MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFD. TOEGEPASTE WISKUNDE

ONTWIKKELINGEN IN FOURIER-REEKSEN MET VOORGESCHREVEN PHASEN

door

G.W. Veltkamp

Rapport
TW 34
ZW 1955-011

September 1955

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht door G.W. Veltkamp in de serie Actualiteiten

op 24 September 1955

Ontwikkelingen in Fourier-reeksen met voorgeschreven phasen.

§1. Inleiding

Zoals bekend kan een voor $0 \leq x \leq \pi$ gegeven "nette" functie $f(x)$ zodanig in het interval $-\pi \leq x < 0$ voortgezet worden dat van de Fourier-ontwikkeling

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$= \sum_{0}^{\infty} c_n \sin (nx + \pi\mu_n)$$

òf alleen de sinus-termen òf alleen de cosinus-termen over blijven. Anders gezegd: de stelsels $\{\sin nx\}$, $n=1,2,\ldots$ en $\{\cos nx\}$, $n=0,1,\ldots$ vormen in het interval $0 \leq x \leq \pi$ volledige stelsels.

We bespreken thans de vraag in hoeverre de functies $\sin(nx + \pi\mu_n)$ waarin de "phasen" $\pi\mu_n$ voorgeschreven getallen zijn, ook een volledig stelsel vormen in het interval $(0,\pi)$.

Dat deze vraag niet zonder meer bevestigend kan worden beantwoord blijkt uit het volgende eenvoudige voorbeeld.

Beschouw de ontwikkeling

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(\sin nx + \gamma_n \cos nx) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

waarin $\gamma_1, \ldots \gamma_N$ gegeven zijn.

De coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ moeten dan voldoen aan de vergelijkingen

$$a_m + \sum_{n=1}^{N} B_{mn}\, a_n = f_m, \qquad m=1,2,\ldots \tag{1.1}$$

waarin $B_{mn} = \frac{2}{\pi}\gamma_n \int_0^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx, \qquad m=1,2,\ldots, \; n=1,2,\ldots N$

$$f_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \qquad m=1,2,\ldots$$

De vergelijkingen (1.1) met $m=1,2,\ldots N$ vormen een stelsel van N vergelijkingen met N onbekenden, waaruit in het algemeen $a_1,\ldots a_n$ gevonden kunnen worden en de coefficienten a_m met $m > N$ kunnen daarna één voor één uit de overige vergelijkingen worden bepaald.

Het is echter duidelijk dat de coefficienten γ_n best zo gekozen kunnen worden, dat de linker leden van de eerste N vergelijkingen afhankelijk zijn en in dat geval is de ontwikkeling slechts onder bepaalde nevenvoorwaarden voor $f(x)$ mogelijk en als hij mogelijk is is hij niet eenduidig! Anderzijds is het op continuïteitsgronden duidelijk dat als alle coefficienten γ_n maar klein genoeg zijn, het stelsel zeker eenduidig oplosbaar zal zijn.

In §§ 2-5 zullen we het gestelde probleem benaderen met functionaalanalytische methoden. We zullen van de te ontwikkelen functie veronderstellen dat hij met zijn quadraat Lebesgue-integreerbaar is van 0 tot π (dus tot de ruimte $L_2(0,\pi)$ behoort) en we zullen slechts eisen dat de reeksen in het gemiddelde convergeren. Als voornaamste resultaat zullen we dan bewijzen dat als voor $n=1,2,\ldots$ de complexe getallen γ_n voldoen aan $|\gamma_n| \leq \gamma < 1$, de ontwikkelingen

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{n=1}^{N} a_n(\sin nx + \gamma_n \cos nx), \qquad (1.2)$$

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{n=0}^{N} b_n(\cos nx + \gamma_n \sin nx) \qquad (1.3)$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

steeds eenduidig mogelijk zijn.

We merken op dat bij de reeks (1.2), waar de sinus-termen overheersen en die we een bijna-sinus-reeks kunnen noemen, de sommatie loopt vanaf $n=1$, terwijl bij de bijna-cosinus-reeks (1.3) de sommatie loopt vanaf $n=0$.

In zekere zin verder gaande resultaten verkrijgt men als meer gebruik wordt gemaakt van het speciale karakter van de goniometrische functies en functie-theoretische hulpmiddelen worden gebruikt. In § 6 wordt dit gedemonstreerd aan de hand van het speciale geval dat γ constant is. Hier blijkt ook duidelijk, dat de begrippen volledigheid en afhankelijkheid geheel afhangen van de eisen die men aan de convergentie stelt.

Het meer algemene en voor de practijk belangrijke geval dat γ_n niet constant is doch voor $n \to \infty$ tot een limiet nadert kan met behulp van de beschouwingen voor constante γ_n herleid worden tot een integraalvergelijking met Fredholm-kern. We gaan daar echter niet op in.

§ 2. Ontwikkelingsstellingen in de Hilbert-ruimte L_2.

In de §§ 2-5 zullen we gebruik maken van de terminologie van de complexe Hilbert ruimte L_2. Met convergentie van reeksen wordt steeds gemiddelde convergentie bedoeld en twee functies $f_1(x)$ en $f_2(x)$ heten "gelijk" als $\| f_1(x)-f_2(x) \|^2 = \int | f_1(x)-f_2(x) |^2 dx = 0$.

Stelling 2.1. (Paley en Wiener [1], Sz.Nagy [2])

Als 1°. het stelsel $\{u_n(x)\}$, $n=0,1,\ldots$ volledig en orthogonaal is in $L_2(\alpha,\beta)$,

2°. het stelsel $\{v_n(x)\}$, $n=0,1,\ldots$ zodanig is dat voor ieder eindig stel coefficienten $a_{N_1},\ldots a_{N_2}$ geldt

$$\Big\| \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n v_n(x) \Big\| \leq \gamma \Big(\sum_{n=N_1}^{N_2} | a_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

met $\gamma < 1$,

dan bestaat bij iedere functie $f(x) \in L_2(\alpha,\beta)$ een eenduidig bepaald stel coefficienten $a_0,a_1,\ldots,$ zodanig dat $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

en $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u_n(x) + v_n(x)) \qquad (2.2)$$

(in de zin van gemiddelde convergentie in $L_2(\alpha,\beta)$).

Bewijs

Zij $a_0,a_1,\ldots$ een willekeurig stel coefficienten waarvoor geldt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Dan bestaan de functies $a(x)$ en $b(x) \in L_2(\alpha,\beta)$ gedefinieerd door

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n (x) \qquad (2.3)$$

$$b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n (x) \qquad (2.4)$$

De functie $a(x)$ bestaat volgens de stelling van Riesz en Fischer en we hebben

$$\| a(x) \| = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} | a_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.5)$$

$$(a_n(x), u_n(x)) = a_n, \qquad n=0,1,\ldots \qquad (2.6)$$

De functie b(x) bestaat dank zij het gegeven (2.1) en de volledigheid van de Hilbert-ruimte. Er geldt namelijk

$$\Big\|\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n\, v_n\,(x)\Big\| \;\leq\; \gamma\, \Big(\sum_{n=N_1}^{N_2} |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

voor $N_2 > N_1 > N(\varepsilon)$ en dit is nodig en voldoende voor de convergentie van de reeks in (2.4) naar een functie $b(x) \in L_2(\alpha,\beta)$. Verder geldt

$$\|b(x)\| \;=\; \lim_{N\to\infty} \Big\|\sum_{n=0}^{N} a_n\, v_n\,(x)\Big\| \leq$$

$$\leq \gamma \lim \Big(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \gamma\, \|a(x)\|. \tag{2.7}$$

Omgekeerd, als $a(x) \in L_2(\alpha,\beta)$ gegeven is dan kunnen we de coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ door (2.6) definieren. Volgens de stelling van Parseval voldoen ze aan (2.5) en (2.3) geldt. Met (2.4) kunnen we dan weer de functie b(x) definieren die we ook kunnen schrijven als

$$b(x) = B\, a(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a(x),\, u_n(x))\, v_n(x)$$

en die natuurlijk weer aan (2.7) voldoet.

De aldus gedefinieerde afbeelding B van $L_2(\alpha,\beta)$ op zichzelf heeft de volgende eigenschappen

1. B is <u>lineair</u>: $B(\lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x)) = \lambda_1 B a_1(x) + \lambda_2 B a_2(x)$

2. B is begrensd met norm $\|B\| \leq \gamma$, d.w.z. voor iedere $a(x) \in L_2(\alpha,\beta)$ geldt

$$\|B\, a(x)\| \leq \gamma \|a(x)\|.$$

Het is nu duidelijk, dat de bepaling van de ontwikkeling (2.1) overeen komt met de oplossing van de functionaal vergelijking

$$a(x) + B\, a(x) = f(x) \tag{2.8}$$

en als we bewijzen dat deze een eenduidige oplossing heeft dan zijn we klaar want de coefficienten a_n volgen dan uit (2.6).

Daar $\gamma < 1$ is volgt uit (2.8) dat, als a(x) aan (2.8) voldoet,

$$\|f(x)\| \geq \Big|\, \|a(x)\| - \|B\, a(x)\| \,\Big| \geq (1-\gamma)\, \|a(x)\|,$$

waaruit volgt dat als f(x)=0, ook a(x)=0 moet zijn. (2.8) heeft dus hoogstens één oplossing. Deze zullen we nu construeren.

Beschouw de rij functies

$$a_N(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, B^k\, f(x)\,, \qquad N=0,1,\ldots\;.$$

Daar $\| B^k f(x) \| < \gamma^k \| f(x) \|$, geldt voor $N_2 > N_1$

$$\| a_{N_2}(x) - a_{N_1}(x) \| \leq \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \gamma_k \| f(x) \|$$

voor $N_1 > N_0(\varepsilon)$. De rij $a_N(x)$ convergeert dus naar een functie $a(x)$ uit $L_2(\alpha,\beta)$. Verder is, daar $a_{N+1}(x) + B\, a_N(x) = f(x)$

$$\| a(x) + B\, a(x) - f(x) \| =$$

$$= \| a(x) - a_{N+1}(x) + B(a(x) - a_N(x)) \| \leq$$

$$\leq \| a(x) - a_{N+1}(x) \| + \gamma \| a(x) - a_N(x) \| \leq 2\varepsilon \text{ voor } N > N_0(\varepsilon)$$

En daar het linker lid van deze ongelijkheid onafhankelijk is van N volgt hieruit dat de functie

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k B^k f(x)$$

aan (2.8) voldoet. Hiermee is de stelling bewezen.

Speciaal geval:

Het is duidelijk dat aan de voorwaarde (2.1) zeker voldaan is als de functies $v_n(x)$ $(n=0,1,\dots)$ onderling orthogonaal zijn en hun normen alle kleiner dan of gelijk aan $\gamma < 1$ zijn. Immers dan is

$$\| \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n v_n(x) \|^2 = \sum_{n=N_1}^{N_2} |a_n|^2 \| v_n(x) \|^2 < \gamma^2 \sum_{n=N_1}^{N_2} |a_n|^2 .$$

In deze vorm is de stelling nu direct toepasbaar op de ontwikkelingen (1.2) en (1.3). De functies $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ $(n=1,2,\dots)$ vormen een volledig orthonormaal stelsel in $L_2(0,\pi)$ en voor de functies $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma_n \cos nx$ $(n=1,2,\dots)$ geldt

$$(v_n(x), v_m(x)) = |\gamma_n|^2 \delta_{mn}. \tag{2.9}$$

Als dus voor $n=1,2,\dots$ $|\gamma_n| \leq \gamma < 1$ is dan kan de stelling worden toegepast.

Analoog: de functies $u_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$ $(n=1,2,\dots)$ vormen een volledig orthogonaal stelsel in $L_2(0,\pi)$ en voor de functies $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma_n \sin nx$ $(n=1,2,\dots)$ geldt weer (2.9).

Stelling 2.2.

Als de getallen γ_n $(n=1,2,\dots)$ voldoen aan

$$|\gamma_n| \leq \gamma < 1$$

dan bestaan bij iedere functie $f(x) \in L_2(0,\pi)$ eenduidig bepaalde coefficienten $a_1, a_2, \dots$ en $b_0, b_1, \dots$ zodanig dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$$

en

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\sin nx + \gamma_n \cos nx),$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\cos nx + \gamma_n \sin nx).$$

(in de zin van gemiddelde convergentie).

§3. De "Abschnitt"-methode.

Het bewijs van stelling (2.1) is in zekere zin constructief. Doch de bepaling van de ontwikkelings coefficienten via de functie $a(x)$ die met behulp van de geitereerde operatoren B^k geconstrueerd is, zou zeer omslachtig zijn. Een eenvoudiger methode is de volgende.

Uit (2.2) volgt dat de coefficienten a_n moeten voldoen aan de vergelijkingen (vgl.1.1)

$$f_m = a_m + \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} a_n, \qquad m=0,1,\dots \tag{3.1}$$

waarin

$$f_m = (f(x), u_m(x)), \quad B_{mn} = (v_n(x), u_m(x)).$$

We vervangen nu het stelsel (3.1) van oneindig veel vergelijkingen met oneindig veel onbekenden door een "Abschnitt" van N vergelijkingen met N onbekenden:

$$f_m = a_m^{(N)} + \sum_{n=0}^{N} B_{mn} a_n^{(N)}, \quad m=0,1,\dots N \tag{3.2}$$

en de vraag is of de oplossing $(a_0^{(N)}, \dots a_N^{(N)})$ van het stelsel (3.2) steeds bestaat en voor $N \to \infty$ convergeert naar de ontwikkelings coefficienten $(a_0, a_1, \dots)$.

Deze vraag wordt bevestigend beantwoord door

Stelling 3.1.

Als van de bij de matrix $\{B_{mn}\}$ behorende operator B de norm kleiner dan 1 is dan heeft het stelsel (3.2) voor iedere N een oplossing en deze oplossingen convergeren voor $N \to \infty$ naar de (eenduidige) oplossing van het stelsel (3.1) in die zin dat

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} | a_n^{(N)} - a_n|^2 = 0,$$

waaruit a fortiori volgt dat $\lim_{N\to\infty} a_n^{(N)} = a_n$.

Voor een bewijs van deze stelling verwijzen we naar een binnenkort te verschijnen rapport [3] .

§4. De biorthogonale functies.

We beschouwen de ontwikkeling

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\cos nx + \gamma_n \sin nx) , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

met $|\gamma_n| \leq \gamma < 1$, $f(x) \in L_2(0,\pi)$, $\sum |a_n|^2 < \infty$ (4.1)

Als we beschikken over functies $g_m(x) \in L_2(0,\pi)$ $(m=0,1,\ldots)$ die met de functies $\cos nx + \gamma_n \sin nx$ $(n+0,1,\ldots)$ een biorthogonaal systeem vormen, d.w.z.

$$\int_0^{\pi} g_m(x)(\cos nx + \gamma_n \sin nx)\, dx = \delta_{mn}, \tag{4.2}$$

dan kunnen de coefficienten a_n eenvoudig gevonden worden. Uit (4.1) en (4.2) volgt n.l.

$$\int_0^{\pi} f(x)\, g_m(x)\, dx = a_m , \quad (m=0,1,\ldots) \tag{4.3}$$

De verwisseling van integratie-en sommatievolgorde is geoorloofd omdat de reeks (4.1) gemiddeld convergeert en hieruit de zwakke convergentie volgt.

De functies $g_m(x)$ kunnen we als volgt vinden. Ontwikkel de functies $\frac{\varepsilon_m}{\pi} \cos mx$ $(m=0,1,\ldots)$ met $\varepsilon_0=2$, $\varepsilon_m=1$ voor $m \geq 1$ in de met (4.1) overeenkomende "sinusreeks". (Volgens stelling 2.2 is dat eenduidig mogelijk) en zij

$$\frac{\varepsilon_m}{\pi} \cos mx = \sum_{m=1}^{\infty} g_{mn}(\sin nx + \gamma_n \cos nx). \tag{4.4}$$

met $\sum_{m=1}^{\infty} | g_{mn} |^2 < \infty$. $(m=0,1,\ldots)$.

Dan voldoen de functies $g_m(x)$, gedefinieerd door

$$\begin{aligned} g_m(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} g_{mk} \sin kx \\ &= \frac{\varepsilon_m}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} g_{mk}\, \gamma_k \cos kx \end{aligned} \tag{4.5}$$

aan de gestelde eisen. Want uit (4.5) volgt voor n=1,2,...

$$\int_0^\pi g_m(x)\,\sin nx\,dx = \frac{\pi}{2}\,g_{mn}$$

en voor n=0,1,...

$$\int_0^\pi g_m(x)\,\cos nx\,dx = \delta_{mn} - \frac{\pi}{2}\gamma_n\,g_{mn}$$

zodat inderdaad aan (4.2) is voldaan.

Dat de functies $g_m(x)$ eenduidig bepaald zijn (in de zin van aequivalentie in L_2 natuurlijk) volgt uit het feit dat de functies $\{\cos nx + \gamma_n \sin nx\}$ een volledig en dus ook een gesloten stelsel vormen, d.w.z. dat uit

$$\int_0^\pi g(x)(\cos nx + \gamma_n \sin nx) = 0, \qquad n=0,1,\ldots$$

volgt $g(x)=0$ (zie b.v. Tricomi [4], §10).

Omgekeerd vormen ook de functies $g_m(x)$ een gesloten en dus een volledig stelsel.

Iets dergelijks geldt natuurlijk ook voor de bijna-sinus-reeks.

Opmerking

Men kan bewijzen dat de biorthogonale functies ook in het algemene geval van stelling 2.1 bestaan (vgl. Paley-Wiener, l.c. en Riesz-Nagy, l.c.).

§5. Ontwikkeling van "gladde" functies.

We weten dat, als $f(x)$ in $(0,\pi)$ een "gladde" functie is, de cosinus-coefficienten zich gedragen als n^{-2} en dat de cosinus-reeks dan dus uniform convergeert voor $0 \leq x \leq \pi$. Voor de sinus-reeks geldt dit laatste slechts als $f(0) = f(\pi) = 0$. (5.1)

Iets dergelijks hebben we hier ook:

Stelling 5.1:

Als voor n=1,2,... $|\gamma_n| \leq \gamma < 1$ is, dan bestaan eenduidig bepaalde coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ zodanig dat

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n(\cos nx + \gamma_n \sin nx) \tag{5.2}$$

$$\sum_{n=1}^\infty n^2 |a_n|^2 < \infty \tag{5.3}$$

dan en slechts dan als

1°. $f(x)$ absoluut continu is voor $0 \leq x \leq \pi$

2. $f'(x) \in L_2(0,\pi)$

De reeks convergeert dan uniform voor $0 \leq x \leq \pi$.

Het bewijs voor deze stelling berust op het feit dat uit 2°. volgt dat $f'(x)$ in een "sinus-reeks"

$$f'(x) = \sum_1^{\infty} b_n(-\sin nx + \gamma_n \cos nx) \tag{5-4}$$

met $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$ ontwikkeld kan worden.

Onbepaalde integratie (die mogelijk is daar 1°. aequivalent is met de bewering dat $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$) en invoering van

$a_n = n^{-1} b_n$ $(n=1,2,\ldots)$, $a_0 = f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ levert dan dat de voorwaarden voldoende zijn. Dat ze nodig zijn volgt op een dergelijke manier.

Dat uit (5.3) de uniforme convergentie volgt is duidelijk omdat

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \cdot n|a_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} n^2|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ dus convergeert.

Een stelling als stelling 5.1 kan ook voor de bijna-sinus-reeks worden geformuleerd doch de twee voorwaarden voor $f(x)$ die overeen komen met (5.1) hebben een vrij ingewikkeld karakter.

§6. Enkele speciale gevallen.

De meeste resultaten uit het voorgaande waren een direct gevolg van stelling 2.1, geldig voor zeer algemene systemen van functies $u_n(x)$ en $v_n(x)$. Ook aan de te ontwikkelen functie $f(x)$ en aan de getallen γ_n werden slechts geringe eisen gesteld.

Om meer te vinden moeten we, net als in de gewone theorie van de Fourier-reeksen meer gebruik maken van het speciale karakter van de trigonometrische functies en van bijzondere eigenschappen van de getallen γ_n en de te ontwikkelen functies.

Als een zeer eenvoudig bijzonder geval signaleren we het stelsel

$$w_0(x) = e^{\alpha x}, \quad w_n(x) = \cos nx + \frac{\alpha}{n} \sin nx, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Deze functies vormen een in $L_2(0,\pi)$ volledig orthogonaal stelsel [1)] en iedere "gladde" functie kan in een uniform convergente reeks van deze functies ontwikkeld worden. Vervangen we de functie $e^{\alpha x}$ door 1 dan is het stelsel natuurlijk nog volledig doch niet meer orthogonaal.

---

1) De volledigheid kan b.v. worden bewezen met behulp van een voorwaarde van Dallzell [5], (vgl. ook Tricomi, l.c., § 11).

We geven nu enige resultaten voor het geval dat de getallen γ_n alle gelijk zijn. Dit geval kan als uitgangspunt dienen voor de behandeling van het in de practijk belangrijke geval dat de getallen γ_n voor $n \to \infty$ tot een limiet $\neq 0$ naderen (zie hiervoor een binnenkort te verschijnen rapport van Lauwerier [6] , waarin ook het geval γ_n=const. uitvoerig wordt behandeld).

We beschouwen de ontwikkeling

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sin nx + \gamma \cos nx) \tag{6.1}$$

Het geval dat γ nul of zuiver imaginair is sluiten we uit (die gevallen zijn eenvoudiger, resp. iets lastiger te behandelen) en we kunnen dan zonder beperking deralgemeenheid veronderstellen dat Re $\gamma > 0$ is (anders $x \to \pi - x$). We definieren dan het getal μ door

$$\gamma = \text{tg}\, \pi\mu \quad , \; 0 < \text{Re}\,\mu < \tfrac{1}{2}.$$

Merk op, dat $\gamma \gtrless 1$ overeenkomt met .Re$\,\mu \gtrless 1/4$.

We formuleren nu de belangrijkste resultaten:

<u>Stelling 6.1.</u>

Iedere "gladde" functie f(x) kan op eenduidige wijze in een reeks (6.1) worden ontwikkeld zodanig dat voor de coefficienten geldt

$$a_n = \mathcal{O}(n^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0$$

en de reeks convergeert dus uniform.

Speciaal is

$$a_0 = \frac{\cos \pi\mu}{\pi} \int_0^{\pi} (\text{tg}\, \tfrac{1}{2}x)^{1-2\mu}\; f(x)\, dx \tag{6.2}$$

en voor grote n geldt

$$a_n \sim -\frac{2^{1-2\mu}}{\pi^2} \sin 2\pi\mu . \Gamma(1-2\mu).n^{-1-2\mu}. \int_0^{\pi} (\text{tg}\, \tfrac{1}{2}x)^{-2\mu} \frac{f(x)-f(0)}{\sin x}\, dx \tag{6.3}$$

<u>Stelling 6.2.</u>

Iedere "gladde"functie f(x) kan op eenduidige wijze in een reeks (6.1) <u>met a_0=0</u> worden ontwikkeld, zodanig dat de reeks voor $0 < \delta < x < \pi - \delta$ uniform convergeert. Voor grote n geldt

$$a_n \sim (-1)^{n-1} \frac{2^{1+2\mu}}{\pi^2} \cos^3 \pi\mu . \Gamma(1-2\mu)\; n^{-1+2\mu} \int_0^{\pi} (\text{tg}\, \tfrac{1}{2}x)^{1-2\mu} f(x)\, dx \tag{6.4}$$

We merken op dat voor $|\gamma|<1$ ($\mathrm{Re}\,\mu<1/4$) stelling 6.2 het eerste deel van stelling 2.2 omvat (bijna-sinus-reeks, $a_0=0$, $\Sigma |a_n|^2<\infty$). Voor $|\gamma|>1$ ($1/4<\mathrm{Re}\,\mu<1/2$) omvat stelling 6.1 het tweede deel van stelling 2.2 en ook stelling 5.1 ("gladde" functie, bijna-cosinus-reeks, $a_0\neq 0$, $\Sigma n^2 |a_n|^2<\infty$).

De andere resultaten vallen buiten het kader van de vorige stellingen. Stelling 6.1 zegt dat de convergentie van een bijna-sinus-reeks kan worden verbeterd door een nulde term toe te laten, terwijl uit stelling 6.2 volgt dat we bij een bijna-cosinus-reeks steeds $a_0=0$ kunnen kiezen, zij het dan ook dat voor $|\gamma|>1$ $\Sigma |a_n|^2$ divergeert. Hier blijkt dus duidelijk dat begrippen als volledigheid en afhankelijkheid van de functies $\sin nx + \gamma \cos nx$ nauw samenhangen met de convergentie-eisen die men stelt.

Stelling 6.1 kan worden bewezen door invoering van de functie $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inz}$ die de volgende eigenschappen heeft:

1°. $\varphi(z)$ is analytisch voor $-\pi<\mathrm{Re}\,z<\pi$, $\mathrm{Im}\,z>0$ en continu tot op de rand van dit gebied;

2°. $\varphi(z)\to$ const. voor $z=\infty$;

3°. $\varphi(z)$ is periodiek: $\varphi(y+\pi i)=\varphi(y-\pi i)$, $y\geq 0$;

4°. voor $0\leq x\leq\pi$ geldt

$$e^{\pi i\mu}\varphi(x) - e^{-\pi i\mu}\varphi(-x) = 2i\cos\pi\mu\, f(x).$$

Met behulp van de conforme afbeelding $w=-\cos z$ en de door Muskhelishivili ([7] , speciaal Ch.10) gegeven methodiek blijkt dat hierdoor de functie $\varphi(z)$ eenduidig bepaald is. En als $f(x)$ "glad" is dan wordt het gedrag van de coefficienten a_n bepaald door het gedrag van $\varphi(z)$ bij $z=\pm 1$ dat betrekkelijk eenvoudig te onderzoeken is.

De overgang naar stelling 6.2 wordt gegeven door de ontwikkeling van de constante functie $f(x)=1$ volgens de voorwaarden van stelling 6.2. Beschouwen we de functie

$$\varphi(z) = \mathrm{ctg}\,\pi\mu\,(1-e^{-\pi i\mu}(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}z)^{2\mu}) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{inz}$$

(omdat $\varphi(z)\to 0$ voor $z=i\infty$ zijn alle Fourier-coefficienten met $n\leq 0$ nul), dan is voor $0\leq x<\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \cos\pi\mu\,(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x)^{2\mu} \qquad (6.5)$$

$$\gamma\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1-\cos\pi\mu\,(\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x)^{2\mu} \qquad (6.6)$$

en dus $1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\sin nx + \gamma \cos nx)$. (6.7)

Uit (6.5) leidt men eenvoudig af dat hier

$$a_n \sim \frac{2^{1+2\mu}}{\pi} (-1)^n \cos^2 \pi\mu \, \Gamma(1-2\mu) n^{-1+2\mu}$$

Stelling 6.2 wordt nu eenvoudig uit stelling 6.1 verkregen door de constante term van de laatste volgens (6.7) te ontwikkelen in een reeks met $n \geq 1$.

De behandeling van het geval dat de getallen γ_n niet constant zijn doch een limiet γ hebben, sluit bij het bovenstaande aan. Voor de toepassingen is speciaal van belang de vraag naar de voorwaarde opdat van de "sterk" convergente ontwikkeling van het type van stelling 6.1. de nulde term a_o nul is. Hiervoor is nodig dat $f(x)$ orthogonaal is op een zekere functie $g_o(x)$ (vgl. § 4; als $\gamma_n = \gamma$ dan is $g_o(x) = (\text{tg } \frac{1}{2}x)^{1-2\mu}$). Men kan voor $g_o(x)$ een integraal-vergelijking opstellen waarvan de kern onder zekere voorwaarden voor de getallen $\gamma_n - \gamma$ een Fredholm-kern is.

Literatuur.

[1] R.E.A.C. Paley and N. Wiener, Fourier-transforms in the complex domain, New York, 1934.

[2] F.Riesz et B.Sz.-Nagy, Leçons d'analyse fonctionelle, Budapest, 1952.

[3] G.W. Veltkamp, Expansions into nearly-cosine and nearly-sine series. Rapport TW 38 van het Mathematisch Centrum, Amsterdam,1955.

[4] F. Tricomi, Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

[5] D.P. Dallzell, On the completeness of a series of normal orthogonal functions. J. Lond.Math.Soc., 20, 87 (1945).

[6] H.A. Lauwerier, The expansion of a function into a Fourier-series with prescribed phases, valid in the half-period interval. Rapport TW 33 van het Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1955.

[7] N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations. Groningen, 1954.