MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

Rapport TW 25.

Oplossing van een integraalvergelijking met singuliere kern.

G.W. Veltkamp en T.C. Braakman

Januari
1954

Oplossing van een integraalvergelijking met singuliere kern.

Samenvatting.

Een samengesteld randwaarde-probleem met rand- en aansluitingsvoorwaarden, wordt herleid tot een lineaire integraalvergelijking met een singuliere kern van het Cauchy-type. Deze integraalvergelijking wordt teruggebracht tot een gewone integraalvergelijking, welke na een transformatie een convolutie-kern blijkt te hebben en met behulp van een Laplace-transformatie oplosbaar is.

Belangrijk is dat de integraalvergelijking behalve een onbekende functie, ook nog een onbekende additieve constante bevat; deze moet zo bepaald worden, dat de integraalvergelijking, aan de oplossing waarvan zekere bijvoorwaarden gesteld worden, een oplossing toelaat.

De oplossing van het randwaarde-probleem wordt gegeven en tot slot worden enige speciale waarden van de optredende parameters besproken.

Dit rapport heeft slechts tot doel de gevonden oplossing van een betrekkelijk gecompliceerd vraagstuk vast te leggen, doch kan daarnaast mogelijk dienen om een indruk te geven van de methodiek die in de theorie en de practijk van de singuliere integraalvergelijking met Cauchy-kern en verwante problemen gebruikt wordt.

1. Formulering van het randwaarde-probleem en opstelling van de integraalvergelijking.

In een onderzoek betreffende het gedrag van een zee onder invloed van windkrachten (vgl. de rapporten [1] en [2]) werd een type randwaarde-probleem gesuggereerd, waarvan het volgende een voorbeeld is.

Zij G_1 het gebied $\mathrm{Im}\, z > 0$ en G_2 het gebied $|z| < 1$, $\mathrm{Im}\, z < 0$ van het complexe $z = x + iy$ -vlak. De gemeenschappelijke rand van G_1 en G_2 zij Γ_{12}, het deel van de rand van G_1, resp. G_2 dat niet samenvalt met Γ_{12} noemen we Γ_1, resp. Γ_2 (zie fig.1).

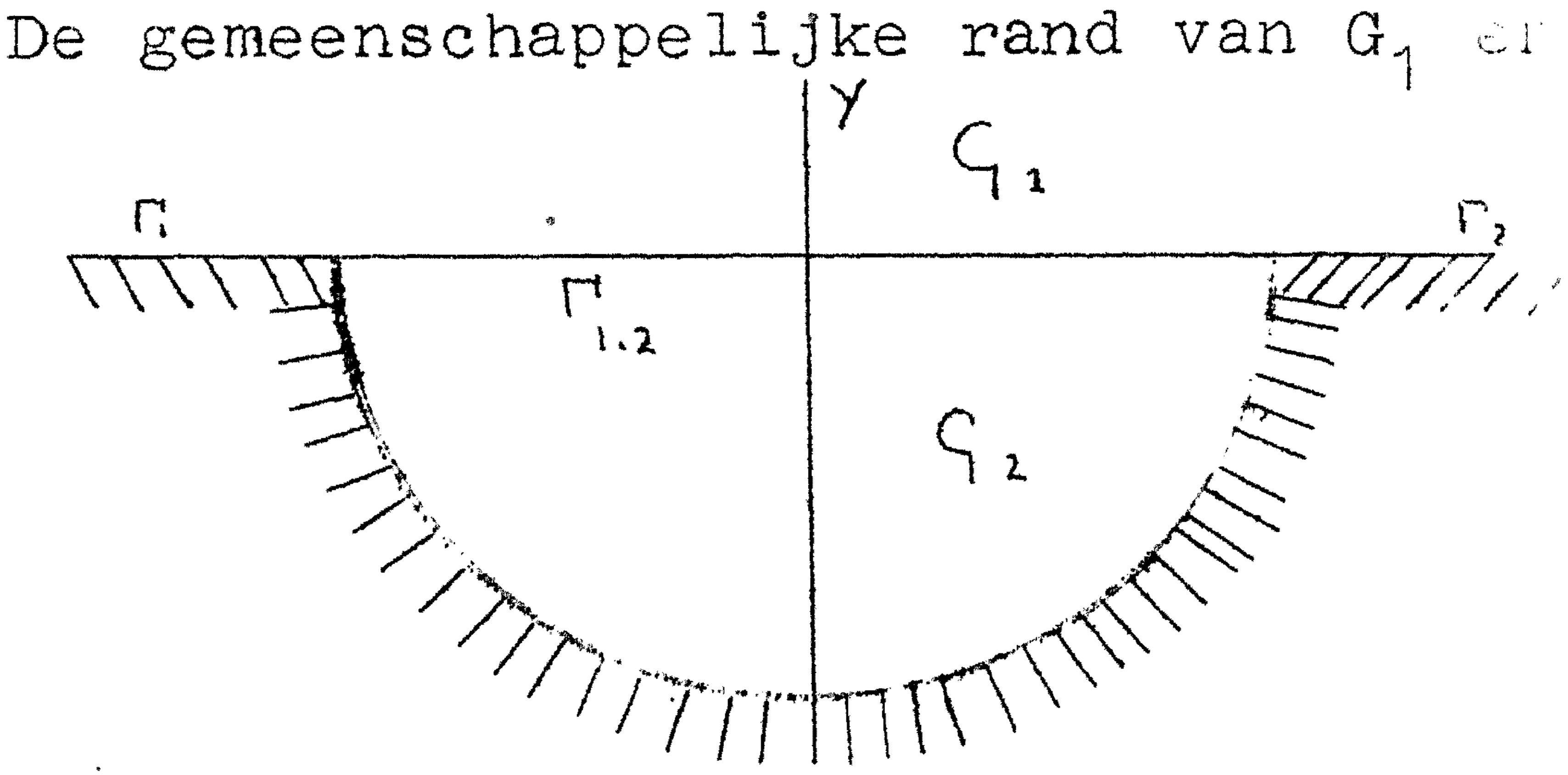

fig.1.

Het probleem bestaat nu in de bepaling van complexe functies $\Omega_1(z)$ en $\Omega_2(z)$, die gedefinieerd zijn in $G_1 + \Gamma_1 + \Gamma_{12}$, resp. $G_2 + \Gamma_2 + \Gamma_{12}$ en die aan de volgende voorwaarden voldoen:

1°. $\Omega_k(z)$ $(k = 1,2)$ is analytisch en eenwaardig in G_k en continu in $G_k + \Gamma_k + \Gamma_{12}$;

2°. langs Γ_k $(k = 1,2)$ geldt $\mathrm{Re}\,\Omega_k = 0$; (1.1)

3°. voor $|z| \gg 1$ geldt

$$\Omega_1(z) = iz + O(z^{-1}); \tag{1.2}$$

4°. langs Γ_{12} geldt

$$\lambda_1^{-1}\,\mathrm{Re}\,\Omega_1 = \lambda_2^{-1}\,\mathrm{Re}\,\Omega_2, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Re}\,\Omega_1 - \lambda_1(\mathrm{Im}\,\Omega_1 - x) = \mathrm{Re}\,\Omega_2 - \lambda_2(\mathrm{Im}\,\Omega_2 - x), \tag{1.4}$$

waarin λ_1 en λ_2 gegeven positieve getallen zijn.

Opmerkingen:

1. Langs de rand $\Gamma_1 + \Gamma_2$ van $G_1 + \Gamma_{12} + G_2$, inclusief het oneindig verre punt van G_1, is dus één randvoorwaarde gegeven ((1.1), resp. (1.2)), langs de scheidingslijn Γ_{12} van G_1 en G_2 zijn twee aansluitingsvoorwaarden gegeven. Men kan bewijzen (zie [2]), dat het gestelde probleem hoogstens één oplossing toelaat.

2. Ten opzichte van de in bovengenoemd onderzoek optredende problemen is het hier geformuleerde probleem speciaal,in zoverre dat de vorm der gebieden G_1 en G_2 anders kan zijn en dat in plaats van de termen x in (1.4),meer algemene functies kunnen optreden.

   Een diepergaande generalisatie krijgen we natuurlijk, wanneer we in plaats van (1.3) en (1.4) twee willekeurige lineaire relaties met eventueel niet-constante coefficienten tussen $\mathrm{Re}\,\Omega_1$, $\mathrm{Im}\,\Omega_1$, $\mathrm{Re}\,\Omega_2$ en $\mathrm{Im}\,\Omega_2$ geven.

3. Het is natuurlijk ook mogelijk, het gestelde probleem als een probleem voor reële harmonische functies te formuleren. Stellen we $\omega_k = \mathrm{Re}\,\Omega_k$ $(k = 1,2)$, dan kunnen we voor (1.4) schrijven:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial s} + \lambda_1\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial n} + x\right) = \frac{\partial\omega_2}{\partial s} + \lambda_2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial n} + x\right),$$

   waarin $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y}$ de differentiatie in tangentiele, resp. normale richting in de punten van Γ_{12} aanduiden. Wat uit (1.1), (1.2) en (1.3) ontstaat, is duidelijk.

We zullen het hierboven geformuleerde probleem nu herleiden tot een integraalvergelijking. Deze herleiding gaat het eenvoudigste met behulp van een tweetal formules van Plemelj, die ook in het volgende een essentiele rol zullen spelen.

Zij Γ een continu differentieerbare kromme zonder dubbelpunten in het z-vlak. Zij $\varphi(z)$ een op Γ gedefinieerde reele of complexe functie die daar aan de volgende Hölder-voorwaarde voldoet:

er zijn positieve getallen A en μ zodanig dat voor ieder tweetal punten z_1 en z_2 van Γ geldt

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq A\,|z_1 - z_2|^{\mu} .$$

De functie $$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \qquad (1.5)$$

is dan analytisch en eenwaardig in het gehele vlak, behalve op Γ en nadert (behalve in de eindpunten van Γ, wanneer daar $\varphi(t) \neq 0$) continu tot een eindige limiet als z tot een punt t_0 van Γ nadert langs een weg die met Γ geen punten gemeen heeft.

Noemen we de + zijde (- zijde) van Γ die zijde die links (rechts) van Γ ligt als Γ in de integratierichting doorlopen wordt, dan geldt bij nadering aan de + zijde van Γ tot een punt t_0 van Γ (dat geen eindpunt is)

$$\Omega^+(t_0) = \lim_{z \to t_0(+)} \Omega(z) = \tfrac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt \qquad (1.6)$$

en bij nadering aan de - zijde

$$\Omega^-(t_0) = \lim_{z \to t_0(-)} \Omega(z) = -\tfrac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt. \qquad (1.7)$$

In deze formules van Plemelj moet de integraal opgevat worden als hoofdwaarde (in het punt t_0) in de zin van Cauchy (welke bestaat omdat $\varphi(t)$ aan de Hölder voorwaarde voldoet).

Een andere schrijfwijze voor de bovenstaande formules is

$$\Omega^+(t_0) - \Omega^-(t_0) = \varphi(t_0), \qquad (1.8)$$

$$\Omega^+(t_0) + \Omega^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt. \qquad (1.9)$$

Opm. Als $\varphi(t) = 0$ in een eindpunt van Γ, dan gelden de formules ook nog in dat punt (de integraal bestaat dan, dank zij de Hölder-voorwaarde in de gewone (oneigenlijke) zin).

Voor uitvoerige behandeling en bewijzen van het bovenstaande, verwijzen we naar Muskhelishvili [3] .

We keren nu terug tot ons probleem. Indien langs Γ_{12} Re Ω_1 en Re Ω_2 bekend zijn, dan zijn $\Omega_1(z)$ geheel en $\Omega_2(z)$ op een additieve imaginaire constante na bepaald door de eisen 1°, 2° en 3°.

Zij langs Γ_{12}

$$\mathrm{Re}\,\Omega_1 = \lambda_1 f(x), \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Re}\,\Omega_2 = \lambda_2 f(x) \tag{1.11}$$

en neem aan dat $f(x)$ aan de bovengenoemde Hölder-voorwaarde voldoet en nul is in $x = \pm 1$ (zodat $\mathrm{Re}\,\Omega_1$ en $\mathrm{Re}\,\Omega_2$ continu zijn bij de aansluitingen van Γ_1 en Γ_{12}, resp. Γ_2 en Γ_{12}).

We bewijzen nu dat dan de functies

$$\Omega_1(z) = \frac{\lambda_1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-z}\,dt + ic \tag{1.12}$$

en

$$\Omega_2(z) = -\frac{\lambda_2}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{1-2tz+z^2}{(1-tz)(t-z)}\, f(t)dt + ic, \tag{1.13}$$

waarin c een onbepaalde reële constante is, voldoen aan de eisen 1°, 2° en 3° en aan (1.10) en (1.11). ')

Immers:

1°. $\Omega_1(z)$ en $\Omega_2(z)$ zijn analytisch en eenwaardig in het gehele vlak, behalve op Γ_{12}, resp. de reele as en continu van links en rechts op Γ_{12}

2°. Als z op Γ_1 ligt dan is $\Omega_1(z)$ zuiver imaginair; als z op Γ_2 ligt dan is $\Omega_2(z)$ zuiver imaginair, want als $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$, dan is

$$\frac{1-2tz+z^2}{(1-tz)(t-z)} = \frac{2t-z-z^{-1}}{(1-tz)(1-tz^{-1})} = \frac{2t-e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{(1-te^{i\varphi})(1-te^{-i\varphi})} =$$

$$= \frac{2(t-\cos\varphi)}{1-2t\cos\varphi+t^2}\ , \text{ dus reeel.}$$

') De formule (1.13) is ontstaan uit

$$\Omega_2(z) = -\frac{\lambda_2}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{w'(t)}{w(t)-w(z)} . f(t)dt + iC\ ,$$

waarin $w(t)$ de functie $w = -\dfrac{2z}{1+z^2}$ is, welke het gebied G_2 afbeeldt op het halve vlak $\mathrm{Im}\, w > 0$.

We vinden dan

$$\Omega_2(z) = -\frac{\lambda_2}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)(1+z^2)}{(1+t^2)(1-zt)} . \frac{f(t)}{t-z}\,dt + iC =$$

$$= -\frac{\lambda_2}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{1-2tz+z^2}{(t-z)(1-zt)}\, f(t)dt + \frac{2\lambda_1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{tf(t)}{1+t^2}\,dt + iC,$$

waaruit (1.13) volgt, daar de tweede term niet van z afhangt.

3^o. Voor $|z| \gg 1$ geldt $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = O(z^{-1})$, dus ook aan (1.2) is voldaan.

Door directe generalisatie van de formules van Plemelj volgt uit (1.12), resp. (1.13) voor een punt x van Γ_{12}

$$\Omega_1^+(x) = \lambda_1\ f(x) + \frac{\lambda_1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + ix, \tag{1.14}$$

$$\Omega_2^-(x) = \lambda_2\ f(x) - \frac{\lambda_2}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{1-2tx+x^2}{(1-tx)(t-x)}\ f(t)\,dt + i\,c. \tag{1.15}$$

Definieren we dus $\Omega_1(z)$, resp. $\Omega_2(z)$ langs Γ_{12} als $\Omega_1^+(x)$, resp. $\Omega_2^-(x)$, dan is aan (1.10) en (1.11) voldaan.

Uit (1.10) en (1.11) volgt dat de functies $\Omega_1(z)$ en $\Omega_2(z)$ uit (1.12) en (1.13) aan de overgangsvoorwaarde (1.3) voldoen. Ter bepaling van f(x) en c blijft dus (1.4) over. Uit (1.14) en (1.15) blijkt dat langs Γ_{12} geldt

$$\mathrm{Im}\,\Omega_1(x) = -\frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + x,$$

$$\mathrm{Im}\,\Omega_2^-(x) = \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1-2tx+x^2}{(1-tx)(t-x)}\ f(t)dt + c =$$

$$= \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\,dx - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x}{1-tx}\ f(t)dt + c.$$

Uit (1.4) volgt dan dat voor $-1 < x < 1$ moet gelden

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\ f(x) - (\lambda_2^2 + \lambda_1^2) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + \frac{\lambda_2^2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x}{1-tx}\ f(t)dt =$$

$$= \lambda_2(c-x). \tag{1.18}$$

Uit deze integraalvergelijking moeten nu f(x) en de constante c bepaald worden onder de bijvoorwaarde dat $f(x) = 0$ is voor $x = \pm 1$ en voldoet aan de Hölder-voorwaarde.

De vergelijking (1.18) is een singuliere integraal-vergelijking met kern van het Cauchy-type [2]. Deze integraalvergelijkingen zijn uitvoerig behandeld door Muskhelishvili [3] . We zullen de vergelijking (1.18) op de door hem aangegeven wijze reduceren tot een gewone integraalvergelijking, welke in gesloten vorm oplosbaar blijkt.

2) De kern is $-\frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2}{\pi} \cdot \frac{1}{t-x} + \frac{\lambda_2^2}{\pi} \cdot \frac{x}{1-tx}$ en dus singulier voor $t = x$.

2. Reductie van de singuliere integraalvergelijking (1.18).

Zij $\lambda_2 - \lambda_1 = a, \lambda_2^2 + \lambda_1^2 = b$,

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \pi \gamma \, , \; -\tfrac{1}{2} < \gamma < \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \cos \pi \delta \, , \; 0 < \delta < \tfrac{1}{2},$$

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \quad F(x) = \frac{\cos \pi \delta}{\lambda_2} \quad F(x).$$

Dan gaat (1.18) over in

$$\sin \pi \gamma \, . \, F(x) - \cos \pi \gamma \, . \, \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{t-x} \, dt =$$

$$= -\cos \pi \delta \, . \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x}{1-tx} \, F(t) dt + c - x. \tag{2.1}$$

We beschouwen nu eerst de bij (2.1) behorende "dominerende vergelijking" (waarvan de kern het singuliere deel van de kern van (2.1) is)

$$\sin \pi \gamma \, . \, F(x) - \cos \pi \gamma \, . \, \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{t-x} \, dt = G(x) \tag{2.2}$$

en zoeken hiervan een oplossing die nul is voor $x = \pm 1$ en aan de Hölder-voorwaarde voldoet. We nemen daarbij aan dat $G(x)$ ook aan de Hölder-voorwaarde voldoet (men kan bewijzen dat als $F(x)$ hieraan voldoet, ook het rechterlid van (2.1) hieraan voldoet).

We kunnen de vraag naar de oplossing $F(x)$ van (2.2) onder de gestelde bijvoorwaarden als volgt omzetten in een functie-theoretisch randwaarde-probleem.

Beschouw de functie

$$\Phi(z) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{t-z} \, dt. \tag{2.3}$$

Deze functie is analytisch en eenwaardig in het gehele z-vlak, met uitzondering van het deel van de reele as tussen -1 en +1 (dat we voortaan, in aansluiting met het voorgaande, weer Γ_{12} zullen noemen).

Volgens de formules van Plemelj is, als x op Γ_{12} ligt

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = F(x), \tag{2.4}$$

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{t-x} \, dt. \tag{2.5}$$

Met behulp hiervan kunnen we (2.2) schrijven als

$$\sin \pi\gamma\,(\Phi^+(x)-\Phi^-(x))-i\cos\pi\gamma\,(\Phi^+(x)+\Phi^-(x))=G(x),$$

of

$$e^{-\pi i(\frac{1}{2}-\gamma)}\,\Phi^+(x)-e^{\pi i(\frac{1}{2}-\gamma)}\,\Phi^-(x)=G(x). \qquad (2.6)$$

Verder blijkt, dat, omdat $F(x)=0$ is voor $x=\pm 1$

$$\Phi(\pm 1)=\text{eindig}. \qquad (2.7)$$

Immers, als $F(x)$ nul is voor $x=\pm 1$ en voldoet aan de Hölder-voorwaarde, dan geldt in een omgeving van $x=\pm 1$

$$|F(x)|\leq A\,|1\pm x|^{\delta}, \text{ met } \delta>0.$$

De integraal in (2.3) bestaat dus ook voor $z=\pm 1$ (in oneigenlijke zin) en is dus eindig. En omgekeerd zal, als $\Phi(z)$ eindig is in $z=\pm 1$, hier $F(x)=0$ zijn op grond van (2.4), daar de waarden van $\Phi^{\pm}(x)$ op Γ_{12} dan continu moeten aansluiten bij de waarden van $\Phi(z)$ op het overige deel van de reele as.

Tenslotte volgt uit (2.3) dat voor grote z

$$\Phi(z)=O(z^{-1}). \qquad (2.8)$$

We moeten dus zoeken naar een functie $\Phi(z)$ die analytisch en eenwaardig is in het gehele z-vlak met uitzondering van Γ_{12} en die voldoet aan (2.6), (2.7) en (2.8). Met behulp van (2.4) kunnen we dan uit $\Phi(z)$ direct de oplossing $F(x)$ van (2.2) vinden.

Vervangen we voorlopig de voorwaarden (2.7) en (2.8) door de minder scherpe eis dat $\Phi(z)$ in de omgeving van de punten ± 1 en ∞ hoogstens oneindig wordt van eindige graad.

Het verschil $\varphi(z)$ van twee oplossingen van het zo gestelde ruimere probleem voldoet aan dezelfde voorwaarden met het verschil dat (2.6) vervangen moet worden door de bijbehorende homogene vergelijking

$$e^{-\pi i(\frac{1}{2}-\gamma)}\,\varphi^+(x)=e^{\pi i(\frac{1}{2}-\gamma)}\,\varphi^-(x). \qquad (2.9)$$

De functie

$$\varphi_0(z)=(z+1)^{\frac{1}{2}+\gamma}(z-1)^{\frac{1}{2}-\gamma}=e^{(\frac{1}{2}+\gamma)\ln(z+1)+(\frac{1}{2}-\gamma)\ln(z-1)},$$

waarin voor de logarithmen de hoofdlogarithmen genomen moeten worden, voldoet klaarblijkelijk aan deze voorwaarden. Immers, langs de reële as geldt

voor $x>1$ $\varphi_0^+(x)=\varphi_0^-(x)=e^{(\frac{1}{2}+\gamma)\ln(x+1)+(\frac{1}{2}-\gamma)\ln(x-1)}=$

$$=(x+1)^{\frac{1}{2}+\gamma}(x-1)^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

voor $-1 < x < 1$ $\quad \varphi_0^+(x) = e^{(\frac{1}{2}+\gamma)\ln(x+1)+(\frac{1}{2}-\gamma)(\ln(1-x)+\pi i)} =$

$$= e^{\pi i(\frac{1}{2}-\gamma)}(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

$$\varphi_0^-(x) = e^{(\frac{1}{2}+\gamma)\ln(x+1)+(\frac{1}{2}-\gamma)(\ln(1-x)-\pi i)} =$$

$$= e^{-\pi i(\frac{1}{2}-\gamma)}(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

voor $x < -1$ $\quad \varphi_0^+(x) = e^{(\frac{1}{2}+\gamma)(\ln(-1-x)+\pi i)+(\frac{1}{2}-\gamma)(\ln(1-x)+\pi i)} =$

$$= -(-1-x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}-\gamma},$$

$$\varphi_0^-(x) = e^{(\frac{1}{2}+\gamma)(\ln(-1-x)-\pi i)+(\frac{1}{2}-\gamma)(\ln(1-x)-\pi i)} =$$

$$= -(-1-x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma} = \varphi_0^+(x).$$

Verder zal, als een andere functie $\varphi(z)$ ook voldoet, het quotient $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ op grond van (2.9) continu zijn op Γ_{12} en dus een functie zijn die analytisch en eenwaardig is in het gehele vlak, eventueel met uitzondering van de punten $z = \pm 1$. Daar echter $\varphi(z)$ hier, evenals in $z = \infty$ hoogstens oneindig van eindige orde mag worden, geldt:

de meest algemene oplossing van het hier gestelde homogene probleem is

$$\varphi(z) = \varphi_0(z).(z+1)^k (z-1)^l P_m(z),$$

waarin k en l willekeurige gehele getallen zijn (positief, negatief of nul) en $P_m(z)$ een polynoom is van willekeurige graad m, dat geen nulpunten heeft in $z = \pm 1$.

We zijn nu klaar als we nog een particuliere oplossing van het inhomogene probleem vinden.

Met de formules voor $\varphi_0^{\pm}(x)$ voor $-1 < x < 1$ volgt uit (2.6) na deling door $(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}$

$$\frac{\Phi^+(x)}{\varphi_0^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{\varphi_0^-(x)} = (1+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma}G(x).$$

Volgens de formule (1.8) van Plemelj voldoet hieraan (daar het rechterlid van de vergelijking aan de Hölder-voorwaarde voldoet)

$$\Phi_0(z) = \frac{\varphi_0(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-z}G(t)dt,$$

welke functie klaarblijkelijk ook aan de overige eisen voldoet.

De meest algemene oplossing van het probleem met de genoemde ruime voorwaarden voor het gedrag in de punten $z = \pm 1$ en ∞ is dus

$$\Phi(z)=(z+1)^{\frac{1}{2}+\gamma}(z-1)^{\frac{1}{2}-\gamma}\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-z}G(t)dt+$$

$$+\ (z+1)^{\frac{1}{2}+\gamma+k}(z-1)^{\frac{1}{2}-\gamma+l}\ P_m(z). \tag{2.10}$$

We moeten nu bezien, in hoeverre deze oplossing aan restricties wordt onderworpen, wanneer we met de scherpere eisen (2.7) en (2.8) rekening houden.

Volgens een stelling van Muskhelishvili ([3], §29) gedraagt de integraal in (2.10) zich in de omgeving van $z = \pm 1$ als

$$G(\pm 1)\ (z\mp 1)^{-\frac{1}{2}\pm\gamma}C_{\pm}(z),$$

waarin $C_{\pm}(z)$ begrensd is en niet nul voor $z = \pm 1$. Aan de eis (2.7) is dus, daar $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$, dan en slechts dan voldaan als k en l niet negatief zijn.

Voor grote z gedraagt de tweede term van (2.10) zich als $z^{1+k+l+m}$ en daar k en $l \geq 0$ moeten zijn, kan alleen aan (2.8) voldaan worden als deze term verdwijnt, dus als $P_m(z)\equiv 0$ is. De eerste term van (2.10) gedraagt zich voor grote z als

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}G(t)dt + O(z^{-1}),$$

zodat we slechts dan aan (2.8) kunnen voldoen, als

$$\int_{-1}^{1}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}G(t)dt = 0. \tag{2.11}$$

Concluderend kunnen we dus zeggen: de gezochte functie $\Phi(z)$ bestaat dan en slechts dan als $G(x)$ aan (2.11) voldoet en is in dat geval

$$\Phi(z)= (z+1)^{\frac{1}{2}+\gamma}(z-1)^{\frac{1}{2}-\gamma}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-z}G(t)\,dt.$$

Met behulp van de formules van Plemelj vinden we hieruit, dat op Γ_{12} geldt

$$\Phi^{\pm}(x)= e^{\pm\pi i(\frac{1}{2}-\gamma)}(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}\Big[\pm\tfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma}G(x)+$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x} G(t)dt \Big] =$$

$$= \pm \tfrac{1}{2} e^{\pm \pi i(\frac{1}{2}-\gamma)} G(x) + e^{\pm \pi i(\frac{1}{2}-\gamma)} (1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} .$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x} G(t)dt,$$

waaruit met (2.4) volgt

$$F(x) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) =$$

$$= \sin\pi\gamma\, G(x) + \cos\pi\gamma\, (1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} . \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x} G(t)d \qquad (2.12)$$

Dit is dus, mits $G(x)$ aan de voorwaarde (2.11) voldoet, de enige oplossing van de integraalvergelijking (2.2), waarvoor $F(\pm 1) = 0$ is.

We keren nu terug tot de integraalvergelijking (2.1). Het is duidelijk dat als $F(x)$ aan (2.1) voldoet, $F(x)$ ook zal voldoen aan de vergelijking die uit (2.12) ontstaat, wanneer we daarin voor $G(x)$ het rechterlid van (2.1) substitueren, mits tevens voldaan is aan de vergelijking die uit (2.11) ontstaat, wanneer daarin het rechterlid van (2.1) gesubstitueerd wordt.

In het algemeen zal dat laatste natuurlijk niet het geval zijn. Doch het rechterlid van (2.1) bevat nog de vrije constante c, en we zullen deze dus zo moeten bepalen, dat aan deze bijvoorwaarde voldaan is.

We zullen echter een enigszins andere werkwijze volgen. We substitueren het rechterlid van (2.1) in (2.12) (waarbij de constante c blijkt te verdwijnen) en van de dan ontstane vergelijking bepalen we de oplossing $F(x)$. Daarna berekenen we met deze functie $F(x)$ de gezochte functies $\Omega_1(z)$ en $\Omega_2(z)$ uit (1.12) en (1.13) en substitueren het resultaat in de met (2.1) aequivalente vergelijking (1.4), waaruit de waarde van c volgt. Op deze wijze omzeilen we tevens de vraag, of het a priori zeker is dat de gevonden $F(x)$, die oplossing is van de vergelijking die ontstaat door in (2.12) het rechterlid van (2.1) te substitueren, ook voldoet aan de vergelijking (2.1) (door Muskhelishvili wordt deze vraag bevestigend beantwoord).

Substitutie van het rechterlid van (2.1) in (2.12) levert

$$F(x) = -\sin\pi\gamma.\cos\pi\delta.\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-tx}F(t)dt + \sin\pi\gamma.(c-x)+$$

$$-\cos\pi\gamma.\cos\pi\delta.(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}.\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x}.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{t}{1-ts}F(s)ds\,dt+$$

$$+\cos\pi\gamma(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}.\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x}.(c-t)dt.$$

Na verwisseling van de integratie-volgorde in de derde term van het rechterlid (hetgeen geoorloofd is, vgl. [3], §23) kunnen we met behulp van de in de appendix te bewijzen resultaten

$$I_1(x,s) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x}.\frac{t}{1-ts}dt =$$

$$= \frac{1}{\cos\pi\gamma}\left[\frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-s)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-sx} - \sin\pi\gamma\frac{x(1+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-sx}\right], \tag{A.2}$$

$$I_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x}(c-t)dt =$$

$$= -\frac{1}{\cos\pi\gamma}\left[1+\sin\pi\gamma(1+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma}(c-x)\right], \tag{A.3}$$

deze vergelijking herleiden tot

$$F(x)+\cos\pi\delta(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}.\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-s)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-xs}F(s)ds=$$

$$= -(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}. \tag{2.13}$$

Van de integraalvergelijking (2.13) is de kern niet singulier, zodat de gewenste reductie bereikt is.

We kunnen (2.13) nog vereenvoudigen door de substitutie

$$F(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}H(x). \tag{2.14}$$

Voor H(x) krijgen we dan de volgende vergelijking, geldig voor $-1 < x < 1$,

$$H(x)+\cos\pi\delta.\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{H(s)}{1-xs}ds = -1. \tag{2.15}$$

3. Oplossing van de vergelijking (2.15).

De integraalvergelijking (2.15) brengen we in een meer hanteerbare vorm door de substitutie $x = \operatorname{tgh} y$, $\xi = \operatorname{tgh} u$, die levert

$$H(\operatorname{tgh} y) + \cos \pi \delta \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\operatorname{tgh} u)}{1-\operatorname{tgh} y \operatorname{tgh} u} \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} du = -1,$$

of, na deling door ch y

$$\frac{H(\operatorname{tgh} y)}{\operatorname{ch} y} + \cos \pi \delta \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\operatorname{tgh} u)}{\operatorname{ch} u} \frac{du}{\operatorname{ch}(y-u)} = - \frac{1}{\operatorname{ch} y} .$$

Stellen we nog $\frac{H(\operatorname{tgh} y)}{\operatorname{ch} y} = K(y)$, (3.1)

dan krijgen we voor $K(y)$ de vergelijking

$$K(y) + \cos \pi \delta \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(u)}{\operatorname{ch}(y-u)} du = - \frac{1}{\operatorname{ch} y} \qquad (3.2)$$

Daar deze vergelijking van het convolutie-type is en de grenzen $\pm \infty$ heeft, kunnen we hem oplossen met behulp van een twee-zijdige Laplace-transformatie.

Zij

$$\bar{K}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-py} K(y) dy \qquad (3.3)$$

de Laplace-getransformeerde van $K(y)$. We kunnen a priori bewijzen dat deze integraal convergeert als p in een zekere strook (de convergentie strook, vgl. v.d.Pol-Bremmers [4]) van het complexe p-vlak ligt.

Immers, de functie $F(x)$ is nul voor $x = 1$ en voldoet aan de Hölder-voorwaarde, dus er is een $\varepsilon > 0$, zodanig dat in de omgeving van $x = 1$ $F(x) = O((1-x)^{\varepsilon})$.

Met (2.14) volgt hieruit dat hier $H(x) = O((1-x)^{\varepsilon+\gamma-\frac{1}{2}})$. Nu is voor grote y $\operatorname{tgh} y = \frac{1-e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \sim 1-2e^{-2y}$, dus hier geldt $H(\operatorname{tgh} y) =$ $= O(e^{(1-2\varepsilon-2\gamma)y})$ en dus volgens (3.1)

$$K(y) = O(e^{-2(\varepsilon+\gamma)y}).$$

Analoog geldt in de omgeving van $x = -1$, resp. $y = -\infty$

$$F(x) = O((1+x)^{\varepsilon})^{\;3)} , \quad H(x) = O((1+x)^{\varepsilon-\gamma-\frac{1}{2}}),$$

$$\operatorname{tgh} y \sim -1 + 2 e^{2y}, \quad H(\operatorname{tgh} y) = O(e^{(-1+2\varepsilon-2\gamma)y}),$$

dus

$$K(y) = O(e^{2(\varepsilon-\gamma)y}) = O(e^{-2(\varepsilon-\gamma)|y|}) .$$

Voor $y \to +\infty$ geldt dus

$$|e^{-py} K(y)| \quad A \, e^{-(\operatorname{Re} p+2\varepsilon+2\gamma)y}$$

---

3) We kunnen ε zo kiezen dat we zowel bij $x=1$ als bij $x=-1$ deze exponent kunnen gebruiken.

en voor $y \to -\infty$ is

$$\left| e^{-py}\, K(y) \right| < A\, e^{-(-\mathrm{Re}\, p + 2\varepsilon - 2\gamma)|y|}.$$

De integraal in (3.3) convergeert dus zeker als

$$\mathrm{Re}\, p + 2\varepsilon + 2\gamma > 0 \text{ en } -\mathrm{Re}\, p + 2\varepsilon - 2\gamma > 0, \text{ dus als}$$

$$-2\gamma - 2\varepsilon < \mathrm{Re}\, p < -2\gamma + 2\varepsilon .$$

Daar $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$ en $\varepsilon > 0$ is, is er dus een convergentie-strook en deze valt althans gedeeltelijk samen met de strook

$$-1 < \mathrm{Re}\, p < 1.$$

De Laplace-getransformeerde van $\frac{1}{\mathrm{ch}\, y}$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-py} \frac{dy}{\mathrm{ch}\, y} = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2} p} \tag{3.4}$$

(vgl. bv. Magnus-Oberhettinger [5], hier wordt de Fourier-getransformeerde van deze functie gegeven, de Laplace-getransformeerde is daar direct uit af te leiden; ook uit de hieronder af te leiden formules (3.5) en (3.8) volgt dit resultaat als speciaal geval). De convergentie-strook voor deze transformatie is $-1 < \mathrm{Re}\, p < 1$ en overlapt dus althans gedeeltelijk die van $\bar{K}(p)$. We mogen dus op de integraal in vergelijking (3.2) de convolutie-regel toepassen, en we krijgen dat in de gemeenschappelijke convergentie-strook geldt

$$\bar{K}(p) \left\{ 1 + \frac{\cos \pi\delta}{\cos \frac{\pi}{2} p} \right\} = - \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2} p} \quad \text{, dus}$$

$$\bar{K}(p) = - \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2} p + \cos \pi\delta} \quad . \tag{3.5}$$

Hieruit volgt met behulp van de omkeer-formule

$$K(y) = - \frac{1}{2i} \int_{-i\infty + p_0}^{+i\infty + p_0} \frac{e^{py}}{\cos \frac{\pi}{2} p + \cos \pi\delta}\, dp, \tag{3.6}$$

waarin p_0 een reeel getal is, zodanig dat de integratieweg in de gemeenschappelijke convergentie-strook ligt; hieraan is zeker voldaan als $\mathrm{Max}\,(-1, -2\gamma - 2\varepsilon) < p_0 < \mathrm{Min}\,(1, -2\gamma + 2\varepsilon)$, dus bijvoorbeeld door $p_0 = -2\gamma$.

We berekenen de integraal (3.6) door middel van contour-integratie langs de in fig.2 aangegeven contour C.

Daar voor $|\mathrm{Im}\, p| \to \infty$ $\cos \frac{\pi}{2} p = O\left(e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\, p|}\right)$ geldt, als $M \to \infty$

$$\oint_C \frac{e^{py}}{\cos \frac{\pi}{2} p + \cos \pi\delta}\, dp = \int_{-i\infty + p_0}^{+i\infty + p_0} - \int_{-i\infty + p_0 - 4}^{+i\infty + p_0 - 4} =$$

$$= -2i\, K(y) + 2i\, e^{-4y}\, K(y) \tag{3.7}$$

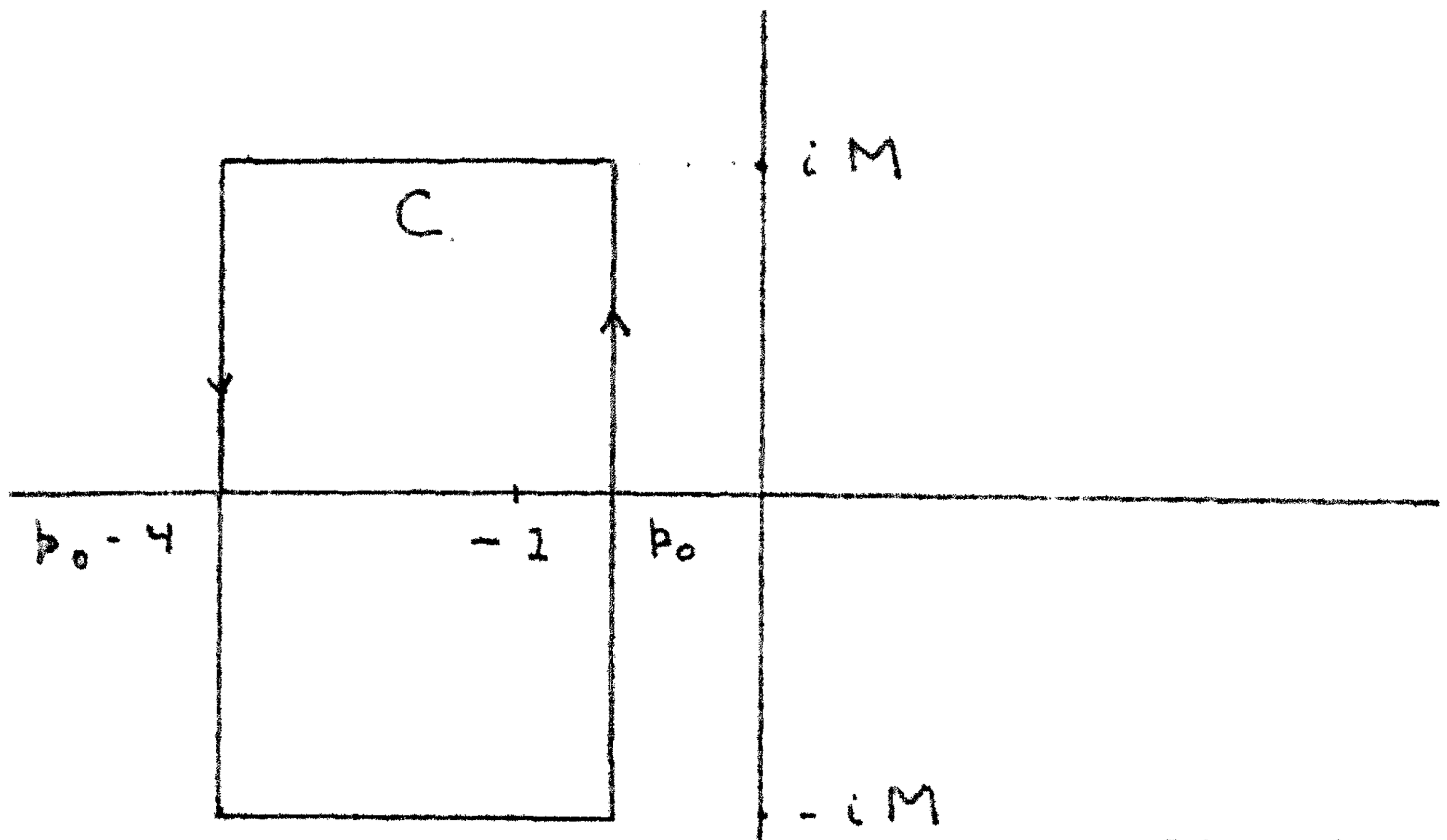

fig.2.

De integrand in (3.6) heeft polen in de punten, gegeven door

$$\cos\frac{\pi}{2}p + \cos\pi\delta = 0, \text{ dus in}$$

$$p \equiv \pm 2(\delta - 1) \quad (\mathrm{mod}\ 4).$$

Van deze punten liggen er twee binnen de contour C en wel, daar $0 < \delta < \frac{1}{2}$, de punten

$$p = -2 \pm 2\delta .$$

De residuen zijn daar

$$\text{in } p = -2+2\delta: \quad \frac{e^{-2y+2\delta y}}{-\frac{\pi}{2}\sin(-\pi+\pi\delta)} = \frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-2y+2\delta y}}{\sin\pi\delta},$$

$$\text{in } p = -2-2\delta: \quad \frac{e^{-2y-2\delta y}}{-\frac{\pi}{2}\sin(-\pi-\pi\delta)} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-2y-2\delta y}}{\sin\pi\delta}.$$

Met de residuen-stelling volgt dus uit (3.7)

$$-4i\,e^{-2y}\,\mathrm{sh}\,2y.K(y) = \frac{4i}{\sin\pi\delta}\,e^{-2y}\,(e^{2\delta y} - e^{-2\delta y})$$

$$= \frac{8i}{\sin\pi\delta}\,e^{-2y}\,\mathrm{sh}\,2\delta y,$$

dus

$$K(y) = -\frac{2}{\sin\pi\delta}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,2\delta y}{\mathrm{sh}\,2y}. \tag{3.8}$$

N.B. Daar de berekening van de integraal (3.6) ook nog geldt voor $\delta = \frac{1}{2}$ volgt uit (3.5) en (3.8) met $\delta = \frac{1}{2}$ direct de formule (3.4).

Verder zien we uit (3.8) dat de convergentie-strook van $\overline{K}(p)$ is $|\mathrm{Re}\ p| < 2-2\delta$. Deze overlapt dus aanzienlijk de a priori bepaal…

Uit (3.8) en (3.1) volgt

$$H(\mathrm{tgh}\ y) = -\frac{1}{\sin\pi\delta}\,\frac{\mathrm{sh}\,2\delta y}{\mathrm{sh}\,y} \tag{3.9}$$

en daar uit $x = \mathrm{tgh}\ y$ volgt $e^y = (\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{2}}$,

vinden we

$$H(x) = -\frac{1}{\sin\pi\delta}\cdot\frac{(\frac{1+x}{1-x})^{\delta} - (\frac{1-x}{1+x})^{\delta}}{(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{2}} - (\frac{1-x}{1+x})^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sin\pi\delta}\quad\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+\delta}(1-x)^{\frac{1}{2}-\delta} - (1+x)^{\frac{1}{2}-\delta}(1-x)^{\frac{1}{2}+\delta}}{x}.$$

Met (2.14) vinden we hieruit voor F(x)

$$F(x) = -\frac{1}{2\sin\pi\delta} \cdot \frac{(1+x)^{1+\delta+\gamma}(1-x)^{1-\delta-\gamma}-(1+x)^{1-\delta+\gamma}(1-x)^{1+\delta-\gamma}}{x} \tag{3.10}$$

waarmee de oplossing van de integraalvergelijking (2.13) verkregen is.

Het is duidelijk dat F(x) voor x = 0 niet singulier is, ook al wordt de noemer van (3.10) daar nul.

Verder zien we dat de gevonden functie F(x) inderdaad nul is in $x = \pm 1$ en aan de Hölder voorwaarde voldoet voor $-1 \leq x \leq 1$, want F(x) is continu differentieerbaar in het inwendige van dat interval en gedraagt zich als $(1 \mp x)^{1-\delta-|\gamma|}$,(waarin $\delta + |\gamma| < 1$ is)in de punten $x = \pm 1$.

De gevonden functie F(x) uit (3.10) is dus de enige functie die eventueel aan de oorspronkelijke integraalvergelijking (2.1) voldoet. Òf hij voldoet en zo ja, voor welke waarde van de nog onbekende constante c uit (2.1), zal nog moeten blijken.

4. Berekening van $\Omega_1(z), \Omega_2(z)$.

Uit (3.10) en de substituties van het begin van 2. volgt

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2}\cos\pi\delta\, F(x) =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda_2}\operatorname{ctg}\pi\delta\, \frac{(1+x)^{1+\delta+\gamma}(1-x)^{1-\delta-\gamma}-(1+x)^{1-\delta+\gamma}(1+x)^{1+\delta-\gamma}}{x} \tag{4.1}$$

Substitueren we deze functie in (1.12), resp. (1.13), dan vinden we

$$\Omega_1(z) = iz + \tfrac{1}{2}\, i\, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\operatorname{ctg}\pi\delta \,.\, I_3(z) \tag{4.2}$$

$$\Omega_2(z) = ic - \tfrac{1}{2}\, i \operatorname{ctg}\pi\delta\, I_4(z) \tag{4.3}$$

waarin

$$I_3(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{1+\delta+\gamma}(1-t)^{1-\delta-\gamma}-(1+t)^{1-\delta+\gamma}(1-t)^{1+\delta-\gamma}}{t(t-z)}\, dt$$

$$I_4(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1-2tz+z^2}{(1-tz)(t-z)} \,.$$

$$\frac{(1+t)^{1+\delta+\gamma}(1-t)^{1-\delta-\gamma}-(1+t)^{1-\delta+\gamma}(1-t)^{1+\delta-\gamma}}{t}\, dt.$$

In de appendix berekenen we

$$I_3(z)= \frac{4\delta\cos\pi\delta\sin\pi\gamma-4\gamma\sin\pi\delta\cos\pi\gamma-2z\sin\pi\delta\cos\pi\gamma+2z^{-1}\sin\pi\delta\cos\pi\delta}{\cos^2\pi\gamma-\cos^2\pi\delta}+$$

$$-\frac{e^{-\pi i(\delta+\gamma)}(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{z\sin\pi(\delta+\gamma)}+$$

$$-\frac{e^{\pi i(\delta-\gamma)}(1+z)^{1-\delta+\gamma}(1-z)^{1+\delta-\gamma}}{z\sin\pi(\delta-\gamma)}, \qquad (A.5)$$

geldig voor $\mathrm{Im}\, z > 0$;

$$I_4(z)= -\frac{8\delta\sin\pi\delta\cos\pi\gamma-8\gamma\cos\pi\delta\sin\pi\gamma}{\cos^2\pi\gamma-\cos^2\pi\delta}-2\frac{(z+z^{-1})\sin\pi\delta}{\cos\pi\gamma+\cos\pi\delta}+$$

$$+\frac{(1-e^{\pi i(\delta+\gamma)})(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{z\sin\pi(\delta+\gamma)}+$$

$$+\frac{(1-e^{-\pi i(\delta-\gamma)})(1+z)^{1-\delta+\gamma}(1-z)^{1+\delta-\gamma}}{z\sin\pi(\delta-\gamma)}, \qquad (A.7)$$

geldig voor $\mathrm{Im}\, z < 0$.

We verifieren hieruit onmiddellijk dat op Γ_{12} geldt

$\mathrm{Re}\,\Omega_1^+(x)=\lambda_1 f(x)$, $\mathrm{Re}\,\Omega_2^-(x)=\lambda_2 f(x)$, in overeenstemming met (1.10) en (1.11), en dus met (1.3).

Verder geldt op Γ_{12}

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{\mathrm{Im}\,\Omega_1^+(x)-x}{\cos\pi\delta}=\frac{\mathrm{Re}\ I_3^+(x)}{2\sin\pi\delta}=$$

$$=\frac{2\delta\,\mathrm{ctg}\,\pi\delta\sin\pi\gamma-2\gamma\cos\pi\gamma-x\cos\pi\gamma+x^{-1}\cos\pi\delta}{\cos^2\pi\gamma-\cos^2\pi\delta}+$$

$$-\frac{\mathrm{ctg}\,\pi(\delta+\gamma)}{\sin\pi\delta}\cdot\frac{(1+x)^{1+\delta+\gamma}(1-x)^{1-\delta-\gamma}}{2x}-\frac{\mathrm{ctg}\,\pi(\delta-\gamma)}{\sin\pi\delta}\cdot$$

$$\frac{(1+x)^{1-\delta+\gamma}(1-x)^{1-\delta+\gamma}}{2x}, \qquad (4.4)$$

$$\mathrm{Im}\,\Omega_2^-(x)-c=-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\pi\delta\,.\ \mathrm{Re}\ I_4^-(x)=$$

$$\frac{4\,\mathrm{ctg}\,\pi\delta\,(\delta\sin\pi\delta\cos\pi\gamma-\gamma\cos\pi\delta\sin\pi\gamma)}{\cos^2\pi\gamma-\cos^2\pi\delta}+\frac{(x+x^{-1})\cos\pi\delta}{\cos\pi\gamma+\cos\pi\delta}+$$

$$-\,\mathrm{ctg}\,\pi\delta\left[\frac{1-\cos\pi(\delta+\gamma)}{\sin\pi(\delta+\gamma)}\cdot\frac{(1+x)^{1+\delta+\gamma}(1-x)^{1-\delta-\gamma}}{2x}+\frac{1-\cos\pi(\delta-\gamma)}{\sin\pi(\delta-\gamma)}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{(1+x)^{1-\delta+\gamma}(1-x)^{1+\delta-\gamma}}{2x}\right]. \qquad (4.5)$$

We moeten nu verifieren of bij geschikte keuze van c aan de betrekking (1.4) voldaan is.

In verband met (1.10) en (1.11) luidt deze betrekking

$$(\lambda_2-\lambda_1)\, f(x) + \lambda_1(\operatorname{Im}\Omega_1^+(x)-x) - \lambda_2(\operatorname{Im}\Omega_2^-(x)-x) = 0.$$

En daar uit de relaties uit het begin van 2. volgt

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin\pi\gamma}{\cos\pi\delta}\,\lambda_2, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\cos\pi\gamma - \cos\pi\delta}{\cos\pi\delta}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

kunnen we hier na deling door λ_2 voor schrijven

$$c = \sin\pi\gamma\,.\,\frac{\lambda_2}{\cos\pi\delta}\, f(x) + (\cos\pi\gamma - \cos\pi\delta)\,.\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,.\,\frac{\operatorname{Im}\Omega_1^+(x)-x}{\cos\pi\delta} + $$
$$- (\operatorname{Im}\Omega_2^-(x)-c) + x.$$

Substitueren we in het rechterlid hiervan (4.1), (4.4) en (4.5) dan blijkt na enig rekenen dat inderdaad alle niet constante termen wegvallen en dat

$$c = \frac{2(\delta\cos\pi\delta\sin\pi\gamma - \gamma\sin\pi\delta\cos\pi\gamma)}{\sin\pi\delta\,(\cos\pi\gamma + \cos\pi\delta)} + $$
$$- \frac{4\operatorname{ctg}\pi\delta\,(\delta\sin\pi\delta\cos\pi\gamma - \gamma\cos\pi\delta\sin\pi\gamma)}{\cos^2\pi\gamma - \cos^2\pi\delta}\,. \qquad (4.6)$$

Hiermee is dus tevens aangetoond, dat voor deze waarde van c de integraal-vergelijking (2.1) een oplossing heeft en wel de functie F(x) uit (3.10).

Voor de functies $\Omega_1(z)$ en $\Omega_2(z)$ vinden we tenslotte met deze waarde van c

$$\Omega_1(z) = iz + i\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\operatorname{ctg}\pi\delta\,.$$

$$.\left[\frac{2\delta\cos\pi\delta\sin\pi\gamma - 2\gamma\sin\pi\delta\cos\pi\gamma - z\sin\pi\delta\cos\pi\gamma + z^{-1}\sin\pi\delta\cos\pi\delta}{\cos^2\pi\gamma - \cos^2\pi\delta} + \right.$$
$$- \frac{e^{-\pi i(\delta+\gamma)}(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{2\,z\,\sin\pi(\delta+\gamma)} + $$
$$\left. - \frac{e^{\pi i(\delta-\gamma)}(1+z)^{1-\delta+\gamma}(1-z)^{1+\delta-\gamma}}{2\,z\,\sin\pi(\delta-\gamma)}\right], \qquad (4.7)$$

$$\Omega_2(z) = i\left[\frac{2(\delta\cos\pi\delta\sin\pi\gamma - \gamma\sin\pi\delta\cos\pi\gamma)}{\sin\pi\delta\,(\cos\pi\delta + \cos\pi\gamma)} + \frac{(z+z^{-1})\cos\pi\delta}{\cos\pi\gamma + \cos\pi\delta} + \right.$$
$$\left. -\operatorname{ctg}\pi\delta\left\{\frac{(1-e^{\pi i(\delta+\gamma)})(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{2\,z\,\sin\pi(\delta+\gamma)} + \frac{(1-e^{-\pi i(\delta-\gamma)})(1+z)^{1-\delta+\gamma}(1-z)^{1+\delta-\gamma}}{2\,z\,\sin\pi(\delta-\gamma)}\right\}\right] \qquad (4.8)$$

5. Bijzondere gevallen.

We beschouwen nog enige bijzondere waarden van de parameters λ_1 en λ_2.

A. Zij $\lambda_1 = \lambda_2$.

Dan geldt volgens het begin van 2. $a = 0$, $b = 2\lambda_2^2$, $\operatorname{tg}\pi\gamma = 0$, $\cos\pi\delta = \frac{1}{2}$, dus $\gamma = 0$, $\delta = \frac{1}{3}$.

Uit (4.7) en (4.8) vinden we dan na enig rekenen

$$\Omega_1(z)=\Omega_2(z)=\frac{i}{3z}\left[1+z^2-e^{-\frac{\pi i}{3}}(1+z)^{\frac{4}{3}}(1-z)^{\frac{2}{3}}-e^{\frac{\pi i}{3}}(1+z)^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{4}{3}}\right]. \tag{4.9}$$

$\Omega_1(z)$ en $\Omega_2(z)$ vormen dus samen één functie, die continu is op Γ_{12}. Dit is ook geheel in overeenstemming met de overgangsvoorwaarden (1.3) en (1.4).

Natuurlijk kan deze functie, die we $\Omega(z)$ kunnen noemen, op een eenvoudiger wijze bepaald worden. Immers $\Omega(z)$ is een in $G_1+\Gamma_{12}+G_2$ eenwaardige analytische functie, waarvoor op $\Gamma_1+\Gamma_2$ geldt $\operatorname{Re}\Omega(z)=0$, terwijl voor grote z $\Omega(z)=iz+O(z^{-1})$, waaruit volgt dat $w=-i\,\Omega(z)$ het gebied $G_1+\Gamma_{12}+G_2$ afbeeldt op het gebied $\operatorname{Im} w > 0$, zodanig dat de omgeving van $z=\infty$ identiek wordt afgebeeld op die van $w=\infty$.[4)]

B. Laat λ_1 tot nul naderen.

Dan geldt $a \to \lambda_2$, $b \to \lambda_2^2$, $\operatorname{tg}\pi\gamma \to \frac{1}{\lambda_2}$, $\cos\pi\delta \to \frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}}$, dus $\delta \to \gamma$.

In (4.7) kunnen we niet zonder meer $\delta=\gamma$ substitueren, het blijkt echter dat de vorm tussen vierkante haken een eindige limiet heeft voor $\delta \to \gamma$, zodat we vinden

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \Omega_1(z) = iz. \tag{4.10}$$

En uit (4.8) vinden we

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \Omega_2(z) = \frac{e^{i\pi\gamma}z^2 - e^{-\pi i\gamma} - e^{\pi i\gamma}(1+z)^{1+2\gamma}(1-z)^{1-2\gamma}}{2z\sin\pi\gamma} \tag{4.11}$$

met $\gamma = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,ctg}\lambda_2$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Ook deze resultaten zijn in overeenstemming met wat in dit geval uit (1.3) en (1.4) ontstaat, nl. dat op Γ_{12} geldt

$$\operatorname{Re}\Omega_1 = 0, \qquad \operatorname{Re}\Omega_2 - \lambda_2 \operatorname{Im}\Omega_2 = -\lambda_2 x.$$

---

4) Dat uit (4.9) volgt dat $\Omega(z)=iz+O(z^{-1})$ is eenvoudig in te zien, daar voor $\operatorname{Im} z > 0$ geldt $1-z=(z-1)e^{-\pi i}$, dus
$\Omega(z)=\frac{i}{3z}\left[1+z^2+(z+1)^{4/3}(z-1)^{2/3}+(z+1)^{2/3}(z-1)^{4/3}\right]$

Omgekeerd kunnen uit deze randvoorwaarden, samen met (1.1) en (1.2), de resultaten (4.10) en (4.11) weer direct gevonden worden. Voor (4.10) is dat triviaal; de bepaling van $\Omega_2(z)$ kunnen we na afbeelding van G_2 op een half vlak herleiden tot de oplossing van een probleem dat overeen komt met het voor de functie $\Phi(z)$ uit 2. gestelde probleem.

Appendix.

Te berekenen zijn de volgende integralen

$$I_1(x,s)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x}\cdot\frac{t}{1-ts}\,dt,\quad -1<s<1;$$

$$I_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-x}\cdot(c-t)dt;$$

$$I_3(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{1+\delta+\gamma}(1-t)^{1-\delta-\gamma}-(1+t)^{1-\delta+\gamma}(1-t)^{1+\delta-\gamma}}{t(t-z)}\,dt;$$

$$I_4(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-2tz+z^2}{(1-tz)(t-z)}\cdot\frac{(1+t)^{1+\delta+\gamma}(1-t)^{1-\delta-\gamma}-(1+t)^{1-\delta+\gamma}(1-t)^{1+\delta-\gamma}}{t}\,dt$$

We kunnen deze integralen alle berekenen door middel van contour-integratie.

Voor de berekening van $I_1(x,s)$ beschouwen we eerst de integraal

$$J_1(z,s)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-z}\cdot\frac{t}{1-ts}\,dt$$

waarin z niet reeel tussen -1 en +1 is. Verder mag s willekeurig complex zijn, doch niet reëel met modulus groter dan 1.

Uit de formule (1.9) van Plemelj volgt dan direct dat voor $-1<x<1$ geldt

$$\tfrac{1}{2}\left\{J_1^{+}(x,s)+J_1^{-}(x,s)\right\}=I_1(x,s) \qquad (A.1)$$

Ter berekening van $J_1(z,s)$ beschouwen we de integraal

$$\oint_1=\oint_C\frac{(w+1)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(w-1)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{w-z}\;\frac{w}{1-ws}\,dw$$

genomen langs de in fig. 3 aangegeven contour C.

Als de straal van de kleine cirkels om $\pm$ 1 tot nul nadert dan geldt

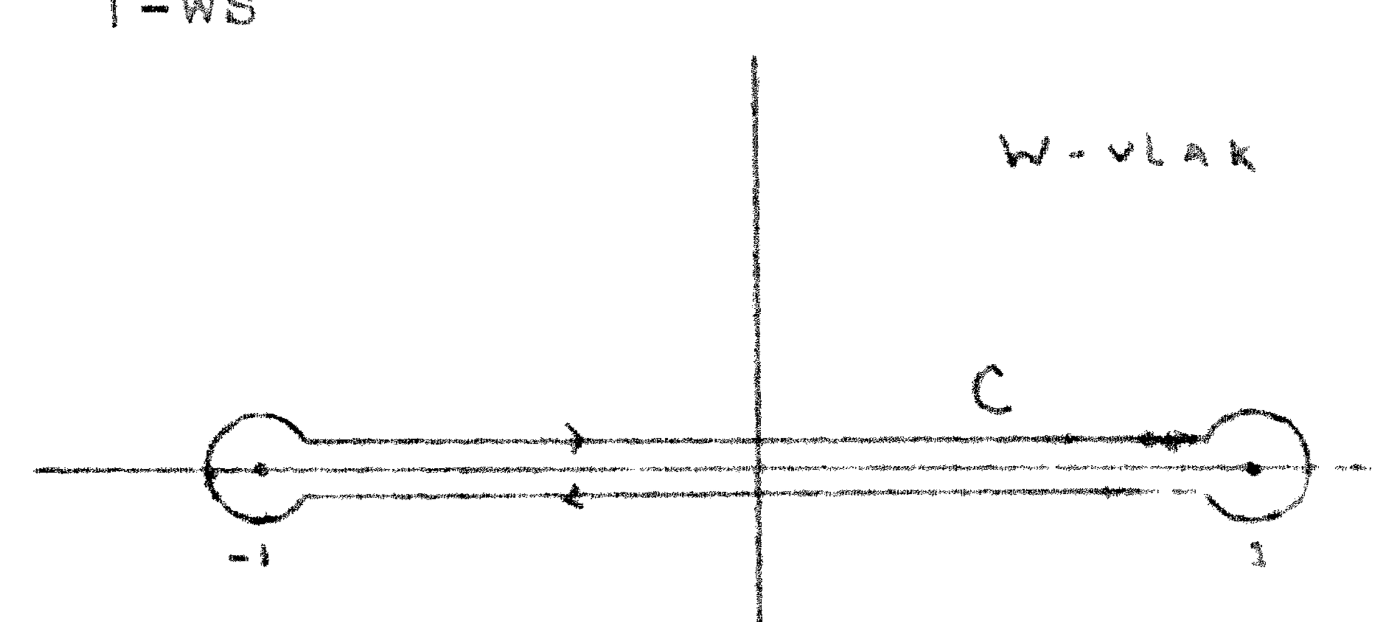

fig. 3.

$$\oint_1=\left\{e^{\pi i(-\frac{1}{2}+\gamma)}-e^{-\pi i(-\frac{1}{2}+\gamma)}\right\}\pi J_1(z,s)=-2\pi i\cos\pi\gamma\cdot J_1(z,s)\;.$$

Anderzijds is, daar de integrand in $\oint_1$ buiten de contour analytisch en eenwaardig is, $\oint_1$ volgens de residuen-stelling gelijk aan $2\pi i$ maal de som van de residuen in de polen van de integrand plus het residu in oneindig (dat gedefinieerd is als het tegengestelde van de coefficient van w^{-1} in de Laurent-ontwikkeling van de integrand om $w=\infty$).

We vinden dus (de polen zijn $w = z$ en $w = s^{-1}$, het residu in oneindig is nul, daar de integrand zich hier gedraagt als w^{-2})

$$\oint_1 = 2\pi i \left[\frac{z(z+1)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(z-1)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-zs} - \frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-s)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-zs} \right],$$

zodat

$$J_1(z,s) = \frac{1}{\cos\pi\gamma} \left[- \frac{z(z+1)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(z-1)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-zs} + \frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-s)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-zs} \right].$$

En met (A.1) volgt hieruit

$$I_1(x,s) = \frac{1}{\cos\pi\gamma} \left[\frac{(1+s)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-s)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-sx} - \sin\pi\gamma \, \frac{x(1+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{1-sx} \right]. \tag{A.2}$$

De berekening van $I_2(x)$ gaat geheel op dezelfde wijze, we beschouwen nu

$$J_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{t-z} (c-t)dt \qquad (z \text{ niet op } \Gamma_{12}).$$

Dan is op Γ_{12} $\quad I_1(x) = \frac{1}{2} \left\{ J_2^+(x) + J_2^-(x) \right\}$.

Zij $\oint_2 = \oint_C \frac{(w+1)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(w-1)^{-\frac{1}{2}+\gamma}}{w-z} (c-w)dw = -2\pi i \cos\pi\gamma \, . J_2(z)$.

De integrand heeft een pool in $w = z$ en gedraagt zich op ∞ als $-w^{-1}+\ldots$, dus volgens de residuenstelling geldt

$$\oint_2 = 2\pi i \left[(z+1)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(z-1)^{-\frac{1}{2}+\gamma}(c-z) + 1 \right],$$

waaruit volgt

$$I_2(x) = - \frac{1}{\cos\pi\gamma} \left[1 + \sin\pi\gamma \, (1+x)^{-\frac{1}{2}-\gamma}(1-x)^{-\frac{1}{2}+\gamma}(c-x) \right]. \tag{A.3}$$

Daar de integrand van $I_3(z)$ singulier is voor $z = 0$ beschouwen we voor de berekening van $I_3(z)$

$$J_3(z, \zeta, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{1+\delta+\gamma}(1-t)^{1-\delta-\gamma}}{(t-\zeta)(t-z)} dt,$$

waarin z noch ζ reeel tussen -1 en $+1$ zijn.

Met (1.9) volgt hieruit

$$I_3(z) = \frac{1}{2} \left\{ J_3^+(z,o,\delta) + J_3^-(z,o,\delta) - J_3^+(z,o,-\delta) - J_3^-(z,o,-\delta) \right\} \tag{A.4}$$

waarbij de limieten natuurlijk voor $\zeta \to 0 \pm i\, o$ bedoeld zijn.

Zij $\oint_3 = \oint_C \frac{(w+1)^{1+\delta+\gamma}(w-1)^{1-\delta-\gamma}}{(w-\zeta)(w-z)} dw.$

Dan geldt $\oint_{\mathfrak{z}} = \left\{ e^{\pi i(1-\delta-\gamma)} - e^{-\pi i(1-\delta-\gamma)} \right\} \pi J_3(z,\mathfrak{z},\delta) =$

$$= 2\pi i \sin\pi(\delta+\gamma) \; J_3(z,\mathfrak{z},\delta) \, .$$

De polen van de integrand zijn $w = \mathfrak{z}$ en $w = z$, op ∞ gedraagt de integrand zich als $1+(2\delta+2\gamma+\mathfrak{z}+z)w^{-1}+\ldots$. En dus is

$$\oint_{\mathfrak{z}} = 2\pi i \left\{ \frac{(\mathfrak{z}+1)^{1+\delta+\gamma}(\mathfrak{z}-1)^{1-\delta-\gamma}}{\mathfrak{z}-z} + \frac{(z+1)^{1+\delta+\gamma}(z-1)^{1-\delta-\gamma}}{z-\mathfrak{z}} - (2\delta+2\gamma+\mathfrak{z}+z) \right\}.$$

Hieruit volgt

$$\tfrac{1}{2}\left\{ J_3^+(z,o,\delta) + J_3^-(z,o,\delta) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sin\pi(\delta+\gamma)} \left[\cos\pi(\delta+\gamma) . \frac{1}{z} + \frac{(z+1)^{1+\delta+\gamma}(z-1)^{1-\delta-\gamma}}{z} - (2\delta+2\gamma+z) \right] .$$

Als z in het <u>bovenste</u> halve vlak ligt, dan is $z-1=(1-z)e^{\pi i}$. Met (A.4) vinden we nu dat voor $\mathrm{Im}\, z > 0$ geldt

$$I_3(z) = \frac{4\delta\cos\pi\delta\sin\pi\gamma - 2\sin\pi\delta\,(2\gamma\cos\pi\gamma + z\cos\pi\gamma - z^{-1}\cos\pi\delta)}{\cos^2\pi\gamma - \cos^2\pi\delta} +$$

$$- \frac{e^{-\pi i(\delta+\gamma)}(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{z\sin\pi(\delta+\gamma)} - \frac{e^{\pi i(\delta-\gamma)}(1+z)^{1-\delta+\gamma}(1-z)^{1+\delta-\gamma}}{z\sin\pi(\delta-\gamma)} \qquad (A.5)$$

Voor de berekening van $I_4(z)$ beschouwen we tenslotte

$$J_4(z,\mathfrak{z},\delta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1-2tz+z^2}{(1-tz)(t-z)(t-\mathfrak{z})} . (1+t)^{1+\delta+\gamma}(1-t)^{1-\delta-\gamma}\,dt$$

(z niet reeel, $\mathfrak{z}$ niet op Γ_{12}), waaruit met (1.9) volgt

$$I_4(z) = \tfrac{1}{2}\left\{ J_4^+(z,o,\delta) + J_4^-(z,o,\delta) - J_4^+(z,o,-\delta) - J_4^-(z,o,-\delta) \right\} . \qquad (A.6)$$

De berekening van J_4 gaat op dezelfde wijze als die van J_3:

$$\oint_4 = \oint_C \frac{1-2wz+z^2}{(1-wz)(w-z)(w-\mathfrak{z})} . (w+1)^{1+\delta+\gamma}(w-1)^{1-\delta-\gamma}\,dw =$$

$$= \left\{ e^{\pi i(1-\delta-\gamma)} - e^{-\pi i(1-\delta-\gamma)} \right\} . \pi J_4(z,\mathfrak{z},\delta) =$$

$$= 2\pi i \sin\pi(\delta+\gamma) \; J_4(z,\mathfrak{z},\delta) .$$

De polen van de integrand zijn $w = z^{-1}$, $w = z$ en $w = \mathfrak{z}$; op ∞ gedraagt de integrand zich als $2+(z+z^{-1}+2\mathfrak{z}+4\delta+4\gamma)w^{-1}+\ldots$.

Er geldt dus (na enige vereenvoudigingen)

$$\oint_4 = 2\pi i\Big[\frac{(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{z(1-\zeta z)} + \frac{(z+1)^{1+\delta+\gamma}(z-1)^{1-\delta-\gamma}}{z-\zeta} +$$

$$- \frac{1-2\zeta z+z^2}{(1-\zeta z)(z-\zeta)}(\zeta+1)^{1+\delta+\gamma}(\zeta-1)^{1-\delta-\gamma} - (z+z^{-1}+2\zeta+4\delta+4\gamma)\Big],$$

waaruit volgt

$$\tfrac{1}{2}\left\{J_4^+(z,o,\delta)+J_4^-(z,o,\delta)\right\} = \frac{1}{\sin\pi(\delta+\gamma)}\Big[-4(\delta+\gamma)-(1-\cos\pi(\delta+\gamma)(z+z^{-1}))+$$

$$+\frac{(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{z} + \frac{(z+1)^{1+\delta+\gamma}(z-1)^{1-\delta-\gamma}}{z}\Big].$$

Als z in het onderste halve vlak ligt, dan is $z-1=(1-z)e^{-\pi i}$.
Met (A.6) vinden we dan

$$I_4(z) = \frac{-8\delta\sin\pi\delta\cos\pi\gamma+8\gamma\cos\pi\delta\sin\pi\gamma}{\cos^2\pi\gamma-\cos^2\pi\delta} - 2\,\frac{(z+z^{-1})\sin\pi\delta}{\cos\pi\gamma+\cos\pi\delta} +$$

$$+\frac{(1-e^{\pi i(\delta+\gamma)})(1+z)^{1+\delta+\gamma}(1-z)^{1-\delta-\gamma}}{\sin\pi(\delta+\gamma)} +$$

$$\frac{(1-e^{-\pi i(\delta-\gamma)})(1+z)^{1-\delta+\gamma}(1-z)^{1+\delta-\gamma}}{z\sin\pi(\delta-\gamma)}. \qquad (A.7)$$

Literatuur.

[1] G.W. Veltkamp, De invloed van stationaire windvelden op een zee van constante diepte. Rapport TW 23 van het Mathematisch Centrum, 1953.

[2] G.W. Veltkamp, De invloed van stationaire windvelden op een zee van in delen constante diepte. Rapport TW 24 van het Mathematisch Centrum,1954.

[3] N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations, Groningen 1953.

[4] Balth. van der Pol and H. Bremmer, Operational Calculus, Cambridge, 1950.

[5] W. Magnus and F. Oberhettinger, Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, New York, 1949.