

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

DE INVLOED VAN STATIONAIRE WINDVELDEN OP EEN ZEE

VAN CONSTATE DIEPTE

G.W. Veltkamp.

Rapport TW 25.

November

1953.

De invloed van stationaire windvelden op een zee van constante diepte

1. Inleiding en overzicht.

In dit rapport¹⁾ zullen windeffect en driftstroming²⁾ ten gevolge van stationaire windvelden behandeld worden. We baseren ons daarbij op de door Schalkwijk [1] gegeven differentiaalvergelijkingen voor de stationaire stroming van een zee onder invloed van tangentiële windkrachten, zwaartekracht, Coriolis-kracht en inwendige wrijving. We zullen de door hem afgeleide vergelijkingen, die gebaseerd zijn op een vrij groot aantal aannamen en verwaarlozingen, hier zonder discussie als uitgangspunt nemen.

Verder zullen we steeds aannemen, dat niet de windsterkte, doch de tangentiële kracht $\vec{W}$, die de wind op het zee-oppervlak uitoefent, gegeven is als functie van de plaats. We kunnen dit vectorveld, dat we in het volgende - enigszins onjuist - steeds het windveld zullen noemen, steeds beschrijven met behulp van twee scalaire velden, de windpotentialen.

Indien we ons beperken tot het geval dat de zee in "rusttoestand overal dezelfde diepte heeft"³⁾, dan is het mogelijk een complexe analytische functie - die we de complexe potentiaal zullen noemen - te definiëren; met behulp van deze complexe potentiaal en de windpotentialen zijn het windeffect en de stromingssnelheid direct te vinden (zie 2). Als de zee geheel of gedeeltelijk door kusten begrensd wordt, dan kunnen we randvoorwaarden en nevenvoorwaarden aangeven en in de meeste praktische voorkomende gevallen is de oplossing hierdoor eenduidig bepaald (3).

In 4. worden enkele speciale "windvelden" besproken. In het algemeen is het veld $\vec{W}$ te splitsen in een rotatie-vrij en een divergentie-vrij deel, die we, dank zij de lineariteit van alle vergelijkingen, afzonderlijk kunnen behandelen. Het blijkt dat bij een rotatievrij windveld de complexe potentiaal constant is, zodat de oplossing van het probleem hier geen moeilijkheden levert. Speciale

1) Dit onderzoek werd verricht onder leiding van Prof.Dr D. van Dantzig.

2) Onder windeffect resp. driftstroming zullen we verstaan de verhoging van de zeespiegel, resp. de stroming, die het gevolg is van windkrachten (ter plaatse of elders). We maken ons dus los van andere effecten, zoals die van getijden, verschillen in temperatuur of soortelijk gewicht e.d..

3) In een volgend rapport zal het geval dat de zee bestaat uit meerdere delen, die ieder een constante (verschillende) diepte hebben, worden behandeld.

gevallen van rotatievrije windvelden zijn het homogene windveld ($\vec{W} = \text{constant}$) en de zg. singuliere windvelden, waarbij de windpotentialen een logaritmische singulariteit hebben. (Het windveld is circulair, d.w.z. rotatie-symmetrisch om het singuliere punt en de sterkte is omgekeerd evenredig met de afstand tot dat punt). Van de divergentievrije velden worden speciaal behandeld de circulaire windvelden ("circulaire depressies") waarbij de windkracht $\vec{W}$ langs cirkels om een vast punt (de "kern" van de depressie) een constante absolute waarde W heeft (die op een gegeven wijze van de afstand tot de kern afhangt) en tangentieel gericht is.

In 5. behandelen we het - zeer eenvoudige - geval van een homogeen windveld boven een begrensde zee.

Als de zee niet begrensd is, treden enkele bijzonderheden op. Deze worden in 6. en 7. behandeld voor het geval dat de zee een half vlak, begrensd door een rechte lijn, beslaat. In 6. beschouwen we enkele circulaire windvelden, waarbij speciaal het stromingsbeeld en de niveaulijnen onze aandacht hebben. Bij het homogene windveld blijkt een extra-onderstelling nodig te zijn om de stroming en het windeffect eenduidig te bepalen (7).

Dank zij het feit, dat de complexe potentiaal een analytische functie is, bezitten we een zeer belangrijke steun in de conforme afbeelding (als de diepte van de zee niet meer constant is, dan missen we dit hulpmiddel). Voor een singulier windveld boven een willekeurig enkelvoudig samenhangend gebied, kan de complexe potentiaal direct opgeschreven worden (8), voor een willekeurig windveld kunnen we met behulp van de integraalformule van Poisson de complexe potentiaal steeds in de vorm van een integraal schrijven (9); in eenvoudige gevallen kan deze natuurlijk berekend worden.

Tenslotte beschouwen we in 10. en 11. de door Schalkwijk gegeven voorstelling van de Noordzee als rechthoekige baai van een oceaan die een halfvlak beslaat. Met behulp van de conforme afbeelding van dit gebied op een halfvlak kunnen we het effect van een homogeen windveld boven dit gebied exact berekenen. Het blijkt dat Schalkwijks voornaamste resultaat (het windeffect in "Hoek van Holland") bevestigd wordt. Doch zijn aanname dat het windeffect in de eindpunten van de grenslijn tussen oceaan en baai nul zou zijn, is zeer aanvechtbaar.

Deze studie is gegroeid uit de wens om Schalkwijks resultaten voor het hierboven genoemde model van Noordzee en Atlantische Oceaan op een meer exacte wijze af te leiden.

Daarnaast bleek uitbreiding en vereenvoudiging van de door Schalkwijk voor een rotatievrij windveld in principe aangegeven berekeningsmethode mogelijk door gebruik te maken van de bovengenoemde (bekende) splitsing van een vector-veld in een divergentie- en een rotatie-vrij deel en de daarop gebaseerde beschrijving van

zulk een windveld met behulp van twee wind-potentialen ⁴⁾.

Het resultaat is, dat voor een zee van willekeurige vorm en constante diepte de stationaire toestand, die bij een willekeurig stationair windveld behoort, in principe geheel berekend kan worden. In deze uitspraak zijn drie zeer ernstige beperkingen besloten, die, behoudens de laatste, zeer wezenlijk schijnen en geen van allen eenvoudig opgeheven kunnen worden. Waar echter in het hier bereikte mogelijk ook al enkele bruikbare resultaten schuilen, hebben wij gemeend, deze reeds thans in een rapport te moeten samenvatten in de hoop, dat door discussie hiervan een uitzicht op verdere ontwikkelingen geopend kan worden.

Veel van het hier volgende is ontstaan en gerijpt tijdens de bijna dagelijkse besprekingen met mijn collega Drs T.C.Braakman. De vervaardiging van de bij 6. behorende platen is geschied door Mej. G. Botterweg van de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

2. Invoering van de potentialen.

We nemen aan, dat het zee-oppervlak in de ongestoorde toestand een plat vlak is - het x,y -vlak (van de kromming van de aarde zien we af). Daar de optredende grootheden dan functies zijn van twee variabelen (scalaire velden en vector-velden, waarbij de vectoren in het x,y -vlak liggen) zullen we in het volgende enig gebruik maken van vector-analyse in twee dimensies. Hiervoor zijn verschillende formalismen mogelijk (cf.Brand, [2], p.421 e.v.). Om echter zo dicht mogelijk bij het algemeen bekende formalisme van de drie-dimensionale vector-analyse aan te sluiten, zullen we ons x,y -vlak uitbreiden tot een drie-dimensionale x,y,z -ruimte, zodanig dat x , y en z -as een positief georiënteerd assenstelsel vormen. De eenheidsvector langs de z -as noemen we $\vec{k}$.

Beschouwen we nu onze twee-dimensionale scalar- en vectorvelden formeel als drie-dimensionaal (de velden hangen dan niet van z af en de derde component van de vector-velden is identiek nul), dan kunnen daarop de normale operatoren gradient, divergentie en rotatie toegepast worden.

Twee bijzonderheden kunnen we hierbij opmaken. De rotatie van een vector-veld $\vec{w} = (w_1(x,y), w_2(x,y))$ is

$$\text{rot } \vec{w} = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Dit is een (axiale) vector die slechts een component heeft (loodrecht op het x,y -vlak), dus in wezen een scalar. Van betekenis is dan slechts de operatie $\vec{k} \cdot \text{rot}$ (met $\cdot$ wordt het scalaire product

4) Op deze mogelijkheid werd onze aandacht gevestigd door Prof.Dr D. van Dantzig.

aangeduid) die levert

$$\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{w} = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y}.$$

Omgekeerd is het zinvol, bij een scalar-veld $\varphi(x,y)$ de rotatie van het (axiale) vector-veld (met slechts een component) $\vec{k}\varphi(x,y)$ te beschouwen. We vinden hiervoor

$$\text{rot } \vec{k}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right),$$

dus een vector in het x,y-vlak.

Voor verdere rekenregels en verbanden tussen de verschillende operaties verwijzen we naar appendix 1.

Verder zullen we van het reële x,y-vlak vaak overgaan naar het complexe $z = x+iy$ -vlak. Ook zullen we voor een reële (of complexe) functie F van de twee variabelen x en y soms schrijven $F(z)$, waarmee we bedoelen $F(\text{Re } z, \text{Im } z)$.

Het gebied van het z-vlak (of x,y-vlak) dat door de zee ingenomen wordt, zullen we vaak G noemen, de rand (kust) van G noemen we Γ .

In het algemeen zullen we onder een gebied steeds verstaan een, al dan niet begrensde, open, samenhangende puntverzameling, waarvan de rand bestaat uit een eindig aantal continu differentieerbare krommen. Deze voorwaarden leggen we ook aan G op.

Zij $\vec{W}(x,y)$ de schuifspanning, die de wind in het punt (x,y) langs het zee-oppervlak uitoefent, $\Delta(x,y)$ de verhoging van de zeespiegel boven de ongestoorde toestand tengevolge van deze schuifspanningen (het windeffect) en $\vec{S}(x,y)$ de integraal van de door deze schuifspanningen veroorzaakte stroomsnelheid in de zee, genomen langs een verticale lijn door het punt (x,y) van bodem tot oppervlak, dus de "totale stroom in (x,y)".⁴⁾

Zij verder

ω = hoeksnelheid van de aarde,

φ = gemiddelde geografische breedte van de beschouwde zee,

$l = 2 \omega \sin \varphi$,

ρ = dichtheid van het zee-water,

μ = virtuele viscositeitscoëfficiënt van het zeewater,

$D = \pi \sqrt{\frac{2\mu}{\rho l}}$ (de "Reibungstiefe" van Ekman),

H = diepte van de zee in ongestoorde toestand,

$\lambda = \frac{D}{4\pi H}$ (door Schalkwijk $\frac{1}{4h}$ genoemd), (2.1)

g = zwaartekrachtsversnelling.

4) $\vec{W}$ en $\vec{S}$ zien af van andere oorzaken, zoals drukverschillen in de lucht, verschillen in temperatuur en dichtheid van het zeewater, die veranderingen van het zee-niveau en stromingen tengevolge kunnen hebben.

Dan luiden de vergelijkingen (11) en (12) van Schalkwijk voor de stationaire stroming van een zee onder invloed van wind-schuifspanningen, zwaartekracht, Coriolis-kracht en inwendige wrijving in de hierboven aangegeven vector-notatie (met $\times$ wordt het vector-product aangeduid)

$$\vec{k} \times 1 \vec{S} + \lambda 1 \vec{S} = \frac{1}{\rho} \vec{p} - g H \text{ grad } \zeta, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \vec{S} = 0. \quad (2.3)$$

Om deze vergelijkingen in prettiger vorm te brengen, maken we gebruik van drie lemma's, waarin welbekende stellingen in een voor ons zo geschikt mogelijke formulering gegeven worden.

Lemma 1. Als voor een continu differentieerbaar vector-veld $\vec{u}(x,y)$ geldt $\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u} = 0$,

dan is er een scalar-veld $\psi(x,y)$, zodanig dat

$$\vec{u} = - \text{grad } \psi,$$

Als voor een continu differentieerbaar vector-veld $\vec{v}(x,y)$ geldt

$$\text{div } \vec{v} = 0,$$

dan is er een scalar-veld $\varphi(x,y)$, zodanig dat

$$\vec{v} = - \text{rot } \vec{k} \varphi.$$

φ en ψ zijn elk op een additieve constante na eenduidig bepaald en in een enkelvoudig samenhangend gebied eenwaardig.

Lemma 2. Als voor continu differentieerbare scalar-velden $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ in een zeker gebied G van het x,y -vlak geldt

$$\text{rot } \vec{k} \varphi + \text{grad } \psi = 0,$$

dan is $\varphi + i\psi$ een in G complexe analytische functie van de complexe variabele $z = x + iy$. Ook het omgekeerde van deze stelling geldt.

Lemma 3. Bij een willekeurig continu differentieerbaar vector-veld $\vec{u}(x,y)$ zijn scalar-velden $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ te vinden, zodanig dat

$$\vec{u} = - \text{rot } \vec{k} \varphi - \text{grad } \psi.$$

De complexe functie $\varphi + i\psi$ van x en y is hierbij op een additieve analytische functie van $z = x + iy$ na eenduidig bepaald en kan in een enkelvoudig samenhangend gebied eenwaardig gekozen worden.

Lemma 1 zegt, dat een rotatie-vrij vector-veld voorgesteld kan worden als gradient van een scalaire potentiaal en een divergentie-vrij vector-veld als rotatie van een vector-potentiaal. Omdat onze vector-velden 2-dimensionaal zijn, kunnen we voor de vector-potentiaal een vector-veld nemen, dat overal evenwijdig is met de z -as ($\vec{k} \varphi$) en dus in wezen een scalar-veld is.

Lemma 2 is een "vertaling" van de vergelijkingen van Cauchy-Riemann

Lemma 3 is het twee-dimensionale analogon van de stelling, dat ieder vector-veld te splitsen is in een rotatie-vrij en een divergentie-vrij bestanddeel (en dus voortgebracht wordt door een scalaire en een vector-potentiaal). De bewering voor de eenduidigheid van $\varphi + i\psi$ volgt direct uit lemma 2. Voor een eenvoudige methode om bij een gegeven veld $\vec{u}$ φ en ψ te bepalen, verwijzen we naar Brand ([2], p.424).

In appendix 2 zijn de bewijzen van de lemma's kort aangegeven.

We keren nu terug tot de vergelijkingen (2.2) en (2.3). Als $\vec{w}$ een continu differentieerbaar vector-veld is, hetgeen we aannemen, dan kunnen we op grond van lemma 3 schrijven

$$\vec{w} = - \frac{eSD}{4\pi} (\text{rot } \vec{k} U + \text{grad } V) \quad (2.4)$$

De scalaire velden $U(x,y)$ en $V(x,y)$ zullen we de windpotentialen noemen.

In het volgende zullen we vaak aannemen, dat U en V gegeven zijn. Deze grootheden "brengen het windkrachtenveld voort". Uit (2.3) en lemma 1 volgt verder dat er (mits $\vec{S}$ continu differentieerbaar is, wat we aannemen) een functie $\Theta(x,y)$ is, zodanig dat

$$1 \vec{S} = - \frac{SD}{4\pi} \text{rot } \vec{k} \Theta. \quad (2.5)$$

Θ noemen we - om redenen die nog zullen blijken - de stroomfunctie.

Vullen we (2.4) en (2.5) in (2.2) in, dan volgt na deling door $-\frac{SD}{4\pi}$ en gebruikmaking van (2.1)

$$\vec{k} \times \text{rot } \vec{k} \Theta + \lambda \text{rot } \vec{k} \Theta = \text{rot } \vec{k} U + \text{grad } V + \frac{1}{\lambda} \text{grad } \zeta.$$

Nemen we aan, dat H en D (en dus λ) constant zijn, dan volgt hieruit (daar $\vec{k} \times \text{rot } \vec{k} \Theta = \text{grad } \Theta$)

$$\text{rot } \vec{k} (\lambda \Theta - U) + \text{grad } (\Theta - V - \frac{1}{\lambda} \zeta) = 0. \quad (2.6)$$

Uit lemma 2 volgt nu:

er is een complexe analytische functie (die we de complexe potentiaal noemen)

$$\Omega(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y),$$

van $z = x + iy$, waarvoor geldt

$$\lambda \Theta - U = \Phi, \quad \Theta - V - \frac{1}{\lambda} \zeta = \Psi.$$

Of:

$$\Theta = \frac{1}{\lambda} (\Phi + U) = \frac{1}{\lambda} \text{Re}(\Omega + U + iV), \quad (2.7)$$

$$\zeta = \Phi + U - \lambda(\Psi + V) = \text{Re}(1 + i\lambda)(\Omega + U + iV). \quad (2.8)$$

Hieruit blijkt dat de "fysische grootheden" $\vec{S}$ en ζ bekend zijn, zodra we de analytische functie $\Omega(z)$ bepaald hebben.

De factoren in de rechter leden van (2.4) en (2.5) zijn zo gekozen, dat Ω , Θ , U en V elk de dimensie van een lengte hebben. Verder zijn deze factoren onafhankelijk van H . Dit is voordelig wanneer we ons interesseren voor gebieden, waarin H in verschillende deelgebieden een verschillende (constante) waarde heeft (de grootheid D hangt in eerste benadering niet af van de diepte). Deze gevallen zullen behandeld worden in een afzonderlijk rapport.

We zullen in het volgende vaak de verschillende grootheden als dimensieloos beschouwen, d.w.z. rekenen met hun getalwaarden na aanname van zekere eenheden. We zullen bijvoorbeeld schrijven $\Omega = \ln z$, hoewel de grootheden Ω en z beide de dimensie van een lengte hebben.

3. Randvoorwaarden en eenduidigheid.

Door de eis dat $\Omega(z)$ een in G analytische functie is, is Ω nog niet bepaald. Hiervoor zijn randvoorwaarden nodig.

We beginnen met de vraag naar de stroomlijnen bij een gegeven functie $\Theta(x,y)$. Zij $\vec{s}$ een eenheidsvector rakend aan een stroomlijn (dus $\vec{s}$ is evenwijdig met $\vec{S}$), $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{S}$ de normaal hierop (de richting van $\vec{n}$ is zo gekozen dat bij een gesloten kromme $\vec{n}$ de inwendige normaal is als $\vec{S}$ de richting van de positieve omloopszin - tegen de wijzers van de klok in - heeft).

Uit $\vec{n} \cdot \vec{S} = 0$ volgt dan met (2.5)

$$0 = -\vec{n} \cdot (\text{rot } \vec{k} \Theta) = -(\vec{k} \times \vec{s}) \cdot \text{rot } \vec{k} \Theta = \vec{s} \cdot (\vec{k} \times \text{rot } \vec{k} \Theta) = \vec{s} \cdot \text{grad } \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial s}.$$

Langs de stroomlijnen geldt dus:

$$\Theta = \text{const. of: } \Phi + U = \text{const.} \quad (3.1)$$

Zij vervolgens L een willekeurige (continu differentieerbare) kromme die de punten A en B uit G verbindt. Zij s de booglengte langs deze kromme ($\vec{n}$ de normaal). Dan geldt voor de totale stroom $\sum_{AB}$ door deze kromme (zie fig. 3.1)

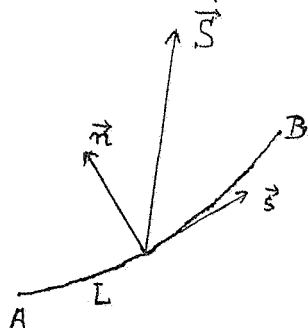


fig. 3.1

$$\begin{aligned} \sum_{AB} &= \int_A^B \vec{n} \cdot \vec{S} \, ds = \\ &= -\frac{gD}{4\pi I} \int_A^B \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{k} \Theta \, ds = \\ &= \frac{gD}{4\pi I} \int_A^B \frac{\partial \Theta}{\partial s} \, ds = \frac{gD}{4\pi I} (\Theta_B - \Theta_A). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dit resultaat hangt dus alleen af van de punten A en B , niet van de gekozen kromme.

Het verschil van de waarden van Θ , behorende bij twee verschillende stroomlijnen geeft dus (op een factor na) de tussen deze stroomlijnen door stromende vloeistof-hoeveelheid aan. Het is daarom, dat we Θ de stroomfunctie noemen.

We beschouwen ook de circulatie van de stroom langs een gegeven gesloten kromme K, zonder dubbelpunten, die een enkelvoudig samenhangend deelgebied G' van G omsluit; we definiëren deze door

$$C_S = \oint_K \vec{S} \cdot d\vec{s}.$$

Met behulp van het theorema van Stokes vinden we

$$\begin{aligned} C_S &= - \frac{gD}{4\pi l} \oint_K (\text{rot } \vec{k} \Theta) \cdot d\vec{s} = - \frac{gD}{4\pi l} \iint_{G'} \vec{k} \cdot \text{rot}(\text{rot } \vec{k} \Theta) d\Omega = \\ &= \frac{gD}{4\pi l} \iint_{G'} \Delta \Theta d\Omega = \frac{gD}{4\pi l \lambda} \iint_{G'} \Delta U d\Omega, \end{aligned}$$

daar Φ als reëel deel van een analytische functie, een potentiaal-functie is, d.w.z. $\Delta \Phi = 0$. Analoog geldt voor de circulatie van het windkrachtenveld langs dezelfde kromme

$$\begin{aligned} C_W &= \oint_K \vec{W} \cdot d\vec{s} = \iint_{G'} \vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W} d\Omega = - \frac{\rho g D}{4\pi} \iint_{G'} \vec{k} \cdot \text{rot}(\text{rot } \vec{k} U + \text{grad } V) d\Omega \\ &= \frac{\rho g D}{4\pi} \iint_{G'} \Delta U d\Omega. \end{aligned}$$

We hebben dus

$$C_W = \lambda \rho l C_S = \iint_G \vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W} d\Omega \quad (3.3)$$

Daar een kust (rand van het gebied G) zeker een stroomlijn is, geldt als randvoorwaarde langs een kust volgens (3.1)

$$\text{Re } \Omega = \Phi = -U + \text{const.} \quad (3.4)$$

We beschouwen nu achtereenvolgens

1. begrensde enkelvoudig samenhangende gebieden,
2. niet begrensde enkelvoudig samenhangende gebieden,
3. meervoudig samenhangende gebieden,

en zullen nagaan welke bijvoorwaarden er naast de randvoorwaarde (3.4) nodig zijn, opdat bij een gegeven windveld $\vec{W}$ de fysische functies Θ en ζ eenduidig bepaald zijn.

Ad 1. Bij een begrensd enkelvoudig samenhangend gebied bestaat de rand uit een enkele gesloten kromme Γ . Langs deze kromme geldt (3.4) met langs de hele kromme dezelfde constante, die we 0 kiezen.

Voor de functie $\Omega(z)$ geldt dan

$$\Omega(z) \text{ is analytisch in } G \text{ en continu in } G + \Gamma, \\ \operatorname{Re} \Omega(z) = -U \text{ langs } \Gamma.$$

We kunnen nu eenvoudig bewijzen dat $\Omega(z)$ hierdoor op een imaginaire constante na eenduidig bepaald is ⁵⁾. Immers, als Ω_1 en Ω_2 verschillende oplossingen zijn, dan is $\Omega_1 - \Omega_2$ een in G analytische functie, continu in $G + \Gamma$, waarvan het reële deel 0 is op Γ . Daar echter het reële deel van een in G analytische functie z'n minimum- en maximum-waarde op de rand van G aanneemt, moet $\operatorname{Re}(\Omega_1 - \Omega_2) = 0$ in G , dus $\Omega_1 - \Omega_2$ een imaginaire constante zijn.

De onbepaalde constante in $\Psi = \operatorname{Im} \Omega$ kunnen we bepalen door aan ζ de nevenvoorwaarde $\iint_G \zeta d\theta = 0$ (3.5) op te leggen.

Daar in de ongestoorde toestand $\zeta = 0$ is, drukt (3.5) uit, dat de totale hoeveelheid water in G constant is. Op grond van (2.8) is hierdoor de onbepaalde imaginaire constante in $\Omega(z)$ geheel bepaald. Bij gegeven U en V zijn dus Ω , Θ en ζ door (3.4) en (3.5) ondubbelzinnig bepaald.

Dit alles geldt voor gegeven U en V . Hoe is het, als we niet uitgaan van gegeven U en V , doch van een gegeven windveld $\vec{W}$? In lemma 3 zagen we dat dan de functie $U + iV$ slechts op een analytische functie van z na bepaald is. Dus als U_0 en V_0 het veld $\vec{W}$ voortbrengen dan kan volgens lemma 3 ieder stelsel (U, V) dat $\vec{W}$ voortbrengt, geschreven worden als

$$U = U_0 + \operatorname{Re} F(z), \quad V = V_0 + \operatorname{Im} F(z)$$

waarin $F(z)$ een in G analytische functie is.

Zij nu $\Omega_0(z)$ de bij (U_0, V_0) "behorende" complexe potentiaal en Θ_0 , resp. ζ_0 de hierbij behorende stroomfunctie, resp. windeffect. We bewijzen nu dat de bij (U, V) behorende complexe potentiaal is

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) - F(z).$$

Immers $\Omega(z)$ is een in G analytische functie en langs Γ geldt $\operatorname{Re} \Omega(z) = \operatorname{Re} \Omega_0 - \operatorname{Re} F(z) = -U_0 - (U - U_0) = -U$.

Daar verder $\Omega(z) + U + iV = \Omega_0(z) + U_0 + iV_0$ is, volgt uit (2.7) en (2.8) dat de bij Ω , U en V behorende fysische functies

5) Op de existentie van $\Omega(z)$ die onder zeer ruime voorwaarden voor de vorm van G en de waarden van U op Γ verzekerd is, gaan we hier niet in.

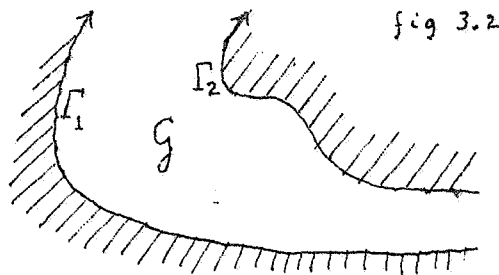
Θ en ζ identiek gelijk zijn aan Θ_0 , resp. ζ_0 . Ook aan de bijvoorwaarde (3.4) is dus voldaan.

We kunnen dit resultaat als volgt formuleren:

Bij een begrensd, enkelvoudig samenhangend gebied met een gegeven windveld $\vec{v}$ zijn Θ en ζ door de voorwaarden (3.4) en (3.5) ondubbelzinnig vastgelegd.

Ad 2. Vergeleken bij het voorgaande, treden in het geval dat G niet begrensd is, enkele bijzonderheden op.

In de eerste plaats kan de rand Γ van G uit meerdere, slechts in het oneindige samenhangende delen bestaan, ook al is G enkelvoudig samenhangend (vgl. fig. 3.2). We nemen aan dat dit er slechts eindig veel zijn. Het is dan niet a priori zeker dat $\Phi + U$ langs de verschillende delen van Γ dezelfde constante waarde aanneemt. Indien echter de stroom in het oneindige uniform tot nul nadert, dan moet dit op grond van 3.2. wel het geval zijn, want de totale stroom door een lijn die twee in het oneindige samenhangende delen van Γ verbindt moet dan nul zijn (er stroomt in het oneindige niets binnen). Daar Γ slechts uit eindig veel delen bestaat, die twee aan twee in het oneindige samenhangen (G is enkelvoudig samenhangend!), volgt hieruit dat $\Phi + U$ langs alle delen van Γ dezelfde waarde heeft.



Aan de nevenvoorwaarde (3.5) zullen we in het algemeen niet kunnen voldoen. In 6. zal hierop voor een speciaal geval nader ingegaan worden. In de plaats hiervan kunnen we eisen, dat $\zeta = 0$ is in een eindig of oneindig punt. Speciaal als U en V in het oneindige naar nul gaan (waarvoor we steeds kunnen zorgen, als $\vec{v}(z)$ hier voldoende sterk naar nul gaat), dan kunnen we eisen, dat $\Omega(\infty) = 0$ is, hetgeen dan impliceert $\zeta(\infty) = 0$.

Ook de eenduidigheid van $\Omega(z)$ is niet zonder meer verzekerd. Bij een gegeven $\Omega(z)$ die aan de randvoorwaarde (3.4) voldoet, kunnen we immers iedere functie $iF(z)$, waarin $F(z)$ analytisch is in G , continu in $G + \Gamma$ en reëel op Γ optellen. Als G begrensd is, dan is de enige mogelijkheid $F(z) = C$ (C reëel); is G echter niet begrensd, dan is er een veel grotere klasse van functies $F(z)$, althans als we toelaten dat $F(z)$ in het oneindige niet begrensd is. In het bijzonder kunnen we voor $F(z)$ de analytische functie $w = w(z)$ kiezen, die het gebied G conform afbeeldt op het halve vlak $\text{Im } w > 0$, zodanig dat het punt $z = \infty$ afgebeeld wordt op $w = \infty$ (deze laatste voorwaarde is nodig om te verzekeren, dat $w(z)$ continu is in $G + \Gamma$). In 7. zullen we zien dat deze onbepaaldheid in sommige gevallen slechts door een ad hoc hypothese opgeheven kan worden.

Als het windveld echter "begrensd" is, d.w.z. als U en V in G uniform naar 0 gaan voor $z \rightarrow \infty$, dan is door de nevenvoorwaarde: $\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega(z) = 0$ uniform in G , $\Omega(z)$ eendudig bepaald. We kunnen dit op dezelfde manier als ad 1 bewijzen, omdat voor twee oplossingen Ω_1 en Ω_2 op Γ geldt $\text{Re}(\Omega_1 - \Omega_2) = 0$; terwijl bij gegeven $\varepsilon > 0$ steeds een R te vinden is, zodanig dat $|\text{Re}(\Omega_1(z) - \Omega_2(z))| < \varepsilon$ is voor alle z uit G waarvoor $|z| > R$.

Voor het geval dat G een half vlak is, kunnen we nog eenvoudig scherpere resultaten bereiken met behulp van de volgende

Stelling: Als $f(z)$ analytisch is voor $\text{Im } z > 0$, continu voor $\text{Im } z \geq 0$ en reëel voor $\text{Im } z = 0$, dan is $f(z)$ door analytische voortzetting in het onderste halve vlak uit te breiden tot een gehele functie en dus te schrijven als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

waarin de reeks voor alle z convergeert en alle coëfficiënten a_n reëel zijn.

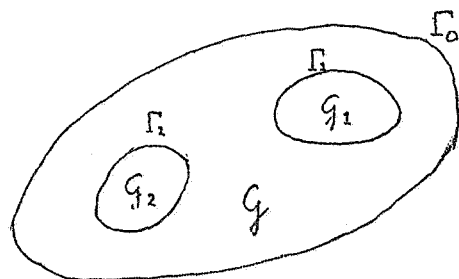
Voor het bewijs van deze stelling die we enkele malen zullen gebruiken, verwijzen we naar appendix 3. Door conforme afbeelding kunnen uit deze stelling natuurlijk resultaten voor algemenere gebieden verkregen worden.

Dat bij een andere keuze van de windpotentialen U en V de functies Θ en ζ niet veranderen, blijkt op dezelfde manier als hierboven.

Ad 3. Over meervoudig samenhangende gebieden (dus zeeën met eilanden), die voor het volgende niet zeer belangrijk zullen zijn, kunnen we het volgende zeggen. We beperken ons daarbij tot begrensde gebieden, de overgang naar niet-begrensde gebieden kan analoog aan het hierboven behandelde geschieden.

Verder zullen we ons, ten einde niet te zeer in allerlei topologische details te hoeven treden, beperken tot het belangrijkste geval dat ons gebied een "zee met eindig veel eilanden" is, of anders geformuleerd, we beschouwen het geval, dat er een enkelvoudig samenhangend open gebied G_0 aan te geven is zodanig dat het complement van ons gebied G ten opzichte van G_0 bestaat uit eindig veel enkelvoudig samenhangende afgesloten gebieden (eilanden) $G_1, G_2, \dots, G_n$ (zie fig. 3.3), die noch onderling, noch met de rand van G_0 , punten gemeen hebben.

Als randvoorwaarden hebben we weer dat Θ langs alle kusten constant moet zijn. Maar deze constante heeft nu in het algemeen niet op alle delen van de rand van G dezelfde waarde. Langs de rand Γ_0 van G_0 kunnen we $\Theta = 0$ nemen, maar dan is de waarde Θ_k van Θ langs de rand van G_k



$$G_0 = G + G_1 + G_2.$$

fig.3.3

($k = 1, 2, \dots, n$) wel constant, doch onbekend en in het algemeen niet nul.

Om het probleem mathematisch eenduidig bepaald te maken, hebben we behalve de bijvoorwaarde (3.5) nog twee bijvoorwaarden nodig, die fysisch uiterst vanzelfsprekend zijn: we eisen dat $\vec{S}$ en ζ eenwaardige continue functies zijn. ⁶⁾

We bewijzen eerst dat uit de eenwaardigheid van $\vec{S}$ (dus van $\text{grad } \Theta = \vec{k} \times \text{rot } \vec{k} \Theta$) die van Θ volgt. Zij C een gesloten kromme zonder dubbelpunten, die geheel in G verloopt. Als C uitsluitend punten van G omvat, dan is volgens lemma 2 Θ noodzakelijk eenwaardig langs C . Als C een of meer van de gebieden G_i omsluit, dan kunnen we C door verbindingslijntjes met de randen Γ_i van deze gebieden G_i verbinden (zie fig. 3.4). Integreren we nu langs de in

fig. 3.4 aangegeven weg, dan vinden we

$$\oint_C d\Theta = \sum \oint_{\Gamma_i} d\Theta = 0$$

daar Θ constant is langs Γ_i (natuurlijk moesten we alleen sommeren over die Γ_i , die binnen C liggen; daar $d\Theta = \text{grad } \Theta \cdot d\vec{s}$ en $\text{grad } \Theta$ eenwaardig is, vallen de bijdragen van de verbindingslijntjes, die tweemaal en in tegengestelde zin doorlopen worden, tegen elkaar weg).

Hiermee is dus de eenwaardigheid van Θ , dus van $\Phi + U$ bewezen. Uit de eenwaardigheid van ζ volgt dan op grond van (2.8) ook die van $\Psi + V$.

Uit opmerking 2 bij het bewijs van lemma 3 in appendix 2 volgt verder dat U en V steeds eenwaardig gekozen kunnen worden, omdat het windveld $\vec{W}$ natuurlijk een continu en eenwaardig vectorveld is. Nemen we aan dat dit gebeurd is, dan volgt uit het bovenstaande de eis, dat $\Omega(z)$ eenwaardig moet zijn.

We kunnen nu bewijzen dat (bij een begreind gebied) uit de randvoorwaarde (3.4) (met onbekende constanten $\lambda \Theta_i$ langs Γ_i) en de eis dat $\Omega(z)$ eenwaardig is volgt dat $\Omega(z)$ op een additieve imaginaire constante na eenduidig bepaald is (zie appendix 4). Deze imaginaire constante wordt weer door de bijvoorwaarde (3.5) bepaald.

Ook in dit geval zijn de consequenties van overgang op andere windpotentialen dezelfde als hierboven ad 1.

6) Bij een enkelvoudig samenhangend gebied volgt deze eenwaardigheid direct uit de continuïteit (vgl. lemma 2 en 3 uit 2).

Samenvattend kunnen we zeggen, dat uit het bovenstaande gebleken is, dat de mathematische formulering van ons probleem volledig is in die zin, dat bij een gegeven gebied en windveld de fysische grootheden Θ en $\mathcal{C}$ ondubbelzinnig bepaald zijn. Slechts bij niet begrensde gebieden kunnen, als het windveld niet begrensd is, enige moeilijkheden optreden.

4. Windvelden.

We zullen hier enkele opmerkingen maken voor speciale typen windvelden die we in het volgende zullen gebruiken.

Op grond van lemma 3 schreven we

$$\vec{W} = - \frac{\rho g D}{4\pi} (\text{rot } \vec{k} \ U + \text{grad } V) \quad (2.4)$$

en in opmerking 1 bij het bewijs van dit lemma (appendix 2) constateerden we dat de eerste en tweede term van het rechterlid van (2.4) resp. het divergentie-vrije en het rotatie-vrije deel van $\vec{W}$ zijn. Daar alle vergelijkingen lineair zijn, kunnen we beide delen van het windveld geheel afzonderlijk behandelen. Na enkele opmerkingen over de rotatie-vrije windvelden, waartoe ook het homogene windveld behoort, zullen we hier speciaal spreken over de zg. singuliere windvelden en de circulaire divergentievrije velden.

a. Rotatie-vrije windvelden.

Als $\text{rot } \vec{W} = 0$, dan moet $\vec{k} \cdot \text{rot} (\text{rot } \vec{k} \ U + \text{grad } V) = 0$, dus

$$\Delta U = 0 \quad (4.1)$$

In 5. zal blijken, dat het in dit geval niet moeilijk is om Θ en $\mathcal{C}$ te bepalen.

We merken op, dat we bij rotatie-vrije windvelden altijd $U = 0$ kunnen kiezen (althans bij enkelvoudig samenhangende gebieden). Immers, als het veld wordt voortgebracht door U_0 en V_0 , met $\Delta U_0 = 0$, dan is er een functie V_0^* , (de bij U_0 behorende geconjugeerde potentiaalfunctie), zodanig dat $U_0 + i V_0^*$ een analytische functie van z is. Het veld wordt nu ook voortgebracht door $U = 0$, $V = V_0 - V_0^*$, want

$$(U + i V) - (U_0 + i V_0) = - U_0 - i V_0^*$$

is een analytische functie van z (vgl. lemma 3).

Als U en V lineaire functies van x en y zijn, dan is $\vec{W}$ overal dezelfde vector en dit geldt ook omgekeerd. Dit homogene windveld is dus zowel rotatie- als divergentie-vrij.

Voor een homogeen windveld met componenten W_1 en W_2 kunnen we dus schrijven:

$$U = 0, \ V = - \frac{4\pi}{\rho g D} (W_1 x + W_2 y) = - A_1 x - A_2 y \quad (4.2)$$

$$\text{met } A_1 = \frac{4\pi W_1}{e_0 D} \quad , \quad A_2 = \frac{4\pi W_2}{e_0 D} \quad . \quad (4.3)$$

Een algemenere voorstelling van hetzelfde windveld, die we in 7. zullen gebruiken is

$$U = \kappa(A_2 x - A_1 y), \quad V = (\kappa-1)(A_1 x + A_2 y), \quad (4.4)$$

waar in κ een willekeurig reeel getal is.

Opmerking. Het verschil tussen de functies $U+iV$, behorende bij (4.4), resp. (4.2) is

$$\begin{aligned} & \kappa(A_2 x - A_1 y) + i \kappa (A_1 x + A_2 y) = \\ & = \kappa(A_2 + i A_1)(x+iy) = \kappa(A_2 + iA_1)z \end{aligned}$$

dus naar behoren een analytische functie van z .

b. Singuliere windvelden.

Onder singuliere windvelden zullen we verstaan velden van het type

$$U = \ln |z-z_0|, \quad V = 0 \quad \text{en} \quad U = 0, \quad V = \ln |z-z_0| \quad (4.5)$$

Deze velden, en speciaal het eerste, zijn om verschillende redenen belangrijk. Ten eerste omdat ze rotatie-symmetrisch zijn (langs cirkels om het punt z_0 is de grootte van $\vec{W}$ constant en $\vec{W}$ is tangentieel, resp. radiaal gericht) en ten tweede omdat U en V potentiaal functies zijn (behalve in z_0 , als dit punt in G ligt), zodat deze velden zowel rotatie- als divergentie-vrij zijn. En de lineaire combinaties van deze velden zijn ook de enige niet-triviale velden, die deze twee eigenschappen bezitten.

Immers, als $\vec{W}$ circulair symmetrisch is om het punt z_0 , dan moet W de vorm

$$\vec{W} = \vec{r} f(r) + \vec{k} \times \vec{r} g(r), \quad (4.6)$$

waarin $r = |z-z_0|$, hebben (de eerste term van 4.6 geeft de radiale, de tweede de tangentiële component van $\vec{W}$).

Met de bekende regels van de vector-analyse vinden we hieruit

$$\text{div } \vec{W} = 2 f(r) + r \frac{df}{dr} \quad . \quad (4.7)$$

$$\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W} = 2g(r) + r \frac{dg}{dr} \quad . \quad (4.8)$$

Als $\vec{W}$ divergentie- en rotatie-vrij is, dan volgt uit (4.7) en (4.8)

$$f(r) = \frac{C_1}{r^2} \quad , \quad g(r) = \frac{C_2}{r^2} \quad , \quad \text{dus}$$

$$\vec{W} = C_1 \frac{\vec{r}}{r^2} + C_2 \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r^2} = \text{grad } (C_1 \ln r + C_3) + \vec{k} \times \text{grad } (C_2 \ln r + C_4),$$

waarmee het gestelde bewezen is.

Als z_0 buiten G ligt dan kunnen we de singuliere velden op dezelfde wijze behandelen als de andere rotatie-vrije velden. Alleen zullen we bij niet begrensde gebieden in het algemeen niet kunnen eisen dat Ω en C naar nul gaan voor $z \rightarrow \infty$.

Als z_0 in G ligt dan kunnen we dit punt beschouwen als een geïsoleerd randpunt van G (een "zeer klein eiland" dat de stroming niet beïnvloedt). G is dan meervoudig samenhangend geworden en daar U en V eenwaardig zijn moet volgende de redenering van § 3 ad. 3 ook $\Omega(z)$ in de omgeving van z_0 eenwaardig zijn. Daar $\Omega(z)$ "veroorzaakt" wordt door de velden U en V die in z_0 logarithmisch singulier zijn, is het plausibel, te eisen dat Ω in z_0 ook hoogstens logarithmisch singulier is. ⁷⁾ Als in de omgeving van z_0 echter $\Omega(z) + -C \ln(z-z_0)$ regulier is, dan is, als $C \neq 0$ is, $\Omega(z)$ hier niet eenwaardig. We kunnen dus concluderen dat we bij een singulier windveld als nevenvoorwaarde moeten stellen dat $C = 0$ is, dus dat $\Omega(z)$ ook in het singuliere punt z_0 regulier en analytisch blijft. Ook voor windvelden van het algemenere type

$$U = A \ln |z-z_0| + U_0, \quad V = B \ln |z-z_0| + V_0,$$

waarin U_0 en V_0 in z_0 regulier zijn, geldt deze eigenschap.

Natuurlijk zijn, als z_0 in G ligt, de hier beschouwde windvelden meer mathematisch dan fysisch van belang. In de omgeving van z_0 wordt W namelijk oneindig en, omdat $\Omega(z)$ regulier blijft, zullen ook C en S niet begrensd zijn. Ook in het oneindige treden singulariteiten op. De mathematische voordelen zijn echter van dien aard (zie 8.) dat een behandeling, speciaal van het eerste veld (4.5), dat globaal toch een zekere beschrijving van een circulaire depressie geeft, alleszins gewettigd is.

c. Circulaire divergentie-vrije windvelden.

Een windveld dat divergentie-vrij, circulair symmetrisch om het punt z_0 en in z_0 niet singulier is, heeft volgens het hierboven behandelde de gedaante

$$\vec{W} = \vec{k} \times \vec{r} g(r), \tag{4.9}$$

als $\vec{r}$ de vector van z_0 naar z is en $r = |z-z_0|$. $\vec{W}$ wordt dan voortgebracht door

$$U = U(r), \quad V = 0. \tag{4.10}$$

7) We kunnen ook eisen dat het singuliere deel van $\Omega(z)$ in de omgeving van z_0 alleen van $|z-z_0|$ en niet van $\arg(z-z_0)$ afhangt, dit geeft hetzelfde resultaat.

waarin de functie $U(z)$ direct uit $g(r) = - \frac{\vec{r} \cdot (\vec{k} \times \vec{W})}{r^2}$ 8) volgt, daar

$$\frac{4\pi}{e g D} \vec{W} = - \text{rot } \vec{k} U = \vec{k} \times \text{grad } U = \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r} \frac{dU}{dr},$$

dus
$$U(r) = \frac{4\pi}{e g D} \int r g(r) dr. \quad (4.11)$$

Volgens (4.8) geldt voor het windveld (4.9)

$$\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W} = 2 g(r) + r \frac{dg}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 g)$$

We bewijzen nu dat als $\lim_{r \rightarrow \infty} r W = 0$ is en W eindig blijft voor $r \rightarrow 0$, $\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W}$ niet tekenvast kan zijn. Immers de functie $r^2 g(r) = \pm r W$ nadert tot nul als $r \rightarrow 0$ en als $r \rightarrow \infty$, moet dus (tenzij $W \equiv 0$) minstens één recht extreem hebben in een punt $r = r_0 \neq 0$. In dit punt wisselt de afgeleide van deze functie, en dus $\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W}$, van teken.

In 3. zagen we (formule (3.3)) dat de circulatie C_S van $\vec{S}$ langs een gesloten kromme evenredig is met de oppervlakte-integraal van $\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W}$ voor het door de kromme omsloten gebied. Onder de bovengenoemde voorwaarden heeft C_S dus niet voor iedere gesloten kromme hetzelfde teken. In 6. zullen we zien, welke consequenties dit voor het stroomlijnenbeeld kan hebben.

Als daarentegen $\lim_{r \rightarrow \infty} r W \neq 0$ of oneindig is, dan is U op grond van (4.11) niet begrensd in het oneindige. Reikt de kust tot in het oneindige, dan geldt ditzelfde voor Φ en Ψ , dus ζ kan dan niet naar een constante naderen.

Om deze gevallen nader toe te lichten, zullen we in 6. een drietal divergentie-vrije circulaire windvelden nader beschouwen:

- I. $U = \ln r$
- II. $U = \frac{1}{2} \ln (r^2 + b^2)$
- III. $U = - \frac{b^2}{2(r^2 + b^2)}$

Veld I is mathematisch het eenvoudigste, doch singulier in het centrum en in het oneindige. Veld II is alleen singulier in het oneindige, veld III is nergens singulier.

Voor veld I geldt

$$\vec{W} = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r^2}, \text{ dus } W = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

Voor veld II geldt

$$\vec{W} = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{r}{r^2 + b^2} \cdot \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r}, \text{ dus } W = \frac{e g D}{4} \cdot \frac{r}{r^2 + b^2}.$$

8) We kunnen ook schrijven: $g(r) = \pm \frac{W}{r}$ met $+$ (-) teken als $g(r)$ positief (negatief) is, d.i. als W links-circulair (rechts-circulair) is.

Voor kleine r geldt $W = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{r}{b^2} (1 + O(\frac{r^2}{b^2}))$ dus in eerste benadering neemt W lineair toe. Voor grote r geldt $W = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} (1 + O(\frac{b^2}{r}))$ dus hier gedraagt dat veld zich net als veld I. W is maximaal voor $r = b$ en is daar $\frac{1}{2} \cdot \frac{e g D}{4\pi b}$.

Voor veld III geldt:

$$\vec{W} = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{b^2 r}{(r^2 + b^2)^2} \cdot \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{r}, \text{ dus } W = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{b^2 r}{(r^2 + b^2)^2}.$$

Voor kleine r geldt $W = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{r}{b^2} (1 + O(\frac{r^2}{b^2}))$, dus W gedraagt zich hier net als veld II.

Voor grote r geldt $W = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{b^2}{r^3} (1 + O(\frac{b^2}{r^2}))$, dus hier gaat W veel sterker naar 0 dan bij veld II. W is maximaal voor $r = \frac{1}{3} b \sqrt{3}$ en is daar $\frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{e g D}{4\pi b}$.

De drie velden zijn alle links-circulair en kunnen dus opgevat worden als beschrijvingen van depressies op het Noordelijk halfrond. Bij de velden II en III bepaalt de parameter b de uitgebreidheid van het windveld (afstand kern tot maximum). Verder kunnen we U natuurlijk nog met een factor vermenigvuldigen om de sterkte van het windveld te variëren.

We merken nog op dat voor het veld II geldt

$$\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W} = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{2b^2}{(r^2 + b^2)^2}$$

en voor veld III

$$\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W} = \frac{e g D}{4\pi} \cdot \frac{2b^2(b^2 - r^2)}{(r^2 + b^2)^3}.$$

Hier is dus $\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{W}$ niet tekenvast, zoals op grond van de bovenstaande algemene beschouwingen te verwachten was.

5. Rotatie-vrij windveld boven een afgesloten zee.

Zij G een begrensde, enkelvoudig samenhangend gebied en zij het rotatie-vrije windveld voortgebracht door (vgl. 4.a)

$$U = U(x, y), \quad V = V(x, y) \quad (5.1)$$

$$\text{met } \Delta U = 0 \quad (5.2)$$

Daar U een potentiaalfunctie is, is er een in G analytische functie $\Lambda(z)$, zodanig dat

$$\text{Re } \Lambda = U.$$

Nemen we nu

$$\Omega(z) = -\Lambda(z) + i C, \quad (C \text{ reëel})$$

dan geldt langs de rand van G

$$\operatorname{Re} \Omega = - \operatorname{Re} \Lambda = - U,$$

dus Ω voldoet aan de randvoorwaarde (3.4) en is dus (op de vrije imaginaire constante iC na) de enige mogelijke oplossing voor de complexe potentiaal (vgl. 3. ad a).

We vinden nu

$$\Theta = \frac{1}{\lambda} (\operatorname{Re} \Omega + U) = 0. \quad (5.3)$$

$$\zeta = \lambda \Theta - \lambda (\operatorname{Im} \Omega + V) = - \lambda (V - \operatorname{Im} \Lambda + C) \quad (5.4)$$

en de vrije constante C kunnen we bepalen met de nevenvoorwaarde (3.5).

Het resultaat (5.3) leert: bij een rotatie-vrij windveld boven een afgesloten zee treedt geen stroming op.

Opmerking: In plaats van door (5.1) kan het windveld natuurlijk ook worden voortgebracht door

$$U = 0, \quad V^* = V - \operatorname{Im} \Lambda,$$

(vgl. 4.a). Hierbij behoort $\Omega^* = iC$, waaruit voor Θ en ζ weer de resultaten (5.3) en (5.4) volgen, geheel in overeenstemming met de algemene theorie.

Als $U = 0$ is, vereenvoudigt (5.4) zich tot

$$\zeta = - \lambda (V + C),$$

en daar voor een rotatie-vrij veld met $U = 0$ geldt

$$V = \int \operatorname{grad} V \cdot \vec{dr} = - \frac{4}{\rho g D} \int \vec{W} \cdot \vec{dr},$$

kunnen we met gebruikmaking van (2.1) ook schrijven

$$\zeta = \frac{1}{\rho g H} \int \vec{W} \cdot \vec{dr} + \text{const.} \quad (5.5)$$

Deze formule geldt voor alle rotatie-vrije windvelden, daar we daarvoor steeds $U = 0$ kunnen kiezen.

Als bijzonder geval behandelen we nog een homogeen windveld boven een afgesloten zee. Volgens (5.5) geldt hiervoor, daar nu $\vec{W}$ constant is

$$\zeta = \frac{1}{\rho g H} \vec{W} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (5.6)$$

waarin $\vec{W} \cdot \vec{r}_0$ een integratie-constante is, die we met (3.5) kunnen bepalen. Uit (3.5) volgt dat voor $\vec{r}_0$ geldt

$$\vec{W} \cdot \iint_G \vec{r} d\sigma = \vec{W} \cdot \vec{r}_0 \iint_G d\sigma, \text{ en daar } \iint_G \vec{r} d\sigma = \vec{r}_z \iint_G d\sigma,$$

als $\vec{r}_z$ de radius-vector van het zwaartepunt van G is, moet

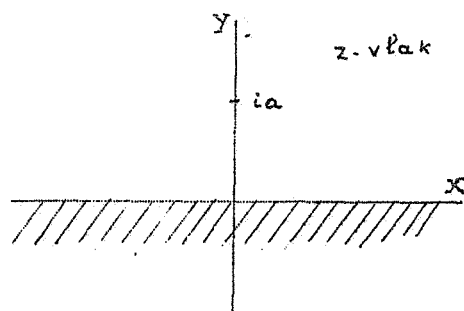
$\vec{W} \cdot \vec{r}_0 = \vec{W} \cdot \vec{r}_z$ zijn. Uit (5.6) krijgen we dus

$$\zeta = \frac{1}{e g H} \vec{W} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_z) \quad (5.7)$$

Dit resultaat is equivalent met dat van Schalkwijk ([1], p.22).

6. Circulaire divergentie-vrije windvelden boven een half vlak.

We beschouwen een zee die bestaat uit het gebied $\text{Im } z > 0$ en berekenen het effect van de circulaire divergentie-vrije windvelden I, II en III uit 3.c hierop. De kern van de depressies veronderstellen we in het punt $z = i a$, waarin a reëel is.



I. $U = \ln |z - ia|$, $V = 0$.

fig. 6.1

We moeten hier de gevallen $a \gtrless 0$ onderscheiden (vgl. 3.b). Als randvoorwaarde hebben we

$$\Phi + U = 0 \quad \text{voor } \text{Im } z = 0, \text{ of}$$

$$\text{Re} \{ \Omega(z) + \ln(z - ia) \} = 0 \quad (6.1)$$

a). Als $a < 0$ is, (zie fig. 6.2), dan is

$$\Omega(z) = -\ln(z - ia) + \frac{\pi}{2} i \quad (6.2)$$

een functie die in het bovenste halve vlak analytisch is en aan (6.1) voldoet. Bij deze oplossing behoort

$$\Theta(x, y) = 0, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \lambda \left\{ \text{Im} \ln(z + i|a|) - \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \lambda \left\{ \arg(z + i|a|) - \frac{\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$= -\lambda \arctg \frac{x}{y + |a|}, \quad (6.4)$$

waarin we de hoofdwaaarde van de arctg moeten nemen,

Uit deze oplossing blijkt, dat er geen stroming is (hetgeen op grond van 5. ook te verwachten is, daar het windveld overal in G rotatie-vrij is en geen singulariteiten heeft). ζ is constant langs stralen door het punt $z = -i|a|$ en wordt dus niet nul in het oneindige, doch neemt, wanneer z de bovenste helft van een cirkel met grote straal om het punt $z = 0$ in positieve zin doorloopt, toe van iets meer dan $-\frac{\pi}{2}\lambda$ tot bijna $\frac{\pi}{2}\lambda$. De imaginaire constante die we aan $\Omega(z)$ toegevoegd hebben, zorgt er voor dat ζ een oneven functie van x is en dus nul is voor $z = 0$.

Langs de kust ($y = 0$) geldt (zie fig. 6.3)

$$\zeta(x, 0) = -\lambda \arctg \frac{x}{|a|} \quad (6.5)$$

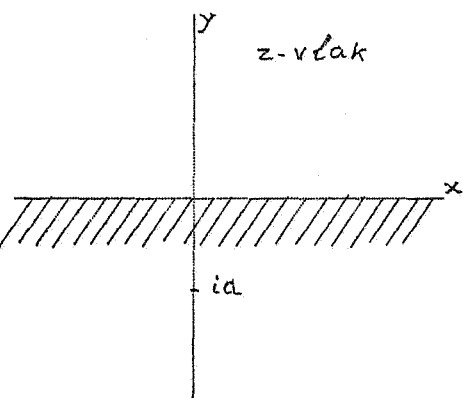


fig. 6.2

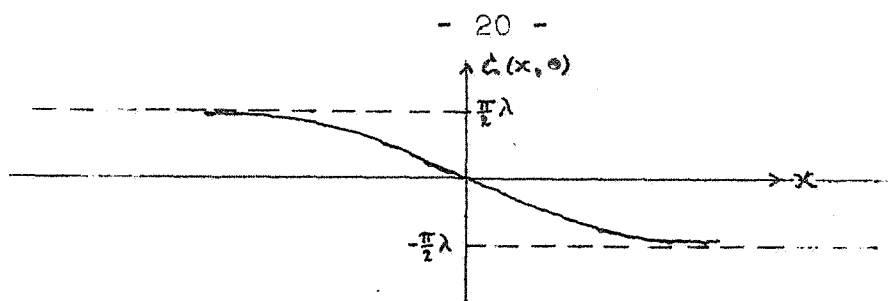


fig. 6.3

b). Als $a > 0$ is, dan is de oplossing (6.2) niet toelaatbaar, daar $\Omega(z)$ analytisch moet zijn voor $\text{Im } z > 0$ (vgl. 3.b). Door spiegeling vinden we dat we ook aan (6.1) kunnen voldoen met

$$\Omega(z) = -\ln(z + ia) + \frac{\pi}{2} i \quad (6.6)$$

en deze functie is wel analytisch in het bovenste halve vlak. Hierbij behoort

$$\Theta(x, y) = \frac{1}{\lambda} \text{Re} \ln \frac{z - ia}{z + ia} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \text{Re} \ln \frac{z - ia}{z + ia} + \lambda \left\{ \text{Im} \ln(z + ia) - \frac{\pi}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} - \lambda \arctg \frac{x}{y+a}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

ζ en Θ gaan in de omgeving van de kern van de depressie naar $-\infty$, hetgeen duidelijk aantoont dat de hier beschouwde beschrijving van het windveld niet zeer fraai is.

Langs de lijn $y = 0$ is

$$\zeta(x, 0) = -\lambda \arctg \frac{x}{a}, \quad (6.9)$$

dus net als in het vorige geval. Ook in het oneindige gedraagt ζ zich net als in het vorige geval, daar de eerste term van (6.8) naar nul gaat; Θ gaat hier naar 0.

Als a tot nul nadert dan naderen (6.2) en (6.6) tot elkaar. We kunnen dus zeggen, dat (6.2) geldt voor $a \leq 0$. Dit zelfde geldt voor de functies Θ en ζ . Langs de kust geldt nu

$$\zeta(x, 0) = -\lambda b \text{sgn } x, \quad (6.10)$$

dus ζ is nu discontinu langs de kust.

Concluderend kunnen we zeggen, dat het singuliere windveld wel een zeker beeld geeft, doch in de kern en - in mindere mate - in het oneindige faalt.

9) Hierin is $\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}.$

Opmerking.

De complexe potentialen zijn volgens de in 3. ad 2 genoemde stelling door de randvoorwaarde (6.1) slechts dan op een imaginaire constante na eenduidig bepaald, indien we de plausibele bijvoorwaarde stellen dat $\Omega(z)$ in het oneindige slechts logarithmisch oneindig wordt, hetgeen wil zeggen dat hier $\vec{S}$ naar nul gaat.

$$\text{II. } U = \frac{1}{2} \ln (|z - ia|^2 + b^2), \quad V = 0.$$

Hier luidt de randvoorwaarde (als $c = \sqrt{a^2 + b^2}$)

$$\text{Re } \Omega(z) = -\frac{1}{2} \ln (x^2 + c^2) \quad \text{voor } \text{Im } z = 0.$$

Hieraan wordt voldaan door

$$\Omega(z) = -\ln(z + ic) + \frac{\pi}{2} i, \quad (6.11)$$

want voor $y = 0$ is $\text{Re } \ln(z + ic) = \ln |x + ic| = \frac{1}{2} \ln (x^2 + c^2)$.

Hierbij behoort

$$\Theta(x, y) = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{|z - ia|^2 + b^2}{|z + ic|^2} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{x^2 + (y - a)^2 + b^2}{x^2 + (y + c)^2}. \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \lambda \left\{ \Theta + b (\text{Im } \ln(z + ic)) - \frac{\pi}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y - a)^2 + b^2}{x^2 + (y + c)^2} - \lambda \text{arctg } \frac{x}{y + c} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Bij dit windveld blijven Θ en ζ overal eindig.

Θ heeft één minimum, nl. in $x = 0$, $y = c$ en is daar $\Theta(0, c) = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{c - a}{2c}$.

De stroomlijnen $\Theta = \text{const.}$ zijn cirkels uit de cirkelbundel die de punten $x = 0$, $y = \pm c$ als nulpunten heeft.

In het oneindige gaat Θ naar 0, ζ blijft eindig en gedraagt zich net als bij de singuliere depressie. Langs de kust geldt

$$\zeta(x, 0) = -\lambda \text{arc tg } \frac{x}{c}.$$

Ook dit is bijna hetzelfde als in het vorige geval, alleen is a vervangen door c.

Over de eenduidigheid geldt dezelfde opmerking als ad I.

$$\text{III. } U = -\frac{b^2}{2(|z - ia|^2 + b^2)}, \quad V = 0.$$

Hier luidt de randvoorwaarde (weer met $c = \sqrt{a^2 + b^2}$)

$$\text{Re } \Omega(z) = \frac{b^2}{2(x^2 + c^2)} \quad \text{voor } \text{Im } z = 0 \quad (6.14)$$

Een oplossing $\Omega(z)$ die voor $z \rightarrow \infty$ naar nul gaat (en dit is op grond van de stelling uit 3. ad b) ook de enige) is ¹⁰⁾

10) In 9. zullen we een algemene formule geven, waarmee we de oplossing van randwaarde-problemen van dit type kunnen berekenen.

$$\Omega(z) = - \frac{b^2}{2ic(z+ic)} \quad (6.15)$$

Immers
$$\Omega(z) = - \frac{b^2(x-i(y+c))}{2ic(x^2+(y+c)^2)},$$

dus voor $y = 0$ geldt (6.14).

We vinden uit (6.15)

$$\Theta(x,y) = \frac{b^2}{2\lambda c} \left\{ \frac{y+c}{x^2+(y+c)^2} - \frac{c}{x^2+(y-a)^2+b^2} \right\}, \quad (6.16)$$

$$\zeta(x,y) = \frac{b^2}{2c} \left\{ \frac{y-\lambda x+c}{x^2+(y+c)^2} - \frac{c}{x^2+(y-a)^2+b^2} \right\}. \quad (6.17)$$

Hier blijven Θ en ζ overal begrensd en gaan ze in het oneindige naar 0.

Langs de kust geldt (zie fig. 6.4)

$$\zeta(x,0) = - \frac{\lambda b^2}{2c} \frac{x}{x^2+c^2} \quad (6.18)$$

We merken op, dat Θ niet alleen nul is langs de reële as en in het oneindige, doch ook langs een geheel in het eindige gelegen kromme in G , nl. langs het deel van de cirkel $x^2+(y-a)^2=(a+c)^2$, dat in G ligt. Deze cirkelboog

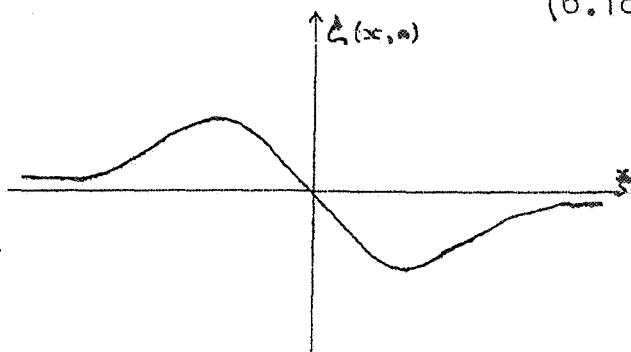
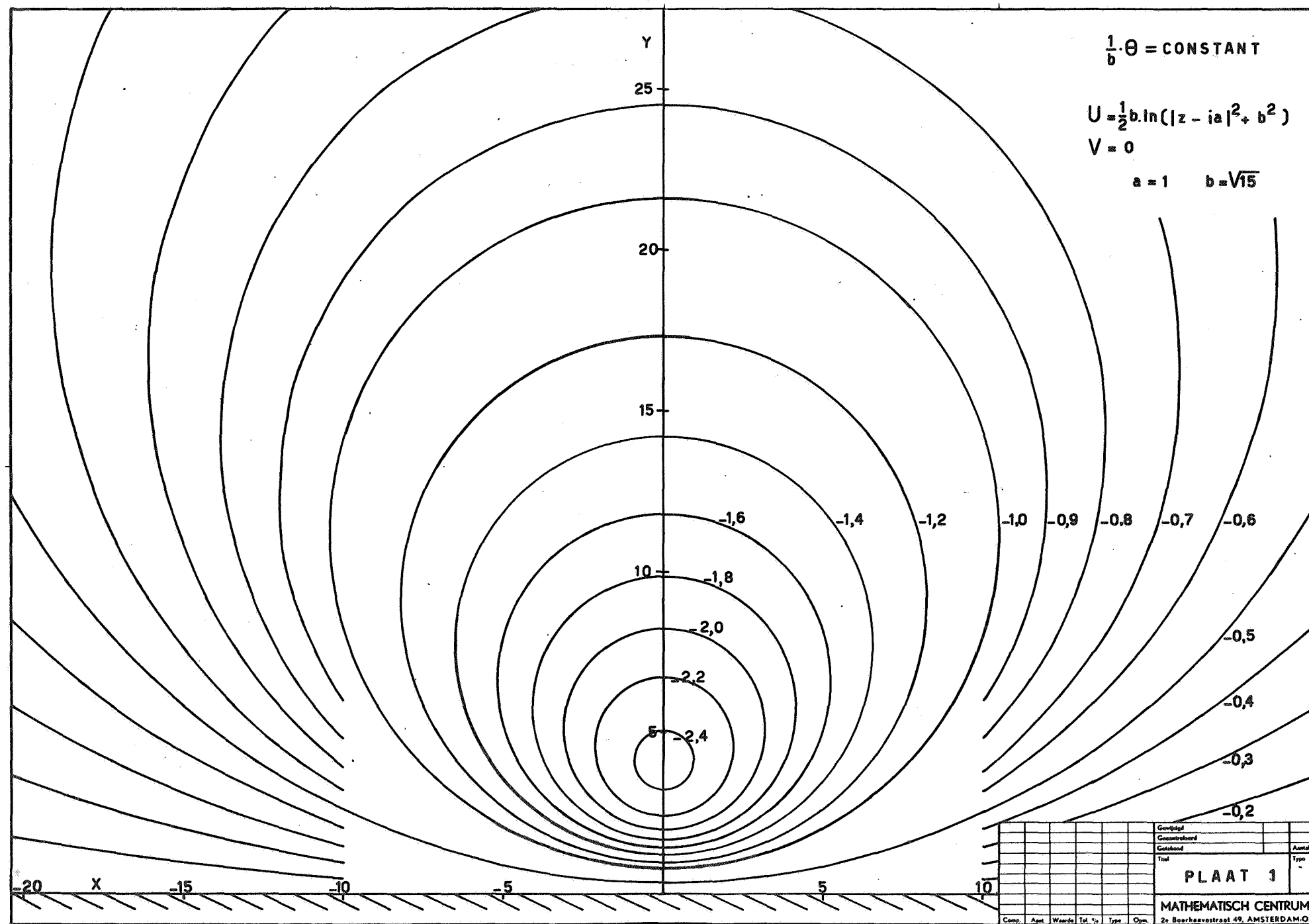


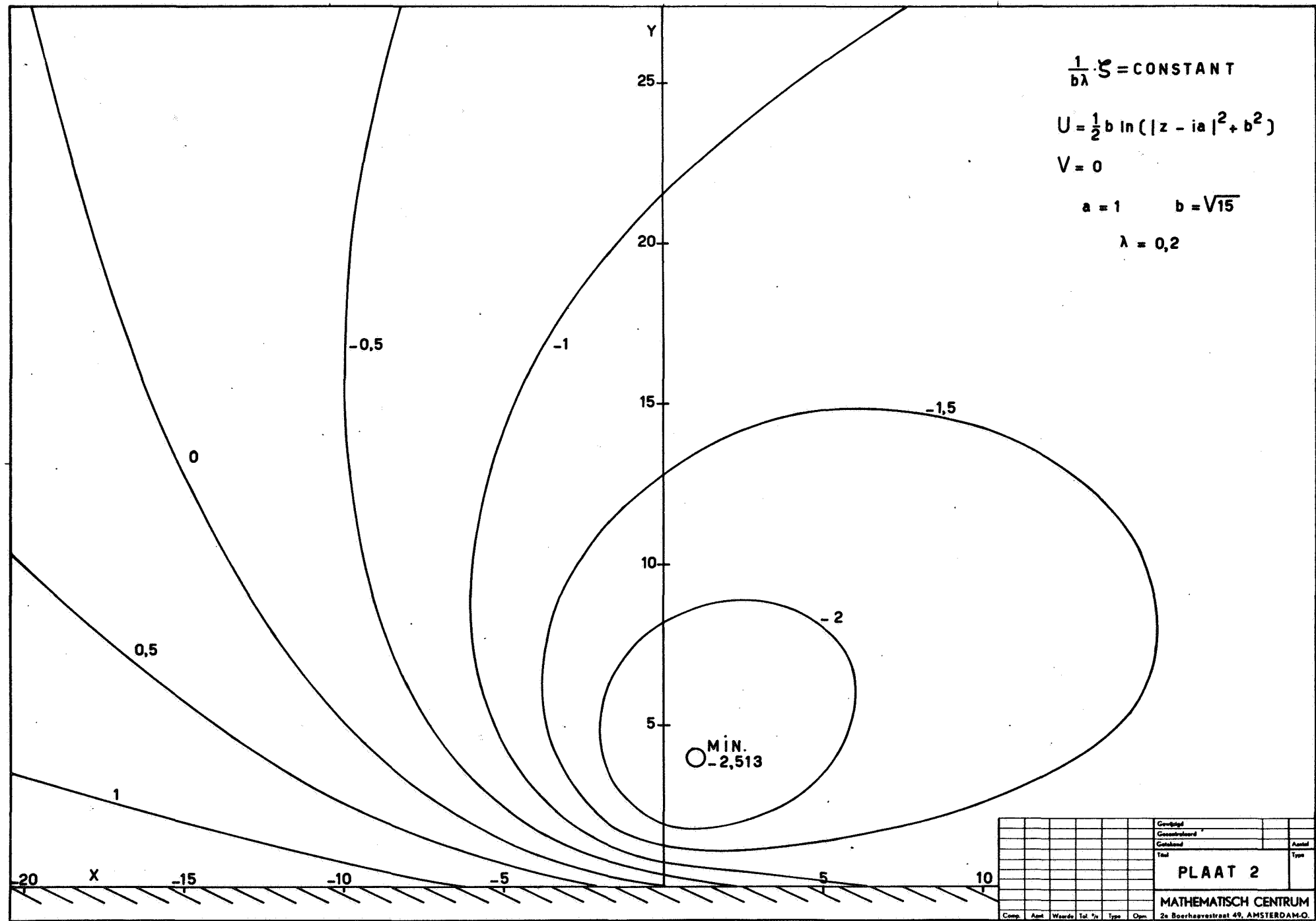
fig. 6.4

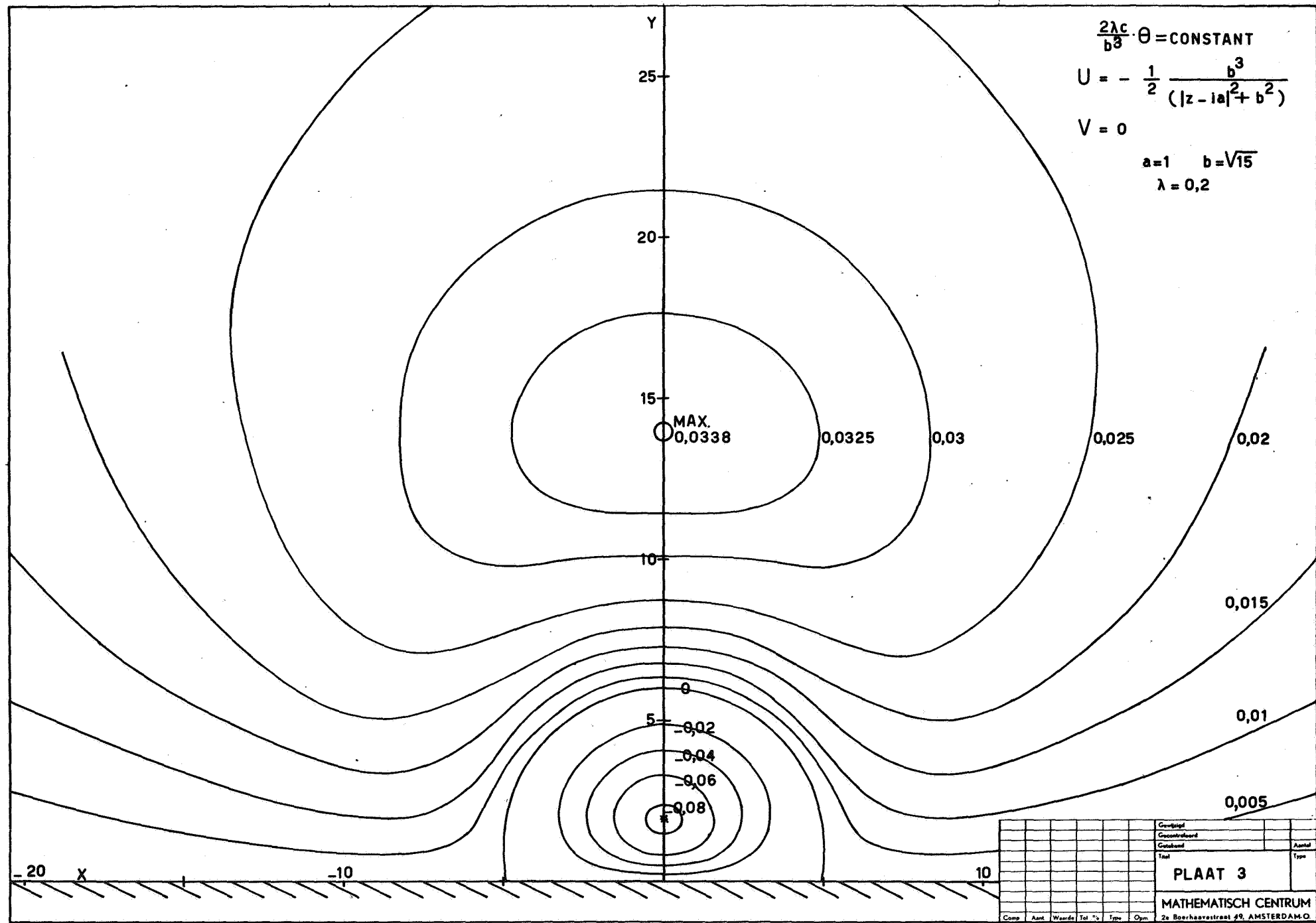
verdeelt G in twee delen, waarbinnen de stroomlijnen in zichzelf gesloten moeten zijn. In ieder der gebieden heeft Θ een extreem (op de y -as; de y -coördinaat wordt gevonden als wortel van een vierdegraadsvergelijking ¹¹⁾ en is dus niet eenvoudig aan te geven), in het deel tussen de cirkelboog en de reële as een minimum, in het andere deel een maximum. Dit houdt in dat de circulatie van $\vec{S}$ langs de stroomlijnen in het eerste gebied positief is, in het tweede negatief, hetgeen klopt met de beschouwingen van het begin van 4.c, waar we al zagen dat de circulatie van S niet tekenvast is in G .

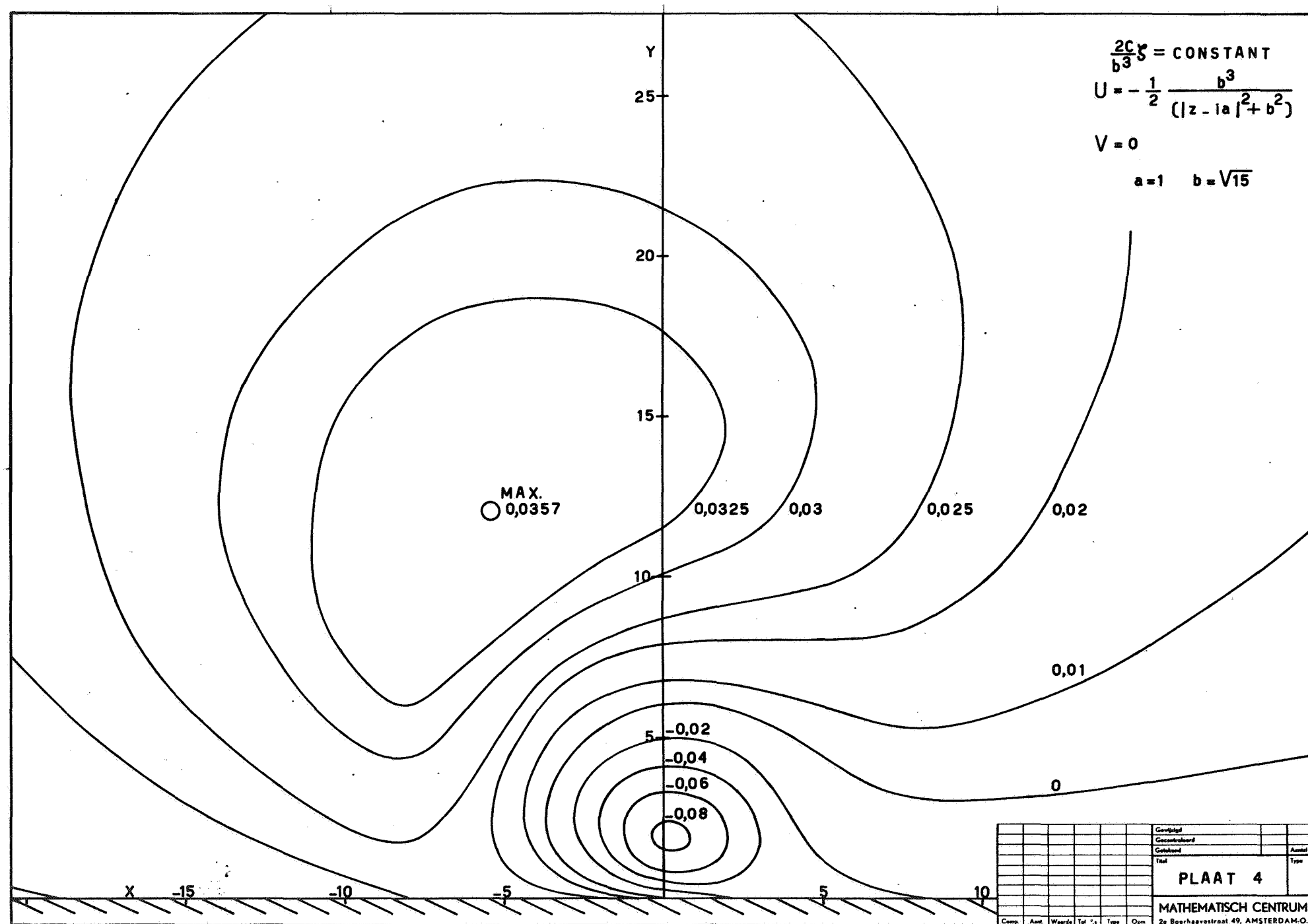
In de platen I tot en met IV is voor de windvelden II en III een aantal stroomlijnen (Θ const.) en een aantal niveaulijnen ($\zeta =$ const.) getekend. Hierin is genomen $a = 1$, $b = \sqrt{15}$, dus $c = 4$, terwijl aan de formules voor U , en dus ook aan die voor Θ en ζ nog een factor b is toegevoegd.

11) nl. $(y^2 - 2ay + c^2)^2 - 2c(y-a)(y+c)^2 = 0$.









Er is, tengevolge van het feit dat G niet begrensd is, nog een bijzonderheid die we thans willen onderzoeken. We hebben in alle drie gevallen de vrije constante in $\text{Im } \Omega$ zo bepaald dat $\zeta = 0$ voor $z = 0$. Bij windveld III impliceert dit dat $\zeta \rightarrow 0$ voor $z \rightarrow \infty$. Hoe is het nu met $\iint \zeta d\Omega$? Het blijkt direct dat deze integraal in alle gevallen divergeert. Er is dus als het ware oneindig veel water naar het oneindige weggestroomd (de integraal is negatief als we hem nemen over een groot, maar eindig gebied).

Om dit speciaal voor windveld III nader te onderzoeken beschouwen we (zie fig.6.5) een cirkelvormig gebied $G(R)$ met straal $R: |z| < R$. In het punt $z = -i(R-a)$ ($0 < a < R$) plaatsen we een circulaire depressie van het type III:

$$U = - \frac{b^2}{2 \{|z+i(R-a)|^2 + b^2\}} , \quad V = 0$$

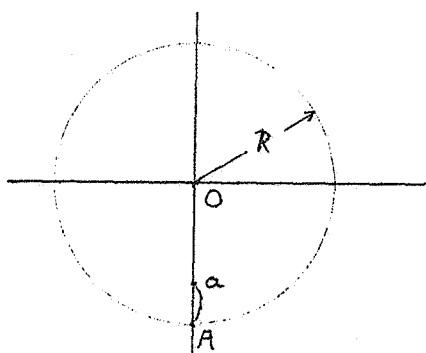


fig.6.5. z -vlak
De oorsprong van het w -vlak ligt in het punt A.

We berekenen hierbij Ω en ζ en daar ons gebied nu weer begrensd is, kunnen we de vrije imaginaire constante in Ω zo bepalen dat aan (3.5) voldaan is. Vervolgens nemen we het punt $z = -iR$ als oorsprong van een nieuw coördinatenstelsel ($w = z+iR$) en laten bij vaste a en b R onbegrensd toenemen. Het

gebied $\bar{G}(R)$ uit het w -vlak dat met $G(R)$ overeenkomt nadert dan tot het halve vlak $\text{Im } w > 0$ (in die zin dat ieder punt van dit halve vlak voor voldoende grote R tot $\bar{G}(R)$ behoort) en daar we voor het windveld kunnen schrijven

$$U = - \frac{b^2}{2 \{|w-ia|^2 + b^2\}} , \quad V = 0$$

krijgen we dan precies het hierboven beschouwde geval van het halve vlak met windveld III.

In appendix 5 bewijzen we dat voor het cirkelvormige gebied $G(R)$ geldt

$$\Omega(z) = - \frac{b^2}{2d} \left\{ \frac{z-iR\omega}{z+iR\omega} + i c \right\} , \quad (6.19)$$

waarin $d = \sqrt{\{(R+a')^2 + b^2\} \{(R-a')^2 + b^2\}}$

$$a' = R-a,$$

$$\omega = \frac{1}{2a'R} \cdot (R^2 + a'^2 + b^2 + d)$$

en C een nog vrije reële constante is.

Uit (6.19) volgt

$$\zeta(x, y) = - \frac{b^2}{2\{x^2 + (y-a)^2 + b^2\}} - \frac{b^2}{2d} \left\{ \frac{x^2 + y^2 + 2\lambda\omega R - \omega^2 R^2}{x^2 + (y+\omega R)^2} - \lambda C \right\}.$$

Om $\iint_{G(R)} \zeta d\sigma$ te berekenen, gaan we uit van

$$\begin{aligned} \iint_{G(R)} \Omega d\sigma &= \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\varphi}) d\varphi = \\ &= 2\pi \Omega(0) \int_0^R \rho d\rho = \pi R^2 \Omega(0) = \frac{\pi R^2 b^2}{2d} (1 - iC), \end{aligned}$$

daar voor $\Omega(z)$ als analytische functie geldt, dat het gemiddelde van Ω over een cirkelomtrek gelijk is aan de waarde van Ω in het middelpunt.

In appendix 5 berekenen we verder

$$\iint_{G(R)} U d\sigma = - \frac{1}{2} \pi b^2 \ln \frac{a'(R\omega - a')}{b^2} \quad (6.20)$$

We krijgen dus

$$\begin{aligned} \iint_{G(R)} \zeta d\sigma &= \iint_{G(R)} (\operatorname{Re} \Omega + U - \lambda \operatorname{Im} \Omega) d\sigma = \\ &= \frac{\pi R^2 b^2}{2d} \left\{ 1 + \lambda C - \frac{d}{R^2} \ln \frac{a'(R\omega - a')}{b^2} \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Nemen we dus } C = - \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{d}{R^2} \ln \frac{a'(R\omega - a')}{b^2} \right\} \quad (6.21)$$

Dan is aan (3.5) voldaan.

Met de transformatie $w = z + i R$ krijgen we

$$\bar{\Omega}(\bar{w}) = \Omega(z) = - \frac{b^2}{2d} \left\{ \frac{w - iR(\omega + 1)}{w + iR(\omega - 1)} + i C \right\}$$

en hierin laten we nu R onbegrensd toenemen. We vinden dan dat voor vaste w geldt (gebruikmakend van $a^2 + b^2 = c^2$)

$$R^2 + a'^2 + b^2 = 2 R^2 - 2 R a + c^2 = 2 R^2 \left(1 - \frac{a}{R} + O(R^{-2}) \right),$$

$$d = c \sqrt{4 R^2 - 4 R a + c^2} = 2 R c (1 + O(R^{-1})),$$

$$\omega = \frac{1}{2 R^2 \left(1 - \frac{a}{R} \right)} \cdot \left\{ 2 R^2 \left(1 - \frac{a}{R} + O(R^{-2}) \right) + 2 R c (1 + O(R^{-1})) \right\} =$$

$$= 1 + \frac{c}{R} (1 + O(R^{-1})).$$

$$a'(\omega R - a') = (R - a) (R(\omega - 1) + a) = R(a + c)(1 + O(R^{-1}))$$

$$\frac{b^2 c}{2d} = - \frac{b^2}{4\lambda R c} (1 + O(R^{-1})) + \frac{b^2}{2\lambda R^2} \ln \{R(a + c)(1 + O(R^{-1}))\} = O(R^{-1})$$

$$\begin{aligned} - \frac{b^2}{2d} \cdot \frac{w - 1R(\omega + 1)}{w + 1R(\omega - 1)} &= - \frac{b^2}{4Rc(1 + O(R^{-1}))} \cdot \frac{w - 2iR(1 + O(R^{-1}))}{w + ic(1 + O(R^{-1}))} = \\ &= - \frac{b^2}{2ic(w + ic)} (1 + O(R^{-1})). \end{aligned}$$

$$\text{En dus } \lim_{R \rightarrow \infty} \bar{\Omega}(w) = - \frac{b^2}{2ic(w + ic)}, \quad (6.22)$$

en deze limieteigenschap geldt uniform in ieder eindig deelgebied van het halve vlak $\text{Im } w > 0$.

Als limiet van $\bar{\Omega}(w)$ vinden we dus juist het resultaat (6.15) van het halve vlak. Hetzelfde geldt natuurlijk voor ζ . Het windeffect voor het halve vlak verschijnt hier dus als limiet van windeffecten voor begrensde gebieden, welke aan de voorwaarde (3.5) voldoen. Desondanks divergeert de integraal in (3.5) als we hem berekenen voor het halve vlak.¹²⁾

Dit resultaat, dat hier voor een speciaal niet-begrensd gebied en een speciaal windveld bewezen is, kan ongetwijfeld gegeneraliseerd worden.

Daar nu iedere zee in feite begrensd is, behoeven we ons over het feit dat $\iint \zeta d\sigma$ bij een onbegrensd gebied in het algemeen zal divergeren (dit is geen gevolg van het speciaal gekozen windveld, in het algemeen zal $\Omega(z)$ zich voor grote z steeds als z^{-1} gedragen), niet te veel zorgen te maken. Wel maakt deze berekening plausibel dat het bij een zeer groot gebied lang kan duren, voordat de stationaire toestand zich ingesteld heeft.

12) Er is hier geen sprake van een paradox. Het feit dat $\iint_{G(R)} \zeta_R d\sigma = 0$ impliceert geenszins $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{G(R)} \zeta_R d\sigma = 0$.

Een ander, eenvoudiger voorbeeld moge dit nog verduidelijken. Voor de functie $f(x, a) = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}}$ geldt

$$\int_0^a f(x, a) dx = 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} f(x, a) = x^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{uniform in ieder eindig segment}).$$

Maar $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} dx$ divergeert.

7. Homogeen windveld boven een half vlak.

We beschouwen een homogeen windveld $W = (W_1, W_2)$ boven het halve vlak $\text{Im } z > 0$. Volgens (4.2) kunnen we als windpotentialen kiezen

$$U = 0, V = -A_1 x - A_2 y, \quad (7.1)$$

waarbij A_1 en A_2 aan (4.3) voldoen.

Een oplossing voor de complexe potentiaal, die aan de randvoorwaarde voldoet, is

$$\Omega(z) = 0,$$

doch in 3. ad 2 zagen we reeds dat dit geenszins de enige mogelijkheid is. In het algemeen kunnen we nemen

$$\Omega(z) = i f(z),$$

waarin $f(z)$ nul is als z reëel is.

We stellen nu allereerst de eis dat de stroomsnelheid $\vec{S}$ in het oneindige begrensd is. Hieruit volgt dat (daar $\vec{S}$ evenredig is met $\vec{k} \times \text{grad}(\text{Re } \Omega)$) dat $\frac{d\Omega}{dz}$ in het oneindige begrensd moet zijn. En uit de in 3. ad 2 genoemde stelling volgt dan dat

$$\Omega(z) = i(Cz + C'), \quad (7.2)$$

waarin C en C' vrije reële constanten zijn. De constante C' , die oninteressant is, zullen we in het volgende weg laten (dit komt er op neer dat weer $\zeta(0,0) = 0$ gesteld wordt). We vinden dan uit (7.1) en (7.2) als algemene oplossing

$$\lambda \Theta = -C y$$

$$\zeta = \lambda(A_1 - C)x + (\lambda A_2 - C)y.$$

De stroomlijnen lopen dus steeds evenwijdig aan de kust.

De constante C is nu nog onbepaald. Twee speciale waarden verdienen de aandacht. In de eerste plaats kunnen we nemen $C = A_1$.

We hebben dan $\Omega(z) = i A_1 z$ (7.3)

$$\lambda \Theta = -A_1 y \quad (7.4)$$

$$\zeta = (\lambda A_2 - A_1) y. \quad (7.5)$$

In dit speciale geval is ζ dus onafhankelijk van x en met name constant langs de kust ¹³⁾. Nemen we daarentegen $C = 0$, dan hebben we

$$\Omega(z) = 0 \quad (7.6)$$

$$\Theta = 0 \quad (7.7)$$

$$\zeta = \lambda(A_1 x + A_2 y) \quad (7.8).$$

13) Dit geldt ook omgekeerd: als langs de kust ζ onafhankelijk is van x , dan moet $C = A_1$ zijn.

Dit is, afgezien van een additieve constante in ζ , de oplossing (5.3) en (5.7) voor het homogene windveld boven een afgesloten zee. Er is geen stroming en de gradient van ζ is evenwijdig met W . Bedenkend dat iedere zee in wezen begrensd is, lijkt dit de meest plausibele oplossing.

We kunnen evenwel ook anders redeneren en zeggen dat geen enkel windveld boven een zee r groot gebied homogeen is. In het bijzonder kunnen we een plaatselijk min of meer homogeen windveld opvatten als het tussengebied tussen een depressie en een hogedruk gebied.

Om een indruk te krijgen van wat er in dit tussengebied gebeurt, nemen we eens het geval dat het quasi-homogene windveld het resultaat is van twee singuliere circulaire windvelden met tegengestelde polariteit, die zich bevinden in de punten $z = RA$, resp. $-RA$, (waarin $A = -A_2 + i A_1$ en R een positieve parameter is), die symmetrisch liggen t.o.v. $z = 0$. De "sterkte" van de windvelden zij $\frac{1}{2} R|A|^2$.

We hebben dus (vgl. 4.5)

$$U = \frac{1}{2} R|A|^2 \ln \left| \frac{z-RA}{z+RA} \right|, \quad V = 0. \quad (7.9)$$

Als $|z| \ll R|A|$, dan hebben we

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} R|A|^2 \operatorname{Re} \ln \frac{1 - \frac{z}{RA}}{1 + \frac{z}{RA}} \approx -|A|^2 \operatorname{Re} \frac{z}{A} = \\ &= -\operatorname{Re} \bar{A} z = A_2 x - A_1 y, \quad V = 0, \end{aligned} \quad (7.10)$$

dus juist één der voorstellingen van ons homogene windveld (vgl. (4.4), met $k = 1$).

Bij de windpotentialen (7.9) behoort nu als complexe potentiaal in het geval dat $\operatorname{Im} A > 0$ is (vgl. (6.2) en (6.6))

$$\Omega(z) = -\frac{1}{2} R|A|^2 \ln \frac{\frac{A}{\bar{A}} \cdot \frac{\bar{R}A - z}{RA + z}}{\frac{A}{\bar{A}}}, \quad (7.11)$$

waarin de vrije imaginaire constante zo gekozen is, dat de logaritme naar 0 gaat als R bij vaste A en z onbegrensd toeneemt.

Voor $|z| \ll R|A|$ geldt dan

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{1}{2} R|A|^2 \ln \frac{1 - \frac{z}{RA}}{1 + \frac{z}{RA}} \approx \frac{1}{2} |A|^2 z \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{\bar{A}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} z(A + \bar{A}) = -A_2 z. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Als $\operatorname{Im} A \leq 0$ is, vinden we precies hetzelfde resultaat.

Uit (7.10) en (7.12) volgt

$$\lambda \Theta \approx - A_1 y$$

$$\zeta = (y A_2 - A_1) y.$$

dus juist (7.4) en (7.5).¹⁴⁾

Nemen we dus aan dat onze zee groot is ten opzichte van de "afmetingen" van het quasi-homogene windveld dan is het redelijk om niet (7.7) en (7.8) doch (7.4) en (7.5) als de meest plausibele fysische functies te nemen. Voor windpotentialen en complexe potentiaal kunnen we dan (7.1) en (7.3) nemen. In 10. zullen we dit gebruiken.

Opmerking 1. We hebben bij de afleiding van (7.10) en (7.12) aangenomen dat $|z| \ll |A|_R$. We kunnen de resultaten echter ook anders opvatten. Laten we bij willekeurige vaste $z \in \mathbb{R}$ onbegrensd toenemen, dan gelden (7.10) en (7.12) in de limiet exact. We hebben het homogene windveld dan a.h.w. voorgesteld door een wervel-dipool in $z = \infty$.

Opmerking 2. Het is volstrekt niet essentieel dat we hier uitgegaan zijn van singuliere windvelden. We kunnen algemeen bewijzen dat als $U(x, 0)$ een oneven differentieerbare functie van x is en we eisen dat $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Omega(z)}{z} = 0$, voor kleine z geldt

$$\Omega(z) \approx i C - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{z=0} \cdot z.$$

waarin $i C$ een imaginaire constante is. Voor het bewijs van deze stelling verwijzen we naar appendix 6.

Als we nu het quasi-homogene windveld ontstaan denken uit twee divergentie-vrije circulaire windvelden met tegengestelde draaizijn en kernen in $z = \alpha$, resp. $z = -\alpha$ ($\alpha = \alpha_1 + i \alpha_2$), dan is (vgl. 4c)

$$U = f(|z - \alpha|) - f(|z + \alpha|), \text{ dus}$$

$$U(x, 0) = f(\sqrt{(x - \alpha_1)^2 + \alpha_2^2}) - f(\sqrt{(x + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2})$$

is een oneven functie van x . In dit geval geldt dus voor kleine $|z|$ in eerste benadering (op een vrije imaginaire constante na) formule (7.12) met $A_2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{z=0}$

14) We kunnen dit ook anders inzien: uit (2.7) en (2.8) blijkt dat de fysische functies geheel bepaald zijn door de functie $\Omega + U + i V$. Berekenen we deze functie uit (7.9) en (7.11) dan is het resultaat voor kleine $|z|$ in eerste benadering hetzelfde als wanneer we uitgaan van (7.1) en (7.3), nl. $\Omega + U + i V = -(A_1 + i A_2) y$.

8. Singulier circulair windveld boven een willekeurig gebied.
Conforme afbeelding.

Zij G een willekeurig enkelvoudig samenhangend gebied (begrensd of niet) met rand Γ en zij het windveld gegeven door

$$U = \ln|z-z_0|, \quad V = 0 \quad (8.1)$$

Als z_0 niet in G ligt, dan kunnen we als complexe potentiaal nemen

$$\Omega(z) = -\ln(z-z_0) + iC \quad (8.2)$$

want $\Omega(z)$ is dan in G analytisch en eenwaardig en op Γ is

$$\operatorname{Re} \Omega = -\ln|z-z_0| = -U.$$

Uit (8.1) en (8.2) volgt 15)

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= 0 \\ \zeta &= \lambda(\operatorname{Im} \ln(z-z_0) - C) \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Als z_0 wel in G ligt, dan kunnen we gebruik maken van het feit dat onder zeer ruime voorwaarden een enkelvoudig samenhangend gebied G van het z -vlak conform af te beelden is op het halve vlak $\operatorname{Im} w > 0$ (dat gebied zullen we $\bar{G}$ noemen). D.w.z. er is een functie $w = w(z)$ die in G analytisch en eenwaardig is, zodanig dat aan ieder punt z van G eeneenduidig een punt w van $\bar{G}$ wordt toegevoegd. En eveneens onder ruime voorwaarden geldt dat $w(z)$ continu is in $G + \Gamma$, zodat de punten van Γ afgebeeld worden op de reële as. Verder is $\frac{dw}{dz} \neq 0$ overal in G (dit volgt direct uit de eeneenduidigheid).

We bewijzen nu

Als z_0 in G ligt dan is

$$\Omega(z) = -\ln \left\{ \frac{w(z) - \overline{w(z_0)}}{w(z) - w(z_0)} \cdot (z - z_0) \right\} + iC \quad (8.4)$$

een bij het windveld (8.1) behorende oplossing voor de complexe potentiaal. iC is een vrije imaginaire constante en met $\overline{w(z_0)}$ is de complex geconjugeerde van $w(z_0)$ bedoeld.

Immers: 1°. Als z_0 in G ligt, dan ligt $w(z_0)$ in $\bar{G}$, dus $\overline{w(z_0)}$ ligt niet in $\bar{G}$ (want onder de reële as). Voor alle z uit G is dus $w(z) \neq \overline{w(z_0)}$. Verder is alleen $w(z) = w(z_0)$ als $z = z_0$ is, omdat de afbeelding eeneenduidig is. De enige singulariteit van $\Omega(z)$ in G

15) Een andere manier om dit resultaat te bereiken is de volgende.

De windpotentialen (8.1) zijn equivalent met

$$U = 0, \quad V = -\operatorname{Im} \ln(z-z_0)$$

(daar z_0 niet in G ligt is V eenwaardig in G , vgl. 3. ad 3). Hierbij behoort $\Omega(z) = iC$, waaruit weer (8.3) volgt.

ligt dus in $z = z_0$. Maar

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Omega(z) = - \ln \frac{w(z_0) - \overline{w(z_0)}}{w'(z_0)} + i C$$

en daar $w'(z_0) \neq 0$ is, heeft $\Omega(z)$ in z_0 slechts een ophefbare singulariteit. Als we definiëren $\Omega(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \Omega(z)$, dan is $\Omega(z)$ in heel G analytisch.

2^e. Als z nadert tot een punt ζ van Γ , dan nadert $w(z)$ tot een reëel getal $u = w(\zeta)$. En dus is

$$\operatorname{Re} \Omega(\zeta) = - \ln \left| \frac{u - \overline{w(z_0)}}{u - w(z_0)} \cdot (z - z_0) \right| = - \ln |z - z_0| = - U$$

omdat $|u - \overline{w}| = |u - w|$ is, als u reëel is.

Hiermee is het bewijs dat (8.4) een oplossing voor de complexe potentiaal is, voltooid.

Opmerking. We kunnen ons nog afvragen wat er gebeurt als het punt z_0 nadert tot een punt Z van Γ . Als z_0 van buiten G naar Z nadert, dan nadert $\Omega(z)$ volgens (8.2) tot $-\ln(z-Z) + iC$. Als z_0 van binnen

G naar Z nadert, dan naderen zowel $w(z_0)$ als $\overline{w(z_0)}$ tot de reële waarde $w(Z)$. Volgens (8.4) nadert $\Omega(z)$ dan dus ook tot $-\ln(z-Z) + iC$. We kunnen dus zeggen dat (8.2) ook geldt als z_0 op Γ ligt.

Voorbeelden.

1. Half vlak. $\operatorname{Im} z > 0$. Hier kunnen we nemen $w = z$. We vinden dan (als z_0 in G ligt) $\Omega(z) = - \ln(z - \overline{z_0}) + iC$, hetgeen klopt met (6.6) als we z_0 door i a vervangen. $\Omega(z)$ is hier singulier in het spiegelbeeld $\overline{z_0}$ van z_0 t.o.v. de rand van G .
2. Kwartvlak. $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. De afbeeldingsfunctie is hier $w = z^2$. En dus is (als z_0 in G ligt)

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= - \ln \frac{z^2 - \overline{z_0}^2}{z^2 - z_0^2} (z - z_0) + iC \\ &= - \ln \frac{(z - \overline{z_0})(z + \overline{z_0})}{z + z_0} + iC \end{aligned}$$

Hier is $\Omega(z)$ singulier in de spiegelbeelden $\overline{z_0}$, $-\overline{z_0}$ en $-z_0$ van z_0 t.o.v. de rand van G .

3. Cirkel $|z| < 1$. Nu is de afbeeldingsfunctie $w = i \frac{1+z}{1-z}$ (immers, als $z = \rho e^{i\varphi}$ dan is

$$w = i \frac{1 - \rho^2 + 2i \sin \varphi}{1 + \rho^2 - 2 \cos \varphi}$$

dus $\operatorname{Im} w = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \varphi} > 0$ als $\rho < 1$).

We krijgen nu

$$\Omega(z) = - \ln \left\{ \frac{i \frac{1-z}{1+\bar{z}} + i \frac{1-\bar{z}_0}{1+z_0}}{i \frac{1-z}{1+\bar{z}} - i \frac{1-\bar{z}_0}{1+z_0}} (z-z_0) \right\} + i C$$

$$= - \ln \frac{1+z_0}{1+\bar{z}_0} - \ln (z \bar{z}_0 - 1) + i C =$$

De eerste term is een imaginaire constante, de tweede term is singulier in het t.o.v. de cirkel bij z_0 behorende inverse punt $(\bar{z}_0)^{-1}$.

4. Rechthoek $-1 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < a$.

De elliptische functie van Jacobi

$$w = \operatorname{sn} (K z, k),$$

waarin de modulus k bepaald wordt door

$$\frac{K'}{K} = a$$

en $K = K(k)$, $K' = K(k') = K(\sqrt{1-k^2})$ volledige elliptische integralen van de eerste soort zijn, beeldt dit gebied conform af op het halve vlak $\operatorname{Im} w > 0$.

We vinden hier dus

$$\Omega(z) = - \ln \left\{ \frac{\operatorname{sn} z - \operatorname{sn} \bar{z}_0}{\operatorname{sn} z - \operatorname{sn} z_0} \cdot (z-z_0) \right\}.$$

De singulariteiten van $\Omega(z)$ liggen hier in de punten waar $\operatorname{sn} z = \operatorname{sn} z_0$ (exclusief $z = z_0$) of waar $\operatorname{sn} z = \operatorname{sn} \bar{z}_0$ is. Dit zijn de punten

$$z = (-1)^m z_0 + 2 m K + 2 i n K' \quad (m, n \text{ geheel, niet beide } 0)$$

$$\text{en } z = (-1)^m \bar{z}_0 + 2 m K + 2 i n K' \quad (m, n \text{ geheel}),$$

die alle weer ontstaan door spiegeling of herhaalde spiegeling van z_0 t.o.v. de zijden van de rechthoek.

9. De integraal van Poisson.

Willekeurig divergentie-vrij windveld.

De behandeling van een willekeurig divergentie-vrij windveld boven een enkelvoudig samenhangend gebied G met rand Γ komt neer op de oplossing van het randwaardeprobleem: gezocht een in G analytische functie $\Omega(z)$ waarvan het reële deel op Γ voorgeschreven waarden aanneemt (de waarden van $-U$ op Γ). Voor alle enkelvoudig samenhangende gebieden G , die we conform op een half vlak kunnen afbeelden, kunnen we de oplossing van dit vraagstuk vinden met be-

hulp van de integraalformule van Poisson-Schwarz voor een half vlak. Deze luidt:

Als $\varphi(x)$ een voor alle reële x continue functie is, waarvoor de integraal

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\xi z}{(\xi-z)(1+\xi^2)} \varphi(\xi) d\xi \quad (9.1)$$

bestaat dan is $\Omega(z)$ een voor $\text{Im } z > 0$ analytische functie en als z vanuit het bovenste halve vlak nadert tot een punt x van de reële as, dan is

$$\lim_{z \rightarrow x} \text{Re } \Omega(z) = \varphi(x) \quad (9.2)$$

Een voldoende voorwaarde voor het bestaan van de integraal is natuurlijk: er zijn positieve getallen M , L en δ te vinden, zodanig dat $|\varphi(x)| < M|x|^{1-\delta}$ voor $|x| > L$.

We kunnen schrijven

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi-z} - \frac{\xi}{1+\xi^2} \right) \varphi(\xi) d\xi$$

en als het gedrag van $\varphi(x)$ voor grote $|x|$ zodanig is dat we de integraal in twee integralen mogen splitsen (voldoende voorwaarde: er zijn positieve M , L en δ , zodanig dat $|\varphi(x)| < M|x|^{-\delta}$ voor $|x| > L$) dan geldt de bewering (9.2) ook voor

$$\Omega^*(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi-z} d\xi, \quad (9.3)$$

aangezien de tweede integraal een imaginaire constante is.

Het bewijs van (9.2) laten we hier achterwege, dit verloopt geheel op dezelfde manier als het bewijs van de formule van Poisson voor een cirkel (zie b.v. Hurwitz-Courant, [3], III, 3. § 8 en 9).

Met behulp van (9.1) of (9.3) kunnen we nu de complexe potentiaal behorend bij een divergentie-vrij windveld boven een half vlak direct berekenen. Voor de functie $\varphi(x)$ moeten we dan $-U(x,0)$ nemen.

Als voorbeeld nemen we het windveld III uit 4.c:

$$U = \frac{b^2}{2\{|z-ia|^2+b^2\}}, \quad V = 0.$$

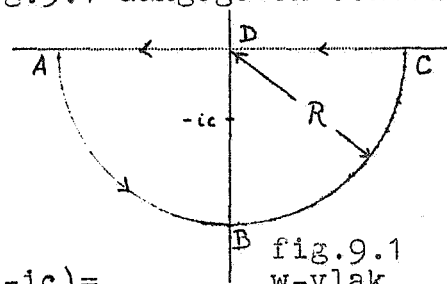
Hiervoor is dus $-U(x,0) = \frac{b^2}{2(x^2+c^2)}$, als $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

We krijgen nu, daar deze functie zich voor grote $|x|$ als x^{-2} gedraagt volgens (9.3)

$$\Omega(z) = \frac{b^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi-z)(\xi^2+c^2)}.$$

Deze integraal berekenen we het eenvoudigst door contour-integratie van de functie $\frac{1}{(w-z)(w^2+c^2)}$ langs de in fig.9.1 aangegeven contour

ABCD. Laten we de straal van de halve cirkel onbegrensd toenemen dan vinden we in de limiet (voor $\text{Im } z > 0$)



$$\Omega(z) = -b^2 \left(\text{residu van } \frac{1}{(w-z)(w^2+c^2)} \text{ in } w = -ic \right) =$$

$$= -b^2 \frac{1}{(-ic-z)(-2ic)} = -\frac{b^2}{2ic(z+ic)}$$

dus het resultaat (6.15).

Ook de formule (6.11) kunnen we op deze wijze vinden, doch hier moeten we natuurlijk (9.1) gebruiken.

We willen nu formule (9.1) generaliseren. Zij G een enkelvoudig samenhangend gebied van het z-vlak dat door $w = f(z)$ conform wordt afgebeeld op het halve vlak $\text{Im } w > 0$.

Zij $\varphi(z)$ een continue reële langs de rand Γ van G gegeven functie.¹⁶⁾ We definiëren nu langs de reële as van het w-vlak de functie $\varphi^*(w)$ door

$$\varphi^*(f(z)) = \varphi(z),$$

(daar $f(z)$ eeneenduidig is, ook langs Γ , is deze definitie ondubbelzinnig).

Dan is

$$\Omega^*(w) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\xi w}{(\xi-w)(1+\xi^2)} \varphi^*(\xi) d\xi \quad (9.4)$$

een voor $\text{Im } w > 0$ analytische functie, waarvoor geldt

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \text{Re } \Omega^*(w) = \varphi^*(w_0)$$

als w vanuit het bovenste halve vlak tot een reëel getal w_0 nadert.

De functie

$$\Omega(z) = \Omega^*(f(z)) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\xi f(z)}{(\xi-f(z))(1+\xi^2)} \varphi^*(\xi) d\xi \quad (9.5)$$

is dan een in G analytische functie, waarvoor geldt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \text{Re } \Omega(z) = \varphi^*(f(z_0)) = \varphi(z_0) \quad (9.6)$$

als z vanuit G tot een punt z_0 van de rand van G nadert.

16) De notatie $\varphi(z)$ is aanvechtbaar, maar gemakkelijk; we bedoelen: φ is functie van de booglengte of een andere reële parameter langs Γ , φ is dus slechts gedefinieerd in de punten z die op Γ liggen.

We kunnen nu in (9.5) nog een nieuwe integratie-variabele t invoeren: $\xi = f(t)$. De integratie loopt dan langs Γ en als t in positieve zin Γ doorloopt, dan doorloopt ξ de reële as in positieve richting. We krijgen dan

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1 + f(t) f(z)}{(f(t) - f(z))(1 + f^2(t))} \varphi(t) f'(t) dt. \quad (9.7)$$

waarna de gewenste generalisatie van de formule van Poisson bereikt is.

We hebben de voorwaarde voor $\varphi^*(w)$ voor $|w| \rightarrow \infty$ even veronachtzaamd. In het algemeen kunnen we zeggen, dat $\varphi^*(w)$ zodanig moet zijn dat de integraal in (9.4) bestaat en dit is dan en slechts dan het geval als $\varphi(z)$ zodanig is dat de integraal in (9.7) bestaat.

Ook nu kunnen we weer zeggen dat ook

$$\Omega^*(z) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{f(t) - f(z)} f'(t) dt \quad (9.8)$$

een in G analytische functie is die aan (9.6) voldoet, mits de integraal in (9.8) bestaat. Immers de functies $\Omega^*(z)$ en $\Omega(z)$ verschillen slechts de constante

$$\frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t) f(t)}{1 + f^2(t)} f'(t) dt$$

die zuiver imaginair is, daar $f(t)$ en $f'(t)dt$ reëel zijn op Γ .

Met de formules (9.7), resp. (9.8) kunnen we onze randwaarde problemen oplossen voor alle enkelvoudig samenhangende gebieden G , van het z -vlak, die door een in G analytische functie $w = f(z)$ conform op het halve vlak $\text{Im } w > 0$ afgebeeld worden. Voor de functie $\varphi(t)$ moeten we natuurlijk weer $-U(\text{Re } t, \text{Im } t)$ nemen.

We behandelen nu enkele voorbeelden.

1. Zij G de cirkel $|z| < R$. De afbeeldingsfunctie is dan $w = f(z) = i \frac{R+z}{R-z}$,

en als z de cirkel $|z| = R$ in positieve zin doorloopt, dan loopt w langs de reële as in positieve richting.

Vullen we deze functie $f(z)$ in (9.7) in dan vinden we na enig rekenen de bekende integraalformule van Poisson-Schwarz voor de cirkel 17)

-
- 17) Als regel bewijst men deze formule direct en leidt daaruit de formule (9.1) voor het halve vlak af. Daar echter voor de toepassingen de afbeelding op een half vlak vaak eenvoudiger is dan de afbeelding op een cirkel, geven wij er hier de voorkeur aan om (9.1) als fundamenteel te beschouwen.

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t+z}{t-z} \varphi(t) \frac{dt}{t} \quad (9.9)$$

waarbij geïntegreerd moet worden langs de cirkel $|t| = R$.

2. Zij G het kwartvlak $\text{Im } z > 0, \text{Re } z > 0$ en zij een windveld gegeven

$$\text{door } U = -\frac{1}{|z-a|^2+b^2}, \quad V = 0$$

$$\text{met } a = a_1 + i a_2.$$

$$\text{We hebben dan } U(x,0) = -\frac{1}{(x-a_1)^2+c_1^2}, \quad U(0,y) = -\frac{1}{(y-a_2)^2+c_2^2}$$

$$\text{als } c_1 = \sqrt{a_2^2 + b^2}, \quad c_2 = \sqrt{a_1^2 + b^2}.$$

Daar $w = z^2$ de afbeeldingsfunctie is, vinden we met (9.8)

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{2}{\pi i} \int \frac{U(t)}{t^2-z^2} t dt = \\ &= \frac{2}{\pi i} \left[\int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(\xi^2-z^2)((\xi-a_1)^2+c_1^2)} - \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{(\eta^2+z^2)((\eta-a_2)^2+c_2^2)} \right] \end{aligned} \quad (9.10)$$

waarin langs de positief reële as $t = \xi$ en langs de positief imaginaire as $t = i\eta$ gesteld is.

De integralen kunnen berekend worden door contour-integratie (zie appendix 7) en we vinden

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{m,n=0}^1 \frac{(-1)^n}{z-(-1)^m a_1 - (-1)^n i c_1} \ln \frac{(-1)^{m+1} z}{-a_1 - (-1)^{m+n} i c_1} + \\ &- \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{m,n=0}^1 \frac{(-1)^n}{iz-(-1)^m a_2 - (-1)^n i c_2} \ln \frac{(-1)^{m+1} iz}{-a_2 - (-1)^{m+n} i c_2}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

waarin voor elke logarithme het verschil van de hoofdlogarithmen van teller en noemer genomen moet worden.

We merken op dat $\Omega(z)$ in de punten, gegeven door $z = (-1)^m a_1 + (-1)^n i c_1$ en $iz = (-1)^m a_2 + (-1)^n i c_2$ ($m, n = 0, 1$) regulier is, omdat de logarithmen hier nul worden. In het punt $z = 0$ is $\Omega(z)$ singulier, maar in een omgeving van $z = 0$ (inclusief dit punt) is $\Omega(z)$ begrensd, daar voor kleine z

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \left[-\frac{1}{2\pi c_1} \sum \frac{(-1)^n}{(-1)^m a_1 + (-1)^n i c_1} + \frac{1}{2\pi c_2} \sum \frac{(-1)^n}{(-1)^m a_2 + (-1)^n i c_2} \right] \ln|z| + \\ &+ O(1) = \\ &= \frac{2i}{\pi} \left(\frac{1}{a_1^2 + c_1^2} - \frac{1}{a_2^2 + c_2^2} \right) \ln|z| + O(1) = O(1), \end{aligned}$$

$$\text{daar } a_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + c_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b^2 \text{ is.}$$

We zien af van verdere interpretatie en uitwerking van (9.11).

11. Homogeen windveld boven een zee met baai.

We beschouwen het gebied G , bepaald door

$$-a < \text{Im } z < \infty \text{ voor } 0 \leq |\text{Re } z| < 1$$

$$0 < \text{Im } z < \infty \text{ voor } 1 \leq |\text{Re } z| < \infty$$

(vergelijk fig.10.1)

We kunnen dit gebied opvatten als een zee (die een half vlak beslaat) met een baai of ook als een oceaan met een randzee. Schalkwijk([1], p.24) beschouwt dit gebied

(met $a = 4$ en een schaal-

factor $\frac{1}{2} L$) als model voor Atlantische Oceaan met Noordzee.

Als windpotentialen voor een homogeen windveld nemen we

$$U = 0, V = -A_1 x - A_2 y. \quad (10.1)$$

Daar het gebied G niet begrensd is, kunnen we dezelfde onbepaaldheid in Ω en de daaruit afgeleide fysische functies verwachten als in 7., toen het gebied G een half vlak was.

We kunnen het effect van de baai in het onderhavige probleem nu opvatten als een storing in de oplossing van het probleem voor het halve vlak, die op grote afstanden van de baai nauwelijks meer merkbaar zal zijn. Dat wil zeggen, dat als $|z|$ onbepaald toeneemt, de complexe potentiaal moet naderen tot de complexe potentiaal van het probleem voor het halve vlak.

Nemen we voor de complexe potentiaal voor het halve vlak $\text{Im } z > 0$, behorend bij de windpotentialen (10.1) de algemene vorm (7.2) (met $C' = 0$), dan moet de complexe potentiaal $\Omega(z)$ voor de zee met baai voor grote z naderen tot

$$\Omega_{\infty}(z) = i C z \quad (C \text{ reëel}) \quad (10.2)$$

$$\text{Stellen we } \Omega(z) = i f(z) \quad (10.3)$$

dan geldt voor $f(z)$ dus

$$\text{Im } f(z) = 0 \text{ langs } \Gamma \quad (10.4)$$

terwijl voor grote z $f(z)$ moet naderen tot

$$f_{\infty}(z) = C z. \quad (10.5)$$

Zij nu $s = s(z)$ een in G analytische functie, die het gebied G afbeeldt op het halve vlak $\text{Im } s > 0$, zodanig dat de omgeving van het punt $z = \infty$ conform op de omgeving van het punt $s = \infty$ wordt af-

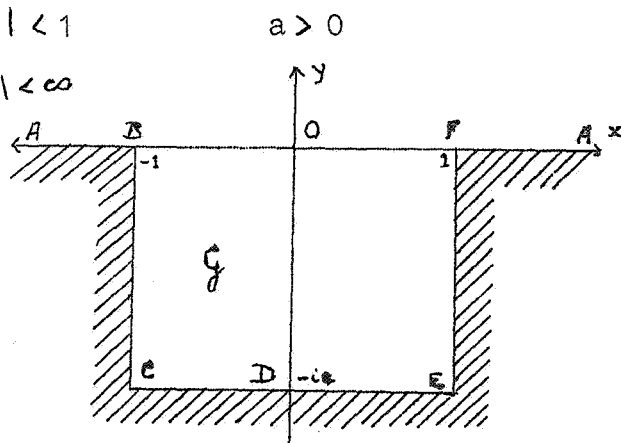


fig.10.1

afgebeeld. Dan geldt dus voor z op Γ $\operatorname{Im} s(z) = 0$, (10.6)
terwijl voor grote z geldt

$$s = \gamma z (1 + O(z^{-1})) \quad (10.7)$$

Hierin is γ een in het algemeen complexe constante, maar stellen we bovendien nog als eis voor de afbeelding dat de punten $z = -1$, resp. $-ia$ en 1 afgebeeld worden in -1 , resp. 0 en 1 , dan is hierdoor de afbeelding eenduidig bepaald en op grond van het spiegelingssprincipe kunnen we inzien dat γ reëel is (de imaginaire as wordt dan afgebeeld op de imaginaire as).

Vergelijken we de eigenschappen (10.6) en (10.7) van de functie $s(z)$ met de eisen (10.4) en (10.5) die we aan $f(z)$ stelden, dan blijkt dat

$$f(z) = \frac{C}{\gamma} s(z) \quad (10.8)$$

volledig aan deze eisen voldoet.

In rapport TW 22 [4] is de hierboven gedefinieerde afbeeldingsfunctie bepaald. Het blijkt niet mogelijk om s d.m.v. bekende functies expliciet in z uit te drukken, doch er is een hulp-variabele t nodig. We kunnen de afbeelding dan als volgt beschrijven:

Door:

$$z = \frac{1}{E(k')} \left\{ zn(t, k) - \frac{K(k) - E(k)}{K(k)} t \right\} - 1 \quad (10.9)$$

en $s = -dn(t, k)$, waarin (10.10)

$zn(t, k)$ de z.g. zêta-functie van Jacobi ¹⁸⁾ is,

$dn(t, k)$ de z.g. delta-amplitudinis, een der elliptische functies van Jacobi is,

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$K(k)$ en $E(k)$ de volledige elliptische integralen van de eerste resp. tweede soort zijn,

wordt het gebied $0 < \operatorname{Re} t < K(k)$

$$0 < \operatorname{Im} t < 2 K(k')$$

van het t -vlak afgebeeld op het gebied G van het z -vlak, resp. op het gebied $\operatorname{Im} s > 0$ van het s -vlak, waarbij de correspondentie tussen de verschillende bijzondere punten is als in fig. 10.2 t/m 10.4 aangegeven is. De modulus k van de functies van Jacobi moet bepaald worden uit

$$\frac{K(k) - E(k)}{E(k')} = a \quad (10.11)$$

en ligt voor iedere positieve waarde van a eenduidig vast.

18) Voor formules betreffende deze functies verwijzen we naar Oberhettinger und Magnus [5] en naar de appendix van rapport TW 22.

In het volgende noemen we $zn(t, k) = zn\ t$, $K(k) = K$, $K(k') = K'$, etc.

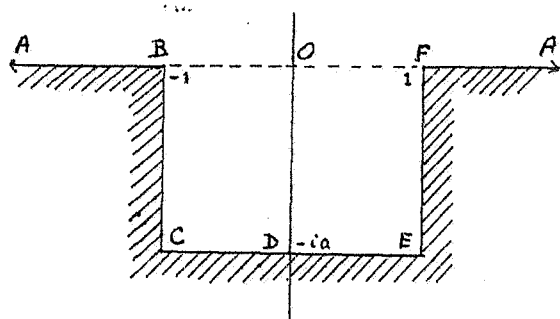


fig. 10.2 z-vlak

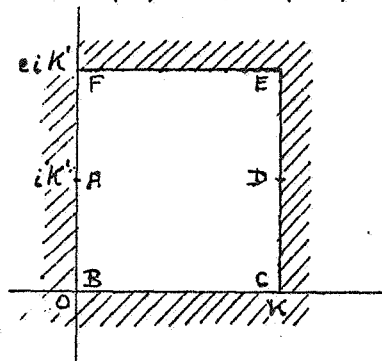


fig. 10.3 t-vlak

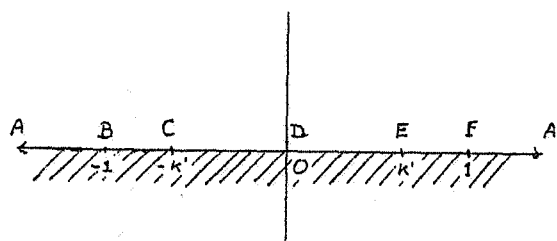


fig. 10.4 s-vlak.

Voor grote z blijkt uit (10.9) en (10.10)

$$s = E' z (1 + O(z^{-2})) \quad (10.12)$$

en op grond van (10.7) en (10.8) en (10.3) krijgen we dus ¹⁹⁾

$$\Omega(z) = \frac{1C}{E'} s(z) \quad (10.13)$$

Om hieruit de waarde van Ω in een bepaald punt z te vinden moeten we natuurlijk eerst m.b.v. (10.9) de bijbehorende waarde van t bepalen, waarna s uit (10.10) volgt. Substitueren we (10.10) in (10.13) dan krijgen we Ω als functie van t ; samen met (10.9) geeft dit een parameter-voorstelling van $\Omega = \Omega(t)$ met t als parameter.

In 7. hebben we aangetoond dat de meest plausibele waarde voor de nog vrije constante C is $C = A_1$. Nemen we deze waarde hier over (op grond van het feit dat de baai alleen een plaatselijke storing in het stromingsbeeld van de zee geeft) dan vinden we voor de functie $\Omega + U + i V$, waardoor volgens (2.7) en (2.8) de fysische functies bepaald zijn.

$$\Omega + U + i V = \frac{iA_1}{E'} s(z) - i(A_1 x + A_2 y) \quad (10.14)$$

19) Door beschouwing van de functie $\Omega^*(s) = \Omega(z(s))$ vinden we met behulp van de stelling uit 3.b direct dat (10.13) ook de enige oplossing is, die aan de gestelde eisen voldoet.

Opmerking. We kunnen dit resultaat ook op een andere manier, analoog aan die van 7., bereiken. We beschouwen het homogene windveld weer als tussengebied tussen twee singuliere circulaire windvelden met kernen in de punten $z = \pm RA$ (R reëel, $A = -A_2 + i A_1$) met „sterkte“ $\pm \frac{1}{2} R |A|^2$:

$$U = \frac{1}{2} R |A|^2 \ln \left| \frac{z-RA}{z+RA} \right|, \quad V = 0. \quad (10.15),$$

Met behulp van (8.2) en (8.4) vinden we voor de hierbij behorende complexe potentiaal als $\text{Im } A > 0$ (voor voldoende grote R ligt dan RA in G en $-RA$ buiten G)

$$\Omega(z) = -\frac{1}{2} R |A|^2 \ln \left\{ \frac{s(RA)}{s(\overline{RA})} \cdot \frac{\overline{s(RA)} - s(z)}{s(RA) - \overline{s(z)}} \cdot \frac{RA - z}{RA + z} \right\}. \quad (10.16)$$

waarin $s = s(z)$ de door (10.9) en (10.10) gedefinieerde afbeeldingsfunctie is. De vrije imaginaire constante in Ω hebben we zo gekozen dat de logarithme naar nul gaat als R bij vaste A en z onbegrensd toeneemt.

Voor $|z| \ll R|A|$ vinden we uit (10.15) (vgl. 7.10) de met (10.1) aequivalente windpotentials

$$U \approx A_2 x - A_1 y, \quad V = 0 \quad (10.17)$$

terwijl met behulp van (10.12) uit (10.16) volgt

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{1}{2} R |A|^2 \ln \left\{ \frac{1 - \frac{s(z)}{s(RA)}}{1 - \frac{s(z)}{s(\overline{RA})}} \cdot \frac{1 - \frac{z}{RA}}{1 + \frac{z}{\overline{RA}}} \right\} \\ &\approx \frac{1}{2} |A|^2 \left[s(z) \left(\frac{1}{E \overline{A}} - \frac{1}{E A} \right) + \frac{2z}{A} \right] = \\ &= \frac{s(z)}{2E} \cdot (A - \overline{A}) + \overline{A} z \\ &= i \frac{A_1}{E} s(z) - (A_2 + i A_1) z. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Als $\text{Im } A \leq 0$, dan verandert wel (10.15) maar de benadering (10.18) blijft dezelfde.

Uit (10.17) en (10.18) vinden we voor de functie $\Omega + U + i V$

$$\Omega + U + i V \approx i \frac{A_1}{E} s(z) - i (A_1 x + A_2 y),$$

dus inderdaad het resultaat (10.14).

Nemen we verder aan dat $C = A_1$, dan vinden we uit (10.14) voor Φ en ζ

$$\begin{aligned}\Phi &= - \frac{A_1}{\lambda E'} \operatorname{Im} s(z) \\ \zeta &= - \frac{A_1}{E'} \operatorname{Im} s(z) - \frac{\lambda A_1}{E'} \operatorname{Re} s(z) + \lambda (A_1 x + A_2 y).\end{aligned}\quad (10.19)$$

Nemen we nog $A_1 = \frac{4\pi W_1}{e g D}$, $A_2 = \frac{4\pi W_2}{e g D}$ (vgl. 4.3),

dan vinden we dat langs Γ geldt

$$\zeta = - \frac{W_1}{e g H} \frac{1}{E'} \operatorname{Re} s(z) + \frac{1}{e g H} (W_1 x + W_2 y) \quad (10.20)$$

In de bijzondere punten uit fig.10.1 hebben we speciaal (met $a = 4$)

	z	s	ζ
A	$+\infty$ (reëel)	∞	0
B	-1	-1	$-\frac{W_1}{e g H} \left(1 - \frac{1}{E'}\right)$
C	$-1-4i$	$-k'$	$-\frac{W_1}{e g H} \left(1 - \frac{k'}{E'}\right) - \frac{4W_2}{e g H}$
D	$-4i$	0	$-\frac{4W_2}{e g H}$
E	$1-4i$	k'	$\frac{W_1}{e g H} \left(1 - \frac{k'}{E'}\right) - \frac{4W_2}{e g H}$
F	1	1	$\frac{W_1}{e g H} \left(1 - \frac{1}{E'}\right)$

Langs de "Zuidkust" CE van de baai varieert $s(z)$ van $-k'$ tot k' . En daar voor $a = 4$ uit (10.11) volgt $k' \sim 3 \cdot 10^{-3}$ (vgl. [4], (13)), dus $E' \approx \frac{\pi}{2}$, geldt langs CE praktisch

$$\zeta \approx \frac{1}{e g H} (W_1 x - 4 W_2), \quad (10.21)$$

d.i. de oplossing voor de gesloten zee met zwaartepunt in $z = 0$ (vgl. 5.7)).

11 Vergelijking van de resultaten uit 10. met die van Schalkwijk.

In § 3a van zijn dissertatie behandelt Schalkwijk het geval van een homogeen windveld boven een oceaan met baai van constante diepte met behulp van een benaderingsmethode. De afmetingen van de baai zijn bij hem $\frac{1}{2} L$ maal zo groot als bij ons, zodat de uitkomsten uit 10. met een factor $\frac{1}{2} L$ vermenigvuldigd moeten worden om met die van Schalkwijk vergelijkbaar te zijn.

De moeilijkheid dat een ad hoc-hypothese nodig is om de stroomsterkte op de oceaan ver van de baai vast te leggen, lost Schalkwijk als volgt op: "we assume generally that the height of the sea-level in C and F (dat zijn de punten B en F uit fig.10.1) will not be changed by the wind. In the case of the North Sea we are surely allowed to do that. In C and F holds therefore $\zeta = 0$ ".

Als wij deze voorwaarde overnemen, dan krijgen we, daar algemeen uit (10.13) volgt

$$\zeta(x,y) = \lambda(A_1 x + A_2 y) - \frac{C}{E'} \operatorname{Im} s(z) - \frac{\lambda C}{E'} \operatorname{Re} s(z),$$

dus

$$\zeta(\pm 1, 0) = A_1 \lambda \mp \frac{\lambda C}{E'}$$

voor C de waarde

$$C = E' A_1.$$

Met deze waarde van C krijgen we volgens (10.2)

$$\Omega_\infty(z) = i E' A_1 z.$$

Daar nu de waarde van E' van de afmetingen van de baai afhangt ($E' = E(k')$ en k' hangt volgens (10.11) af van a), zouden op grote afstand van de baai de complexe potentiaal en dus ook de fysische functies θ en ζ afhankelijk zijn van de afmetingen van de baai. Dit strijdt met het (ook door Schalkwijk gehuldigde) uitgangspunt, dat het effect van de baai op de oceaan-stroming slechts tot op beperkte afstand van de baai merkbaar zou zijn.

De door Schalkwijk gebruikte voorwaarde moet derhalve onjuist geacht worden en vervangen worden door de voorwaarde dat op grote afstand van de baai de stroming nadert tot de a priori bekende stroming in een oceaan zonder baai. ²⁰⁾

We zien uit de tabel op pag.40 dat de waarde van ζ in het punt D ("Hoek van Holland") overeenstemt met die van Schalkwijk. Dit is niet verwonderlijk; daar in dit punt $s(z) = 0$ is, is de waarde van ζ hier onafhankelijk van de waarde van de constante C.

Verder is ook eenvoudig in te zien dat langs de gehele Zuidkust Schalkwijk's uitkomst overeenstemt met de (zeer goede) benadering (10.21) die uit onze exacte behandeling volgt. Wat de voor de praktisch belangrijke resultaten betreft, zijn Schalkwijk's antwoorden dus correct.

20) Schalkwijk neemt van de oceaanstroming op grote afstand van de baai alleen aan dat de stroomlijnen daar evenwijdig met de kust en aequidistant lopen. Dit komt neer op onze aanname (10.2) met een onbekende constante C.

Appendix 1.

Berekenregels 2-dimensionale vectoranalyse.

1. Als $\vec{a} = (a_1, a_2)$, dan is

$$\vec{k} \times \vec{a} = (-a_2, a_1)$$

$$\text{en } \vec{a} \times (\vec{k} \times \vec{a}) = -\vec{a}$$

zie fig. A1.1

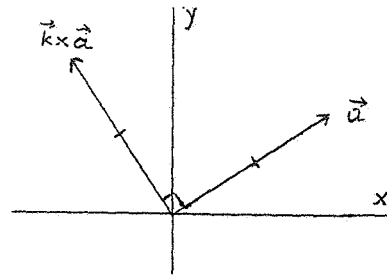


fig. A1.1

2. Differentiaal-operatoren

a) op scalar-velden $\varphi = \varphi(x, y)$:

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

$$\text{rot } \vec{k} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

$$\text{relaties: } \text{rot } \vec{k} \varphi = -\vec{k} \times \text{grad } \varphi.$$

$$\text{grad } \varphi = \vec{k} \times \text{rot } \vec{k} \varphi.$$

b) op vector-velden $\vec{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))$

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

$$\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

$$\text{relaties: } \vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u} = -\text{div } (\vec{k} \times \vec{u})$$

$$\text{div } \vec{u} = \vec{k} \cdot \text{rot } (\vec{k} \times \vec{u})$$

3. Voor herhaalde differentiatie van scalaire velden geldt:

$$\text{div } (\text{grad } \varphi) = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{k} \varphi) = 0.$$

$$\vec{k} \cdot \text{rot}(\text{grad } \varphi) = 0$$

$$\vec{k} \cdot \text{rot}(\text{rot } \vec{k} \varphi) = -\Delta \varphi.$$

Appendix 2.

Lemmas.

Lemma 1. Als voor een continu differentieerbaar vectorveld $\vec{u}(x, y)$ geldt $\vec{k} \cdot \text{rot } \vec{u} = 0$,

dan is er een scalarveld $\psi(x, y)$ zodanig dat

$$\vec{u} = - \operatorname{grad} \psi.$$

Als voor een continu differentieerbaar vectorveld $\vec{v}$ geldt

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

dan is er een scalarveld φ zodanig dat

$$\vec{v} = - \operatorname{rot} \vec{k} \varphi$$

φ en ψ zijn op een additieve constante na eenduidig bepaald en in een enkelvoudig samenhangend gebied eenwaardig.

Bewijs. $\vec{k} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} = 0$ betekent $\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$, dus de vergelijking $u_1 dx + u_2 dy = 0$ is een exacte differentiaalvergelijking. Er is dus (cf. Courant[5] p.352 e.v.) een functie $\psi(x,y)$ die op een additieve constante na eenduidig bepaald is en waarvoor geldt

$$\vec{u} = - \operatorname{grad} \psi$$

en deze functie is in een enkelvoudig samenhangend gebied eenwaardig.

Het tweede deel van dit lemma bewijzen we eenvoudig door op te merken dat voor het vectorveld $\vec{w} = \vec{k} \times \vec{v}$ geldt

$$\vec{k} \cdot \operatorname{rot} \vec{w} = \vec{k} \cdot \operatorname{rot} (\vec{k} \times \vec{v}) = \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Uit het eerste deel van het lemma volgt dan dat er een functie $\varphi(x,y)$ is, waarvoor

$$\vec{w} = - \operatorname{grad} \varphi.$$

Hieruit volgt $\vec{v} = - \vec{k} \times \vec{w} = \vec{k} \times \operatorname{grad} \varphi = - \operatorname{rot} \vec{k} \varphi$.

Lemma 2. Als voor continu differentieerbare scalaire velden $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ in een zeker gebied G van het x,y -vlak geldt

$$\operatorname{rot} \vec{k} \varphi + \operatorname{grad} \psi = 0,$$

dan is $\varphi + i\psi$ in G een complexe analytische functie van de complexe variabele $z = x + iy$. Ook het omgekeerde van deze stelling geldt.

Bewijs. Schrijven we het gegeven in componenten uit, dan krijgen we

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Dit zijn de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann, die, samen met de continuïteit van de afgeleiden van φ en ψ , nodig en voldoende zijn voor de analytischeïteit van $\varphi + i\psi$, beschouwd als functie van $z = x + iy$.

Lemma 3. Bij een willekeurig continu differentieerbaar vectorveld $\vec{u}$ zijn scalaire velden φ en ψ te vinden, zodanig dat

$$\vec{u} = - \operatorname{rot} \vec{k} \varphi - \operatorname{grad} \psi.$$

De complexe functie $\varphi + i\psi$ is hierbij op een additieve analytische functie van $z = x + iy$ na eenduidig bepaald en kan in een enkelvoudig samenhangend gebied eenwaardig worden gekozen.

Bewijs. Zij $\psi(x,y)$ een willekeurige, bij het gebied waarin u gedefinieerd is behorende oplossing van de vergelijking

$$\Delta \psi = - \operatorname{div} \vec{u}.$$

dan geldt $\operatorname{div} (\vec{u} + \operatorname{grad} \psi) = 0$,

dus volgens lemma 1 is er een functie $\varphi(x,y)$, zodanig dat

$$\vec{u} = - \operatorname{rot} \vec{k} \varphi - \operatorname{grad} \psi.$$

Als ook voor de functies φ_1 en ψ_1 geldt dat

$$\vec{u} = - \operatorname{rot} \vec{k} \varphi_1 - \operatorname{grad} \psi_1,$$

dan geldt voor $\varphi_0 = \varphi - \varphi_1$ en $\psi_0 = \psi - \psi_1$

$$\operatorname{rot} \vec{k} \varphi_0 + \operatorname{grad} \psi_0 = 0.$$

Volgens lemma 2 is dan $\varphi_0 + i\psi_0$ een analytische functie van $z = x + iy$.

Daar we de functie ψ zeker eenwaardig kunnen kiezen en volgens lemma 1 de hierbij behorende functie φ in een enkelvoudig samenhangend gebied ook eenwaardig is, kan dus ook $\varphi + i\psi$ in een enkelvoudig samenhangend gebied eenwaardig worden gekozen.

Opmerking 1. Noemen we $- \operatorname{rot} \vec{k} \varphi = \vec{u}_1$, $- \operatorname{grad} \psi = \vec{u}_2$, dan geldt

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ \operatorname{div} \vec{u}_1 &= 0 \\ \vec{k} \operatorname{rot} \vec{u}_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{u}_1$ is dus het divergentie-vrije, $\vec{u}_2$ het rotatie-vrije deel van $\vec{u}$.
Natuurlijk is

$$\begin{aligned} \vec{k} \operatorname{rot} \vec{u}_1 &= \vec{k} \operatorname{rot} \vec{u} \\ \operatorname{div} \vec{u}_2 &= \operatorname{div} \vec{u}. \end{aligned}$$

Opmerking 2. In alle voor ons belangrijke meervoudig samenhangende gebieden kunnen we, als $\vec{u}$ eenwaardig is, ook φ en ψ eenwaardig kiezen.

$$\text{Zij } \psi_0(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_G \operatorname{div} \vec{u}(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi d\eta,$$

dan is ψ_0 een in G eenwaardige oplossing van de vergelijking

$$\Delta \psi_0 = - \operatorname{div} \vec{u}.$$

De hierbij behorende functie $\varphi_0(x,y)$, die voldoet aan

$$- \operatorname{rot} \vec{k} \varphi_0 = \vec{u} + \operatorname{grad} \psi_0$$

behoeft dan nog niet eenwaardig te zijn, doch, daar $\vec{u}$ en $\operatorname{grad} \psi_0$ eenwaardig zijn, is ook $\operatorname{grad} \varphi_0 = - \operatorname{rot} \vec{k} \varphi_0$ wel eenwaardig.

We beperken ons nu tot het geval dat G een "zee met eindig veel eilanden" is. D.w.z. er is een open gebied G_0 aan te geven zodanig dat het complement van G ten opzichte van G_0 bestaat uit eindig veel enkelvoudig samenhangende afgesloten gebieden $G_1, G_2, \dots, G_n$ die onderling noch met G_0 randpunten gemeen hebben (zie fig.A2.1).

Zij Γ_k een gesloten rectificeerbare kromme zonder dubbelpunten die in G verloopt, alleen punten van $G + G_k$ omvat en G_k in positieve zin doorloopt.

$$\text{Zij } \oint_{\Gamma_k} d\varphi_0 = a_k.$$

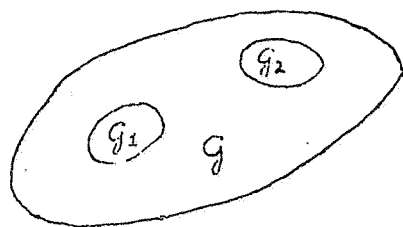


fig.A2.1

$$G_0 = G + G_1 + \dots + G_n.$$

Dat deze uitkomst dezelfde is voor alle krommen Γ_k van het beschouwde type, zien we als volgt. We kunnen het gebied tussen twee dergelijke krommen enkelvoudig samenhangend maken door een verbindingslijn aa' (zie fig.A2.2)²¹⁾.

In dit enkelvoudig samenhangende gebied kunnen we een eenwaardige tak van φ beschouwen, waarvoor we vinden

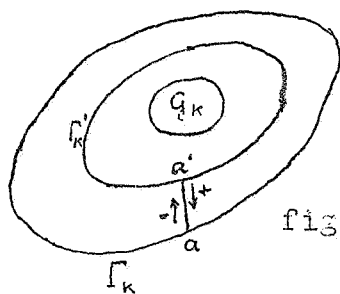


fig.A2.2

$$\oint_{\Gamma_k} d\varphi_0 - \oint_{\Gamma_k'} d\varphi_0 = \int_{a(+)}^{a'} d\varphi_0 - \int_{a(-)}^{a'} d\varphi_0$$

waarbij we langs aa' functiewaarden aan de +, resp. aan de - zijde van deze lijn moeten nemen. Daar nu

$$\int_{a(+)}^{a'} d\varphi_0 = \int_{a(+)}^{a'} \text{grad } \varphi_0 \cdot \vec{ds} = \int_{a(-)}^{a'} \text{grad } \varphi_0 \cdot \vec{ds} = \int_{a(-)}^{a'} d\varphi_0$$

omdat $\text{grad } \varphi_0$ eenwaardig is, is $\oint_{\Gamma_k'} d\varphi_0 = \oint_{\Gamma_k} d\varphi_0 = a_k$.

Kies nu punten (x_k, y_k) in G_k en zie

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k \text{Im} \ln(z - z_k)$$

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k \text{Re} \ln(z - z_k),$$

waarin $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$.

21) Als Γ_k en Γ_k' (eventueel ∞ vaak) elkaar snijden, dan kunnen we een derde kromme Γ_k'' aanbrengen, die zo dicht langs de rand van G_k loopt, dat hij Γ_k noch Γ_k' snijdt. Voor de combinaties Γ_k en Γ_k'' , resp. Γ_k' en Γ_k'' geldt dan het volgende bewijs, waaruit de bewering volgt.

$$\text{Daar } \varphi + i\psi = (\varphi_0 + i\psi_0) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n a_k \ln(z-z_k)$$

een in G analytische functie van z is geldt volgens lemma 2

$$-\text{rot } \vec{k}\varphi - \text{grad}\psi = -\text{rot } \vec{k}\varphi_0 - \text{grad}\psi_0 = \vec{u}.$$

Verder zien we direct dat ψ en $\text{grad } \varphi$ in G eenwaardig zijn. Ook φ is nu echter eenwaardig. Langs een kromme van het type Γ_k geldt nl.

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_k} d\varphi &= \oint_{\Gamma_k} d\varphi_0 - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n a_j \text{Im} \oint_{\Gamma_k} d \ln(z-z_j) \\ &= a_k - \frac{1}{2\pi} a_k \cdot \text{Im} \oint_{\Gamma_k} d \ln(z-z_k) = 0, \end{aligned}$$

daar Γ_k van de punten $z_1, z_2, \dots, z_n$ alleen het punt z_k omvat. Daar nu voor iedere in G verlopende gesloten rectificeerbare kromme Γ de kringintegraal $\oint_{\Gamma} d\varphi$ gesplitst kan worden in een aantal kringintegralen van het type $\oint_{\Gamma_k}$ (de bij de splitsing aan te brengen verbindingslijnen, die dubbel worden doorlopen, geven weer geen bijdrage, daar $\text{grad } \varphi$ eenwaardig is), is steeds $\oint_{\Gamma} d\varphi = 0$, waarmee het gestelde bewezen is.

Appendix 3.

Stelling. Als $f(z)$ analytisch is voor $\text{Im } z > 0$, continu voor $\text{Im } z \geq 0$ en reëel voor $\text{Im } z = 0$, dan is $f(z)$ door analytische voortzetting in het onderste halve vlak uit te breiden tot een gehele functie en dus te schrijven als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{A3.1})$$

waarin de reeks voor alle z convergeert en alle coëfficiënten a_n reëel zijn.

Bewijs. $f(z)$ is alleen gedefinieerd voor $\text{Im } z \geq 0$. Definieer de functie $f_1(z)$ voor $\text{Im } z \leq 0$ door

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})} = \text{Re } f(\bar{z}) - i \text{Im } f(\bar{z})$$

Het is eenvoudig in te zien (b.v. door verificatie van de Cauchy-Riemann vergelijkingen) dat $f_1(z)$ voor $\text{Im } z < 0$ analytisch is. Verder is $f_1(z)$ continu voor $\text{Im } z \leq 0$ en voor $\text{Im } z = 0$ is $f_1(z) = f(z)$ (daar $\text{Im } f(z)$ hier nul is).

Volgens een bekende stelling (zie b.v. Hurwitz-Courant [5], p.349), is dan $f_1(z)$ de analytische voortzetting van $f(z)$ in het onderste halve vlak. $f(z)$ is dus een functie element van een gehele

functie en dus in de vorm (A3.1) te schrijven, waarbij de reeks voor alle z moet convergeren. Daar $f(z)$ langs de reële as reëel is, moeten alle coëfficiënten a_n reëel zijn.

Appendix 4.

Bewijs van de eenduidigheid van de oplossing van het randwaardeprobleem bij een meervoudig samenhangend gebied.

We bewijzen het volgende:

Als G een meervoudig samenhangend gebied is van het in 3. ad 3 beschouwde type en van de functie $\Omega(z)$ gegeven is

1°. $\Omega(z)$ is analytisch en eenwaardig in G

2°. $\operatorname{Re} \Omega(z) = 0$ op Γ_0

$\operatorname{Re} \Omega(z) = \text{constant}$ op Γ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$)

dan is $\Omega(z)$ gelijk aan een imaginaire constante.

Bewijs. Zij $\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$.

Voor de in G eenwaardige potentiaalfunctie $\Psi(x, y)$ geldt dan

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \text{ langs } \Gamma_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Volgens een stelling van Green geldt voor een enkelvoudig samenhangend gebied G' met rand C

$$\oint_C \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = - \iint_{G'} (\operatorname{grad} \Psi)^2 d\sigma. \quad (\text{A3.1})$$

(inwendige normaal).

We maken ons gebied G nu tot een enkelvoudig samenhangend gebied G' door verbindingslijntjes die Γ_0 met Γ_1 , resp. $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ verbinden (zie fig. A.4).

Daar Ψ eenwaardig is, zijn de bijdragen van de integralen langs de verbindingslijntjes nul. Voor het linkerlid van (A3.1) vinden we dus

$$\sum_{i=0}^n \oint_{\Gamma_i} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = 0.$$

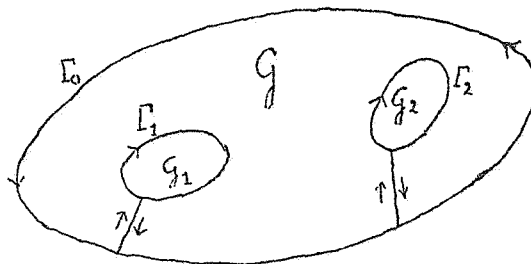


fig. A4.1

Hieruit volgt dat $\operatorname{grad} \Psi$ overal in G nul moet zijn (we veronderstellen natuurlijk continuïteit). Dus $\Psi = \text{constant}$ in G , waaruit volgt dat ook Ω constant is. Daar echter $\Phi = 0$ op Γ_0 , moet Ω gelijk zijn aan een imaginaire constante.

Dat met deze stelling het eenduidigheidsbewijs uit 3.ad 3 direct te geven is, volgt op de bekende manier.

Appendix 5.

Circulaire depressie boven een cirkelvormige zee.

We beschouwen het gebied $|z| < R$ en het windveld

$$U = - \frac{b^2}{2 \{ |z+1(R-a)|^2 + b^2 \}} \quad V = 0.$$

Als $a' = R - a$ en $\bar{z}$ de complex geconjugeerde van z is, dan is

$$|z+1(R-a)|^2 = (z+1a')(\bar{z}-1a') = z\bar{z} - 1a(z-\bar{z}) + a'^2,$$

en dus

$$U(z) = - \frac{1}{2} b^2 \frac{1}{z\bar{z} + a'^2 + b^2 - 1a'(z-\bar{z})} \quad (A5.1)$$

Als $|z| = R$, dan is $\bar{z} = \frac{R^2}{z}$ en dan geldt

$$U(z) = - \frac{1}{2} b^2 \frac{1}{R^2 + a'^2 + b^2 - 1a'R(\frac{z}{R} - \frac{R}{z})}.$$

Daar nu voor $|z| = R$ $\operatorname{Re} \Omega(z) = -U$ is volgens de formule van Poisson-Schwarz (2.9) voor de cirkel

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\zeta+z}{\zeta-z} U(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= \frac{b^2}{4\pi a'} \oint \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^2 + \frac{R^2+a'^2+b^2}{a'} - 1\zeta - R^2} \end{aligned} \quad (A5.2)$$

waarbij geïntegreerd moet worden langs de cirkel $|\zeta| = R$.

Zij $\zeta^2 + \frac{R^2+a'^2+b^2}{a'} - 1\zeta - R^2 = (\zeta + 1R\omega)(\zeta + \frac{1R}{\omega})$, met $\omega > 1$,

dan is $\omega + \frac{1}{\omega} = \frac{R^2+a'^2+b^2}{Ra'}$, dus

$$\omega = \frac{1}{2Ra'} (R^2 + a'^2 + b^2 + d),$$

$$\text{als } d = \sqrt{(R^2+a'^2+b^2)^2 - 4a'^2R^2} = \sqrt{\{(R+a')^2+b^2\} \{(R-a')^2+b^2\}}.$$

Verder geldt nog

$$\omega - \frac{1}{\omega} = \frac{d}{a'R}.$$

Door toepassing van de residuenstelling voor de integratieweg bestaande uit de cirkels $|\zeta| = R$ en $|\zeta| = M$ vinden we, als we M onbegrensd laten toenemen, dat voor $|z| < R$ geldt

$$\begin{aligned}
 \Omega(z) &= \frac{b^2}{4\pi a^2} \oint_{|z|=R} \frac{z+z}{z-z} \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta+iR\omega)(\zeta+\frac{iR}{\omega})} = \\
 &= -\frac{b^2}{4\pi a^2} \cdot 2\pi i \cdot (\text{residu in } \zeta = -iR\omega) = \\
 &= -\frac{ib^2}{2a^2} \cdot \frac{-iR\omega+z}{-iR\omega-z} \cdot \frac{1}{-iR\omega+\frac{iR}{\omega}} = \\
 &= -\frac{b^2}{2a^2 R} \cdot \frac{z-iR\omega}{z+iR\omega} \cdot \frac{1}{\omega-\frac{1}{\omega}} = \\
 &= -\frac{b^2}{2a^2} \cdot \frac{z-iR\omega}{z+iR\omega} \quad (A5.3)
 \end{aligned}$$

waarmee (6.19) bewezen is.

We berekenen nu nog $I = \iint_{|z| \leq R} U(z) dO$.

Als $z = \rho e^{i\varphi}$, dan vinden we hiervoor met (A5.1)

$$I = -\frac{1}{2} b^2 \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho^2 + a'^2 + b^2 - ia' \rho (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}.$$

In de tweede integraal substitueren we $e^{i\varphi} = \frac{u}{\rho}$. Dan gaat deze integraal over in

$$\begin{aligned}
 \oint_{|u|=\rho} \frac{du}{iu} \cdot \frac{1}{\rho^2 + a'^2 + b^2 - ia' \rho (\frac{u}{\rho} - \frac{\rho}{u})} &= \\
 &= \frac{1}{a'} \oint_{|u|=\rho} \frac{du}{u^2 + \frac{\rho^2 + a'^2 + b^2}{a'}} \cdot \frac{1}{iu - \rho^2}.
 \end{aligned}$$

We gebruiken hier de integrand van (A5.2) als daarin R door ρ en z door 0 vervangen wordt. Met behulp van het resultaat (A5.3) vinden we dus

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{b^2}{2} \int_0^R \rho d\rho \cdot \frac{4\pi}{b^2} \cdot \frac{b^2}{2\sqrt{(\rho^2 + a'^2 + b^2)^2 - 4a'^2 \rho^2}} = \\
 &= -\pi b^2 \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 + a'^2 + b^2)^2 - 4a'^2 \rho^2}}.
 \end{aligned}$$

Nu is $(\rho^2 + a'^2 + b^2)^2 - 4a'^2 \rho^2 = (\rho^2 - a'^2 + b^2)^2 + 4a'^2 b^2$, dus met de substitutie $\rho^2 = a'^2 - b^2 + 2a'b t$ vinden we

$$I = -\frac{1}{2} \pi b^2 \int_{\frac{a'^2 - b^2}{2a'b}}^{\frac{R^2 - a'^2 + b^2}{2a'b}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \pi b^2 \ln \frac{R^2 - a'^2 + b^2 + \sqrt{(R^2 - a'^2 + b^2)^2 + 4a'^2 b^2}}{-a'^2 + b^2 + \sqrt{(a'^2 - b^2)^2 + 4a'^2 b^2}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \pi b^2 \ln \frac{R^2 - a'^2 + b^2 + \sqrt{(R^2 + a'^2 + b^2)^2 - 4a'^2 R^2}}{2b^2} = \\
 &= -\frac{1}{2} \pi b^2 \ln \frac{R^2 - a'^2 + b^2 + d}{2b^2} = -\frac{1}{2} \pi b^2 \ln \frac{a'(R\omega - a')}{b^2},
 \end{aligned}$$

waarmee (6.20) bewezen is.

Appendix 6.

We bewijzen eerst:

Voor een functie $\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ die analytisch is voor $\text{Im } z > 0$ en continu voor $\text{Im } z \geq 0$, terwijl $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Omega(z)}{z} = 0$ en

$$\Phi(x, y) = -\Phi(-x, 0) \quad 0 \leq x < \infty \quad (\text{A6.1})$$

geldt

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y) &= -\Phi(-x, y) \\
 \Psi(x, y) &= \Psi(-x, y)
 \end{aligned} \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty$$

Bewijs: Zij $\Omega^*(z) = -\bar{\Omega}(-\bar{z}) = -\Phi(-x, y) + i\Psi(-x, y)$. Dit is voor $\text{Im } z > 0$ een analytische functie van z (wat b.v. blijkt door verificatie van de Cauchy-Riemann vergelijkingen), die continu is voor $\text{Im } z \geq 0$ en waarvoor $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Omega^*(z)}{z} = 0$. Ook $F(z) = \Omega(z) - \Omega^*(z)$ bezit deze drie eigenschappen. Voor $\text{Im } z = 0$ is $\text{Re } F(z) = \Phi(x, 0) + \Phi(-x, 0) = 0$. Volgens de in 3.b geformuleerde stelling moet dan $F(z)$ een gehele functie zijn, en ten gevolge van de limiet voorwaarde moet $F(z)$ dan constant zijn. Deze constante is echter nul, daar $F(0) = 0$. Hiermee is het bewijs voltooid.

Zij nu $U(x, 0)$ oneven. Dan is ook $\Phi(x, 0)$ oneven en als $\Omega(z)$ voldoet aan de eisen van de bovengenoemde stelling, dan volgt hieruit dat $\Psi(x, 0)$ even is.

$$\text{Nu is } \frac{d\Omega}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

$$\text{Voor } z = 0 \text{ geldt } \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

De eerste termen van de machtreeks-ontwikkeling van $\Omega(z)$ in de omgeving van $z=0$ zien er dus aldus uit

$$\Omega(z) = iC - z \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{z=0} + \dots,$$

waarin C reëel is.

Appendix 7.

Berekening van de integralen in (3.10).

Te berekenen is

$$\Omega(z) = \frac{2}{\pi i} \left[\int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - z^2)((\xi - a_1)^2 + c_1^2)} - \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{(\eta^2 + z^2)((\eta - a_2)^2 + c_2^2)} \right]$$

We berekenen eerste de eerste integraal.

Beschouw de integraal

$$I = \oint \frac{\zeta \ln \zeta}{(\zeta^2 - z^2)((\zeta + a_1)^2 + c_1^2)} d\zeta,$$

genomen langs de in fig.A7.1 getekende contour. We definiëren in het gebied binnen deze contour

de functie $\ln \zeta$ eenwaardig door

steeds de hoofdwaaarde te nemen

(dus $-\pi < \text{Im} \ln \zeta < \pi$). Langs AB

moeten we dan nemen

$\ln \zeta = \ln(-\zeta) + \pi i$, langs BC $\ln \zeta =$

$\ln(-\zeta) - \pi i$.

Als de straal R van de cirkel onbegrensd toeneemt dan nadert I tot

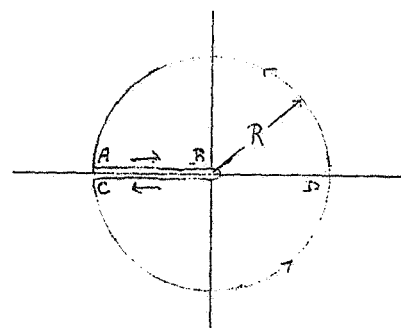


fig.A7.1
 ζ -vlak

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \frac{\zeta (\ln(-\zeta) + \pi i)}{(\zeta^2 - z^2)((\zeta + a_1)^2 + c_1^2)} d\zeta + \int_0^\infty \frac{\zeta (\ln(-\zeta) - \pi i)}{(\zeta^2 - z^2)((\zeta + a_1)^2 + c_1^2)} d\zeta = \\ & = -2\pi i \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - z^2)((\xi - a_1)^2 + c_1^2)}. \end{aligned}$$

De som der residuen in de polen van de integrand binnen de contour is, als R groot genoeg is (de polen zijn: $\zeta = \pm z$, $\zeta = -a_1 \pm ic_1$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\ln z}{(z + a_1)^2 + c_1^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(-z)}{(z - a_1)^2 + c_1^2} - \frac{(a_1 + ic_1) \ln(-a_1 - ic_1)}{2ic_1(z^2 - (a_1 + ic_1)^2)} + \\ & + \frac{(a_1 - ic_1) \ln(-a_1 + ic_1)}{2ic_1(z^2 - (a_1 - ic_1)^2)} = \frac{1}{4ic_1} \left[\ln z \left(\frac{1}{z + a_1 + ic_1} - \frac{1}{z + a_1 - ic_1} \right) + \right. \\ & + \ln(-z) \left(\frac{1}{z - a_1 - ic_1} - \frac{1}{z - a_1 + ic_1} \right) - \ln(-a_1 - ic_1) \left(\frac{1}{z - a_1 - ic_1} - \frac{1}{z + a_1 + ic_1} \right) + \\ & \left. + \ln(-a_1 + ic_1) \left(\frac{1}{z - a_1 + ic_1} - \frac{1}{z + a_1 - ic_1} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4ic_1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - (-1)^m a_1 - (-1)^n ic_1} \ln \frac{(-1)^{m+1} z}{-a_1 - (-1)^{m+n} ic_1},$$

waarin voor de logarithmen het verschil van de hoofdwwaarden van de logarithmen van teller en noemer genomen moet worden.

Op grond van de residuenstelling hebben we nu dus

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - z^2)((\xi - a_1)^2 + c_1^2)} = - \frac{1}{4ic_1} \sum \dots\dots$$

Vervangen we a_1 , c_1 en z door resp. a_2 , c_2 en iz , dan kunnen we uit dit resultaat ook de tweede integraal uit de formule voor $\Omega(z)$ vinden.

In totaal krijgen we dan

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi c_1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - (-1)^m a_1 - (-1)^n ic_1} \ln \frac{(-1)^{m+1} z}{-a_1 - (-1)^{m+n} ic_1} \\ &= \frac{1}{2\pi c_2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{iz - (-1)^m a_2 - (-1)^n ic_2} \ln \frac{(-1)^{m+1} iz}{-a_2 - (-1)^{m+n} ic_2}. \end{aligned}$$

LITERATUUR:

- [1] W.F. SCHALKWIJK, A contribution to the study of storm surges on the dutch coast. 's-Gravenhage, 1947.
- [2] L. BRAND, Vector and tensor analysis. New York 1947.
- [3] A. HURWITZ und R. COURANT, Vorlesungen uber allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Berlin 1929.
- [4] G.W. VELTKAMP, Een probleem in conforme afbeelding, Rapport TW 22 van het Mathematisch Centrum, 1953.
- [5] F. OBERHETTINGER und W. MAGNUS, Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Berlin 1949.
- [6] R. COURANT, Differential and integral calculus, Vol.II, London, 1936.