

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

EEN PROBLEEM IN CONFORME AFBEELDING

G.W.Veltkamp.

Rapport TW 22 {intern}.

September

1953.

Een probleem in conforme afbeelding.

Samenvatting.

Het in figuur 1 aangegeven gebied G wordt conform afgebeeld op een halfvlak, zodanig dat de oneindig verre punten van beide gebieden conform op elkaar worden afgebeeld. Enkele ontaardingsgevallen worden besproken. De oplossing van het eerste randwaarde-probleem voor G wordt aangegeven.

1. Probleemstelling.

Gevraagd wordt het gebied G van het complexe z -vlak, bepaald door

$$-a < \operatorname{Im} z < \infty \quad \text{voor } 0 \leq |\operatorname{Re} z| < 1 \quad (a > 0)$$

$$0 < \operatorname{Im} z < \infty \quad \text{voor } 1 \leq |\operatorname{Re} z| < \infty$$

(zie figuur 1), conform af te beelden op het halfvlak $\operatorname{Im} s > 0$, zodanig dat de omgeving van het punt $z = \infty$ conform op de omgeving van het punt $s = \infty$ wordt afgebeeld.

2. Schwarz-Christoffel transformatie.

Door de probleemstelling is de afbeelding nog niet eenduidig vastgelegd.

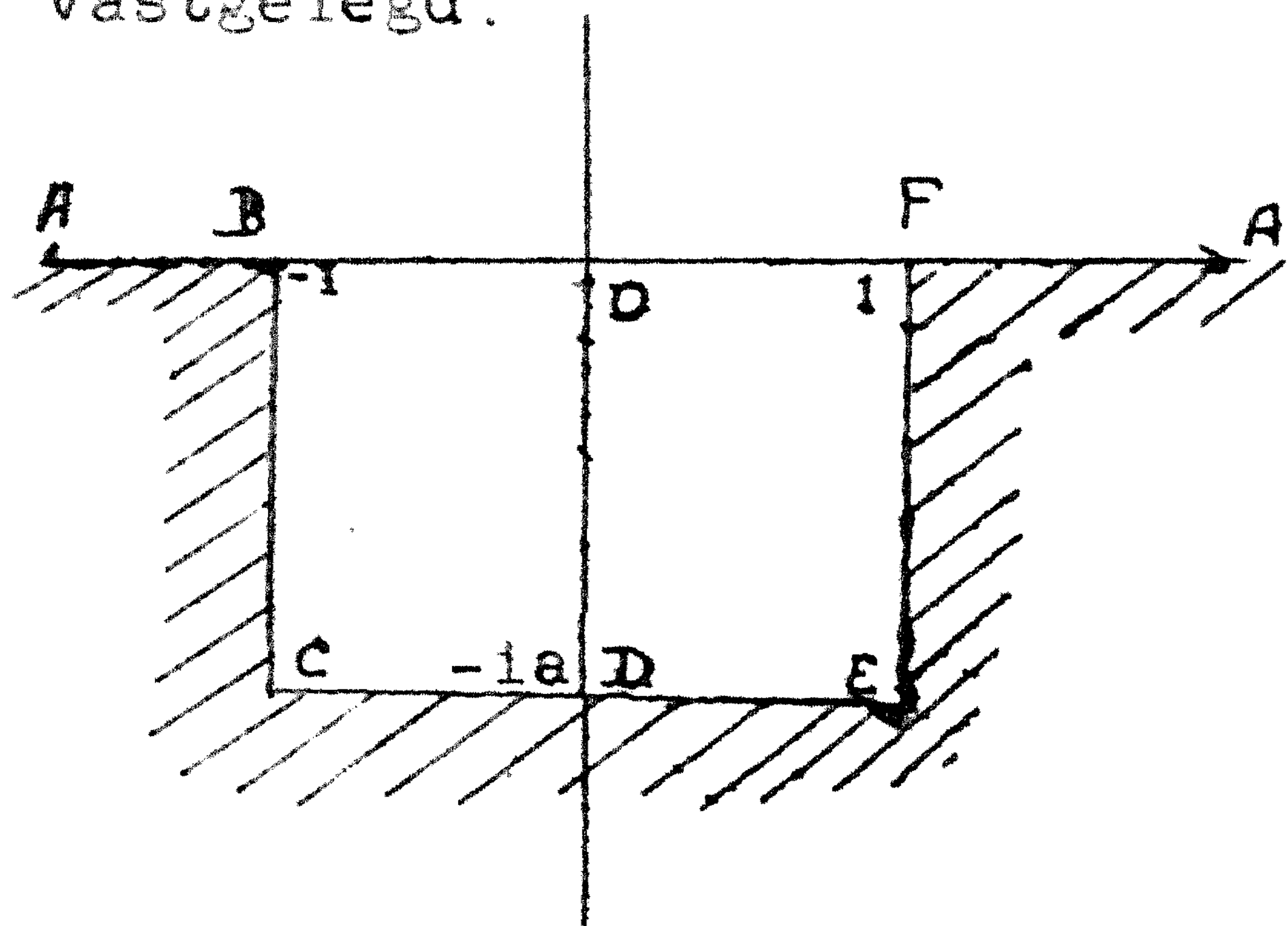


fig.1 z -vlak

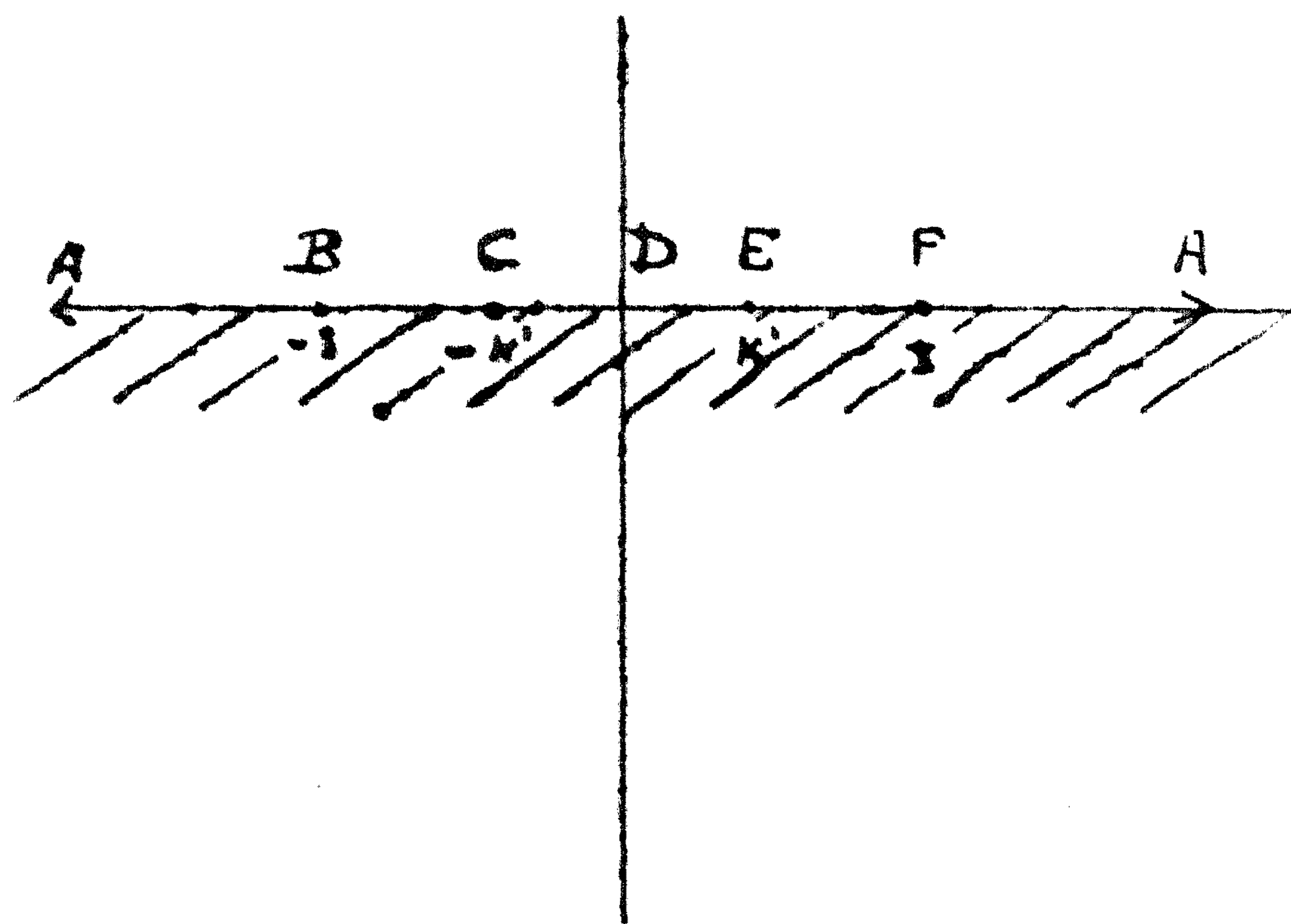


fig.2 s -vlak.

Eisen we bovendien, dat de punten $z = -1$, resp. $-ia$ en 1 afgebeeld worden in $s = -1$, resp. 0 en 1 , dan kunnen we op grond van de algemene afbeeldingsstelling en het spiegeliingsprincipe verwachten dat de gezochte afbeelding bestaat en eenduidig bepaald is. ^{*)}

De beelden van de punten C en E (zie fig. 1 en 2) moeten tussen B en F liggen en wel symmetrisch t.o.v. $s = 0$, stel in $-k'$, resp. k' ($0 < k' < 1$), waarin k' een nog te bepalen constante is.

^{*)} Door F.W. Carter (1) is een afbeelding behandeld, waaruit de hier gevraagde afbeelding als bijzonder geval afgeleid kan worden. Zie ook Kober (2), pag. 181.

Volgens de formule van Schwarz-Christoffel moet nu

$$\frac{dz}{ds} = C_1 \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{\sqrt{s^2 - k'^2}} \quad (1)$$

We kunnen hierin het teken van de wortelfuncties vast leggen door de eis, dat zij voor s reeel en > 1 positief zijn. C_1 is een nog te bepalen constante (die positief reeel moet zijn i.v.m. het gedrag van $\frac{dz}{ds}$ op ∞).

Uit (1) kan z als functie van s berekend worden met behulp van elliptische integralen. Eenvoudiger is het echter, een hulpvariabele t in te voeren door

$$s = - \operatorname{dn}(t, k) \quad k = \sqrt{1 - k'^2}, \quad k > 0 \quad (2)$$

Door deze functie wordt het deel

$$0 < \operatorname{Re} t < K(k)$$

$$0 < \operatorname{Im} t < 2 K(k')$$

van het t -vlak (zie fig.3) conform afgebeeld op het halfvlak $\operatorname{Im} s > 0$, waarbij de correspondentie tussen de verschillende bijzondere punten is, zoals in

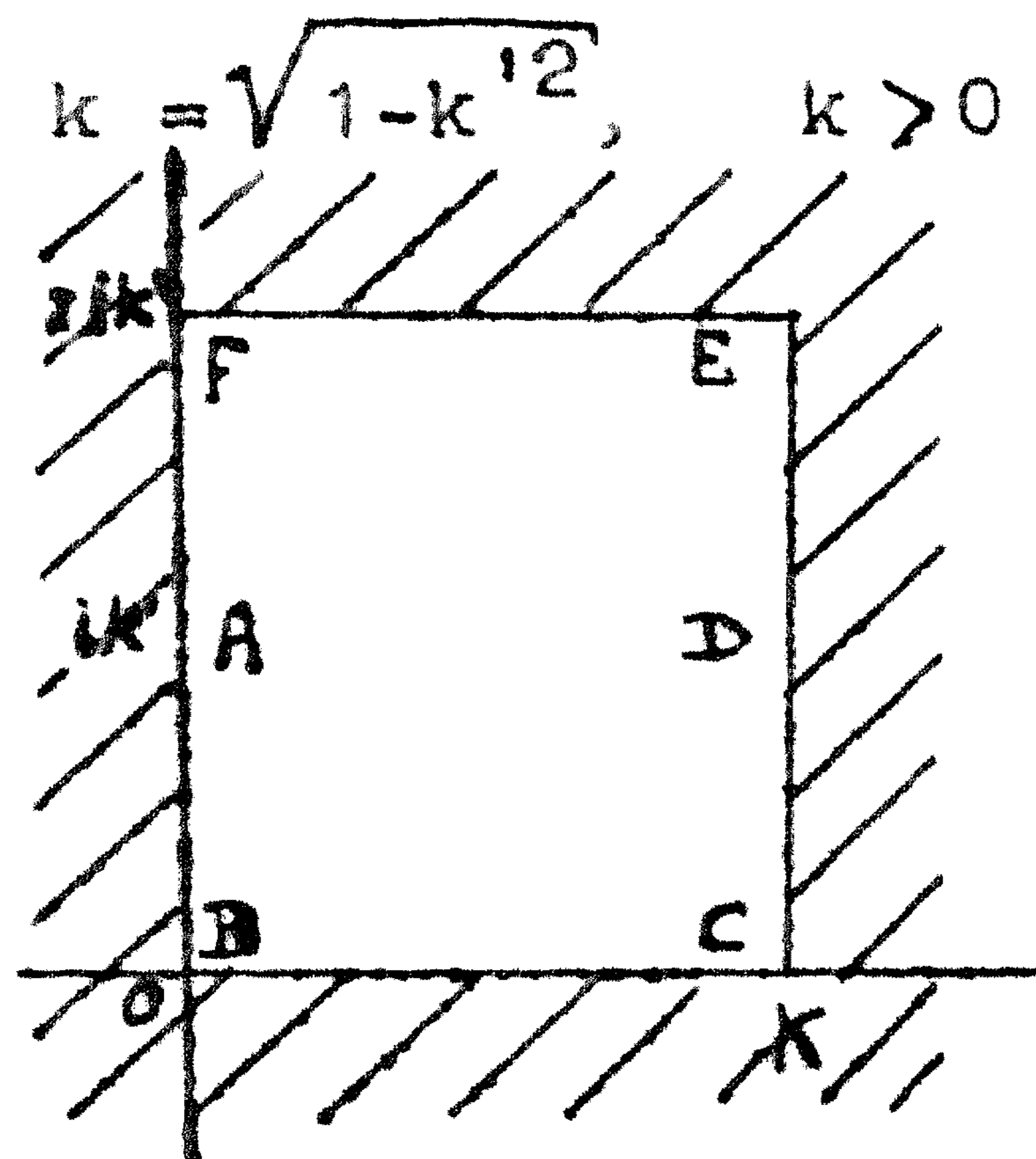


fig.3 t -vlak

figuur 3 is aangegeven. $K(k)$ is de volledige elliptische integraal van de eerste soort met modulus k . Noem voortaan $K(k) = K$; $K(k') = K'$; $\operatorname{dn}(t, k) = \operatorname{dn} t$ enz.

We hebben nu:

$$\sqrt{s^2 - 1} = \sqrt{\operatorname{dn}^2 t - 1} = \sqrt{-k^2 \operatorname{sn}^2 t} = + i k \operatorname{sn} t$$

($\operatorname{sn} t$ is negatief imaginair voor $t = i\tau$, $K' < \tau < 2K'$)

$$\sqrt{s^2 - k'^2} = \sqrt{\operatorname{dn}^2 t - k'^2} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t + k^2} = k \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 t} = -k \operatorname{cn} t$$

($\operatorname{cn} t$ is negatief reeel voor $t = i\tau$, $K' < \tau < 2K'$)

$$\frac{ds}{dt} = k^2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t$$

Dit levert met (1)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = - i C_1 k^2 \operatorname{sn}^2 t = i C_1 (\operatorname{dn}^2 t - 1) \quad (3)$$

Door integratie volgt hieruit

$$\begin{aligned} z &= i C_1 \int_0^t (\operatorname{dn}^2 \tau - 1) d\tau + C_2 = \\ &= i C_1 \operatorname{zn}(t, k) - \frac{K-E}{K} t + C_2 \end{aligned} \quad (4)$$

waarin $zn(t, k)$ de zeta-functie van Jacobi is, gedefinieerd door

$$zn(t, k) = \int_0^t dn^2(\tau, k) d\tau - \frac{E(k)}{K(k)} t$$

als $E(k)$ de volledige elliptische integraal van de tweede soort met modulus k is. (Vgl. Oberhettinger-Magnus, p.24 en de appendix). We schrijven voortaan

$$E(k) = E, E(k') = E'; zn(t, k) = zn t.$$

De constanten C_1 , C_2 en k moeten nu bepaald worden met behulp van de correspondenties tussen de verschillende punten uit het z - en t -vlak - vgl. de onderstaande tabel.

	z	s	t
A	∞	∞	iK'
B	-1	-1	0
C	$-1-ia$	$-k'$	K
D	$-ia$	0	$K+iK'$
E	$1-ia$	k'	$K+2iK'$
F	1	1	$2iK'$

3. Bepaling van de constanten C_1 , C_2 en de modulus k .

a) In B is $t = 0$ en daar $zn 0 = 0$, is $z(B) = C_2 = -1$, dus $C_2 = -1$.

b) In C is $t = K$, $zn K = 0$, dus $z(C) = -1 C_1(K-E)-1 = -1-ia$,
dus $C_1 = \frac{a}{K-E}$.

c) In D is $t = K + iK'$; $zn(K+iK') = -\frac{\pi i}{2K}$, dus

$$z(D) = \frac{ia}{K-E} \left\{ -\frac{\pi i}{2K} - \frac{K-E}{K} (K+iK') \right\} - 1 = -ia.$$

Na enige herleiding geeft dit de vergelijking

$$a \left\{ \frac{\pi}{2} + K'(K-E) \right\} = K(K-E)$$

die met behulp van de betrekking van Legendre ($KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$) herleid kan worden tot

$$\frac{K-E}{E'} = a \quad (5)$$

Als k van 0 naar 1 loopt, dan loopt K van $\frac{\pi}{2}$ naar ∞ , E van $\frac{\pi}{2}$ naar 1, dus E' van 1 naar $\frac{\pi}{2}$ en de breuk in (5) van 0 naar ∞ . En wel, zoals bij nader onderzoek blijkt, ook monotoon.

Bij iedere positieve waarde van a is er dus een en slechts een waarde van k , gelegen tussen 0 en 1, waarvoor (5) geldt. De transformatie is nu dus eenduidig bepaald en luidt:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{E'} \left\{ \operatorname{zn} t - \frac{K-E}{K} t \right\} - 1 \\ s &= - \operatorname{dn} t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

waarbij de modulus k van de elliptische integralen en de functies van Jacobi bepaald wordt door (5).

N.B. Daar $\operatorname{dn}(iK' + \tau) = -i \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau}$

$$\operatorname{zn}(iK' + \tau) = \operatorname{zn} \tau + \frac{\operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau}{\operatorname{sn} \tau} - \frac{\pi i}{2K}, \text{ blijkt na enige}$$

herleiding

$$\left. \begin{aligned} \tau(iK' + \tau) &= \frac{1}{E'} \left\{ \operatorname{zn} \tau + \frac{\operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau}{\operatorname{sn} \tau} - \frac{K-E}{K} \tau \right\} \\ s(iK' + \tau) &= i \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Het lijnstuk AD uit het t -vlak ($t = iK' + \tau$, $0 \leq \tau \leq K$) correspondeert dus met de imaginaire as van zowel het s -vlak als van het z -vlak, die dus op elkaar worden afgebeeld. Volgens het spiegeling-principe worden dan ook punten in het z -vlak, die elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de imaginaire as, afgebeeld in punten van het s -vlak, die ook elkaar spiegelbeeld t.o.v. de imaginaire as zijn.

4. Het gedrag van de afbeelding op ∞ .

Uit de formules (7) volgt, dat voor kleine τ geldt (m.b.v. de ontwikkelingen voor $\operatorname{sn} \tau$, enz. zie Oberhettinger-Magnus en de appendix)

$$\begin{aligned} z(iK' + \tau) &= \frac{1}{E'} \left\{ \frac{1}{\tau} - \frac{1+k^2}{3} \tau + \dots \right\} \\ s(iK' + \tau) &= i \left\{ \frac{1}{\tau} - \frac{2-k^2}{6} \tau + \dots \right\} \end{aligned}$$

waaruit volgt, dat voor grote z geldt

$$s = E' \left\{ z - \frac{k^2}{2E'^2} \frac{1}{z} + \dots \right\} \quad (8)$$

De afbeelding is op ∞ dus inderdaad conform en

$$\left(\frac{ds}{dz} \right)_{z=\infty} = E' \quad (9)$$

(zoals ook direct uit (1) en de waarde van C_1 volgt).

5. Randwaarde-probleem voor het gebied G .

Met behulp van de gegeven afbeelding van G op het halfvlak $\operatorname{Im} s > 0$ kan het volgende probleem opgelost worden:

Gegeven een continue reële functie $\varphi(z)$ op de rand Γ van G , die voor $|z| \rightarrow \infty$ (z op Γ) niet sterker aangroeit dan $|z|^{1-\delta}$, $\delta > 0$.

Gevraagd een complexe functie $\Omega = \Omega(z)$ die in G analytisch is en waarvoor $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} \Omega(z) = \varphi(z_0)$, als z_0 een punt van Γ is.

Voor de oplossing hiervan gaan we uit van de formule van Poisson-Schwarz (zie bv. Weber (4), pag. 365), die het analoge probleem oplost voor het geval dat het beschouwde gebied een halfvlak is:

$$\text{de functie } \overline{\Omega}(s) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\sigma s}{(\sigma-s)(1+\sigma^2)} \overline{\varphi}(\sigma) d\sigma \quad (10)$$

is een in het bovenste halfvlak analytische functie van s met $\lim_{s \rightarrow s_0} \operatorname{Re} \overline{\Omega}(s) = \overline{\varphi}(s)$, als s_0 op de reële as ligt, mits $\overline{\varphi}(s)$ continu is en voor $|s| \rightarrow \infty$ niet sterker aangroeit dan $|s|^{1-\delta}$, $\delta > 0$.

Door de substituties

$$s = -\operatorname{dn} t ; \quad \sigma = -\operatorname{dn} \tau$$

$$\overline{\Omega}(-\operatorname{dn} t) = \overline{\overline{\Omega}}(t) ; \quad \overline{\varphi}(-\operatorname{dn} t) = \overline{\overline{\varphi}}(t)$$

vinden we:

$$\text{de functie } \overline{\overline{\Omega}}(t) = \frac{k^2}{\pi i} \int_{\overline{\Gamma}} \frac{1+\operatorname{dn} t \operatorname{dn} \tau}{(\operatorname{dn} t - \operatorname{dn} \tau)(1+\operatorname{dn}^2 \tau)} \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \overline{\overline{\varphi}}(\tau) d\tau \quad (11)$$

waarbij geïntegreerd wordt langs de rand $\overline{\Gamma}$ van het gebied $\overline{G}$ uit het t -vlak dat in fig. 3 is aangegeven, is een in $\overline{G}$ analytische functie met $\lim_{t \rightarrow t_0} \operatorname{Re} \overline{\overline{\Omega}}(t) = \overline{\overline{\varphi}}(t_0)$, als t_0 op $\overline{\Gamma}_0$ ligt, mits $\overline{\overline{\varphi}}(t)$ in de omgeving van $t = iK'$ niet sterker aangroeit dan

$|t - iK'|^{-1+\delta}$, $\delta > 0$ ($\operatorname{dn} t$, $\operatorname{sn} t$ en $\operatorname{cn} t$ hebben in $t = iK'$ polen van de orde 1).

$$\text{Nu wordt door } z = \frac{1}{E'} \left\{ \operatorname{zn} t - \frac{K-E}{K} t \right\}^{-1} \quad (6a)$$

$\overline{G}$ afgebeeld op ons gebied G uit het z -vlak. Als op de rand Γ van G randwaarden $\varphi(z)$ (reel) gegeven zijn, dan corresponderen hiermee randwaarden

$$\overline{\overline{\varphi}}(t) = \varphi\left(\frac{1}{E'} \left\{ \operatorname{zn} t - \frac{K-E}{K} t \right\}^{-1}\right) \quad (12)$$

op $\overline{\Gamma}$. Vullen we nu deze functie $\overline{\overline{\varphi}}(t)$ in (11) in, dan wordt door (11), (6a) en

$$\Omega = \overline{\overline{\Omega}}(t)$$

een functie $\Omega = \Omega(z)$ gedefinieerd die het gestelde randvoorwaardeprobleem voor het gebied G oplost, mits $\varphi(z)$ continu is en voor grote $|z|$ (langs Γ) niet sterker aangroeit dan $|z|^{1-\delta}$, $\delta > 0$ (voor t bij iK' is immers $z(t) = \frac{1}{E'} \cdot \frac{1}{t - iK'} + \dots$).

6. Ontaarding voor grote a.

We beschouwen nog eens de vergelijking (5)

$$\frac{K-E}{E'} = a$$

waaruit de modulus van de functies van Jacobi bepaald moet worden. Als k dicht bij 1 ligt (dus k' dicht bij 0) dan gelden de volgende ontwikkelingen:

$$K(k) = \left\{ 1 + O(k'^2) \right\} \ln\left(\frac{4}{k'}\right) + O(k'^2)$$

$$E(k) = 1 + O(k'^2) \ln\left(\frac{4}{k'}\right) + O(k'^2)$$

$$E(k') = \frac{\pi}{2} + O(k'^2)$$

Hiermee volgt uit (5)

$$\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) \approx a$$

$$\text{of} \quad k' \approx 4 e^{-\left(\frac{\pi}{2} a + 1\right)} \quad (13)$$

Als $a = 3,18$ volgt hieruit $k' \approx 10^{-2}$, dus $k \approx 1 - 0,5 \cdot 10^{-4}$.

Voor betrekkelijk kleine a zijn de functies van Jacobi dus reeds vrijwel geheel ontaard. Het is dus zinvol, na te gaan hoe de afbeelding wordt voor $k = 1$ (dus $a = \infty$).

Voor $k = 1$ hebben we

$$\operatorname{sn} t = \operatorname{zn} t = \operatorname{tgh} t$$

$$\operatorname{cn} t = \operatorname{dn} t = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$$

$$K = \infty, E = 1, K' = E' = \frac{\pi}{2}.$$

Dit levert in de formules (6)

$$z = \frac{2i}{\pi} \left\{ \operatorname{tgh} t - t \right\} - 1$$

$$s = - \frac{1}{\operatorname{ch} t}$$

(14)

De hierdoor gegeven afbeeldingen zijn uit de figuren 4, 5 en 6 af te lezen:

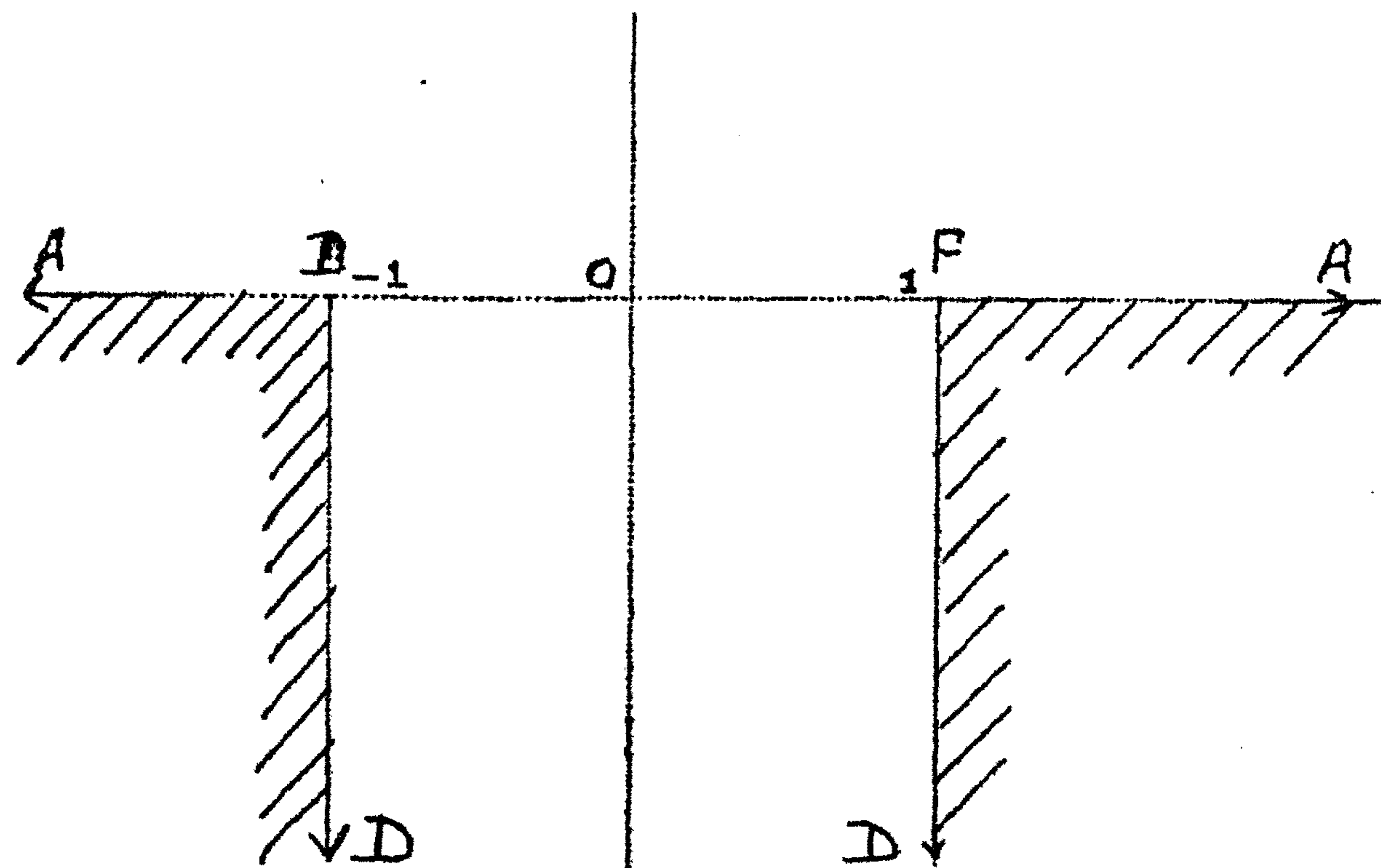


fig. 4 z-vlak voor $k=1$

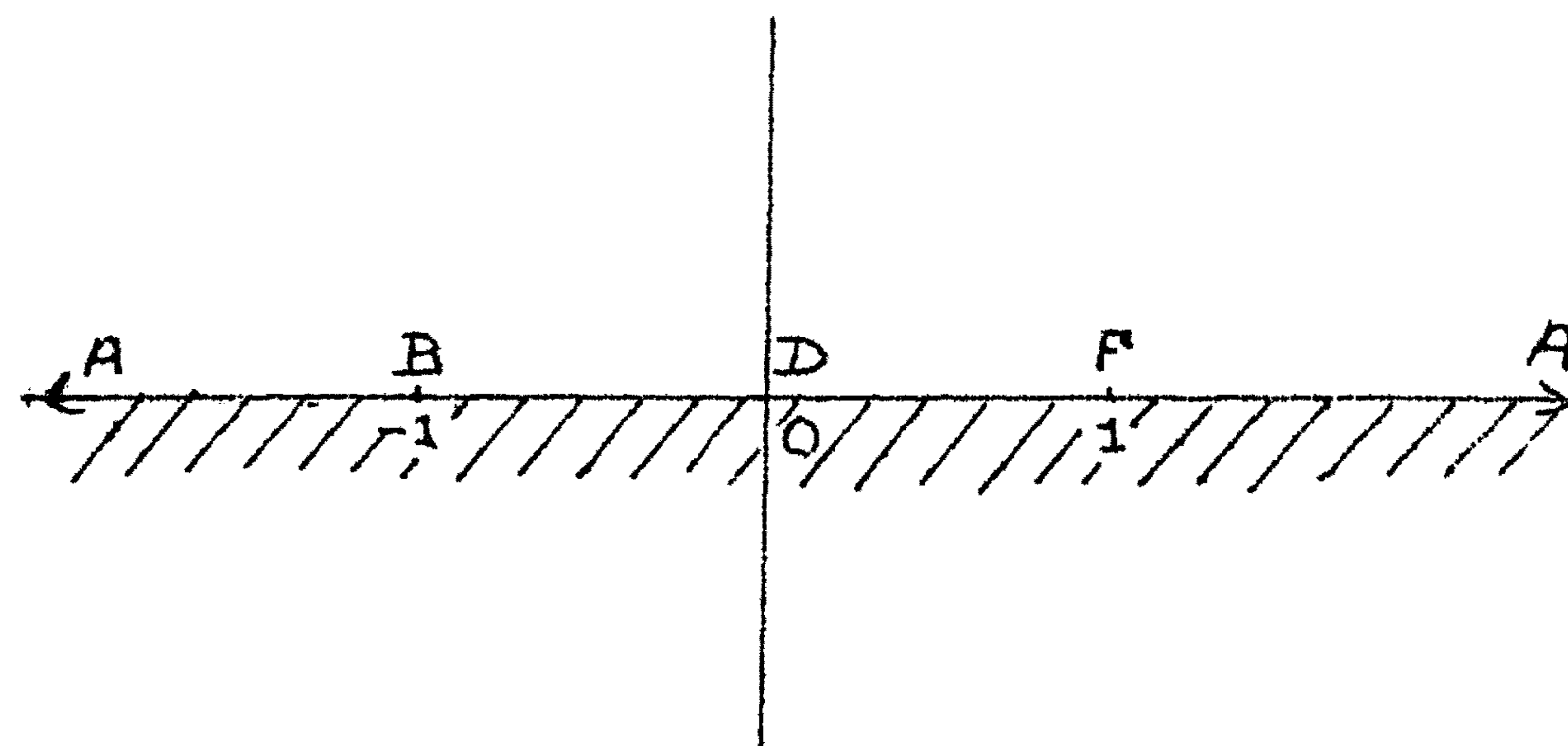


fig. 5 s-vlak voor $k=1$

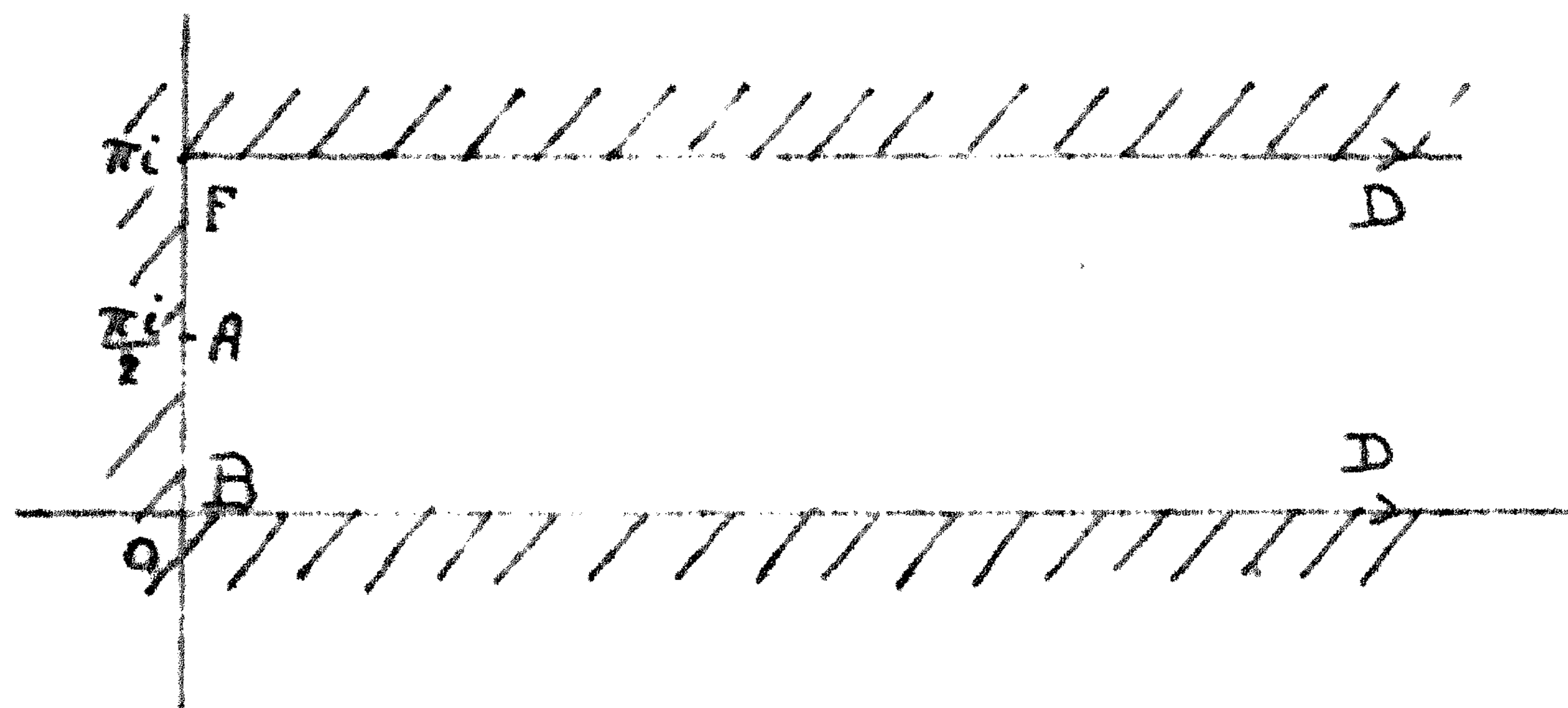


fig.6 t-vlak voor k=1

Uit de formules (14) kunnen we desgewenst t elimineren, hetgeen levert

$$z = \frac{2i}{\pi} \left[\ln \frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{s} + \sqrt{1-s^2} \right] + 1 \quad (15)$$

wanneer we van de functie $\sqrt{1-s^2}$ die tak nemen, die positief reëel is voor $-1 < s < 1$ en voor de logaritme de hoofdlogaritme.

Een enigszins ander geval krijgen we, wanneer we vóór de ontleding het z -vlak over $i a$ verschuiven, het t -vlak over $-K$ verschuiven en het s -vlak met $\frac{1}{k'}$ t.o.v. 0 vermenigvuldigen.

We hebben dan met (6) en (5)

$$\bar{t} = t - K$$

$$\begin{aligned} \bar{z} = z + ia &= \frac{1}{E'} \left\{ \operatorname{zn}(\bar{t} + K) - \frac{K-E}{K} (\bar{t} + K) \right\} - 1 + 1 \frac{K-E}{E'} = \\ &= \frac{1}{E'} \left\{ \operatorname{zn} \bar{t} - k^2 \frac{\operatorname{sn} \bar{t} \operatorname{cn} \bar{t}}{\operatorname{dn} \bar{t}} - \frac{K-E}{K} \bar{t} \right\} - 1. \end{aligned}$$

$$\bar{s} = \frac{1}{k'} s = - \frac{1}{k'} \operatorname{dn}(\bar{t} + K) = - \frac{1}{\operatorname{dn} \bar{t}}.$$

Laten we nu k naar 1 gaan, dan krijgen we

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{2i}{\pi} \left\{ \operatorname{tgh} \bar{t} - \operatorname{tgh} \bar{t} - \bar{t} \right\} - 1 = - \frac{2i}{\pi} \bar{t} - 1 \\ \bar{s} &= - \operatorname{ch} \bar{t} \end{aligned} \quad (16)$$

of, na eliminatie van $\bar{t}$

$$\bar{s} = \sin \frac{\pi}{2} \bar{z} \quad (17)$$

Hierbij behoren de onderstaande figuren

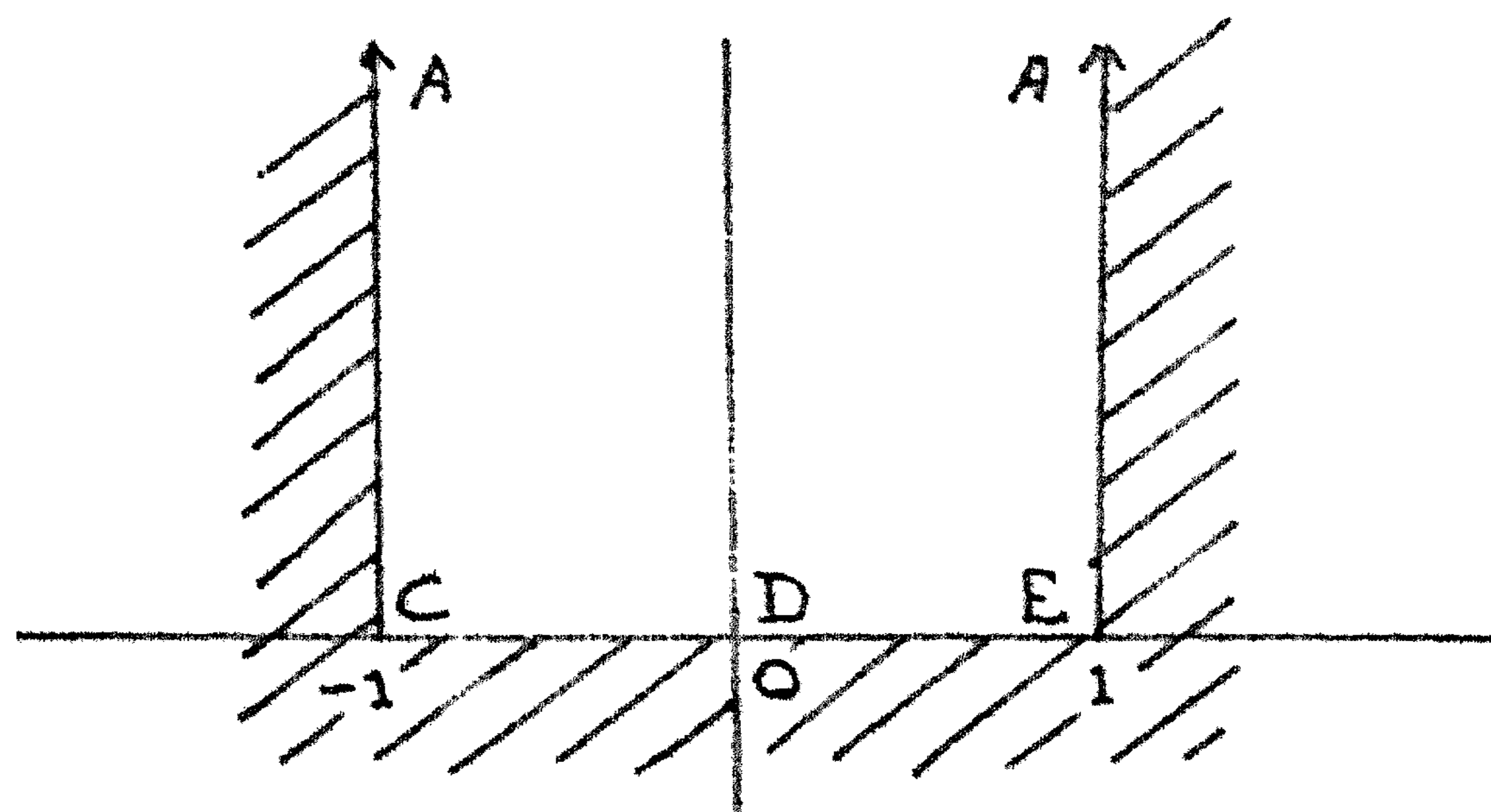


fig.7 $\bar{z}$ -vlak voor k=1

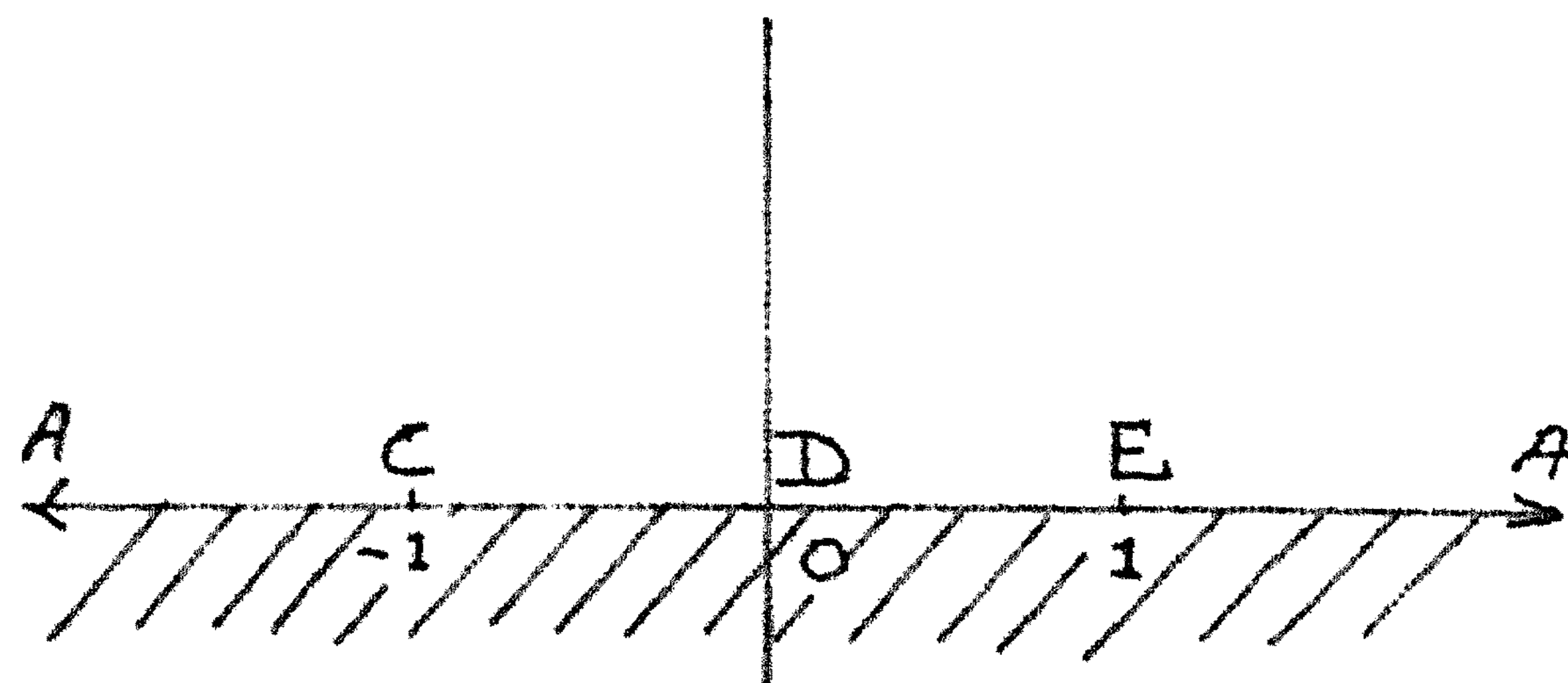


fig.8 $\bar{s}$ -vlak voor k=1.

De figuren 1, 4 en 7 laten duidelijk het verschil tussen de beide ontaardingsvormen zien. Indien k nadert tot 1, dan worden de formules (14) en (16) natuurlijk niet uniform in t geapproximeerd. De figuren 4 en 7 doen nu vermoeden, dat in de omgeving van $z = 0$ de eerste ontaardingsvorm een goed beeld geeft, terwijl in de omgeving van $z = -ia$ ($\bar{z} = 0$) de tweede vorm veel beter is.

Literatuur:

- (1) F.W. Carter, The magnetic field of the dynamo-electric machine, Journ.Inst.El.Eng. 64, 1115, 1926.
- (2) H. Kober, A dictionary of conformal representations, New York 1952 (Dover).
- (3) F. Oberhettinger und W. Magnus, Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Berlin 1949.
- (4) E. Weber, Electromagnetic fields, Vol.I, Mapping of fields, New York 1950.

Appendix. Enige formules voor de functie $zn(t, k)$.

We geven in deze appendix zonder bewijs enkele formules voor de zeta-functie van Jacobi die in de tekst gebruikt zijn en in de literatuur niet systematisch bij elkaar staan.

$$zn(-t) = -zn\ t$$

$$zn(2K+t) = zn\ t.$$

$$zn(2iK'+t) = zn\ t - \frac{\pi i}{K}.$$

$$zn\ 0 = 0$$

$$zn\ K = 0$$

$$zn(K+iK') = -\frac{\pi i}{2K}$$

in iK' heeft $zn\ t$ een pool met residu 1.

$$zn(s+t) = zn\ s + zn\ t - k^2 \operatorname{sn} s \operatorname{sn} t \operatorname{sn}(s+t)$$

$$zn\ i\ t = i \left\{ -zn'\ t + \frac{\operatorname{sn}' v \operatorname{dn}' v}{\operatorname{cn}' v} - \frac{\pi v}{2KK'} \right\}$$

(waarin met $zn'\ t$ bedoeld is $zn(t, k')$ enz.)

$$zn(K+t) = zn\ t - k^2 \frac{\operatorname{sn}\ t \operatorname{cn}\ t}{\operatorname{dn}\ t}$$

$$zn(iK'+t) = zn\ t + \frac{\operatorname{cn}\ t \operatorname{dn}\ t}{\operatorname{sn}\ t} - \frac{\pi i}{2K}$$

$$zn(K+iK'+t) = zn\ t - \frac{\operatorname{sn}\ t \operatorname{dn}\ t}{\operatorname{cn}\ t} - \frac{\pi i}{2K}.$$

Ontwikkelingen:

$$zn\ t = \frac{K-E}{K} t - \frac{k^2}{3} t^3 + \dots$$

$$zn(K+t) = \left(\frac{K-E}{K} - k^2 \right) t + \frac{k^2(1-k^2)}{3} t^3 + \dots$$

$$zn(iK'+t) = \frac{1}{t} - \frac{\pi i}{2K} + \left(\frac{K-E}{K} - \frac{1+k^2}{3} \right) t + \dots$$

$$zn(K+iK'+t) = -\frac{\pi i}{2K} - \frac{E}{K} t + \dots$$

Ontaarding:

$$zn(t, 0) = 0$$

$$zn(t, 1) = \operatorname{tgh}\ t.$$