STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Rapport TW 85

Fundamentele oplossingen van de Klein-Gordon vergelijking

door

E.M. de Jager

Maart 1962

Fundamentele oplossingen van de Klein-Gordon vergelijking

door

E.M. de Jager

1. Inleiding

In de veldentheorie speelt de vergelijking

$$(\square - m^2)\,\varphi(x) = -\,\delta(x) \qquad (1.1)$$

met

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$$ een belangrijke rol.

Hierin zijn x_1, x_2, x_3 de plaatscoördinaten en x_0 de tijd-coördinaat van een deeltje met massa m.
$\delta(x) = \delta(x_1, x_2, x_3, x_0)$ is de vier-dimensionale δ-functie van Dirac. Eén van de oplossingen van deze differentiaal-vergelijking is de zgn. "causale voortplantings" functie of Feynman functie, aangegeven door het symbool $D_c(x)$.
De functie $D_c(x-y)$ beschrijft de "causale verwantschap" tussen de processen van schepping en vernietiging van deeltjes in verschillende ruimte-tijd punten x en y.
Voor m=0 krijgen we de electromagnetische theorie en het deeltje is geworden een photon. De Feynman functie wordt nu aangeduid met $D_c^o(x)$.
De oplossingen $D_c(x)$ en $D_c^o(x)$ worden in dit rapport gegeven, waarbij we gebruik zullen maken van de functionaal analyse. De lezer wordt verondersteld enige kennis van de theorie der distributies te bezitten (één dimensionale distributies, Fouriertransformatie en de op een oppervlak P geconcentreerde distributie $\delta(P)$). In de paragrafen 2-5 wordt de meer dimensionale distributie $\mathcal{P}^\lambda$ ingevoerd, waarin $\mathcal{P}$ een willekeurige kwadratische vorm met complexe coëfficiënten voorstelt en λ een complex getal is. Hierbij is gebruik gemaakt van literatuur 1, pag.236-272.
In de volgende paragrafen (6-7) wordt deze theorie met vrucht toegepast op de golfvergelijking en de vergelijking

van Klein-Gordon.

2. De gegeneraliseerde functies x_+^λ en r^λ

We beschouwen de functie x_+^λ, die voor $x \geqslant 0$ gelijk aan x^λ en voor $x < 0$ gelijk aan nul is; λ is een complex getal. Voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, laat zich de distributie x_+^λ eenvoudig definiëren door de convergente integraal.

$$(x_+^\lambda\,, \varphi(x)) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx \tag{2.1}$$

waarin $\varphi(x) \in K$ of $\varphi(x) \in S$.
K is de verzameling van alle finiete, oneindig vaak differentieerbare toetsfuncties; S is de verzameling van toetsfuncties, waarvoor $|x^k \varphi^{(q)}(x)|$ begrensd is voor willekeurige gehele waarden van k en q. Daar het rechterlid van (2.1) voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ differentieerbaar naar λ is, is (x_+^λ, φ), opgevat als functie van λ, voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ een analytische functie van λ.
De distributie x_+^λ voor $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -1$ definieren we door de analytische voortzetting van $(x_+^\lambda\,, \varphi)$.
Dit geschiedt met behulp van de voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ geldige identiteit:

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1} \tag{2.2}$$

Voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$ en $\lambda \neq -1$ is het rechterlid een analytische functie van λ. Het rechterlid van (2.2) definieert (x_+^λ, φ) in het gebied $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$ met $\lambda \neq -1$.
Op analoge wijze wordt (x_+^λ, φ) in het gebied $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$ met $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$ gedefinieerd door:

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right] dx$$

$$+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!\,(\lambda+k)} \tag{2.3}$$

(2.3) toont aan dat (x_+^λ,φ) als functie van λ analytisch voortgezet kan worden in het gebied $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -1$ met uitzondering van de punten $\lambda = -1,-2,\ldots,-k,\ldots$, waar (x_+^λ,φ) enkelvoudige polen heeft met residu $\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$

Omdat $\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,(\delta^{(k-1)}(x),\varphi(x))$ heeft de distributie x_+^λ voor $\lambda = -k$ $(k=+1,+2,\ldots)$ een pool van de eerste orde met residu

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\delta^{(k-1)}(x).$$

Voor $\lambda = -k$ is de distributie x_+^λ niet gedefinieerd, voor $\lambda \neq -k$ is de distributie x_+^λ gedefinieerd door (2.3).

We beschouwen nu de functie r^λ met $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ (n dimensionale ruimte).
Voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -n$ is de distributie r^λ gedefinieerd door de convergente integraal:

$$(r^\lambda,\varphi) = \int_{R_n} r^\lambda\,\varphi(x)dx \qquad (2.4)$$

waarin de integratie over de n dimensionale ruimte R_n uitgevoerd wordt en $\varphi(x)$ een n-dimensionale toetsfunctie is, die wederom tot K of S behoort. (Definities van K en S voor n dimensionale toetsfuncties analoog aan die van één dimensionale toetsfuncties, zie lit 1, hfdst.I).
Voor $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -n$ convergeert de integraal niet meer. Voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -n$ is het rechterlid van (2.4) een analytische functie van λ ; de distributie r^λ voor $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -n$ wordt gedefinieerd door de analytische voortzetting van het rechterlid van (2.4).
Hiertoe gaan we in de integraal (2.4) over op bolcoördinaten en we kunnen schrijven:

$$(r^\lambda,\varphi) = \int_0^\infty r^{\lambda+n-1}\left\{\int_\Omega \varphi(x)d\Omega\right\}dr \qquad (2.5)$$

waarin $d\Omega$ het oppervlakte element van de eenheidsbol Ω in R_n is. De binnenintegraal kan geschreven worden als:

$$\int_{\Omega} \varphi(x) d\Omega = \Omega_n \bar{\varphi}(r) \qquad (2.6)$$

waarbij Ω_n de oppervlakte van de éénheidsbol in R_n en $\bar{\varphi}(r)$ het gemiddelde van $\varphi(x)$ op de bol met straal r voorstelt. Dus

$$(r^{\lambda},\varphi) = \Omega_n \int_0^{\infty} r^{\lambda+n-1} \bar{\varphi}(r) dr$$

De functie $\bar{\varphi}(r)$, die voor $r \geqslant 0$ gedefinieerd is, heeft de volgende eigenschappen:

1e $\bar{\varphi}(r)$ is finiet en willekeurig vaak differentieerbaar naar r.

2e alle afgeleiden van oneven orde zijn nul voor r=0.

De eerste eigenschap is zonder meer duidelijk. Om de tweede eigenschap te bewijzen schrijven we:

$$\Omega_n \bar{\varphi}(r) = \int_{\Omega} \Big[\varphi(0) + \sum \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_j} x_j + 1/2 \sum \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i \, x_j + 1/3! \sum \frac{\partial^3 \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} x_i \, x_j \, x_k + \ldots + \text{Rest}\Big] d\Omega$$

Iedere term, die een oneven aantal factoren bevat, verdwijnt na integratie; substitutie van $x_j = r\,\omega_j$ $(d\Omega = d\omega_1 d\omega_2 \ldots d\omega_n)$ levert

$\bar{\varphi}(r) = \varphi(0) + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \ldots + a_{2k} r^{2k} + o(r^{2k+2})$

Hieruit volgt de tweede eigenschap.

De functionaal (r^{λ},φ) kan dus opgevat worden, als de distributie $\Omega_n \, x_+^{\mu}$ $(\mu = \lambda + n - 1)$ op de toetsfunctie $\bar{\varphi}(x)$.

We hebben gezien, dat $(\Omega_n \, x_+^{\mu}, \bar{\varphi})$ enkelvoudige polen heeft in $\mu = -1, -2, \ldots -k, \ldots$ met residu

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \Omega_n (\delta^{(k-1)}(x), \bar{\varphi}(x))$$

Omdat echter de oneven afgeleiden van $\bar{\varphi}(x)$ voor x=0 nul zijn, heeft $(\Omega_n\, x_+^{\mu}, \bar{\varphi})$ polen in slechts $\mu = -1,-3,\dots,-(2k+1),\dots$ met residu

$\frac{1}{(2k)!}\, \Omega_n(\delta^{(2k)}(x), \bar{\varphi}(x))$.

Dus (r^{λ},φ) heeft enkelvoudige polen in $\lambda = -n,-n-2,\dots,-n-2k,\dots$ met residu

$$\frac{1}{(2k)!}\, \Omega_n(\delta^{2k}(r), \bar{\varphi}(r)).$$

Dus voor bijv. $\lambda = -n$ heeft (r^{λ},φ) een pool met residu

$$\Omega_n(\delta(r),\bar{\varphi}(r)) = \Omega_n\, \bar{\varphi}(0) = \Omega_n \varphi(0,0,\dots,0) = \Omega_n(\delta(x),\varphi(x)).$$

Dus de distributie r^{λ} heeft in $\lambda = -n$ een pool met residu

$$\Omega_n\, \delta(x) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, \delta(x).$$

3 De gegeneraliseerde functie P^{λ}

P zij een n-dimensionale kwadratische vorm met complexe coëfficienten:

$$P = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}\, x_r\, x_s = \sum_{r,s=1}^{n} p_{rs}\, x_r\, x_s + \sum_{r,s=1}^{n} q_{rs}\, x_r\, x_s \qquad (3.1)$$

met $g_{rs}=g_{sr}$ (zonder de algemeenheid te schaden), p_{rs} reëel en q_{rs} zuiver imaginair.

We willen de gegeneraliseerde functie P^{λ} definiëren; in het algemeen zal echter P^{λ} geen éénduidige analytische functie van λ zijn.

Daarom kiezen we in de ruimte van alle quadratische vormen

$$P = P_1 + i\, P_2 \qquad (3.2)$$

met P_1 en P_2 reëel, het "bovenste halfvlak" van de quadratische vormen met positief definiet imaginair deel.

In dit "bovenste halfvlak" is P^{λ} ondubbelzinnig éénduidig bepaald door de definitie:

$$P^{\lambda} = e^{\lambda\{\ln|P| + i \arg P\}} \qquad (3.3)$$

met $0 < \arg \mathscr{P} < \pi$

Deze functie is een éénduidige analytische functie van λ .

We definiëren de gegeneraliseerde functie $\mathscr{P}^{\lambda}$ door de functionaal

$$(\mathscr{P}^{\lambda},\varphi)=\int \mathscr{P}^{\lambda}\varphi \, dx \tag{3.4}$$

waarin $\varphi \in K$(of S) en de integratie over de gehele ruimte R_n uitgestrekt wordt.

Voor $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ convergeert de integraal (3.4) en is in het "bovenste halfvlak" van de quadratische vormen een éénduidige analytische functie van λ .

De functionaal $(\mathscr{P}^{\lambda}, \varphi)$ wordt voor andere waarden van λ gedefinieerd door de analytische voortzetting van (3.4) als functie van λ .(De quadratische vorm $\mathscr{P}$ blijft tot het "bovenste halfvlak" behoren)

De gegeneraliseerde functie $\mathscr{P}^{\lambda}$ hangt niet alleen analytisch van λ af maar ook van de coëfficienten g_{rs}.

Bij gevolg wordt $\mathscr{P}^{\lambda}$ éénduidig bepaald door de waarden op de imaginaire halfas van het $P_1+i\ P_2$ vlak, d.w.z. door de waarden op de verzameling van de quadratische vormen van de gedaante $\mathscr{P}=i\ P_2$ met $P_2 > 0$.

Daarom zullen we eerst de functionaal $\mathscr{P}^{\lambda}$ bepalen voor $\mathscr{P}=i\ P_2$ en vervolgens het resultaat uitbreiden naar $\mathscr{P}=P_1+i\ P_2$ (met $P_2 > 0$).

$$\mathscr{P}= \sum_{r,s=1}^{n} q_{rs}\ x_r\ x_s = (x,\ Qx)= i(x,Ax) \tag{3.5}$$

met $q_{rs}=i\ a_{rs}$ (a_{rs} reëel); Q en A zijn de corresponderende matrices.

Er bestaat een lineaire transformatie met reële coëfficienten $x=Bx'$ met:

$$\mathscr{P}=i(x,A\ x)=i(B\ x',A\ B\ x')=i(x',B^{*}A\ B\ x')=i(x',x').$$

De functionaal determinant van deze transformatie is gelijk aan $|B|= + \frac{1}{\sqrt{|A|}} = \frac{1}{\sqrt{(-i)^n\ |Q|}}$, waarin $|Q|$ de discriminant van de quadratische vorm $\mathscr{P}=i\ P_2$ is.

Er zij opgemerkt, dat $\sqrt{|A|}=\sqrt{(-i)^n\ |Q|}$ een reëel positief getal is, daar P_2 positief definiet is.

We vinden dus na toepassing van de transformatie $x=B\,x'$

$$(\wp^{\lambda},\varphi)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{\sqrt{(-i)^n\,|Q|}}\int r'^{2\lambda}\varphi\,dx' \quad \text{met } r^2=x_1'^2+x_2'^2+\ldots+x_n'^2 .$$

In § 2 hebben we gezien, dat de functionaal $(r^{2\lambda},\varphi)$ enkelvoudige polen heeft in de punten $\lambda=-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}-1,\ldots,-\frac{n}{2}-k,\ldots$ met

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}} r^{2\lambda}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,\delta(x) .$$

Bij gevolg is $(\wp^{\lambda},\varphi)=((i\ P_2)^{\lambda},\varphi)$ een analytische functie van λ voor alle complexe waarden van λ met uitzondering van de waarden $\lambda=-\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}-1,\ldots,\ -\frac{n}{2}-k,\ldots,$ waar $(\wp^{\lambda},\varphi)=((i\ P_2)^{\lambda},\varphi)$ enkelvoudige polen heeft.
Er geldt

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}}((i\ P_2)\ ,\varphi)=\frac{e^{-\frac{i n\pi}{4}}}{\sqrt{(-i)^n\,|Q|}}\ \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\ \varphi(0,0,\ldots,0)$$

en dus ook

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}}(i\ P_2)=\frac{e^{-\frac{i n\pi}{4}}}{\sqrt{(-i)^n\,|Q|}}\ \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\ \delta(x) \qquad (3.6)$$

Om de residuen in de andere polen te bepalen voeren we in de differentiaal operator:

$$L_{\wp}=\sum g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_s} \qquad (3.7)$$

met

$$\sum_{s=1}^{n} g^{rs}g_{st}=\delta^r_t \qquad (\delta\text{ Kronecker symbool})$$

Het is duidelijk, dat

$$L_{\wp}\,\wp^{\lambda+1}=4(\lambda+1)(\lambda+\tfrac{n}{2})\,\wp^{\lambda}$$

en dus ook na k-voudige toepassingen van $L_{\wp}$:

$$L^k_{\wp}\,\wp^{(\lambda+k)}=4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)(\lambda+\tfrac{n}{2})\ldots(\lambda+\tfrac{n}{2}+k-1)\,\wp^{\lambda}$$

of wel

$$\wp^{\lambda} = \frac{1}{4^{k}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)(\lambda+\frac{n}{2})\ldots(\lambda+\frac{n}{2}+k-1)} \; L^{k}_{\wp}\, \wp^{(\lambda+k)} \qquad (3.8)$$

Het residu van $(i\ P_2)^{\lambda}$ in $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ is dus

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} (i\ P_2)^{\lambda} = \left.\frac{1}{4^{k}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)(\lambda+\frac{n}{2})\ldots(\lambda+\frac{n}{2}+k-1)}\right|_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \cdot \operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}} L^{k}_{\wp}\,(i\ P_2)^{\lambda}$$

Met behulp van (3.6) vinden we na enig elementair rekenen:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} (i\ P_2)^{\lambda} = \frac{e^{-i\frac{n\pi}{4}}\ \pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k}\ k!\ \Gamma(\frac{n}{2}+k)\sqrt{(-i)^{n}|Q|}} \; L^{k}_{\wp}\,\delta(x) \qquad (3.9)$$

We moeten nu (3.9) analytisch voortzetten in het "bovenste halfvlak" van alle quadratische vormen $\wp = P_1 + i\ P_2$ met positief definiet imaginair deel.
De analytische voortzetting van de operator $L^{k}_{\wp}$ is echter bekend, daar zijn coëfficiënten door de coëfficiënten van de quadratische vorm $\wp$ analytisch uitgedrukt worden.
Rest ons nog de vorm $\sqrt{(-i)^{n}|Q|}$ als ééndiudige analytische functie in het "bovenste halfvlak" van de quadratische vormen voort te zetten.
We schrijven wederom:

$$\wp = \sum_{r,s=1}^{n} g_{rs}\, x_r\, x_s = \sum_{r,s=1}^{n} p_{rs}\, x_r\, x_s + \sum_{r,s=1}^{n} q_{rs}\, x_r\, x_s \qquad (3.1)$$

en

$$\wp = P_1 + i\ P_2$$

waarin P_1 en P_2 quadratische vormen zijn met reële coëfficiënten en waarin P_2 positief definiet is.

$$P_1 = \sum_{r,s}^{n} p_{rs}\, x_r\, x_s \quad \text{en} \quad i\ P_2 = \sum_{r,s}^{n} q_{rs}\, x_r\, x_s$$

$$\wp = (x, G x)$$

waarin G de complexe matrix is, die met de coëfficiënten g_{rs} correspondeert.
Er besraat een niet ontaarde lineaire transformatie

$$x = B y$$

met reële coëfficiënten, die P_1 en P_2 overvoeren in de gedaante:

$$P_1 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hangen niet van de keuze van B af en zijn invarianten van de quadratische vorm $\wp$.

$$\wp = (x, G x) = (B y, G B y) = (y, B^* G B y) = (y, \Lambda y)$$

waarin Λ een diagonaal matrix is met j^e element gelijk aan $\lambda_j + i$. Hieruit volgt

$$|G|\, |B|^2 = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j + i)$$

en

$$\sqrt{(-i)^n |G|} = \frac{1}{|B|} \prod_{j=1}^{n} (1 - i \lambda_j)^{1/2} \qquad (3.10)$$

waarbij in het rechterlid de waarde van de vierkantswortels bepaald wordt door de formule:

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{1/2\, i \arg z}, \quad -\pi < \arg z < +\pi .$$

Voor $P_1 \equiv 0$ ($\lambda_j = 0$ voor alle j) krijgen we natuurlijk weer

$$\sqrt{(-i)^n |Q|} = \sqrt{|A|} = \frac{1}{|B|} \quad \text{(zie pag 6)}.$$

(3.10) is de gezochte analytische voortzetting van $\sqrt{(-i)^n |Q|}$

Samenvatting

Wanneer $\wp = \sum_{r,s}^{n} g_{rs} x_r x_s$ een willekeurige quadratische vorm is met positief definiet imaginair deel, dan is de gegeneraliseerde functie $(\mathcal{P}^{\lambda},\varphi)$ een analytische functie van λ met uitzondering van de punten

$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, -\frac{n}{2}-2, \ldots -\frac{n}{2}-k, \ldots$ waarin zij enkelvoudige polen heeft.

Hierbij geldt:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \mathcal{P}^{\lambda} = \frac{e^{\frac{-i\pi n}{4}}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma(\frac{n}{2}+k)\sqrt{(-i)^n|G|}}\left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x) \tag{3.11}$$

waarin $|G|$ de discriminant van de quadratische vorm is en $\sqrt{(-i)^n|G|}$ gedefinieerd is door (3.10).

Geheel analoog geldt er:

Wanneer $\mathcal{P}$ een willekeurige quadratische vorm is met "negatief definiet" imaginair deel, dan geldt hetzelfde, maar nu is

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} \mathcal{P}^{\lambda} = \frac{e^{+\frac{i\pi n}{4}}\,\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\,\Gamma(\frac{n}{2}+k)\sqrt{i^n|G|}}\left(\sum_{r,s=1}^{n} g^{rs}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}\right)^k \delta(x) \tag{3.12}$$

waarin $|G|$ de discriminant van de quadratische vorm is en $\sqrt{i^n|G|}$ gedefinieerd is door

$$\sqrt{i^n\;|G|} = |B|^{-1}\left\{\prod_{j=1}^{n}(1+i\lambda_j)^{1/2}\right\} \tag{3.13}$$

4. De gegeneraliseerde functies $(P+i0)^\lambda$ en $(P-i0)^\lambda$

P zij een niet ontaarde quadratische vorm met reële coëfficienten

$$P = \sum_{r,s=1}^{n} p_{rs}\, x_r\, x_s \qquad (4.1)$$

We beschouwen:

$$\mathcal{P} = P + i\, P'$$

met

$$P' = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \text{ en } \varepsilon > 0$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat de distributie $\mathcal{P}^\lambda = (P+i\,P')^\lambda$ naar een geheel bepaalde limiet-distributie nadert, indien $\varepsilon \longrightarrow +0$.
Voor Re $\lambda > 0$ is dit duidelijk, daar in $\int \mathcal{P}^\lambda \varphi\, dx$ de limiet-overgang achter het integraalteken genomen mag worden.
Voor Re $\lambda \leqslant 0$ maken we gebruik van de identiteit (3.8) nml.:

$$\mathcal{P}^\lambda = \frac{1}{4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)(\lambda+\frac{n}{2})\ldots(\lambda+\frac{n}{2}+k-1)}\, L_{\mathcal{P}}^k\, \mathcal{P}^{\lambda+k} \qquad (3.8)$$

We nemen in (3.8) k zodanig, dat $(\lambda+k) > 0$ is en maken nu gebruik van het feit dat de volgorde van differentiatie en limietovergang bij distributies niet wezenlijk is.
De limiet-distributie noemen we $(P+i\,0)^\lambda$.
Indien we $\varepsilon < 0$ nemen en vervolgens $\varepsilon \longrightarrow -0$, dan krijgen we geheel analoog $(P-i\,0)^\lambda$.
De distributies $(P\pm i\,0)^\lambda$ hebben voor $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \ldots -\frac{n}{2}-k, \ldots$ polen, waarvan de residuen bepaald worden door in (3.11) en (3.12) ε naar +0 resp -0 te laten naderen.
Indien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn van de matrix (p_{rs}) dan kan $\sqrt{(-i)^n |G|}$ geschreven worden in de gedaante:

$$\sqrt{(-i)^n |G|} = \prod_{j=1}^{n} (\varepsilon - i\,\lambda_j)^{1/2}$$

Stel dat in de kanonieke vorm van P $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p > 0$

en $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots \lambda_{p+q} < 0$ zijn $(p+q=n)$; indien we nu ε tot $+0$ laten naderen dan krijgen we:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sqrt{(-i)^n |G|} = \sqrt{|\lambda_1 . \lambda_2 . \ldots \lambda_n|} (-i)^{\frac{p}{2}} (+i)^{\frac{q}{2}}$$

ofwel

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sqrt{(-i)^n |G|} = \sqrt{|\Delta|}\; e^{-\frac{\pi}{4}(p-q)i}$$

waarin Δ de discriminant van de reële quadratische vorm P is. Met behulp van (3.11) krijgen we nu het resultaat:
De functionaal $((P+i\ 0)^{\lambda}, \varphi)$ is voor alle complexe waarden van λ een analytische functie met uitzondering van de punten $\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots, -\frac{n}{2} - k, \ldots,$ waarin de distributie $(P+i\ 0)^{\lambda}$ polen heeft met

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2}-k} (P+i\ 0)^{\lambda} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\ \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k\ k!\ \Gamma(\frac{n}{2}+k)\sqrt{|\Delta|}} \left(\sum_{r,s=1}^{n} P^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \right)^k \delta(x) \tag{4.2}$$

met $\sum_{s=1}^{n} P_{rs}\ P^{st} = \delta_r^t$ (Kronecker-symbool).

Analoog geldt voor $(P-i\ 0)^{\lambda}$ hetzelfde, maar nu is

$$\operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2}-k} (P-i\ 0)^{\lambda} = \frac{e^{+\frac{\pi}{2}qi}\ \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k\ k!\ \Gamma(\frac{n}{2}+k)\sqrt{|\Delta|}} \left(\sum_{r,s=1}^{n} P^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \right)^k \delta(x) \tag{4.3}$$

5. Fundamentele oplossingen van lineaire differentiaalvergelijkingen

We beschouwen de differentiaalvergelijking

$$L^k f = \delta(x) \tag{5.1}$$

waarin de differentiaaloperator L de volgende gedaante heeft:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \tag{5.2}$$

en $k=1,2,3,\ldots$; $\delta(x)$ is de n-dimensionale δ-functie: $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Eerst twee opmerkingen voor af:

1^e Omdat $\delta(x)$ homogeen van de graad-n en de operator L^k een homogene operator is, moet f homogeen zijn van de graad -n+2k.

2^e De differentiaalvergelijking (5.1) is invariant voor alle lineaire transformaties, die de vorm

$$P = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 \qquad (5.3)$$

invariant laten.

Daarom zullen er oplossingen zijn van de gedaante:

$$f = f(P)$$

Met uitzondering van het geval, dat de dimensie n even is en tegelijkertijd $k \geqslant \frac{n}{2}$ zijn de functies $(P+i\ 0)^{-\frac{n}{2}+k}$ en $(P-i\ 0)^{-\frac{n}{2}+k}$ op een constante factor na oplossingen van de vergelijking (5.1).

<u>Bewijs</u>:

Volgens (3.8) geldt er:

$$L^k(P+i\ 0)^{\lambda+k} = 4^k(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)(\lambda+\tfrac{n}{2})\ldots(\lambda+\tfrac{n}{2}+k-1)(P+i\ 0)^{\lambda}$$

Dus voor $\lambda = -\frac{n}{2}$

$$L^k(P+i\ 0)^{-\frac{n}{2}+k} = 4^k(1-\tfrac{n}{2})\ldots(k-\tfrac{n}{2})(k-1)!\ \underset{\lambda=-\frac{n}{2}}{\mathrm{Res}}\ (P+i\ 0)^{\lambda} \qquad (5.4)$$

Uit (5.4) volgt onmiddellijk, dat $(P+i\ 0)^{-\frac{n}{2}+k}$ een oplossing is van de homogene vergelijking

$$L^k f = 0$$

indien n even <u>en</u> tegelijkertijd $k \geqslant \frac{n}{2}$ is. Is dit niet het geval, dan vinden we m.b.v. (4.2):

$$L^k(P+i\ 0)^{-\frac{n}{2}+k} = 4^k(1-\tfrac{n}{2})\ldots(k-\tfrac{n}{2})(k-1)!\ \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\ \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\ \delta(x)$$

Dus de functie

$$f_1 = (-1)^k\ \frac{e^{\frac{\pi}{2}qi}\ \Gamma(\frac{n}{2}-k)}{4^k(k-1)!\ \pi^{\frac{n}{2}}}\ (P+i\ 0)^{-\frac{n}{2}+k} \qquad (5.5)$$

is een oplossing van de differentiaalvergelijking (5.1),

tenzij de dimensie van de ruimte even is en tegelijkertijd geldt $k \geqslant \frac{n}{2}$.
Geheel analoog geldt ook, dat de functie

$$f_2=\overline{f}_1=(-1)^k \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\,\Gamma(\frac{n}{2}-k)}{4^k(k-1)!\,\pi^{\frac{n}{2}}} (P-i\ 0)^{-\frac{n}{2}+k} \qquad (5.6)$$

een oplossing is van de differentiaalvergelijking (5.1), tenzij de dimensie van de ruimte even is en tegelijkertijd geldt $k \geqslant \frac{n}{2}$. Er zij opgemerkt dat f_1 en f_2 geconjugeerd complex zijn.

6. Toepassingen op de golfvergelijking en de Klein-Gordon vergelijking

6.1 Toepassing op de golfvergelijking in R_3

We beschouwen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\right) f = \delta(x) = \delta(x_1,x_2,x_3,x_0) \qquad (6.1)$$

x_1,x_2,x_3 zijn plaatscoördinaten en x_0 is de tijd coördinaat. Toepassing van de theorie van § 5 met $n=4, k=1, p=3$ en $q=1$ levert als oplossingen:

$$f_1 = -\frac{i}{4\pi^2}(P+i\ 0)^{-1} \qquad (6.2)$$

en

$$f_2 = +\frac{i}{4\pi^2}(P-i\ 0)^{-1} \qquad (6.3)$$

met

$$P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \qquad (6.4)$$

De oplossing (6.2) is de zgn. causale Greense functie of Feynman functie voor het electromagnetische veld. Deze wordt vaak aangeduid met het symbool $D_0^c(x)$ (zie lit.2, § 14 en § 15). De functies $(P\pm i\ 0)^{-1}$, opgevat als distributies, zijn in zeker opzicht generalisaties van de één dimensionale distributie $(x\pm i\ 0)^{-1}$ (zie § 7).

6.2 Toepassing op de Klein-Gordon vergelijking.

We beschouwen de Klein-Gordon vergelijking:

$$M\ f = \delta(x_1.x_2,x_3,x_o) \qquad (6.5)$$

met

$$M = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_o^2} - m^2 \qquad (6.6)$$

We vatten f op, als een vijf dimensionale distributie $f(x_1,x_2,x_3,x_o,m)$ op de ruimte S van vijf dimensionale toetsfuncties, die we aanduiden met $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_o,m)$.
We kunnen φ partieel Fourier-transformeren met betrekking tot m.

$$F_m\left[\varphi(x_1,x_2,x_3,x_o,m)\right] = \psi(x_1,x_2,x_3,x_o,k).$$

Omdat φ tot S behoort, behoort ψ ook weer tot S.
We definiëren de partieel - Fourier getransformeerde van de distributie $f(x_1,x_2,x_3,x_o,m)$ met betrekking tot m door de definitie:

$$(f(x_1,x_2,x_3,x_o,m),\ \varphi(x_1,x_2,x_3,x_o,m)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,(g(x_1,x_2,x_3,x_o,k),\ \psi(x_1,x_2,x_3,x_o,k)) \qquad (6.7)$$

In het bijzonder geldt er:

$$(\delta(x_1,x_2,x_3,x_o),\ \varphi(x_1,x_2,x_3,x_o,m)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0,0,0,0,m)dm =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,0,0,0,m)e^{+im0}\ dm = \psi(0,0,0,0,0) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\,(2\pi\,\delta(x_1,x_2,x_3,x_o,k),\ \psi(x_1,x_2,x_3,x_o,k))$$

en dus

$$F_m\left[\delta(x_1,x_2,x_3,x_o)\right] = 2\pi\,\delta(x_1,x_2,x_3,x_o,k) \qquad (6.8)$$

We voeren nu in de differentiaaloperator:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial k^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_o^2} \qquad (6.9)$$

Indien g de partieel-Fourier getransformeerde is van f met betrekking tot m, dan geldt er:

$$(M\, f,\varphi)=(f,M\varphi)=\frac{1}{2\pi}\,(g,L\varphi)=\frac{1}{2\pi}\,(Lg,\varphi).$$

Op grond van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (6.5) en formule (6.8) voldoet de partieel Fourier getransformeerde g van f aan de differentiaalvergelijking:

$$L\,g = 2\pi\,\delta(x_1,x_2,x_3,x_0,k) \qquad (6.10)$$

Toepassing van de resultaten van § 5 met n=5, k=1, p=4, q=1 levert de volgende onafhankelijke oplossingen van (6.10)

$$g_1 = -\frac{i}{4\pi}\,(P+i\;0)^{-\frac{3}{2}} \qquad (6.11)$$

en

$$g_2 = +\frac{i}{4\pi}\,(P-i\;0)^{-\frac{3}{2}} \qquad (6.12)$$

waarin

$$P=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2+k^2=R+k^2 \qquad (6.13)$$

met

$$R=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2 \qquad (6.14)$$

Om de met g_1 en g_2 corresponderende oplossingen van de Klein-Gordon vergelijking te krijgen, behoeven we alleen nog maar (6.11) en (6.12) terug te transformeren.
We zullen ons beperken tot de terugtransformatie van g_1, omdat die van g_2 volkomen analoog is.
Dit kan handig geschieden, indien we bedenken dat $(P+i\;0)^{-\frac{3}{2}}$ de distributionele limiet is van de functie $(P+i\;P')^{-\frac{3}{2}}$ met $P'=\varepsilon\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2+k^2)$, waarbij $\varepsilon>0$ en $\varepsilon\longrightarrow+0$.
Omdat de Fourier-transformatie voor distributies een continue operatie is geldt:

$$F^{-1}\left[(P+i\;0)^{-\frac{3}{2}}\right] = \lim_{\varepsilon\to+0} F^{-1}\left[(P+i\;P')^{-\frac{3}{2}}\right]$$

Daarna gaan we $(P+i\;P')^{-\frac{3}{2}}$ terug transformeren en vervolgens de limiet nemen met $\varepsilon\longrightarrow+0$.

$$P+i\;P'=(1+i\,\varepsilon)(R+k^2+\frac{2i\,\varepsilon}{1+i\varepsilon}\;x_0^2)$$

We stellen nu

$$g_{1,\varepsilon} = - \frac{i}{4\pi} (P+i\ P')^{-\frac{3}{2}} \qquad (6.15)$$

en

$$f_{1,\varepsilon} = F_k^{-1} \left[g_{1,\varepsilon} \right] \qquad (6.16)$$

Waarin F_k^{-1} het symbool is voor partieel Fourier teruggetransformeerde met betrekking tot k.
$g_{1,\varepsilon}$ kan dus geschreven worden als

$$g_{1,\varepsilon} = - \frac{i}{4\pi} (1+i\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \quad (k^2+R+ \frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}\, x_o^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad (6.17)$$

De lezer zij er aan herinnerd, dat de wortelvorm éénduidig bepaald is in het "bovenste halfvlak" van alle kwadratische vormen (zie § 3); omdat $\varepsilon > 0$ is, is dus ook het rechterlid van (6.17) ondubbelzinnig bepaald.
Indien we ons beperken tot toetsfuncties, waarvan de drager niet de punten (0,0,0,0,k) bevat, dan is $R+ \frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}\, x_o^2 \neq 0$ en en het rechterlid van (6.17) kan als een gewone functie opgevat worden; bij gevolg kan dan $g_{1,\varepsilon}$ op de klassieken manier terug getransformeerd worden volgens:

$$f_{1,\varepsilon} = - \frac{i}{8\pi^2} (1+i\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2+R+ \frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}\, x_o^2)^{-\frac{3}{2}} \; e^{-ikm} dk =$$

$$= -\frac{i}{4\pi^2}(1+i\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} (k^2+R+ \frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}\, x_o^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \cos k\, m\, dk \qquad (6.18)$$

Met behulp van de bekende relatie

$$K_o(a\, m) = \int_0^{\infty} \frac{\cos k\, m}{\sqrt{k^2+a^2}}\, dk \qquad , \text{Re } a \quad 0$$

kan (6.18) herleid worden tot:

$$f_{1,\varepsilon} = \frac{-im}{4\pi^2} (1+i\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \quad (R+ \frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}\, x_o^2)^{-\frac{1}{2}} \quad K_1 \left\{ m(R+ \frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}\, x_o^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \qquad (6.19)$$

(zie ook lit 3, pag. 172)

Indien $R > 0$ is, dan kunnen we ε op de gewone manier naar nul laten naderen en het resultaat is:

$$f_1 = -\frac{i\,m}{4\pi^2}\frac{1}{\sqrt{R}}K_1(m\sqrt{R}) \tag{6.20}$$

hetgeen in overeenstemming is met lit 2, § 15.
Indien $R < 0$ is, dan zetten we het rechterlid van (6.19) analytisch voort met behulp van de formule:

$$K_1(z) = -\tfrac{1}{2}\pi\left[J_1(i\,z)+i\,Y_1(i\,z)\right] \tag{6.21}$$

en we vinden voor voldoend kleine waarden van ε

$$f_{1,\varepsilon} = \frac{m}{8\pi}(1+i\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}\left(-R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[J_1\left\{m\left(-R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} - \right.$$

$$\left. - i\,Y_1\left\{m\left(-R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right] + O(\varepsilon) \tag{6.22}$$

Laten we vervolgens $\varepsilon \longrightarrow +0$, dan krijgen we:

$$f_1 = \frac{m}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{-R}}\left[J_1(m\sqrt{-R})-i\,Y_1(m\sqrt{-R})\right] \tag{6.23}$$

hetgeen wederom in overeenstemming is met lit 2, § 15.
Voor R zeer klein kunnen we het rechterlid van (6.19) in een reeks naar $m.(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2)^{\frac{1}{2}}$ ontwikkelen.

$$K_1\left\{m\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = \left\{m\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1} +$$

$$+\tfrac{1}{2}m\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{1}{2}}\log\left\{\tfrac{1}{2}m\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} - \tfrac{1}{4}\,m\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$.\left\{\psi(2)+\psi(1)\right\}$$

$$+O\left\{\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{3}{2}}\log\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)\right\} + O\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Dus voor R zeer klein kunnen we voor $f_{1,\varepsilon}$ schrijven:

$$f_{1,\varepsilon} = -\frac{i}{4\pi^2}(1+i\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}\left(R+\frac{2i\varepsilon}{1+i\varepsilon}x_o^2\right)^{-1} + \text{Restterm.}$$

$$= -\frac{i}{4\pi^2}(1+i\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\left(R+i\varepsilon(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_o^2)\right)^{-1} + \text{Restterm.}$$

waarin de restterm een integreerbare functie van R is.
Laten we nu ε tot +0 naderen, dan vinden we de distributie:

$$f_1 = -\frac{1}{4\pi^2}(R+i\,0)^{-1} + \text{Restterm} \qquad (6.24)$$

De eerste term is onafhankelijk van m en daar de restterm voor m=0 nul wordt, moet $f_1 = -\frac{1}{4\pi^2}(R+i\,0)^{-1}$ een fundamentele oplossing zijn van de golfvergelijking, hetgeen ook het geval is. (zie § 6.1).
Zoals in de volgende paragraaf zal blijken, stemt deze van m onafhankelijke term in f_1 overeen met de van m onafhankelijke term, optredend in de causale functie $D^c(x)$ van lit 2, § 15.

7. De distributie $(P+i\,0)^{-1}$

In § 6 werden we bij de bepaling van een fundamentele oplossing van de golfvergelijking en van de Klein-Gordon vergelijking tot de distributie $(P+i\,0)^{-1}$ gevoerd, met $P=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2$.
We zullen in deze paragraaf deze distributie nader bestuderen. Hiertoe is noodzakelijk, dat we eerst de op de lichtkegel P=0 geconcentreerde distributie $\delta(P)$ invoeren.

7.1. De distributie $\delta(P)$

In lit.4 is de op een oppervlak S=0 geconcentreerde distributie gedefinieerd; hierbij werd verondersteld, dat het oppervlak S=0 geen singulier punt bevat ($|\nabla S| \neq 0$). Het kegeloppervlak P=0 heeft een singulier punt in de oorsprong. Om de definitie van $\delta(P)$ van lit.4 te kunnen toepassen, moeten we ons voorlopig beperken tot toetsfuncties, waarvan de drager de oorsprong <u>niet</u> bevat.
We voeren voor de plaatscoördinaten x_1, x_2, x_3 bolcoördinaten in; nml. $x_1=r\omega_1$, $x_2=r\omega_2$, $x_3=r\omega_3$ met $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$; dus $dx_1\,dx_2\,dx_3=r^2 dr\,d\Omega$, waarin $d\Omega$ het oppervlakte element

van de éénheidsbol in de (x_1, x_2, x_3) ruimte is.
In plaats van de tijdcoördinaat gebruiken we de coördinaat P, gedefinieerd door $P = r^2 - x_0^2$; dus $x_0 = \pm\sqrt{r^2 - P}$ en $dx_0 = \mp \frac{dP}{2\sqrt{r^2-P}}$. Voor het vier dimensionale volume element dx geldt nu:

$$dx = dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = \mp \tfrac{1}{2}(r^2-P)^{-\frac{1}{2}}\, r^2\, dr\, dP\, d\Omega. \qquad (7.1)$$

Indien we zorgen, dat we bij de integratie naar de nieuwe variabelen steeds in positieve richting integreren, dan kunnen we schrijven:

$$(\Theta(P), \varphi) \overset{\text{def}}{=} \int_{P \geqslant 0} \varphi\, dx = \tfrac{1}{2} \int_{P \geqslant 0} (r^2-P)^{-\frac{1}{2}}\, r^2 \varphi\, dr\, dP\, d\Omega \qquad (7.2)$$

waarin φ een toetsfunctie is, waarvan de drager de oorsprong $(x_i = 0,\ i = 1,2,3,0)$ niet bevat.
Uit (7.2) volgt

$$\frac{1}{c}(\Theta(P+c) - \Theta(P), \varphi) = \frac{1}{2c} \int_{-c \leqslant P \leqslant 0} (r^2-P)^{-\frac{1}{2}} r^2 \varphi\, dr\, dP\, d\Omega$$

Indien we c nu tot nul laten naderen, dan vinden we:

$$(\delta(P), \varphi) = \tfrac{1}{2} \int_{P=0} (r^2-P)^{-\frac{1}{2}}\, r^2 \varphi\, dr\, d\Omega = \tfrac{1}{2} \int_{P=0} r\varphi\, dr\, d\Omega$$

Uitvoering van de integratie naar Ω levert:

$$\int \varphi(x_1, x_2, x_3, x_0)\, d\Omega = \psi(r, x_0) \qquad (7.3)$$

en

$$(\delta(P), \varphi) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty r\, \psi(r, r)\, dr + \tfrac{1}{2} \int_0^\infty r\, \psi(r, -r)\, dr \qquad (7.4)$$

$\psi(r, x_0)$ is op een constante factor na het gemiddelde van $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_0)$ op een bol met straal r in de (x_1, x_2, x_3) ruimte.
De herleiding van $(\delta(P), \varphi)$ tot formule (7.4) geldt strikt genomen alleen voor toetsfunctie, waarvan de drager de oorsprong niet bevat, immers de transformatie naar de nieuwe

variabelen is in de oorsprong singulier. Het rechterlid van (7.4) heeft echter voor toetsfuncties, waarvan de drager de oorsprong wel bevat, betekenis. We definieren nu de distributie $\delta(P)$ voor willekeurige toetsfuncties door de formules (7.3) en (7.4).

7.2 De distributie $(P+i0)^{-1}$

De distributie $(P+i\,0)^{-1}$ (met $P=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2$) is op te vatten als de analytische voortzetting van de functionaal $((P+i\,0)^\lambda,\varphi)$ met $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ in het punt $\lambda=-1$. Voor $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ geldt:

$$(P+i\,0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pi\lambda i}\; P_-^\lambda \tag{7.5}$$

met
$$P_+^\lambda = \begin{cases} P^\lambda & \text{voor } P \geqslant 0 \\ 0 & \text{voor } P < 0 \end{cases}$$

en
$$P_-^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{voor } P > 0 \\ (-P)^\lambda & \text{voor } P \leqslant 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

De distributies (P_+^λ,φ) en (P_-^λ,φ) zijn voor $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ analytische functies van λ , zoals dit ook het geval is voor $((P+i\,0)^\lambda,\varphi)$. Daar (7.5) geldt voor $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ en de analytische voortzetting éénduidig is, geldt (7.5) ook voor de analytische voortzettingen van $(P+i\,0)^\lambda$, P_+^λ en P_-^λ in het gebied $\mathrm{Re}\,\lambda<0$. Om $(P+i\,0)^{-1}$ in P_+ en P_- uit te drukken, dienen we eerst (P_+^λ,φ) en (P_-^λ,φ) in het gebied $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ analytisch voort te zetten.
Voor $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ kunnen we schrijven:

$$(P_+^\lambda,\varphi) = \int_{P\geqslant 0} P^\lambda \varphi\, dx \tag{7.7}$$

We voeren weer dezelfde coördinaten in als in § 7.1 ; $x_1=r\,\omega_1$, $x_2=r\,\omega_2$ en $x_3=r\,\omega_3$ met $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ en $x_0=\pm\sqrt{r^2-P}$ $(P=r^2-x_0^2)$. Substitutie in (7.7) levert:

$$(P_+^\lambda,\varphi) = -\tfrac{1}{2}\int\limits_{\substack{P\geqslant 0\\ x_0>0}} P^\lambda.\varphi.(r^2-P)^{-\frac{1}{2}}\, r^2 dr\, dP\, d\Omega \;+\; \tfrac{1}{2}\int\limits_{\substack{P\geqslant 0\\ x_0<0}} P^\lambda.\varphi.(r^2-P)^{-\frac{1}{2}}\, r^2 dr\, dP\, d\Omega\,.$$

In de eerste integraal wordt m.b.t. x_o geïntegreerd van $0 \to r$ en dus m.b.t. P van r^2 naar 0; in de tweede integraal wordt m.b.t. x_o geïntegreerd van $-r \to 0$ en dus m.b.t. P van $0 \to r^2$. Voeren we de integratie naar Ω uit, dan krijgen we met gebruik van (7.3):

$$(P_+^\lambda,\varphi) = +\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ \int_0^{r^2} P^\lambda \frac{\psi(r,\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}}\, dP \right\} r^2 dr \;+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ \int_0^{r^2} P^\lambda \frac{\psi(r,-\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}}\, dP \right\} r^2 dr \qquad (7.8)$$

Uit (7.8) zien we dat (P_+^λ,φ) een analytische functie is van λ voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$.

Om (P_+^λ,φ) analytisch voort te zetten in het gebied $-2 < \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -1$ zullen we de binnenintegralen van (7.8) regulariseren.

Voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ mogen we schrijven:

$$\int_0^{r^2} P^\lambda \frac{\psi(r,\pm\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}}\, dP = \int_0^{r^2} P^\lambda \left\{ \frac{\psi(r,\pm\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}} - \frac{\psi(r,\pm r)}{r} \right\} dP \;+$$

$$+\frac{1}{\lambda+1}\, r^{2(\lambda+1)}\, \frac{\psi(r,\pm r)}{r} \qquad (7.9)$$

Substitutie van (7.9) in (7.8) levert:

$$(P_+^\lambda,\varphi) = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\lambda+1}\int_0^\infty \psi(r,+r).r.r^{2(\lambda+1)}dr + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\lambda+1}\int_0^\infty \psi(r,-r)\,r\,r^{2(\lambda+1)}dr \;+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left[\int_0^{r^2} P^\lambda \left\{ \frac{\psi(r,+\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}} - \frac{\psi(r,+r)}{r} \right\} dP \right] r^2 dr \;+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left[\int_0^{r^2} P^\lambda \left\{ \frac{\psi(r,-\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}} - \frac{\psi(r,-r)}{r} \right\} dP \right] r^2 dr \qquad (7.10)$$

geldig voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$.

Omdat de laatste twee termen in het rechterlid van (7.10) analytisch zijn voor Re$\lambda > -2$, geeft het rechterlid van (7.10) de analytische voortzetting van (P_+^λ, φ) in het gebied Re$\lambda > -2$ met uitzondering van het punt $\lambda = -1$, waar (P_+^λ, φ) een enkelvoudige pool heeft.
Met behulp van (7.4) blijkt het residu van (P_+^λ, φ) in de pool $\lambda = -1$ gelijk te zijn aan $(\delta(P), \varphi)$.
De Laurent ontwikkeling van (P_+^λ, φ) in de omgeving van $\lambda = -1$ leidt met behulp van

$$r^{2(\lambda+1)} = 1 + 2(\lambda+1)\log r + O(\lambda+1)^2$$

tot de formule

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{(\lambda+1)}(\delta(P), \varphi) + (P_+^{-1}, \varphi) + O(\lambda+1) \qquad (7.11)$$

waarin:

$$(P_+^{-1}, \varphi) = \int_0^\infty \psi(r, +r)\, r \log r\, dr + \int_0^\infty \psi(r, -r)\, r \log r\, dr +$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left[\int_0^{r^2} P^{-1}\left\{\frac{\psi(r, +\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}} - \frac{\psi(r, +r)}{r}\right\} dP\right] r^2 dr +$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \left[\int_0^{r^2} P^{-1}\left\{\frac{\psi(r, -\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}} - \frac{\psi(r, -r)}{r}\right\} dP\right] r^2 dr \qquad (7.12)$$

De lezer zij er op gewezen, dat de distributie (P_+^{-1}, φ) niet de functionaal (P_+^λ, φ) met $\lambda = -1$ is; deze laatste bestaat zelfs niet, omdat (P_+^λ, φ) in $\lambda = -1$ een pool heeft. (P_+^{-1}, φ) is echter de waarde van het reguliere deel van (P_+^λ, φ) in $\lambda = -1$. Op dezelfde wijze kunnen we de distributie (P_-^λ, φ) in het gebied Re$\lambda > -2$ analytisch voortzetten.
Voor Re$\lambda > 0$ kunnen we schrijven:

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_{P \leqslant 0} (-P)^\lambda \varphi\, dx = \int_{Q \geqslant 0} Q^\lambda \varphi\, dx \qquad (7.13)$$

met $Q = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

In plaats van x_1,x_2,x_3 voeren we weer bolcoördinaten in met $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ en dus $dx=dx_0dx_1dx_2dx_3=r^2dr\,d\Omega\,dx_0$ ($d\Omega$ is oppervlakte element van éénheidsbol).
Substitutie van deze nieuwe coördinaten in (7.13) levert na uitvoering van de integratie met betrekking tot $d\Omega$:

$$(P_-^\lambda,\varphi)=\int_{Q\geqslant 0} Q^\lambda\,\psi(r,x_0)r^2\,dr\,dx_0 \qquad (7.14)$$

waarin de functie $\psi(r,x_0)$ weer door (7.3) gedefinieerd is.
Tenslotte voeren we i.p.v. r de variabele $Q=x_0^2-r^2$ in; substitutie in (7.14) levert tenslotte:

$$(P_-^\lambda,\varphi)=+\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\left\{\int_0^{x_0^2} Q^\lambda\,\psi(+\sqrt{x_0^2-Q},x_0)\sqrt{x_0^2-Q}\,dQ\right\} \quad (7.15)$$

Uit (7.15) zien we, dat (P_-^λ,φ) een analytische functie is van λ voor $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$.
Om (P_-^λ,φ) analytisch voort te zetten in het gebied $-2<\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant-1$ zullen we de binnen integraal van (7.15) weer regulariseren.
Voor $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$ mogen we schrijven:

$$\int_0^{x_0^2} Q^\lambda\,\psi(+\sqrt{x_0^2-Q},\,x_0)\sqrt{x_0^2-Q}\,dQ =$$

$$\int_0^{x_0^2} Q^\lambda\left\{\psi(+\sqrt{x_0^2-Q},x_0)\sqrt{x_0^2-Q}-\psi(|x_0|,x_0)|x_0|\right\}dQ\;+$$

$$+\frac{|x_0|^{2(\lambda+1)}}{\lambda+1}\,\psi(|x_0|,x_0)|x_0| \qquad (7.16)$$

Substitutie van (7.16) in (7.15) levert:

$$(P_-^\lambda,\varphi)=\frac{1}{2(\lambda+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(|x_0|,x_0)\,|x_0|\,.\,|x_0|^{2(\lambda+1)}dx_0\;+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\left[\int_0^{x_0^2} Q^\lambda\left\{\psi(+\sqrt{x_0^2-Q},x_0)\sqrt{x_0^2-Q}-\psi(|x_0|,x_0)|x_0|\right\}dQ\right]$$

$$(7.17)$$

geldig voor $\mathrm{Re}\,\lambda>-1$.

Omdat de tweede term in het rechterlid van (7.17) analytisch is voor $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$, geeft het rechterlid van (7.17) de analytische voortzetting van (P_-^λ,φ) in het gebied $\mathrm{Re}\,\lambda > -2$ met uitzondering van het punt $\lambda=-1$, waar (P_-^λ,φ) weer een enkelvoudige pool heeft.
Met behulp van (7.4) blijkt het residu van (P_-^λ,φ) in de pool $\lambda=-1$ gelijk te zijn aan $(\delta(P),\varphi)$.
De Laurent-ontwikkeling van (P_-^λ,φ) in de omgeving van $\lambda=-1$ kunnen we nu weer gemakkelijk aangeven.
Met behulp van

$$|x_0|^{2(\lambda+1)}=1+2(\lambda+1)\log|x_0|+0(\lambda+1)^2$$

krijgen we het resultaat:

$$(P_-^\lambda,\varphi)=\frac{1}{\lambda+1}(\delta(P),\varphi)+(P_-^{-1},\varphi)+0(\lambda+1) \tag{7.18}$$

waarin

$$(P_-^{-1},\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(|x_0|,x_0)\,|x_0|\log|x_0|\,dx_0\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_0\left[\int_{-x_0^2}^{0}(+P)^{-1}\left\{\psi(+\sqrt{x_0^2+P},x_0)\sqrt{x_0^2+P}-\psi(|x_0|,x_0)|x_0|\right\}dP\right] \tag{7.19}$$

(We hebben Q weer door -P vervangen)

De distributie (P_-^{-1},φ) is weer de waarde van het reguliere deel van (P_-^λ,φ) in het punt $\lambda=-1$.

Substitutie van de Laurent-ontwikkelingen (7.11) en (7.18) in

$$((P+i\,0)^\lambda,\varphi)=(P_+^\lambda,\varphi)+e^{\pi\lambda i}(P_-^\lambda,\varphi) \qquad \text{(zie(7.5))}$$

levert voor $((P+i\,0)^\lambda,\varphi)$ met λ in de omgeving van $\lambda=-1$:

$$((P+i\,0)^\lambda,\varphi)=-\pi i(\delta(P),\varphi)+(P_+^{-1}-P_-^{-1},\varphi)+0(\lambda+1)$$

en dus

$$((P+i\,0)^{-1},\varphi)=(P_+^{-1}-P_-^{-1},\varphi)-\pi i(\delta(P),\varphi)$$

ofwel

$$(P+i\ 0)^{-1}=P_+^{-1}-P_-^{-1}-\pi i\delta(P) \qquad (7.20)$$

De polen van (P_+^λ,φ) en (P_-^λ,φ) zijn tegen elkaar weggevallen, hetgeen ook te verwachten was, omdat $((P+i\ 0)^\lambda,\varphi)$ in $\lambda=-1$ een analytische functie van λ is (zie § 4).
Om de distributie $(P+i\ 0)^{-1}$ goed te begrijpen zullen we nu de distributie $P_+^{-1}-P_-^{-1}$ nader onderzoeken.
De eerste term van het rechterlid van (7.19) kan als volgt herleid worden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(|x_0|,x_0)|x_0| \log|x_0|\, dx_0 =$$

$$\int_0^{\infty} \psi(x_0,x_0)x_0 \log x_0\, dx_0 + \int_{-\infty}^{0} \psi(-x_0,x_0)(-x_0)\log(-x_0)dx_0 =$$

$$\int_0^{\infty} \psi(x_0,x_0)x_0 \log x_0\, dx_0 + \int_0^{\infty} \psi(+x_0,-x_0)(+x_0)\log(+x_0)dx_0$$

Dus de eerste term van het rechterlid van (7.19) is gelijk aan de eerste term van het rechterlid van (7.12).
Ten gevolge hiervan mogen we schrijven:

$$(P_+^{-1}-P_-^{-1},\varphi)=\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\Big[\int_0^{r^2} P^{-1}\Big\{\frac{\psi(r,+\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}} - \frac{\psi(r,r)}{r}\Big\}dP\Big]r^2dr$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\Big[\int_0^{r^2} P^{-1}\ \frac{\psi(r,-\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}} - \frac{\psi(r,-r)}{r}\ dP\Big]r^2dr$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\Big[\int_{-x_0^2}^{0} P^{-1}\Big\{\psi(\sqrt{x_0^2+P},x_0)\sqrt{x_0^2+P}-\psi(|x_0|,x_0)|x_0|\Big\}dP\Big]$$

Omdat de binnen integralen in de omgeving van P=0 integreerbaar zijn, kunnen we dit als volgt herleiden:

$$(P_+^{-1}-P_-^{-1},\varphi)=$$

$$\tfrac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg\{\int_0^\infty\Bigg[\int_{+\varepsilon}^{r^2}P^{-1}\Bigg\{\frac{\psi(r,+\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}}-\frac{\psi(r,r)}{r}\Bigg\}dP\Bigg]r^2dr+$$

$$+\int_0^\infty\Bigg[\int_{+\varepsilon}^{r^2}P^{-1}\Bigg\{\frac{\psi(r,-\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}}-\frac{\psi(r,-r)}{r}\Bigg\}dP\Bigg]r^2\,dr$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}dx_o\Bigg[\int_{-x_o^2}^{-\varepsilon}P^{-1}\Big\{\psi(\sqrt{x_o^2+P},x_o)\sqrt{x_o^2+P}-\psi(|x_o|,x_o)|x_o|\Big\}dP\Bigg]\Bigg\}$$

$$\tag{7.21}$$

Er geldt evenwel:

$$\int_0^\infty\Bigg[\int_{+\varepsilon}^{r^2}P^{-1}\frac{\psi(r,r)}{r}dP\Bigg]r^2dr+\int_0^\infty\Bigg[\int_{+\varepsilon}^{r^2}P^{-1}\frac{\psi(r,-r)}{r}dP\Bigg]r^2dr+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}dx_o\Bigg[\int_{-x_o^2}^{-\varepsilon}P^{-1}\psi(|x_o|,x_o)|x_o|\,dP\Bigg]=0 \text{ voor willekeurige } \varepsilon$$

en dus

$$(P_+^{-1}-P_-^{-1},\varphi)=$$

$$\tfrac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\Bigg\{\int_0^\infty\Bigg[\int_{+\varepsilon}^{r^2}P^{-1}\Bigg\{\frac{\psi(r,+\sqrt{r^2-P})+\psi(r,-\sqrt{r^2-P})}{\sqrt{r^2-P}}\Bigg\}dP\Bigg]r^2dr+$$

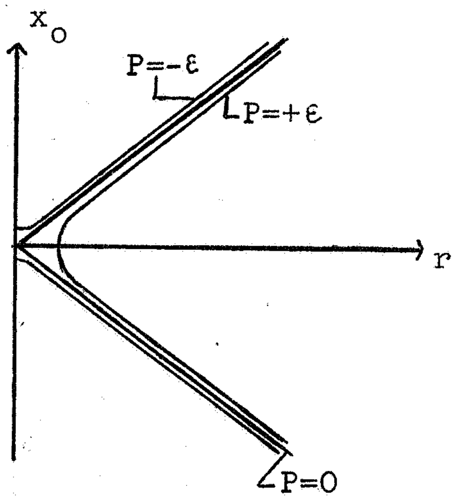
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}dx_o\Bigg[\int_{-x_o^2}^{-\varepsilon}P^{-1}\Big\{\psi(\sqrt{x_o^2+P},x_o)\sqrt{x_o^2+P}\Big\}dP\Bigg]\Bigg\}\tag{7.22}$$

Het rechterlid van (7.22) is niets anders, dan

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|P|>\varepsilon}P^{-1}\varphi(x_1,x_2,x_3,x_o)dx_1dx_2dx_3dx_o$$

en dus

$$(P_+^{-1}-P_-^{-1},\varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|P|>\varepsilon}P^{-1}\varphi\,dx\tag{7.23}$$



Uit het bovenstaande blijkt, dat de limiet in het rechterlid van (7.23) bestaat en deze is een generalisatie van de hoofdwaarde van Cauchy voor de integraal $\int \frac{1}{P}\varphi dx$, waarbij de integratie over de gehele vier dimensionale ruimte wordt uitgevoerd.

We hebben dus gevonden, dat

$$((P+i\ 0)^{-1},\varphi)=(\frac{1}{P},\varphi)-\pi i(\delta(P),\varphi)$$

ofwel $(P+i\ 0)^{-1}=\frac{1}{P}-\pi i\ \delta(P)$ (7.24)

waarbij $(\frac{1}{P},\varphi)$ in de gegeneraliseerde zin van Cauchy opgevat moet worden.
Geheel analoog toont men aan, dat

$$(P-i\ 0)^{-1}=\frac{1}{P}+\pi i\ \delta(P) \qquad (7.25)$$

De formules (7.24) en (7.25) zijn op zich zelf weer generalisaties van de bekende één dimensionale distributies

$$(x \pm i\ 0)^{-1}=\frac{1}{x}\mp\pi i\ \delta(x) \qquad (7.26)$$

waarbij de distributie $\frac{1}{x}$ opgevat wordt als de gewone hoofdwaarde van Cauchy van de integraal $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)dx$.
In § 6.1 is aangetoond, dat

$$f_1=-\frac{i}{4\pi^2}(P+i\ 0)^{-1}=-\frac{1}{4\pi}\delta(P)-\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{P} \qquad (7.27)$$

en

$$f_2=+\frac{i}{4\pi^2}(P-i\ 0)^{-1}=-\frac{1}{4\pi}\delta(P)+\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{P} \qquad (7.28)$$

oplossingen zijn van de inhomogene golfvergelijking, nml.:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\right)f=\delta(x_1,x_2,x_3,x_0) \qquad (6.1)$$

Uit (7.27) en (7.28) volgt dus, dat ook $-\frac{1}{4\pi}\delta(P)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking (6.1)is; daarentegen is de distributie $\frac{1}{P}$ een oplossing van de homogene golfvergelijking; dit laatste is echter ook a priori evident.

8. De Fourier getransformeerde van $\wp^{\lambda}$

In deze paragraaf zullen we tenslotte nog de Fourier getransformeerde (m.b.t. alle variabelen) van de distributie $\wp^{\lambda}$ bepalen. Het resultaat zullen we o.a. toepassen op de elementaire oplossingen $\mp \frac{i}{4\pi^2}(P\pm i\ 0)^{-1}$ van de golfvergelijking; aldus krijgen we de zgn. "momenten" representatie van de functie $D_0^c(x)$.

$\wp$ zij van de gedaante

$$\wp = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 \qquad (8.1)$$

met Im $\alpha_j > 0$, $j=1,2,\dots n$.

Dus $\wp$ is een quadratische vorm met positief definiet imaginair deel.

De Fourier getransformeerde van $\wp^{\lambda}$ duiden we aan met $F[\wp^{\lambda}]$ en die van de toetsfunctie φ met ψ ; dus krachtens de definitie van de Fourier transformatie geldt:

$$(\wp^{\lambda},\varphi)= \frac{1}{(2\pi)^n}\,(F[\wp^{\lambda}],\psi) \qquad (8.2)$$

De distributie $(\wp^{\lambda},\varphi)$ en daarom ook $(F[\wp^{\lambda}],\psi)$is een analytische functie van de coefficienten $\alpha_1 \dots \alpha_n$ voor Im $\alpha_j > 0$.

Dus om $F[\wp^{\lambda}]$te bepalen is het reeds voldoende het geval te beschouwen, dat de α_j zuiver imaginair zijn; we kunnen immers het resultaat weer naar algemene complexe α_j met Im $\alpha_j > 0$ analytisch voortzetten.

Stel $\alpha_j = i\, b_j$ met $b_j > 0$.

$$F[\rho^\lambda]=e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}\int_{-\infty}^{+\infty}(b_1x_1^2+\dots+b_nx_n^2)^\lambda\, e^{i(x_1k_1+\dots+x_nk_n)}\,dx =$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}}{\sqrt{b_1 b_2\dots b_n}}\int_{-\infty}^{+\infty} r^{2\lambda}\, e^{i\left(x_1\frac{k_1}{\sqrt{b_1}}\dots +x_n\frac{k_n}{\sqrt{b_n}}\right)}\,dx \tag{8.3}$$

waarin $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2 \dots +x_n^2}$ en de integralen convergeren voor $-\frac{n}{2}<\mathrm{Re}\,\lambda<0$.

Volgens lit 1, pag. 187 e.v. geldt:

$$F[r^\lambda]=2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}\,\rho^{-\lambda-n} \tag{8.4}$$

waarin $\rho=\sqrt{k_1^2+k_2^2+\dots+k_n^2}$.

Het resultaat (8.4) is weer algemeen geldig voor willekeurige waarden van λ, behalve voor $\lambda=-n, -n-2,\dots,$ op grond van het principe van de analytische voortzetting naar λ.

Substitutie van (8.4) in (8.3) levert:

$$F[\rho^\lambda]=\frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda i}}{\sqrt{b_1b_2\dots b_n}}\;2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{n}{2})}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{k_1^2}{b_1}+\dots+\frac{k_n^2}{b_n}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$$

ofwel met $\alpha_j=i\,b_j$

$$F[\rho^\lambda]=\frac{e^{-\frac{n\pi}{4}i}\,2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\lambda+\frac{n}{2})}{\sqrt{-i\alpha_1}.\sqrt{-i\alpha_2}\dots\sqrt{-i\alpha_n}\,\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{k_1^2}{\alpha_1}+\dots+\frac{k_n^2}{\alpha_n}\right)^{-\lambda-\frac{n}{2}} \tag{8.5}$$

Wegens de éénduidigheid van de analytische voortzetting behoudt de formule (8.5) zijn geldigheid voor een willekeurige quadratische vorm van de gedaante (8.1), waarin de coëfficienten α_j complex zijn met $\mathrm{Im}\,\alpha_j>0$. De waarden van de wortels $\sqrt{-i\alpha_j}$ zijn bepaald door $\sqrt{-i\alpha_j}=|\alpha_j|^{\frac{1}{2}}\exp(\frac{1}{2}\,i\arg(-i\alpha_j))$ $(-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg(-i\alpha_j)\leqslant+\frac{\pi}{2})$.

We merken op, dat $\left(\frac{k_1^2}{\alpha_1}+\dots+\frac{k_n^2}{\alpha_n}\right)$ een quadratische vorm met negatief definiet imaginair deel is.

Stellen we nu

$$P = x_1^2+x_2^2+ \dots +x_p^2-x_{p+1}^2- \dots -x_{p+q}^2 \quad , \; p+q=n \qquad (8.6)$$

$$Q = k_1^2+k_2^2+ \dots +k_p^2-k_{p+1}^2- \dots -k_{p+q}^2 \quad , \; p+q=n \qquad (8.7)$$

dan geeft (8.5) met $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 1+i\ 0$ en $\alpha_{p+1}=\alpha_{p+2}= \dots =\alpha_{p+q} = -1+i\ 0$

$$F\left[(P+i\ 0)^\lambda\right] = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}qi}\ 2^{2\lambda+n}\ \pi^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\lambda+\frac{n}{2})}{\Gamma(-\lambda)}\ (Q-i\ 0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} \qquad (8.8)$$

Geheel analoog kan men afleiden:

$$F\left[(P-i\ 0)^\lambda\right] = \frac{e^{+\frac{\pi}{2}qi}\ 2^{2\lambda+n}\ \pi^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\lambda+\frac{n}{2})}{\Gamma(-\lambda)}\ (Q+i\ 0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} \qquad (8.9)$$

In § 5 is aangetoond dat de differentiaalvergelijking:

$$L^m f = \delta(x) \qquad (m=1,2,\dots) \qquad (8.10)$$

$$\text{met } L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$$

de volgende elementaire oplossingen heeft:

$$f=(-1)^m\ \frac{e^{\pm\frac{\pi}{2}qi}\ \Gamma(\frac{n}{2}-m)}{4^m(m-1)!\ \pi^{\frac{n}{2}}}\ (P\pm i\ 0)^{-\frac{n}{2}+m} \qquad (8.11)$$

(indien niet tegelijkertijd n even en $m \geq \frac{n}{2}$ is). Toepassing van (8.8) en (8.9) levert voor de Fourier getransformeerde van de elementaire oplossingen:

$$F\ [f] = (-1)^m(Q\mp i\ 0)^{-m} \qquad (8.12)$$

Specialisatie op de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \quad f = \delta(x_1,x_2,x_3,x_0)$$

geeft:

$$F\left[\frac{\mp i}{4\pi^2} (P \pm i\ 0)^{-1} \right] = -(Q \mp i\ 0)^{-1} \tag{8.13}$$

met

$$P = x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_o^2$$

$$Q = k_1^2+k_2^2+k_3^2-k_o^2$$

M.b.v. (7.27) en (7.28) kunnen we ook schrijven:

$$F\left[\mp \frac{i}{4\pi^2} \left(\frac{1}{P} \mp \pi i\ \delta(P)\right) \right] = - \left(\frac{1}{Q} \pm \pi i\ \delta(Q)\right) \tag{8.14}$$

Literatuur

1 Gelfand, I.M., Schilov, G.E. — Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I, V.E.B. Deutsch.Verl. der Wissenschaften Berlijn, 1960.

2 Bogoliubov, N.N., Shirkov, D.V. — Introduction to the Theory of Quantized Fields. Interscience Publ., Inc., New York, 1959.

3 Watson, G.N. — Theory of Bessel Functions, second ed., Cambridge Univ. Press 1944.

4 Seeley, R.T. — Distributions on Surfaces, Report TW 78, March 1962, Mathematical Centre, Amsterdam.