2 \\ \dot{x} & 0 & \dot{y} & 0 & \dot{u} \\ 0 & \dot{x} & 0 & \dot{y} & \dot{v} \end{pmatrix} = 3 \quad (6.4)$$

Het is eenvoudig in te zien, dat, mits  $\dot{x} \neq 0$ , wat we verder aannemen deze eis equivalent is met de volgende

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11}\dot{y} - a_{13}\dot{x} & a_{12}\dot{y} - a_{14}\dot{x} & h_1\dot{x} - a_{11}\dot{u} - a_{12}\dot{v} \\ a_{21}\dot{y} - a_{23}\dot{x} & a_{22}\dot{y} - a_{24}\dot{x} & h_2\dot{x} - a_{21}\dot{u} - a_{22}\dot{v} \end{pmatrix} = 1 \quad (6.5)$$

Hieruit volgt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \dot{y}^2 - \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} \right\} \dot{x}\dot{y} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \dot{x}^2 = 0 \quad (6.6)$$

Deze vergelijking levert in het algemeen in ieder punt  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  twee richtingen  $\dot{y} : \dot{x}$ . Indien deze richtingen reëel en verschillend zijn, noemen we het stelsel hyperbolisch en we beperken ons in het vervolg hier toe.

Bij een gegeven oplossing  $(u,v)$  van het stelsel (6.1) behoren dus in ieder punt van het  $x,y$ -vlak twee verschillende richtingen, die twee scharen krommen bepalen, welke we subkarakteristieken noemen.



De bijbehorende vier-dimensionale krommen op het oppervlak (6.2) noemen we karakteristieken. Noemen we de parameters langs de karakteristiekenscharen  $s$  en  $t$ , dan kunnen we voor (6.6) schrijven

$$\begin{aligned} y_s &= c^+ x_s \\ y_t &= c^- x_t \end{aligned} \tag{6.7}$$

Uit (6.5) en (6.7) kunnen we nog twee vergelijkingen afleiden, die afgeleiden van  $u$  en  $v$  bevatten:

$$\begin{aligned} A_1^+ x_s + A_2^+ u_s + A_3^+ v_s &= 0 \\ A_1^- x_t + A_2^- u_t + A_3^- v_t &= 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

De coëfficiënten  $c$  en  $A$  hangen expliciet slechts van  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  $v$  af, niet van  $s$  en  $t$ .

Tot dusver hebben we één speciale oplossing van (6.1) beschouwd. Vatten we nu echter (6.7) en (6.8) op als een stelsel vergelijkingen voor vier onbekende functies  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  $v$  van  $s$  en  $t$ , dan voldoet blijkens de afleiding iedere oplossing van (6.1) aan dit stelsel, terwijl eenvoudig in te zien is, dat iedere oplossing van (6.7) en (6.8) ook aan (6.1) voldoet.

Het stelsel (6.7) en (6.8) heeft de volgende prettige eigenschappen:

1. In twee der vergelijkingen wordt uitsluitend naar  $s$  gedifferentieerd, in de andere uitsluitend naar  $t$ .
2. De coëfficiënten hangen niet van  $s$  en  $t$ , doch alleen van de onafhankelijke variabelen af (kanoniek systeem).

## 7. Invoering van karakteristieke functies.

De vergelijkingen (6.7) en (6.8) geven een goed uitgangspunt voor theoretische en numerieke beschouwingen (vgl. Sauer [13]). We kunnen ze echter in een andere gedaante brengen, die nog grotere voordelen heeft (deze vorm is echter alleen in speciale gevallen expliciet op te schrijven).

Beschouw de totale differentiaalvergelijking

$$A_2^+ du + A_3^+ dv = 0 \tag{7.1}$$

waarin we  $u$  en  $v$  als variabelen en  $x$  en  $y$  als parameters beschouwen. Zij  $\mu^+$  een integrerende factor en  $F^+(u,v; x,y)$  de bijbehorende integraal hiervan (deze bestaan zeker; van de mogelijkheid om bij een gegeven stelsel eenvoudig een integrerende factor  $\mu$  te vinden, hangt de praktische bruikbaarheid van de volgende herleiding af).

Beschouwen we  $u$  en  $v$  als functies van  $x$  en  $y$  (via de variabelen  $s$  en  $t$ ; we nemen aan dat de voorkomende functionaaldeterminanten  $\neq 0$  zijn), dan kunnen we ook  $F^+$  als functie van  $x$  en  $y$  beschouwen:



$$F^+(u, v; x, y) = f^+(x, y). \quad (7.2a)$$

Er geldt nu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^+}{\partial s} &= f_x^+ x_s + f_y^+ y_s = \\ \frac{\partial F^+}{\partial s} &= F_u^+ u_s + F_v^+ v_s + F_x^+ x_s + F_y^+ y_s = \\ &= \mu^+ (A_2^+ u_s + A_3^+ v_s) + F_x^+ x_s + F_y^+ y_s = \\ &= (F_x^+ - \mu^+ A_1^+) x_s + F_y^+ y_s, \end{aligned}$$

waarbij (7.1a) en (6.8a) gebruikt zijn; met (7.7a) levert dit tenslotte

$$\frac{\partial f^+}{\partial x} + c^+ \frac{\partial f^+}{\partial y} + a^+ = 0 \quad (7.3a)$$

$$\text{als } a^+ = \mu^+ A_1^+ - F_x^+ - c^+ F_y^+. \quad (7.4a)$$

Analoog is er een integraal  $F^-(u, v, x, y) = f^-(x, y)$  (7.2b)

van  $A_2^- du + A_3^- dv = 0$  (7.1b)

bij integrerende factor  $\mu^-$ .

Hiervoor geldt:

$$\frac{\partial f^-}{\partial x} + c^- \frac{\partial f^-}{\partial y} + a^- = 0 \quad (7.3b)$$

met  $a^- = \mu^- A_1^- - F_x^- - c^- F_y^-$ . (7.4b)

$f^+$  en  $f^-$  noemen we karakteristieke functies.

Uit de vergelijkingen (7.2) kunnen we  $u$  en  $v$  als functies van  $f^+$  en  $f^-$  (en eventueel ook expliciet van  $x$  en  $y$ ) bepalen en hiervan kunnen we dus ook  $c^\pm$  en  $a^\pm$  als functies van  $f^\pm$ ,  $x$  en  $y$  uitdrukken.

In plaats van de vier vergelijkingen (6.7) en (6.8) hebben we dus twee vergelijkingen (7.3) gekregen, die we aldus kunnen lezen:



langs een  $\pm$  karakteristiek, waar

$$dy = c^{\pm} dx$$

geldt

$$d f^{\pm} = \frac{\partial f^{\pm}}{\partial x} dx + \frac{\partial f^{\pm}}{\partial y} dy = - a^{\pm} dx.$$

Dat deze vorm zich zeer goed leent voor differentiemethoden, ligt voor de hand. In 9. komen we hierop terug. Ook bij theoretische beschouwingen zijn de karakteristieke functies een belangrijk hulpmiddel (vgl. Schönfeld [12] en Stoker [10]).

#### 8. Toepassing op de vergelijkingen van de getijdenstroming.

Reeds in 1900 heeft Massau [1] een grafische methode aangegeven ter integratie van de getijden-vergelijkingen, die neerkomt op de bovengeschetste behandelingswijze. Pas in het laatste decennium hebben de karakteristieke methoden algemene ingang gevonden (vgl. Crava-



Re [6], Holsters [7], Stoker [10], Schönfeld [12]). In het volgende sluiten we in hoofdzaak bij Schönfeld aan.

We schrijven de vergelijkingen (1.12a) en (1.13) in de vorm:

$$\begin{aligned} h_t + v h_x + h v_x &= r_1 \\ v_t + g h_x + v v_x &= r_2 \end{aligned} \quad (8.1)$$

waarin

$$r_1 = -\frac{q_1}{b} - \frac{h v}{b} \frac{db}{dx} \text{ en } r_2 = g(i_b - i_r) \quad (8.2)$$

in het algemeen functies van  $t$ ,  $x$ ,  $h$  en  $v$  zijn.

De matrix (6.4) wordt dan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v & h & r_1 \\ 0 & 1 & g & v & r_2 \\ \dot{t} & 0 & \dot{x} & 0 & \dot{h} \\ 0 & \dot{t} & 0 & \dot{x} & \dot{v} \end{pmatrix}$$

en voor (6.5) krijgen we:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} vt - \dot{x} & ht & r_1 t - \dot{h} \\ gt & vt - \dot{x} & r_2 t - \dot{v} \end{pmatrix} = 1 \quad (8.3)$$

Als karakteristieke en-voorwaarde volgt hieruit

$$\dot{x} = c^{\pm} \dot{t} \quad (8.4)$$

$$\text{met } c^{\pm} = v \pm \sqrt{gh} \quad (8.5)$$

In alle fysisch zinvolle gevallen ( $h > 0$ ) is ons stelsel dus hyperbolisch.

De vergelijkingen (6.8) worden nu

$$\dot{v} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \dot{h} - (r_2 \pm \sqrt{\frac{g}{h}} r_1) \dot{t} = 0$$

(in de verg. met het + teken betekent de differentiatie naar een variabele  $\lambda$ , in de andere naar een variabele  $\mu$ ).

De totale diff. verg. (7.1) worden nu:

$$dv \pm \sqrt{\frac{g}{h}} dh = 0.$$

Als integrerende factoren nemen we  $\mu^{\pm} = \pm \frac{1}{2}$ .

We krijgen dan als karakteristieke variabelen

$$f^{\pm}(x, y) = \sqrt{gh} \pm \frac{1}{2} v \quad (8.6)$$

Er geldt nu  $f^{\pm} = \left( \frac{\partial f^{\pm}}{\partial t} + c^{\pm} \frac{\partial f^{\pm}}{\partial x} \right) \dot{t} =$

$$= \pm \frac{1}{2} (\dot{v} \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \dot{h}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{\frac{g}{h}} r_1 \pm r_2) \dot{t}$$

En als vergelijking voor  $f^{\pm}$  hebben we dus



$$\frac{\partial f^{\pm}}{\partial t} + c^{\pm} \frac{\partial f^{\pm}}{\partial x} + a^{\pm} = 0 \quad (8.7)$$

met

$$a^{\pm} = -\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{g}{h}} r_1 \pm r_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left( \frac{q_1}{b} + \frac{hv}{b} \frac{db}{dx} \right) \pm \frac{1}{2} g(i_r - i_b) \quad (8.8)$$

Uit (8.6) volgt:  $v = f^+ - f^-$

$$h = \frac{(f^+ + f^-)^2}{4g} \quad (8.9)$$

dus

$$c^+ = \frac{3}{2} f^+ - \frac{1}{2} f^- \quad (8.10)$$

$$c^- = \frac{1}{2} f^+ - \frac{3}{2} f^-$$

Ook kunnen we  $a^{\pm}$  in  $f^{\pm}$ ,  $x$  en  $t$  uitdrukken.

In het bijzondere geval bv. dat  $i_b = q_1 = \frac{db}{dx} = 0$ , en

$$i_r = \frac{v|v|}{c^2 h} \quad (\text{Chézy})$$

krijgen we

$$a^{\pm} = \pm \frac{2g^2}{c^2} \left( \frac{f^+ - f^-}{f^+ + f^-} \right)^2 \text{sgn}(f^+ - f^-).$$

## 9. Numerieke integratie van de vergelijkingen (8.7).

De vergelijkingen (8.7) kunnen we zoals reeds opgemerkt, aldus lezen:

langs een + sub-karakteristiek geldt:

$$\begin{aligned} dx &= c^+ dt \\ df^+ &= -a^+ dt \end{aligned} \quad (9.1)$$

langs een - sub-karakteristiek geldt

$$\begin{aligned} dx &= c^- dt \\ df^- &= -a^- dt \end{aligned} \quad (9.2)$$

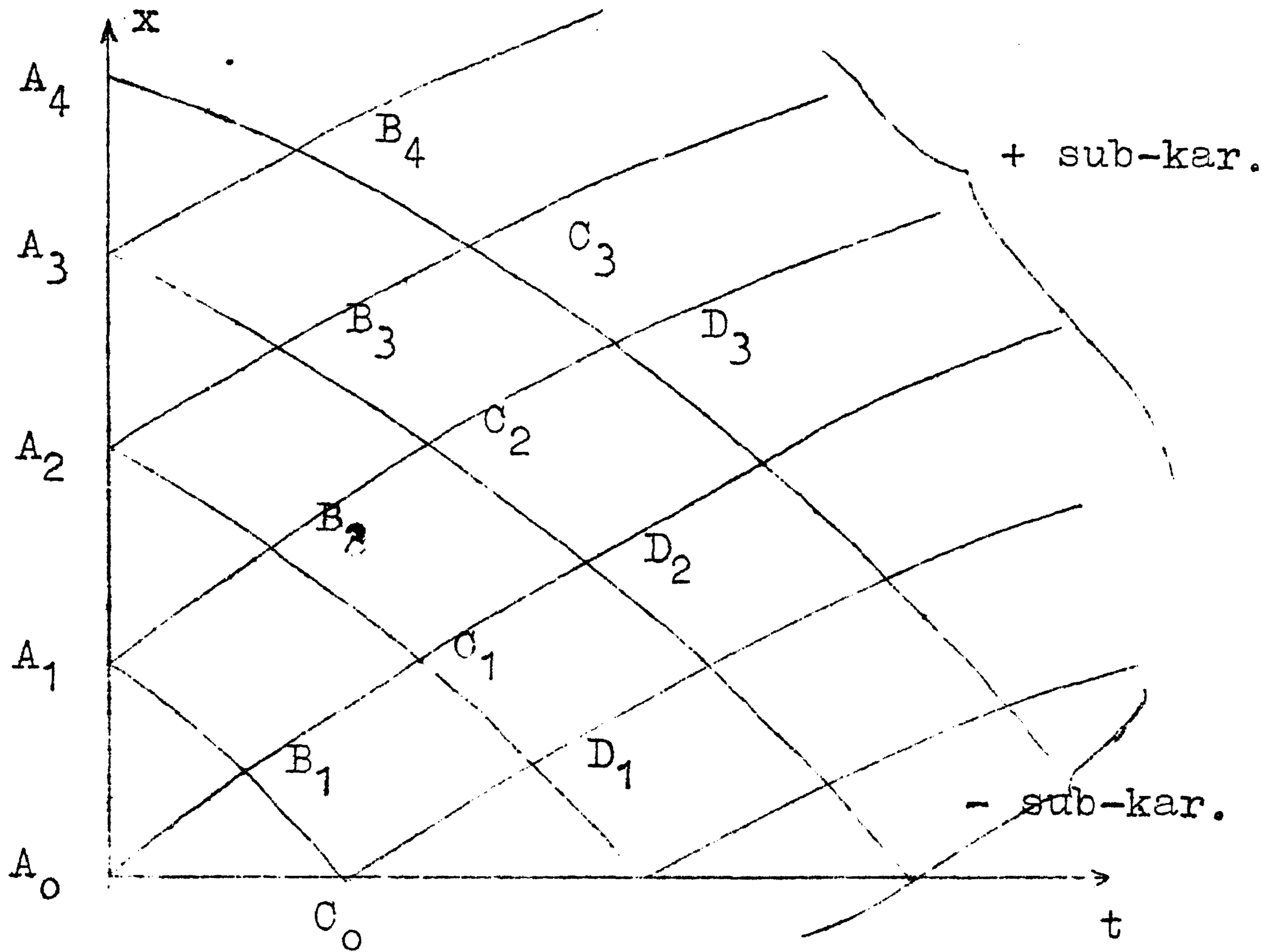
Vervangen we differentiaal door differenties, dan is direct duidelijk hoe een benaderingsoplossing voor bijvoorbeeld het probleem van Cauchy (beginwaardeprobleem) gevonden kan worden.

Zijn voor  $t = 0$   $v$  en  $h$  (dus ook  $f^+$  en  $f^-$ ) als functies van  $x$  gegeven, dan kennen we dus langs de lijn  $t = 0$  in een  $t$ - $x$  vlak de richting van de sub-karakteristieken (zie figuur). Met behulp hier... kan nu het snijpunt B van de + sub-karakteristiek en de - sub-karakteristiek die in naburige punten  $A_2$  resp.  $A_1$  beginnen, bij benadering gevonden worden.

Uit (9.1b) en (9.2b) volgt dan

$$\begin{aligned} f^+(B_1) &\approx f^+(A_2) - a^+(A_2) \cdot t(B_1) \\ f^-(B_1) &\approx f^-(A_1) - a^-(A_1) \cdot t(B_1). \end{aligned}$$





Op deze manier vinden we dus  $f^\pm$  in  $B_1, B_2, B_3$ , enz., waarna we de waarden van  $c^\pm$  en  $a^\pm$  in  $B_1$  enz. berekenen kunnen. Het is duidelijk dat het hier geschetste procedé nog voor verbetering vatbaar is. Het kan bewezen worden dat een dergelijk differen-

tie-procede convergeert, d.w.z. dat de uitkomsten naderen tot de oplossing van de differentiaalvergelijkingen, als de maaswijdte van het karakteristieken-net naar 0 gaat. Indien er randvoorwaarden zijn, dan wordt het probleem niet essentieel moeilijker. Stel bv. gegeven, dat voor  $x = 0$   $R(f^+, f^-, t) = 0$  (9.3). Uit de waarden van  $f^+$  in  $B_1$ , kennen we richting van de -sub.kar. door  $B_1$  en dus door het punt  $C_0$ . Uit (9.2b) vinden we  $f^-$  in  $C_0$  en nu kan met behulp van (9.3)  $f^+$  hier bepaald worden. De bepaling van het punt  $D_1$  en de waarden van  $f^+$  aldaar gaat nu weer zonder moeilijkheden.

Essentieel bij dit betoog is, dat  $c^- < 0 < c^+$ , d.w.z.  $|v| < \sqrt{gh}$ . Dit is het z.g. sub-kritische geval (stromend water, te vergelijken met het subsone geval in de gasdynamica). Het superkritische geval ( $|v| > \sqrt{gh}$ , schietend water) treedt in de practijk slechts in zeer bijzondere gevallen op.



In een netwerk van kanalen zijn bij een knooppunt van  $n$  kanalen steeds  $n$  overgangsvergelijkingen gegeven (vgl. 2 opm.c). De karakteristieke integratie verloopt nu als volgt:

In een punt  $C_0$  van de  $t$ - $x$  diagrammen van ieder der kanalen (voor alle kanalen zij  $x = 0$  in het knooppunt) kunnen we de waarden van  $f_1^-$ ,  $f_2^-$ , enz. bepalen. De overgangsvergelijkingen leveren nu de waarden van  $f_1^+$ ,  $f_2^+$ , enz. Moeilijkheden als bijvoorbeeld bij het werken met machtreeksen, waar we steeds uit moeten gaan van dubbele randvoorwaarden en een sterk vertakt kanalen-net tot zeer uitgebreide iteraties aanleiding zou geven, treden hier dus niet op.

Bij het berekenen van getijden worden in het algemeen periodieke oplossingen gevraagd, waarbij van de zeezijde de variaties van  $h$  (of beter: van  $H$ ) gegeven zijn. Aan de andere zijde lopen de kanalen over door (rivieren) of is er ergens een voorwaarde, bv.  $Q = 0$  (afgesloten zeearm).

De methode der karakteristieke integratie is niet geschikt om met de periodieke oplossing te vinden - we moeten steeds uitgaan van een



begintoestand. Hiervoor kunnen we bv. nemen de rusttoestand (of, als er boven afvoer is, de stationaire toestand), of een toestand die een ruwe benadering vormt van de te verwachten periodieke toestand. Uitgaande hiervan moeten we het verloop van de beweging in de tijd hierna berekenen, zolang tot de resultaten in voldoende mate periodiek zijn. In een door Schönfeld doorgerekend geval bleek dit binnen twee volle perioden het geval te zijn.

#### 10. Vergelijking van de verschillende methoden.

Schönfeld vergelijkt in zijn dissertatie de verschillende berekeningsmethoden en komt daarbij tot de volgende resultaten.

1. Een enkelvoudig harmonische methode levert, indien aan het resultaat geen hoge eisen gesteld worden, vrij snel een resultaat.
2. De meervoudige harmonische methoden vergen zeer veel meer tijd dan de karakteristieke methoden.
3. Bij een enkelvoudig kanaal vergt een machtreeksenmethode meer tijd dan een karakteristieke methode.

Bij een vertakt kanalenstelsel zijn de machtreeksenmethoden praktisch onbruikbaar.



11. Literatuur

1. Massau, J., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. Annales Assoc. Ingén Ecoles de Gand, 1900, p 95.
2. Lorentz, H.A., Verslag van de Staatscommissie Zuiderzee 1918-1926, Den Haag, 1926.
3. Lamb, H., Hydrodynamics, 6<sup>th</sup> ed., Cambridge, 1932.
4. Dronkers, J.J., Een getijberekening voor benedenrivieren, De Ingenieur, 50, 1935, 181.
5. Mazure, J.P., Proefschrift Delft 1937.
6. Craya, A. et Ré, R., Calcul graphique des régimes variables dans les canaux, La Houille Blanche, 1946, 19.
7. Holsters, H., Le calcul du mouvement non-permanent dans les rivières par la méthode dite des "lignes d'influence", Rev. génér. Hydraul., 1947, 36.
8. Dronkers, J.J., Methoden van getijberekening, De Ingenieur, 59, 1947, B, 121.
9. Courant, R. and Friedrichs, K.O., Supersonic Flow and shock waves, N.Y. 1948.
10. Stoker, J.J. and Friedrichs, K.O., The formation of breakers and bores, Comm. Appl. Math, 1, 1948, 1.
11. Dronkers, J.J. et van Veen, J., Aperçu des méthodes pour la détermination du mouvement de marée, Rapp. 17<sup>e</sup> Congr. Int. Navigation, Lisbonne 1949, Sect. 2. Quest. 1, p 159.
12. Schönfeld, J.C. Proefschrift Delft, 1951.
13. Sauer, R., Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Berlin 1952