STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 6

Over totaal-geordende topologische ruimten

door

M.A. Maurice

Oktober 1963

Notatie-afspraken:

1. In een totaalgeordende verzameling X zij

$$I = [a,b] = \{x/a \leqq x \leqq b\} \quad (\text{"gesloten" interval})$$

$$\overset{\circ}{I} = (a,b) = \{x/a < x < b\} \quad (\text{"open" interval})$$

Als J zowel een "gesloten" als een "open" interval is, zullen we J een "clopen" interval noemen.

2. Een geordend paar van elementen a en b wordt (ook) aangegeven met (a,b); indien misverstand mogelijk is ——(a,b) kan ook een open interval aanduiden —— schrijven we $\overline{a,b}$ voor het geordende paar.

3. Als X een verzameling is, zij $|X|$ het kardinaalgetal van X
Als μ een ordinaalgetal is, zij $|\mu|$ het kardinaalgetal van μ.

4. Als $p = (p_i)_{i<\alpha}$, dan is voor $\beta \leqq \alpha$:

$$p/\beta = (p_i)_{i<\beta}$$

5. Als $p = (p_i)_{i<\alpha}$, $q = (q_i)_{i<\beta}$, dan is

$$pq = (s_i)_{i<\alpha+\beta},$$

met
$$s_i = p_i \text{ voor } i < \alpha$$
$$s_i = q_i \text{ voor } \alpha \leqq i < \alpha + \beta$$

6. (i) In de klasse der ordinaalgetallen wordt het $i^{\underline{de}}$ begingetal aangeduid met ω_i;
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \Omega = \omega_1 \end{cases}$$

(ii) Als $\aleph$ een kardinaalgetal is, zij $\omega_\aleph$ het eerste ordinaalgetal met kardinaalgetal $\aleph$.

Indien de welgeordende klasse der transfiniete kardinaalgetallen wordt aangeduid met $\{\aleph_i\}_i$ is blijkbaar

$$\omega_{\aleph_i} = \omega_i.$$

$$\begin{cases} \aleph_0 = \mathfrak{a} \\ \aleph_1 = \mathfrak{c} \end{cases} \quad (\text{continuum hypothese})$$

(iii) Als α een ordinaalgetal is, zij

$$W_\alpha = W(\alpha) = \{\mu/\mu<\alpha\} \quad ;$$

$$\widetilde{W}_\alpha = \widetilde{W}(\alpha) = \{\mu/\mu\leqq\alpha\} \quad .$$

Totaal geordende topologische ruimten

§1. Totaal geordende verzamelingen

1.1. Een "totaalgeordende verzameling" is een paar $(X,<)$, waarin X een verzameling is, en $<$ een deelverzameling van $X \times X$, met de eigenschappen:

(i) $\forall x \in X : (x,x) \notin <$

(ii) $\forall x,y,z \in X : [(x,y) \in <$ en $(y,z) \in <] \rightarrow (x,z) \in <$

(iii) $\forall x,y \in X : x = y$ of $(x,y) \in <$ of $(y,x) \in <$.

$<$ heet de "ordening" van $(X,<)$

N.B. (i) de totaalgeordende verzameling $(X,<)$ wordt in het vervolg veelal alleen met X aangeduid.

(ii) voor $(x,y) \in <$ zullen we steeds $x < y$ schrijven.

Voor de definitie en eigenschappen van de begrippen "ordetype", "welgeordende verzameling", "ordinaalgetal" etc. zie men bijv. F. Hausdorff: "Grundzüge der Mengenlehre".

1.2. Als X een totaalgeordende verzameling is, en $A \subset X$, wordt door $<$ in A een ordening $<_A$ geinduceerd.
Voor de definitie en eigenschappen van de begrippen "bovengrens (ondergrens) van A", "sup A(inf A)", "A is begrensd" en het begrip "X is volledig" zie men bijv. J.L. Kelley, "General Topology", Chapter 0.

1.3. Indien voor ieder ordinaalgetal $\alpha <$ zekere μ een totaalgeordende verzameling $X = (X_\alpha, <_\alpha)$ is gegeven, dan verstaat men onder het "lexicografisch geordende product" $\prod_{\alpha<\mu} X_\alpha$ de totaalgeordende verzameling, die bestaat uit alle functies $x = (x_\alpha)_{\alpha<\mu}$ $(x_\alpha \in X_\alpha)$, en waarin de ordening is gedefinieerd door

$$x<y \leftrightarrow (\text{voor de kleinste } \beta<\mu, \text{ waarvoor } x_\beta \neq y_\beta \text{ , is } x_\beta<y_\beta).$$

In het bijzonder verstaat men onder X^μ (waarin X een totaalgeordende verzameling is) het lexicografisch geordende product $\prod_{\alpha<\mu} X_\alpha$, met $X_\alpha = X$ voor alle $\alpha<\mu$; en onder $X.Y$(waarin X en Y totaalgeordende verzamelingen zijn) het lexicogra-

fisch geordende product $\prod_{\alpha<2} X_\alpha$, waarin $X_0 = X$ en $X_1 = Y$.
Het is duidelijk, dat

$$(X^\mu)^\nu \simeq X^{\mu\nu}$$
$$X^\mu . X^\nu \simeq X^{\mu+\nu}$$

1.4. De verzamelingen $\{0,1\}^\alpha$ zullen we in het volgende steeds aanduiden met Z_α.
Men ziet gemakkelijk in, dat Z_ω gelijkgeordend is met de Cantorverzameling.

§2. Totaalgeordende topologische ruimten.

2.1. Een "totaalgeordende topologische ruimte" is een paar $(X, \mathcal{T}_<)$, waarin $X = (X,<)$ een totaalgeordende verzameling is, en waarin de topologie $\mathcal{T}_<$ wordt gedefinieerd met behulp van de subbasis bestaande uit alle verzamelingen $\{x/x<a\}$ en $\{x/x>b\}$ $(a,b \in X)$.
N.B. de totaalgeordende topologische ruimte $(X,\mathcal{T}_<)$ zal in het volgende in het algemeen alleen met X worden aangeduid.
Het is bekend, dat X een volledig normale ruimte is.
Een topologische ruimte $(T,\mathcal{T})$ heet "te ordenen", indien er een ordening < van T bestaat, zodanig, dat $(T,\mathcal{T}_<)$ homeomorf is met $(T,\mathcal{T})$.

2.2. Indien X een totaalgeordende topologische ruimte is, en $A \subset X$, dan zullen we de door $(X,\mathcal{T}_<)$ in A geinduceerde relatieve topologie aangeven met $\mathcal{T}_<^{(A)}$. In het algemeen is $(A,\mathcal{T}_<^{(A)})$ niet homeomorf met $(A,\mathcal{T}_{<_A})$ (zelfs niet als A gesloten is in X).
Voorbeeld:

$$X = \{x/x \text{ irrationaal}; -\sqrt{2} \leqq x \leqq +\sqrt{2}\}$$
$$A = \{x/x \text{ irrationaal}; -\sqrt{2} \leqq x < 0\} \cup \{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\} ;$$

dan is A gesloten in X, maar $(A,\mathcal{T}_<^{(A)})$ is niet homeomorf met $(A,\mathcal{T}_{<_A})$ (de eerste ruimte heeft een geisoleerd punt; de tweede niet).

2.3. Als A een compacte deelverzameling is van $(X,\mathcal{T}_<)$, dan is A in ieder geval gesloten in $(X,\mathcal{T}_<)$ en begrensd in $(X,<)$; en als $(X,\mathcal{T}_<)$ compact is, dan heeft $(X,<)$ een grootste element en een kleinste element.

Lemma 2.3.1: De beweringen "$(X,<)$ is volledig" en "Elke begrensde gesloten deelverzameling van $(X,\mathcal{T}_<)$ is compact" zijn aequivalent.
Bewijs: zie J.L. Kelley, General Topology, Chapter V, problem C
Gevolg: De beweringen "$(X,<)$ is volledig en heeft zowel een kleinste als een grootste element" en "$(X,\mathcal{T}_<)$ is compact" zijn aequivalent.

Als A een compacte deelverzameling is van $(X,\mathcal{T}_<)$ dan is $(A,<_A)$ volledig; omgekeerd is het echter mogelijk, dat A gesloten en begrensd is in X, en dat $(A,<_A)$ volledig is, terwijl $(A,\mathcal{T}_<^{(A)})$ niet compact is;
voorbeeld: $X = \{x / -1 \leqq x \leqq +1\} - \{0\}$
$A = \{x / -1 \leqq x < 0\}$

Lemma 2,3,2: Als A een compacte deelverzameling is van X, is $\mathcal{T}_{<_A} = \mathcal{T}_<^{(A)}$.
Bewijs: 1. Het is duidelijk, dat $\mathcal{T}_{<_A} \subset \mathcal{T}_<^{(A)}$
2. Neem $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_<^{(A)}$; bij elke $p \in \mathcal{O}$ bestaat dan een interval $I = (r,s)$, $I \in \mathcal{T}_<$, zodanig dat
$$p \in A \cap I \subset \mathcal{O};$$
indien $\inf \{x / p < x,\ x \in A\} = p$, kies dan $a_2 \in A$ zó, dat $p < a_2 < s$; indien $\inf \{x/p < x, x \in A\} > p$, zij dan $a_2 = \inf\{x/p<x, x\in A\}$ dan is $a_2 \in A$, want A is compact; kies a_1 op analoge wijze, en stel $I' = (a_1,a_2)$; dan volgt:
$$p \in A \cap I' \subset \mathcal{O}\ ,\ I' \in \mathcal{T}_{<_A}\ ;$$
maar dat betekent, dat $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{<_A}$.

2.4. Lemma 2.4.1: Z_α is compact en nuldimensionaal voor alle $\alpha \geq 0$.

Bewijs:

1. Kies $A \subset Z_\alpha$; definieer $b = (b_i)_{i<\alpha}$ door transfiniete inductie aldus:

$$\begin{cases} b_0 = 0, \text{ als voor alle } a = (a_i)_{i<\alpha} \in A \text{ geldt } a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \text{ in het andere geval;} \end{cases}$$

als b_i gedefinieerd is voor alle $i < \nu$, zij dan

$$\begin{cases} b_\nu = 0, \text{ als voor alle } a = (a_i)_{i<\alpha} \in A, \text{ met } a_i = b_i \text{ voor } i<\nu, \\ \qquad \text{geldt } a_\nu = 0 \\ b_\nu = 1 \text{ in het andere geval.} \end{cases}$$

Het is duidelijk, dat $b = \sup A$.

$(Z_\alpha, <)$ is dus volledig, en $(Z_\alpha, \mathcal{T}_<)$ is compact.

2. Kies $A \subset Z_\alpha$, en kies $a = (a_i)_{i<\alpha} \in A$ en $b = (b_i)_{i<\alpha} \in A$;

Zij $a < b$ en laat i_0 de eerste index zijn, waarvoor $a_i \neq b_i$ (dan is dus $a_{i_0} = 0$ en $b_{i_0} = 1$);

definieer $p = (p_i)_{i<\alpha}$ door $\begin{cases} p_i = a_i = b_i & \text{voor } i < i_0 \\ p_{i_0} = 0 & \\ p_i = 1 & \text{voor } i > i_0 \end{cases}$

en $q = (q_i)_{i<\alpha}$ door $\begin{cases} q_i = a_i = b_i & \text{voor } i < i_0 \\ q_{i_0} = 1 & \\ q_i = 0 & \text{voor } i > i_0; \end{cases}$

dan is $a \leq p < q \leq b$ en $\{x / p < x < q\} = \emptyset$.

Dit betekent, dat Z_α totaal onsamenhangend is.

Opmerking: In het vervolg zal een compacte totaalgeordende topologische ruimte steeds worden aangegeven met "ctgtr".

§3. Enkele eigenschappen van ctgtr^n.

3.1. Zij X een totaal geordende verzameling.

Twee elementen a en b heten "buren" (en a heet "linkerbuur" van b "rechterbuur" van a) als $a < b$ en $\{ x / a < x < b \} = \emptyset$;

a heet"rechtersprongpunt", b heet "linkersprongpunt".
Zij $X = (X, <)$ een totaal geordende verzameling.
Zij R de verzameling der rechtersprongpunten in X;
en zij $X^* = X \setminus R$;
dan is ook $X^* = (X^*, <_{X^*})$ een totaalgeordende verzameling (en X^* is blijkbaar gelijkgeordend zowel met de verzameling die gevormd wordt door het verschil $X \setminus L$ van X en de verzameling L der linkersprongpunten, als met de verzameling die uit X ontstaat door elk tweetal elementen die buren zijn in X te identificeren).

Het is duidelijk, dat

(i) $(X^*, <_{X^*})$ samenhangend is

(ii) X^* een ctgtr is, als X een ctgtr is.

<u>Lemma 3.1.1.:</u> (i) Een clopen deelverzameling van een ctgtr. X is de vereniging van eindig veel disjuncte clopen intervallen

(ii) Een ctgtr X is dan en slechts dan niet samenhangend, als in X twee buren voorkomen.

<u>Bewijs:</u>

(i) Zij A een clopen deelverzameling in X. Kies $p \in A$; als p geisoleerd punt is, dan is $\{p\}$ een (ontaard) clopen interval; als p niet geisoleerd is, bestaat er een open interval $I = (r,s)$, zodanig, dat $p \in I \subset A$; zij dan $u = \inf \{x/(x,p) \subset A\}$, $v = \sup \{x/(p,x) \subset A\}$; dan is $u,v \in A$ en $p \in [u,v] \subset A$.
A is compact en wordt dus door eindig vele intervallen $[u,v]$ overdekt; het is duidelijk dat die disjunct zijn, en dat $\bigcup [u,v] = A$.

(ii) <u>1</u>. Als in X twee buren a, b, met $a < b$, voorkomen, zijn $A = \{x/x \leq a\}$ en $B = \{x/x \geq b\}$ twee niet-lege disjuncte verzamelingen in X, terwijl $A \cup B = X$.
X is dus niet-samenhangend.

<u>2</u>. Als X niet samenhangend is, is X de vereniging van

twee niet-lege disjuncte clopen deelverzamelingen A en B; daar zowel A als B de vereniging is van eindig veel clopen intervallen, volgt gemakkelijk de existentie van twee buren.

3.2. Zij X een ctgtr.

Onder een verdeling van X verstaan we een verzameling gesloten intervallen, $\{I_p\}_p$, zodanig, dat

(i) $\bigcup_p I_p = X$

(ii) $|I_p \cap I_q| \leq 1$ voor $p \neq q$.

Onder een ϑ-rij voor X verstaan we een rij ϑ-verdelingen $\{V_\gamma\}_\gamma$ van X, die door transfiniete inductie als volgt is gedefinieerd:

$$V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$$

(i) $V_0 = \{X^{(0)}\}$ $X^{(0)} = X$

(ii) Als V_γ gedefinieerd is voor $\gamma < \delta$, dan zij

V_δ gedefinieerd op de volgende wijze:

a. als $\delta = \varepsilon+1$, en als $|X_p^{(\varepsilon)}| = 1$, dan zij

$X_{p0}^{(\delta)} = X_{p1}^{(\delta)} = X_p^{(\varepsilon)}$ $(p \in Z_\varepsilon)$,

b. als $\delta = \varepsilon+1$, en als in $X_p^{(\varepsilon)}$ twee buren a en b $(a < b)$ voorkomen, dan zij

$X_{p0}^{(\delta)} = \{x/a \leq a\} \cap X_p^{(\varepsilon)}$

$X_{p1}^{(\delta)} = \{x/x \geq b\} \cap X_p^{(\varepsilon)}$,

c. als $\delta = \varepsilon+1$, en als $X_p^{(\varepsilon)}$ samenhangend is, dan zij

$X_{p0}^{(\delta)} = \{x/x \leq a\} \cap X_p^{(\varepsilon)}$

$X_{p1}^{(\delta)} = \{x/x \geq a\} \cap X_p^{(\varepsilon)}$

voor zekere a, die voldoet aan $\inf X_p^{(\varepsilon)} < a < \sup X_p^{(\varepsilon)}$,

d. als δ een limietgetal is, dan zij

$X_p^{(\delta)} = \bigcap_{\gamma<\delta} X_{p/\gamma}^{(\gamma)}$ $(p \in Z_\delta)$.

Het is duidelijk, dat voor elke ϑ-rij geldt:

1. $\forall_\alpha \; \forall p \in Z_\alpha : X_p^{(\alpha)}$ is gesloten interval en $\neq \emptyset$

2. $\forall_\alpha : \quad \bigcup_{p \in Z_\alpha} X_p^{(\alpha)} = X$

3. $\forall_\alpha : \forall x,y,p,q : [(p < q, x \in X_p^{(\alpha)}, y \in X_q^{(\alpha)}) \rightarrow x \leq y]$.

Lemma 3.2.1: Bij elke ϑ-rij voor een ctgtr X bestaat een kleinste ordinaalgetal $\vartheta = \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma)$, waarvoor geldt, dat alle $X_p^{(\vartheta)}$ $(p \in Z_\vartheta)$ uit één punt bestaan; bovendien is dan

$$|\vartheta| \leq |X| \leq 2^{|\vartheta|} .$$

En indien voor alle $x \in X$

$$\mu_x = \mu_x(\{V_\gamma\}_\gamma) = \inf \{\mu \mid \exists\, p \in Z_\mu : X_p^{(\mu)} = \{x\}\} ,$$

dan is

$$\vartheta = \sup_x \mu_x$$

Bewijs: 1. Kies $x \in X$.
Beschouw nu een rij $\{X_p^{(\alpha)}\}_{\alpha<\mu}$ $(p \in Z_\alpha)$ zodanig, dat

$$x \in X_p^{(\alpha)} \subset X_{p/\beta}^{(\beta)} \quad \text{voor } \alpha > \beta ,$$

en neem aan, dat $X_p^{(\alpha)}$ uit meer dan één punt bestaat voor alle $\alpha < \mu$; dan is

$$X_p^{(\alpha+1)} \subsetneq X_{p/\alpha}^{(\alpha)} \quad \text{voor } \alpha+1 \leq \mu .$$

Dan is echter

$$\bigcup_{\alpha<\mu} (X_{p/\alpha}^{(\alpha)} \setminus X_p^{(\alpha+1)})$$

een deelverzameling van X, die de vereniging is van $|\mu|$ disjuncte, niet-lege verzamelingen; dus $|\mu| \leq |X|$.
Aan elke $x \in X$ is dus een μ_x toe te voegen, met $|\mu_x| \leq |X|$, zodanig, dat

$$x \in X_p^{(\mu_x)} \longrightarrow \{x\} = X_p^{(\mu_x)}$$

en

$$|X_{p/\nu}^{(\nu)}| \geqq 2 \quad \text{voor } \nu < \mu_x \text{ ;}$$

het is duidelijk, dat $\vartheta = \sup\limits_x \mu_x$.

Daar echter $|\mu_x| \leqq |X|$ voor alle $x \in X$, volgt ook $|\vartheta| \leqq |X|$;

immers: $|\{\nu | \nu < \mu_x\}| = |\mu_x| \leqq |X|$,

en dus $|\vartheta| = |\bigcup\limits_x \{\nu | \nu < \mu_x\}| \leqq |X| . |X| = |X|$.

2. Zij nu $X_p^{(\vartheta)} = \{x_p^{(\vartheta)}\}$ $(p \in Z_\vartheta)$, dan is $\phi_\vartheta : p \to x_p^{(\vartheta)}$ blijkbaar een afbeelding van Z_ϑ op X;

dus: $|Z_\vartheta| \geqq |X|$, $2^{|\vartheta|} \geqq |X|$.

Gevolg: Als $|X|$ een limietkardinaalgetal is, is $|\sigma| = |X|$.

Definitie: $\Theta(X) = \min \{ \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma) / \{V_\gamma\}_\gamma$ ϑ-rij voor $X\}$;
we noemen $\Theta(X)$ de verdelingsgraad van X.

Het is duidelijk, dat $\Theta(X)$ een ordeningstheoretische invariant is voor $(X,<)$.
We zullen echter aantonen, dat $\Theta(X)$ ook een topologische invariant is; d.w.z. als twee ctgtr.^{n} $(X, \mathcal{T}_{<'})$ en $(Y, \mathcal{T}_{<''})$ homeomorf zijn, dan is $\Theta(X) = \Theta(Y)$; we kunnen dit ook aldus formuleren: als een compacte Hausdorffruimte T op meer dan één manier te ordenen is, is de verdelingsgraad in alle gevallen dezelfde.

3.3. Zij T een willekeurige compacte Hausdorffruimte. Onder een τ-rij voor T verstaan we een rij $\{U_\gamma\}_\gamma$, die door transfiniete inductie als volgt is gedefinieerd:

$$U_\gamma = \{T_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$$

(i) $\quad U_0 = \{T^{(0)}\}, \; T^{(0)} = T$

(ii) Als U_γ gedefinieerd is voor $\gamma < \delta$, dan zij U_δ gedefinieerd op de volgende wijze:

a. als $\delta = \varepsilon+1$ en als $|T_p^{(\varepsilon)}| = 1$, dan zij

$$T_{p0}^{(\delta)} = T_{p1}^{(\delta)} = T_p^{(\varepsilon)} \qquad (p \in Z_\varepsilon)$$

b. als $\delta = \varepsilon+1$ en $T_p^{(\varepsilon)}$ is niet-samenhangend, laat dan $T_{p0}^{(\delta)}$ en $T_{p1}^{(\delta)}$ twee disjuncte, niet-lege deelverzamelingen van $T_p^{(\varepsilon)}$ zijn, die clopen zijn in $T_p^{(\varepsilon)}$, en waarvan de vereniging $T_p^{(\varepsilon)}$ is.

c. als $\delta = \varepsilon+1$ en $T_p^{(\varepsilon)}$ is samenhangend, laat dan $T_{p0}^{(\delta)}$ en $T_{p1}^{(\delta)}$ twee niet-lege echte deelverzamelingen van $T_p^{(\varepsilon)}$ zijn, die gesloten zijn in $T_p^{(\varepsilon)}$, en die voorts zodanig zijn, dat $T_{p0}^{(\delta)} \cup T_{p1}^{(\delta)} = T_p^{(\varepsilon)}$ en dat $|T_{p0}^{(\delta)} \cap T_{p1}^{(\delta)}|$ minimaal is.

d. als δ een limietgetal is, dan zij

$$T_p^{(\delta)} = \bigcap_{\gamma<\delta} T_{p/\gamma}^{(\gamma)} \qquad (p \in Z_\delta)$$

Het is duidelijk, dat voor elke τ-rij geldt:

1. $\forall_\alpha \quad p \in Z_\alpha \; : \; T_p^{(\alpha)}$ is gesloten en $\neq \emptyset$

2. $\forall_\alpha \; : \quad \bigcup_{p \in Z_\alpha} T_p^{(\alpha)} = T$

Lemma 3.3.1: Bij elke τ-rij voor een compacte Hausdorff-ruimte T bestaat een kleinste ordinaalgetal $\tau = \tau\,(\{U_\gamma\}_\gamma)$, waarvoor geldt, dat alle $T_p^{(\tau)}$ $(p \in Z_\tau)$ uit één punt bestaan; bovendien is dan

$$|\tau| \leq X \leq 2^{|\tau|}$$

En indien voor alle $t \in T$:

$$\mu_t = \mu_t\,(\{U_\gamma\}_\gamma) = \inf\,\{\mu \;/\; \exists\, p \in Z_\mu \; : \; T_p^{(\mu)} = \{x\}\} \;,$$

dan is

$$\tau = \sup_t \; \mu_t \,.$$

Bewijs: als van lemma I.3.2.1.

Definitie: $\tau(T) = \min\;\{\tau(\{U_\gamma\}_\gamma)/\;\; \{U_\gamma\}_\gamma \;\; \tau\text{-rij voor } T\}$.

Het is duidelijk, dat $\tau(T)$ een topologische invariant is.

3.4. <u>Hulpstelling</u>: Zij X een ctgtr.

Zij $\{U_\gamma\}_\gamma$ - $U_\gamma = \{T_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$ - een τ-rij voor X, met $\tau(\{U_\gamma\}_\gamma) = \tau$.

Zij $\tau \geq \omega$ en $\tau = \mu_0 + \nu_0$, waarin μ_0 een limietgetal en ν_0 een geheel getal ≥ 0 is.

Dan is er een $\mathcal{V}$-rij $\{V_\gamma\}_\gamma$ - $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$ — voor X, met de eigenschap, dat bij elk limietgetal $\mu \leq \mu_0$ en elke $p \in Z_\mu$ een $q = q(p) \in Z_\mu$ bestaat, zodanig dat

(i) $q(p/\nu) = q(p)/\nu$, als ν een limietgetal $<\mu$ is

(ii) $X_p^{(\mu)} \subset T_{q(p)}^{(\mu)}$

<u>Bewijs</u>: 1. Zij $\mu=\omega$

<u>a</u>. Als X samenhangend is, dan is

$$T_{i_0}^{(1)} = \{x/x \leq a\} \quad \text{en} \quad T_{i_1}^{(1)} = \{x/x \geq a\}$$

— waarbij $(i_0, i_1) = \text{perm}\,(0,1)$ — voor zekere $a \in X$.

Stel dan: $X_0^{(1)} = T_{i_0}^{(1)}$, $X_1^{(1)} = T_{i_1}^{(1)}$

<u>b</u>. Als X niet samenhangend is, dan is zowel $T_0^{(1)}$ als $T_1^{(1)}$ de vereniging van eindig veel disjuncte clopen intervallen:

$$T_0^{(1)} = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$$

$$T_1^{(1)} = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_l \;;$$

z.b.d.a zij

$$I_1 < J_1 < I_2 < J_2 < \ldots$$

(d.w.z. alle elementen van I_1 gaan vooraf aan die van J_1, etc.)

Definieer nu

$$X_0^{(1)} = I_1,\; X_1^{(1)} = J_1 \cup I_2 \cup J_2 \cup \ldots$$

$$\begin{cases} X_{00}^{(2)},\, X_{01}^{(2)} \text{ zij een } \mathcal{V}\text{-splitsing van } X_0^{(1)} \\ X_{10}^{(2)} = J_1,\; X_{11}^{(2)} = I_2 \cup J_2 \cup \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X^{(3)}_{000}, X^{(3)}_{001}), (X^{(3)}_{010}, X^{(3)}_{011}), (X^{(3)}_{100}, X^{(3)}_{101}) \text{ zij een} \\ \vartheta\text{-splitsing van resp. } X^{(2)}_{00}, X^{(2)}_{01}, X^{(2)}_{10} \\ X^{(3)}_{110} = I_2, X^{(3)}_{111} = J_2 \cup I_3 \cup \ldots \end{cases}$$

enzovoorts.

c. Men vindt in beide gevallen a en b een geheel getal $\gamma_1 \geqq 1$ (nl. $\gamma_1 = 1$ in het eerste geval en $\gamma_1 = k+l-1$ in het tweede geval), zodanig, dat V_γ gedefinieerd is voor $\gamma \leqq \gamma_1 < \omega$, terwijl

$$\forall p \in Z_{\gamma_1} : \{X_p^{(\gamma_1)} \subset T_0^{(1)} \text{ of } X_p^{(\gamma_1)} \subset T_1^{(1)}$$

d. Laat nu V_γ gedefinieerd zijn voor $\gamma \leqq \gamma_n < \omega$, $\gamma_n \geqq n$, terwijl

$$\forall p \in Z_{\gamma_n} : \exists q = q(p) \in Z_n : \; X_p^{(\gamma_n)} \subset T^{(n)}_{q(p)}.$$

Beschouw nu

$$Y_0^{(1)}(p) = X_p^{(\gamma_n)} \cap T^{(n+1)}_{q0} \text{ en } Y_1^{(1)}(p) = X_p^{(\gamma_n)} \cap T^{(n+1)}_{q1}$$

(i) Als $X_p^{(\gamma_n)} = Y_i^{(1)}(p)$ voor i=1 of 2, stel dan $\delta'(p) = 0$

(ii) Als $Y_i^{(1)} \subsetneqq X_p^{(\gamma_n)}$ voor i=1 en 2, dan bestaat, op grond van c, een geheel getal $\delta'(p) \geqq 1$, zodanig dat voor $X_p^{(\gamma_n)}$ een ϑ-rij $\{V'_\varepsilon(p)\}_{\varepsilon \leqq \delta'(p)}$ — $V'_\varepsilon = \{(X_p^{(\gamma_n)})_u^{(\varepsilon)}\}_{u \in Z_\varepsilon}$ — is te construeren met de eigenschap dat

$$\forall t \in Z_{\delta'} : \left\{ (X_p^{(\gamma_n)})_t^{(\delta')} \subset Y_0^{(1)} \subset T^{(n+1)}_{qo} \text{ of } (X_p^{(\gamma_n)})_t^{(\delta')} \subset Y_1^{(1)} \subset T^{(n+1)}_{q1} \right\};$$

dit betekent, indien $\gamma'_{n+1}(p) = \gamma_n + \delta'(p)$, dat

$$\forall r \in Z_{\gamma'_{n+1}} : \left[r/\gamma_n = p \Rightarrow \exists s \in Z_{n+1} : \{s/n = q \text{ en } X_r^{(\gamma'_{n+1})} \subset T_s^{(n+1)}\} \right]$$

(iii) Stel: $\delta = \max\limits_{p \in Z_{\gamma_n}} (1, \delta'(p))$, $\gamma_{n+1} = \max\limits_{p \in Z_{\gamma_n}} (n+1, \gamma'_{n+1}(p))$;

dan is ook

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \delta$$

(iv) Gedefinieerd zijn reeds de verzamelingen

$$X_{pt}^{(\gamma'_{n+1})} \quad (p \in Z_{\gamma_n}\ ,\ t \in Z_{\delta'}\ ,\ pt \in Z_{\gamma'_{n+1}}).$$

Als nu voor zekere p: $\delta'(p) = \delta - 1$, definieer dan

$$X_{pt0}^{(\gamma_{n+1})} \text{ en } X_{pt1}^{(\gamma_{n+1})}$$

door een willekeurige ϑ-splitsing van $X_{pt}^{(\gamma'_{n+1})}$;

indien voor zekere p: $\delta'(p) = \delta - 2$, definieer dan

$$X_{pt00}^{(\gamma_{n+1})},\ X_{pt01}^{(\gamma_{n+1})},\ X_{pt10}^{(\gamma_{n+1})},\ X_{pt11}^{(\gamma_{n+1})}$$

door 2 willekeurige ϑ-splitsingen van $X_{pt}^{(\gamma'_{n+1})}$;

Enzovoort.

Dan volgt: V_γ is gedefinieerd voor $\gamma \leqq \gamma_{n+1} < \omega$,
$\gamma_{n+1} \geqq n+1$, terwijl
$\forall r \in Z_{\gamma_{n+1}} : \exists\, s = s(r) \in Z_{n+1} : X_r^{(\gamma_{n+1})} \subset T_{s(r)}^{(n+1)}$

en bovendien

$$X_{r/\gamma_n}^{(\gamma_n)} \subset T_{s/n}^{(n)}$$

(v) We kunnen het voorgaande aldus samenvatten:
Er is een (begin van) een ϑ-rij $\{V_\gamma\}_\gamma$ voor X
— $V_\gamma = \{X_r^{(\gamma)}\}_{r \in Z_\gamma}$ —en er is een niet-dalende rij $\{\gamma_n\}_{n<\omega}$
— met $\gamma_n \geqq n$ voor alle $n < \omega$ —met de eigenschap dat voor alle $n < \omega$ en voor alle $r \in Z_{\gamma_n}$ een $s = s(r) \in Z_n$ bestaat zodanig dat

$$s(r/\gamma_m) = s(r)/m\ ,\ \text{als } m < n$$

en

$$X_r^{(\gamma_n)} \subset T_{s(r)}^{(n)}$$

e. Kies nu $p \in Z_\omega$ en definieer $q = q(p) \in Z_\omega$ door

$$q/n = s(p/\gamma_n), \text{ voor } n<\omega ;$$

dan volgt

$$X_p^{(\omega)} = \bigcap_{n<\omega} X_{p/\gamma_n}^{(\gamma_n)} \subset \bigcap_{n<\omega} T_{q/n}^{(n)} = T_q^{(\omega)}$$

2. Zij μ een limietgetal, en zij V_γ gedefinieerd voor alle γ met de eigenschap dat er nog een limietgetal $\nu<\mu$ bestaat, zodanig, dat $\gamma \leqq \nu < \mu$; en laat voor alle limietgetallen $\nu<\mu$ voldaan zijn aan

$$\forall p \in Z_\nu : \exists q = q(p) \in Z_\nu : \quad X_p^{(\nu)} \subset T_{q(p)}^{(\nu)}$$

en

$$q(p/\lambda) = q(p)/\lambda \text{ , als } \lambda \text{ een limietgetal } <\nu \text{ is.}$$

a. Zij $\mu = \nu + \omega$

Kies $p' \in Z_\nu$.

Op grond van 1. bestaat er een ϑ-rij $\{V_\gamma(p')\}_{\gamma \leq \omega}$ voor $X_{p'}^{(\nu)}$ — $V_\gamma(p') = \{(X_{p'}^{(\nu)})_n^{(\gamma)}\}_{n \in Z_\gamma}$ ——

zodanig dat

$$\forall r \in Z_\omega : \exists s = s(r) \in Z_\omega : (X_{p'}^{(\nu)})_r^{(\omega)} \subset (T_{q(p')}^{(\nu)})_s^{(\omega)}$$

en dus (als $p'r = p$, $q(p')s = q(p)$)

$$\forall p \in Z_\mu : \left[p/\nu = p' \Rightarrow \exists q(p) \in Z_\mu : \{q(p)/\nu = q(p') \text{ en } X_p^{(\mu)} \subset T_{q(p)}^{(\mu)}\}\right] ;$$

dit geldt voor alle $p' \in Z_\nu$; dus volgt: V_γ is gedefinieerd voor alle $\gamma \leq \mu$ en

$$\forall p \in Z_\mu : \exists q(p) \in Z_\mu : X_p^{(\mu)} \subset T_{q(p)}^{(\mu)} ;$$

bovendien volgt uit de constructie

$$q(p/\mu) = q(p)/\nu$$

en dus ook

$$q(p/\lambda) = q(p)/\lambda \quad , \text{ als } \lambda \text{ een limietgetal} < \mu \text{ is.}$$

b. Als μ niet van de vorm $\nu+\omega$ is, dan is μ de limiet van de transfiniete rij limietgetallen $(\nu+\omega)_{\nu<\mu}$.

V_γ is dan gedefinieerd voor alle $\gamma<\mu$.

Kies $p \in Z_\mu$ en definieer $q = q(p) \in Z_\mu$ door

$$q/(\nu+\omega) = q(p/(\nu+\omega)), \text{ voor } \nu<\mu ;$$

dan volgt, dat V_μ te definiëren is door

$$X_p^{(\mu)} = \bigcap_{\nu<\mu} X_{p/(\nu+\omega)}^{(\nu+\omega)} \subset \bigcap_{\nu<\mu} T_{q/(\nu+\omega)}^{(\nu+\omega)} = T_q^{(\mu)} .$$

En het is duidelijk, dat

$$q(p/\lambda) = q(p)/\lambda \quad \text{voor elk limietgetal } \lambda<\mu \text{ .}$$

3. Hiermee is de hulpstelling (via transfiniete inductie naar μ) bewezen.

Stelling 3.4.1: Als X een ctgtr is, is $\theta(X) = \tau(X)$

Bewijs:

(i) Daar elke ϑ-rij ook een τ-rij is, volgt $\Theta(X) \leq \tau(X)$

(ii) Zij $\{U_\gamma\}_\gamma$ — $U_\gamma = \{T_q^{(\gamma)}\}_{q\in Z_\gamma}$ — een τ-rij waarvoor $\tau(\{U_\gamma\}_\gamma) = \tau(X)$.

Zij $\tau = \mu_0 + \nu_0$, waarin μ_0 een limietgetal, en ν_0 een geheel getal ≥ 0 is.

Er bestaat dan een ϑ-rij $\{V_\gamma\}_\gamma$ — $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$ — zodanig, dat

$$\forall p \in Z_{\mu_0} : \exists q \in Z_{\mu_0} : X_p^{(\mu_0)} \subset T_q^{(\mu_0)}.$$

Voor alle $q \in Z_{\mu_0}$ geldt echter dat ten hoogste $|\nu_0|$ τ-splitsingen nodig zijn om $T_q^{(\mu_0)}$ in punten te verdelen; dit betekent, dat $|T_q^{(\mu_0)}| \leq 2^{|\nu_0|}$, en dus ook (voor alle $p \in Z_{\mu_0}$) $|X_p^{(\mu_0)}| \leq 2^{|\nu_0|}$; derhalve zijn ook ten hoogste $|\nu_0|$ ϑ-splitsingen nodig om alle $X_p^{(\mu_0)}$ in punten te verdelen.

Hieruit volgt: $\vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma) \leq \mu_0 + \nu_0 = \tau_0$;

en dus $\Theta(X) \leq \tau(X)$.

(iii) $\Theta(X) = \tau(X)$.

Gevolg: $\Theta(X)$ is een topologische invariant.

Lemma 3.4.1: Als X en Y ctgtr^n zijn en $X \subset Y$, dan geldt:

$$\vartheta(X) \leq \vartheta(Y)$$

als Y nuldimensionaal is of als X samenhangend is

Bewijs: duidelijk

Opmerking: Indien X en Y ctgtr^n zijn, zodanig dat $X \subset Y$, dan kan het voorkomen, dat

$$\vartheta(X) > \vartheta(Y);$$

voorbeeld: Zij $Y = [0,2]$

Zij $X = \bigcup_{n=2}^{\infty} \{1 - \frac{1}{n}\} \cup [1,2]$;

dan is

$$\vartheta(X) = \omega + \omega > \omega = \vartheta(Y).$$

3.5. Voor Z_α definieren we op de volgende wijze de "reguliere ϑ-rij":

$$\{W_\gamma\}_\gamma \;,\; W_\gamma = \{Z_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$$

(i) $W_0 = \{Z_\alpha\}$

(ii) Als $p \in Z_\gamma$, dan is

$$Z_p^{(\gamma)} = \{x/\overbrace{p_0p_1p_2\ldots}^{p}\ \overrightarrow{0\,0\,0\,0\ldots} \leqq x \leqq \overbrace{p_0p_1p_2\ldots}^{p}\ \overrightarrow{1111\ldots}\}$$

Het is duidelijk, dat $\{W_\gamma\}_\gamma$ inderdaad een ϑ-rij is. Indien voorts, voor $\gamma<\alpha$, ξ zo bepaald wordt, dat $\gamma+\xi = \alpha$, dan is $Z_p^{(\gamma)}$, voor alle $p \in Z_\gamma$, gelijkgeordend met Z_ξ. Dit betekent o.a., dat voor $\gamma<\alpha$ alle $Z_p^{(\gamma)}$ $(p \in Z_\gamma)$ uit meer dan één punt bestaan, terwijl voor $\gamma=\alpha$ alle $Z_p^{(\gamma)}$ $(p\in Z_\gamma)$ uit juist één punt bestaan.

Voor Z_α^* definiëren we ook de "reguliere ϑ-rij":

$$\{W_\gamma^*\}_\gamma \quad , \quad W_\gamma^* = \{Z_p^{*(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$$

(i) $W_0^* = \{Z_\alpha^*\}$

(ii) Als $p \in Z_\gamma$, dan is

$$Z_p^{*(\gamma)} = \{x/\overbrace{p_0p_1p_2\ldots}^{p}\ \overrightarrow{000.\,-} \leqq x \leqq \overbrace{p_0p_1p_2\ldots}^{p}\ \overrightarrow{1111\ \ldots}\}$$

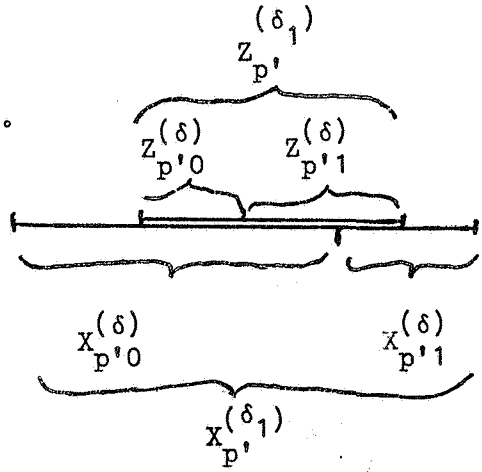
Het is duidelijk, dat $\{W_\gamma^*\}_\gamma$ inderdaad een ϑ-rij is.
Indien voorts, voor $\gamma<\alpha$, ξ zo wordt bepaald, dat $\gamma+\xi=\alpha$, dan is $Z_p^{*(\gamma)}$, voor alle $p\in Z_\gamma$, gelijkgeordend met Z_ξ^*. Dit betekent o.a., — als $\alpha=\nu+n$, waarin een limietgetal (of 0) en n een geheelgetal ≥ 0 is — dat voor $\gamma<\nu$ alle $Z_p^{*(\gamma)}$ $(p\in Z_\gamma)$ uit meer dan één punt bestaan, terwijl voor $\gamma\geqq\nu$ alle $Z_p^{*(\gamma)}$ $(p\in Z_\gamma)$ uit juist één punt bestaan.

<u>Hulpstelling</u>: <u>1</u>. Indien $\{W_\gamma\}_\gamma$ — $W_\gamma = \{Z_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$ — de reguliere ϑ-rij voor Z_α is, en $\{V_\gamma\}_\gamma$ — $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$ is een willekeurige ϑ-rij voor Z_α, dan

$$\forall\gamma\leqq\alpha \quad \exists p\in Z_\gamma : Z_p^{(\gamma)} \subset X_p^{(\gamma)}$$

2. Indien $\{W^*_\gamma\}_\gamma$ — $W^*_\gamma = \{Z^{*(\gamma)}_p\}_{p\in Z_\gamma}$ — de reguliere ϑ-rij voor Z^*_α is, en $\{V_\gamma\}_\gamma$ — $V_\gamma = \{X^{(\gamma)}_p\}_{p\in Z_\gamma}$ — is een willekeurige ϑ-rij voor Z^*_α, dan

$$\forall \gamma \leqq \alpha \quad \exists p \in Z_\gamma \; : \quad Z^{*(\gamma)}_p \subset X^{(\gamma)}_p .$$



Bewijs:

1. Voor $\gamma=0$ is de bewering kennelijk juist.

Zij de bewering juist voor $\gamma<\delta$ $(\delta \leqq \alpha)$

(i) Als $\delta = \delta_1+1$, bestaat een $p' \in Z_{\delta_1}$, zodanig, dat

$$Z^{(\delta_1)}_{p'} \subset X^{(\delta_1)}_{p'} \; ;$$

$Z^{(\delta)}_{p'0}$ en $Z^{(\delta)}_{p'1}$ ontstaan uit $Z^{(\delta_1)}_{p'}$ door verdeling van dit interval in een linkerinterval en een rechterinterval; zo ontstaan ook $X^{(\delta)}_{p'0}$ en $X^{(\delta)}_{p'1}$ uit $X^{(\delta_1)}_{p'}$.

Dan is

$$Z^{(\delta)}_{p'i} \subset X^{(\delta)}_{p'i}$$

voor ten minste één der twee mogelijkheden i=1,2; bijv. voor $i=\bar{i}$; stel dan $p=p'\bar{i}$:

$$Z^{(\delta)}_p \subset X^{(\delta)}_p \qquad (p \in Z_\delta)$$

(ii) Als δ een limietgetal is, bestaat voor elke $\varepsilon<\delta$ een $p(\varepsilon) \in Z_\varepsilon$, zodanig dat

$$Z^{(\varepsilon)}_{p(\varepsilon)} \subset X^{(\varepsilon)}_{p(\varepsilon)} \; ;$$

definieer dan $p \in Z_\delta$ zodanig dat

$$p/\varepsilon = p(\varepsilon) \quad \text{voor alle} \quad \varepsilon < \delta \; ;$$

dan volgt

$$Z^{(\delta)}_p = \bigcap_{\varepsilon<\delta} Z^{(\varepsilon)}_{p/\varepsilon} \subset \bigcap_{\varepsilon<\delta} X^{(\varepsilon)}_{p/\delta} = X^{(\delta)}_p .$$

Gevolg: $\vartheta(\{W_\gamma\}_\gamma) \leqq \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma)$

2. Dit bewijst men volkomen analoog aan punt 1.

Gevolg: $\vartheta(\{W^*_\gamma\}_\gamma) \leqq \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma)$

Stelling 3.5.1: 1. $\Theta(Z_\alpha) = \alpha$

Bewijs: 2. $\Theta(Z^*_\alpha) = \nu$, als $\alpha=\nu+n$, waarin ν een limietgetal (of 0) en n een geheel geldt $\geqq 0$ is.

1. (i) de reguliere ϑ-rij is een ϑ-rij, waarvoor

$$\vartheta(\{W_\gamma\}_\gamma) = \alpha;$$

dus $\Theta(Z_\alpha) \leqq \alpha$

(ii) indien $\{V_\gamma\}_\gamma$ een willekeurige ϑ-rij voor Z_α is, is, op grond van de hulpstelling,

$$\alpha = \vartheta(\{W_\gamma\}_\gamma) \leqq \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma),$$

dus $\alpha \leqq \Theta(X)$

(iii) Derhalve: $\Theta(X) = \alpha$.

2. Dit bewijst men volkomen analoog aan punt 1.

Opmerking: Het is in het algemeen niet juist, dat uit $\Theta(X) = \alpha$ — met $\alpha = \nu + n$, waarin ν een limietgetal en n een geheel getal $\geqq 0$ is — zou volgen $\Theta(X^*) = \nu$.

Voorbeeld: $X = \widehat{W}(\Omega) \Longrightarrow \Theta(X) = \Omega$

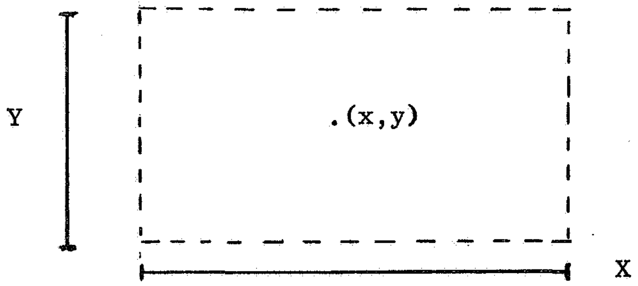
$$\Theta(X^*) = 0 .$$

Stelling: 3.5.2: 1. Indien $\alpha \neq \beta$, dan zijn Z_α en Z_β verschillende topologische ruimten.

2. Indien $\alpha=\nu + n$, $\beta=\mu + m$, waarin ν en μ limietgetallen (of 0) en n en m gehele getallen $\geqq 0$ zijn, en indien $\nu \neq \mu$, dan zijn Z^*_α en Z^*_β verschillende topologische ruimten.

§4. Enkele eigenschappen van $\mathrm{ctgtr}^n_{\leq}$ (vervolg).

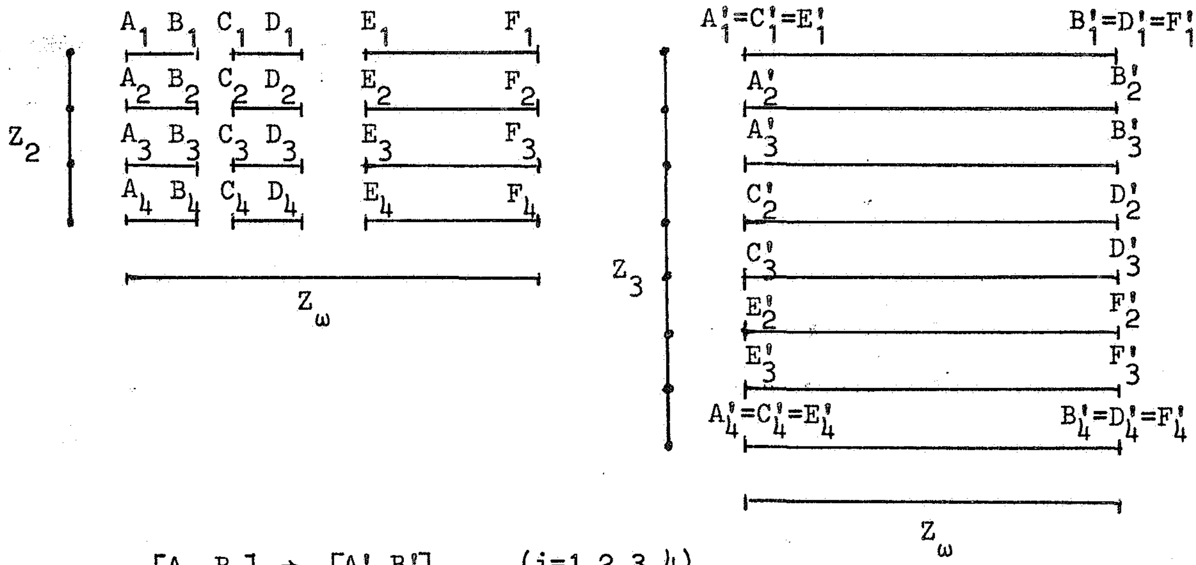
4.1. Het lexicografisch geordende product X.Y wordt in het vervolg dikwijls aangeduid met een tekening:



waarbij de puntenparen (x,y) geordend gedacht worden volgens het in §1 gegeven voorschrift.

4.2. Als X en Y ctgtr^n zijn, en Y is continu beeld van X, dan kan het voorkomen, dat $\Theta(X) < \Theta(Y)$.

Voorbeeld:



$[A_i, B_i] \to [A_i', B_i']$ $\quad (i=1,2,3,4)$

$[C_i, D_i] \to [C_i', D_i']$ $\quad (i=1,2,3,4)$

$[E_i, F_i] \to [E_i', F_i']$ $\quad (i=1,2,3,4)$

is blijkbaar een continue afbeelding van $Z_{\omega+2}$ op $Z_{\omega+3}$; maar $\Theta(Z_{\omega+2}) = \omega+2 < \omega+3 = \Theta(Z_{\omega+3})$.

Lemma 4.2.1: a. Als f een monotoon niet-dalende (of monotoon niet-stijgende) afbeelding is van de ctgtr X op de ctgtr Y, dan is f continu, en bovendien is $\Theta(Y) \leqq \Theta(X)$

b. Als X een samenhangende ctgtr is, en de ctgtr Y is continu beeld onder f van X, dan is f monotoon niet-stijgend (of monotoon niet-dalend) (en dus is $\Theta(Y) \leqq \Theta(X)$).

Bewijs:

a. duidelijk

b. zie S. Eilenberg, Amer.J. Math. 63, 39-45 (1941).

Stelling 4.2.1: a. Indien $\alpha \leqq \beta$, dan is Z_α continu beeld van Z_β; en wel bestaat er een monotoon niet-dalende continue afbeelding van Z_β op Z_α.

b. Indien X een ctgtr is, bestaat er een kleinste α, zeg $\alpha_0 = \alpha_0(X)$, zodanig dat X continu beeld is van Z_α (en dus ook van elke Z_β met $\beta \geqq \alpha_0$); bovendien is $\alpha_0 \leqq \Theta(X)$.

En er is ook een kleinste α, zeg $\alpha_1 = \alpha_1(X)$, zodanig, dat een continue monotoon niet-dalende afbeelding van Z_α op X bestaat; en $\alpha_1 = \Theta(X)$.

Bewijs:

a. De afbeelding ϕ: $p(\in Z_\beta) \to p/\alpha \ (\in Z_\alpha)$ is blijkbaar een continue, monotoon niet-dalende, afbeelding van Z_β op Z_α

b. De in lemma I,3,2,1 - bewijs punt 2. genoemde afbeelding ϕ_ϑ: $p \to x_p^{(\vartheta)}$ is blijkbaar een continue, monotoon niet-dalende afbeelding van Z_σ op X; en ϕ_ϑ bestaat voor alle $\vartheta \geqq \Theta(X)$.

(i) er is dus ook een kleinste ϑ, zeg α_0, zodanig dat X continu beeld is van Z_ϑ; dan is $\alpha_0 \leqq \Theta(X)$.

(ii) er is dus ook een kleinste ϑ, zeg α_1, zodanig dat X continu beeld is van Z_ϑ onder een monotoon niet-dalende functie; en $\alpha_1 \leqq \Theta(X)$;

omdat X het beeld is van Z_{α_1} onder een monotoon niet-dalende functie, volgt uit lemma I,4,2,1 a dat $\Theta(X) \leqq \Theta(Z_{\alpha_1}) = \alpha_1$; dus $\Theta(X) = \alpha_1$.

Opmerking: Het kan voorkomen, dat $\alpha_0(X) < \Theta(X)$;
voorbeeld: $\alpha_0(Z_{\omega+3}) \leqq \omega+2 < \omega+3 = \Theta(Z_{\omega+3})$.

4.3. Zij X een ctgtr.
Zij $\{V_\gamma\}_\gamma$ een ϑ-rij voor X; $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$.
Zij voorts

$$l(X_p^{(\gamma)}) = \inf X_p^{(\gamma)}, \; r(X_p^{(\gamma)}) = \sup X_p^{(\gamma)}.$$

Zij tenslotte

$$D_\lambda = D_\lambda(\{V_\gamma\}_\gamma) = \{l(X_p^{(\lambda)}), \; r(X_p^{(\lambda)}) \mid p \in Z_\lambda\}$$

Het is duidelijk, dat

(i) $p \in Z_\mu$, $\sigma<\mu \Rightarrow l(X_{p/\sigma}^{(\sigma)}) \leqq l(X_p^{(\mu)}) \leqq r(X_p^{(\mu)}) \leqq r(X_{p/\sigma}^{(\sigma)})$
(ii) $\tau>\nu \Rightarrow D_\tau \supset D_\nu$
(iii) $\tau \geqq \nu \Rightarrow D_\nu \cap (l(X_p^{(\tau)}), \; r(X_p^{(\tau)})) = \emptyset$
(iv) $|D_\tau| \leqq 2^{|\tau|}$
(immers: $|D_\tau| \leqq 2\,|Z_\tau| = 2^{|\tau|}$).

Lemma 4.3.1: a. $\overline{D}_\tau = D_\tau$
b. τ limietgetal $\Rightarrow D_\tau = \overline{\bigcup_{\nu<\tau} D_\nu}$.

Bewijs:
a. De bewering is triviaal als $D_\tau = X$; zij dus $D_\tau \subsetneq X$.
Als $y \in X \setminus D_\tau$, bestaat er een $p \in Z_\tau$, zodanig dat $y \in X_p^{(\tau)}$;
daar $y \neq l(X_p^{(\tau)}), \; r(X_p^{(\tau)})$ volgt

$$y \in (l(X_p^{(\tau)}), \; r(X_p^{(\tau)})) \subset X \setminus D_\tau.$$

Derhalve is $X \setminus D_\tau$ open, D_τ gesloten.

b. In ieder geval is $\overline{\bigcup_{\nu<\tau} D_\nu} \subset \overline{D}_\nu = D_\nu$;
kies nu, indien mogelijk,

$$x \in D_\tau \setminus \bigcup_{\nu<\tau} D_\nu;$$

dan is voor zekere $p \in Z_\tau$

$$x = l(X_p^{(\tau)}) \text{ of } x = r(X_p^{(\tau)});$$

uit

$$X_p^{(\tau)} = [l(X_p^{(\tau)}),\ r(X_p^{(\tau)})] = \bigcap_{\nu<\tau} X_{p/\nu}^{(\nu)}$$

volgt dan

$$l(X_p^{(\tau)}) = \sup_{\nu<\tau} l(X_{p/\nu}^{(\nu)}),\ r(X_p^{(\tau)}) = \inf_{\nu<\tau} r(X_{p/\nu}^{(\nu)});$$

derhalve

$$x \in \overline{\bigcup_{\nu\in\tau} D_\nu}\ .$$

Reeds eerder werd gedefinieerd:

$$\mu_x = \mu_x(\{V_\gamma\}_\gamma) = \inf\ \{\mu / \exists p \in Z_\mu :\ X_p^{(\mu)} = \{x\}\}$$

<u>Opm.</u>: <u>1.</u> Als $\vartheta(\ \{V_\gamma\}_\gamma\ ) = \vartheta$ een limietgetal is, is er niet noodzakelijk een $x \in X$, waarvoor geldt $\mu_x = \vartheta$; zelfs niet als $\vartheta = \ \Theta(X)$ en ϑ is een regulier begingetal:

<u>Voorbeeld:</u> Zij f een 1-1-duidige afbeelding van Z_ω op

$$W(\Omega) = \{\mu/\mu < \Omega\}\ .$$

Zij H de verzameling van alle paren

$$(a,x_a) \qquad (a \in Z_\omega,\ \ x_a \in Z_{f(a)})$$

met lexicographische ordening:

$$\begin{cases} (a,x_a) < (b,x_b) \text{ als } a < b \\ (a,x'_a) < (a,x''_a) \text{ als } x'_a < x''_a. \end{cases}$$

(i) $\Theta(H) \geq \Theta(Z_\mu) = \mu$ voor alle $y \in W(\Omega)$ (immers $Z_\mu \subset H$ voor alle $\mu \in W(\Omega)$).
En dus is $\Theta(H) \geq \Omega$.

(ii) Er is een ϑ-rij $\{V_\gamma\}_\gamma$ voor H, waarvoor geldt
$\vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma) = \Omega$
(nl. "de reguliere ϑ-rij voor Z_ω, voor elke $a \in Z_\omega$ voortgezet met de reguliere ϑ-rij voor $Z_{f(a)}$")

(iii) Dus: $\Theta(H) = \Omega$.

(iv) Er bestaat geen $x \in H$ waarvoor $\mu_x = \mu_x(\{V_\gamma\}_\gamma) = \Omega$

(v) X voldoet aan het 1^e aftelbaarheidsaxioma.

2. Als $\vartheta = \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma)$ een niet-limietgetal is, is er wel altijd een $x \in X$, waarvoor $\mu_x = \vartheta$.

Lemma 4.3.2: Zij $\{V_\gamma\}_\gamma$ een ϑ-rij voor X; $\mu_x = \mu_x(\{V_\gamma\}_\gamma)$; $\vartheta = \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma)$.

a. Indien voor zekere $x \in X$ $\mu_x = \omega_{\aleph}$, dan is x de limiet van een stijgende rij van het type $\omega_{\aleph}$, en/of x is de limiet van een dalende rij van het type $\omega_{\aleph}$.

b. Indien $\vartheta > \omega_{\aleph}$ is er een punt $x \in X$ dat de limiet is van een stijgende rij van het type $\omega_{\aleph}$, en/of de limiet van een dalende rij van het type $\omega_{\aleph}$.

Bewijs:

In beide gevallen a en b is er een $p \in Z_\omega$, zodanig dat

$$X_p^{(\omega_{\aleph})} = \bigcap_{\nu < \omega_{\aleph}} X_{p/\nu}^{(\nu)} \qquad (1)$$

$$X_{p/\nu}^{(\nu)} \subset X_{p/\tau}^{(\tau)} \qquad \text{als } \tau < \nu < \omega \qquad (2)$$

(in geval a. is $X_p^{(\omega_{\aleph})} = \{x\}$).

Stelt men

$$a^{(\tau)} = l(X_{p/\tau}^{(\tau)}),\ b^{(\tau)} = r(X_{p/\tau}^{(\tau)}) \qquad (\tau < \omega_{\aleph})$$

$$a^{(\circ)} = l(X_p^{(\omega_{\aleph})}),\ b^{(\circ)} = r(X_p^{(\omega_{\aleph})}),$$

dan volgt uit (2), dat de rij

$$\overline{(a^{(\tau)}, b^{(\tau)})}_{\tau < \omega_{\aleph}}$$

uit allemaal verschillende elementen $\overline{a^{(\tau)}, b^{(\tau)}}$ bestaat; dus

$$\left|\{\overline{a^{(\tau)}, b^{(\tau)}}\}_{\tau < \omega_{\aleph}}\right| = \aleph$$

De rij $(a^{(\tau)})_\tau$ is bovendien niet-dalend en de rij $(b^{(\tau)})_\tau$ is niet-stijgend; en $\lim_\tau a^{(\tau)} = a^{(\circ)}$, $\lim b^{(\tau)} = b^{(\circ)}$.

Definieer de rij $(a^{(\tau_\mu)})_\mu$ door transfiniete inductie aldus

$a^{(\tau_0)} = a^{(0)}$,

als $a^{(\tau_\nu)}$ gedefinieerd is voor $\nu<\mu$ en als λ de eerste index is, waarvoor $a^{(\lambda)} \neq$ alle $a^{(\tau_\nu)}$ $(\nu<\mu)$, dan zij $a^{(\tau_\mu)} = a^{(\lambda)}$;

definieer op analoge wijze de rij $(b^{(\tau_\nu)})_\nu$.

De rij $(a^{(\tau_\mu)})_\mu$ is dan stijgend en de rij $(b^{(\tau_\nu)})_\nu$ is dalend.

Als nu zowel het type van $(a^{(\tau_\mu)})_\mu$ als dat van $(b^{(\tau_\nu)})_\nu$ kleiner is dan $\omega_{\aleph}$, dan volgt:

$$\left|\{a^{(\tau_\mu)}\}_\mu\right| = \aleph_1 < \aleph, \quad \left|\{b^{(\tau_\nu)}\}_\nu\right| = \aleph_2 < \aleph,$$

dus

$$\left|\{a^{(\mu)}\}_{\mu<\omega_{\aleph}}\right| = \aleph_1, \quad \left|\{b^{(\nu)}\}_{\nu<\omega_{\aleph}}\right| = \aleph_2,$$

ergo

$$\left|\overline{\{a^{(\mu)}, b^{(\nu)}\}}_{\mu<\omega_{\aleph}, \nu<\omega_{\aleph}}\right| = \aleph_1 \cdot \aleph_2 < \aleph,$$

en dus zeker

$$\left|\overline{\{a^{(\tau)}, b^{(\tau)}\}}_{\tau<\omega_{\aleph}}\right| < \aleph \quad ;$$

contradictie.

Derhalve is tenminste één der twee rijen $(a^{(\tau_\mu)}{}_\mu)$, $(b^{(\tau_\nu)})_\nu$ van het type $\omega_{\aleph}$; bijv. $(a^{(\tau_\mu)})_\mu$; dan is bovendien $\lim_\mu a^{(\tau_\mu)} = a^{(*)}$.

<u>Stelling 4.3.1:</u> Indien $|X| > 2^{\aleph_i}$ is er een punt in X dat de limiet is van een stijgende of van een dalende rij van het type ω_{i+1}.

<u>Bewijs:</u>

Zij $\{V_\gamma\}_\gamma$ een ϑ-rij voor X; $\vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma) = \vartheta$.

Indien $\tau < \omega_{i+1}$ volgt:

$$|D_\tau| \leqq 2^{|\tau|} \leqq 2^{\aleph_i},$$

$$\left|\bigcup_{\tau<\omega_{i+1}} D_\tau\right| \leqq \aleph_{i+1} \cdot 2^{\aleph_i} \leqq 2^{\aleph_i},$$

$$\bigcup_{\tau<\omega_{i+1}} D_\tau \subsetneq X \qquad \ldots (1)$$

Dus: $\vartheta \geqq \omega_{i+1}$.

(i) Als $\vartheta \geqq \omega_{i+1}$ volgt hetgeen te bewijzen is uit lemma I.4.3.2

(ii) Als $\vartheta = \omega_{i+1}$ is er, op grond van (1), een x waarvoor geldt $\mu_x = \omega_{i+1}$; en hetgeen te bewijzen is volgt weer uit lemma I.4.3.2.

Gevolg: Indien $|X| > \mathfrak{C} = 2^{\aleph_0}$ is er een punt $x \in X$ dat de limiet is van een stijgende of een dalende rij van het type $\omega_1 = \Omega$; men ziet gemakkelijk in, dat X dan niet aan het eerste aftelbaarheids-axioma voldoet (in x is geen aftelbare locale basis).

Indien gebruik gemaakt wordt van de veronderstelling dat de algemene continuumhypothese juist is (en beweringen die op deze veronderstelling berusten zullen we in het vervolg met een * aangeven), geldt ook

*Stelling 4.3.2: Indien $|X| > \aleph$ is er een punt in X dat de limiet is van een stijgende of van een dalende rij van het type $\omega_{\aleph}$.

Bewijs:

Zij $\{V_\gamma\}_\gamma$ een ϑ-rij voor X; $\vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma) = \vartheta$.

Indien $\tau < \omega_{\aleph}$ volgt:

$$|D_\tau| \leqq 2^{|\tau|} \overset{*}{\leqq} \aleph,$$

$$\Big| \bigcup_{\tau < \omega_{\aleph}} D_\tau \Big| \leqq \aleph \cdot \aleph = \aleph,$$

en het bewijs verloopt verder als in stelling I.4.3.1.

*Lemma 4.3.3: Indien in X een (stijgende of dalende) rij $(x_i)_{i<\omega_{\aleph}}$ van het type $\omega_{\aleph}$ voorkomt, geldt voor elke ϑ-rij voor X:

$$\vartheta \geqq \omega_{\aleph} .$$

Bewijs: Zij $(x_i)_{i<\omega_{\aleph}}$ een stijgende rij van het type $\omega_{\aleph}$ in X, en zij $y = \sup_{i<\omega_{\aleph}} x_i$.

1. Zij $\omega_{\aleph}$ regulier.

Laat $\{V_\gamma\}_\gamma$ ——— $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$ ——— een ϑ-rij voor X zijn, en zij $\vartheta = \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma)$.

Definieer door transfiniete inductie een rij $(a_i)_i$ aldus:

(i) $a_0 = r(X_{p_0}^{(\alpha_0)})$, als α_0 het kleinste ordinaalgetal is, waarvoor een $p=p_0 \in Z_{\alpha_0}$ bestaat, zodanig dat $r(X_p^{(\alpha_0)}) < y$.

(ii) Zij a_i gedefinieerd voor $i<\lambda$;

(ii,1) als $\lambda = i_1+1$, zij dan $a_\lambda = r(X_{p_\lambda}^{(\alpha_\lambda)})$, als α_λ het kleinste ordinaalgetal is, waarvoor een $p=p_\lambda \in Z_{\alpha_\lambda}$ bestaat zodanig dat $r(X_{p_{i_1}}^{(\alpha_{i_1})}) < r(X_p^{(\alpha_\lambda)}) < y$.

(ii,2) als λ een limietgetal is, zij $a_\lambda = \sup_{i<\lambda} a_i$

Het is duidelijk dat $(a_i)_i$ een stijgende rij is, en dat $\lim a_i = y$.

Zij voorts x_{i_μ} de kleinste x_i, waarvoor geldt $x_i > a_\mu$; dan is $(x_{i_\mu})_\mu$ een niet-dalende rij, en $\lim_\mu x_{i_\mu} = y$; y is blijkbaar de limiet van een deelrij van $(x_i)_{i<\omega_{\aleph}}$ die een type heeft $\leq \vartheta$; omdat $\omega_{\aleph}$ regulier is, volgt: $\vartheta \geq \omega_{\aleph}$.

2. Zij $\omega_{\aleph}$ singulier.

Dan is X een limietkardinaalgetal, en

$$\sup_{\mathfrak{m} < \aleph} 2^{\mathfrak{m}} = \aleph \quad . \qquad \ldots(1)$$

Blijkbaar is $|X| \geq \aleph$; en dus voor elke $\mathfrak{m} < \aleph$

$$|X| > 2^{\mathfrak{m}} ;$$

daar $\omega_{2^{\mathfrak{m}}}$ regulier is, volgt

$$\vartheta \geq \omega_{2^{\mathfrak{m}}} \quad ;$$

dit geldt voo. elke $\mathfrak{m} < \aleph$; uit (1) volgt echter ook, dat $\sup_{\mathfrak{m}<\aleph} \omega_{2^{\mathfrak{m}}} = \omega_{\aleph}$; dus is

$$\vartheta \geq \omega_{\aleph} \ .$$

Opmerking: Het omgekeerde van lemma I.4.3.3 is blijkens het voorbeeld van de ctgtr H, niet juist; wel geldt lemma I.4.3.2.

Stelling 4.3.3: Als $\{V_\gamma\}_\gamma$ en $\{V'_\gamma\}_\gamma$ twee ϑ-rijen zijn voor de ctgtr X, en $\vartheta = \vartheta(\{V_\gamma\}_\gamma)$, $\vartheta' = \vartheta(\{V'_\gamma\}_\gamma)$, dan is

$$|\vartheta| = |\vartheta'|$$

Bewijs: Als $|\vartheta| < |\vartheta'|$, volgt uit

$$|X| \geqq |\vartheta'| > |\vartheta|,$$

dat in X een stijgende (of een dalende) rij van het type $\omega_{|\vartheta|}$ voorkomt; dus $\vartheta' \geqq \omega_{|\vartheta|}$, $|\vartheta'| \geqq |\vartheta|$; tegenspraak.
Dus is $|\vartheta| = |\vartheta'|$.

4.4. Zij $A_n = (A_n, <)$ de naar grootte der elementen geordende verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$;
$A_n = \{A_n, \mathcal{T}_<\}$ is dan de discrete topologische ruimte, bestaande uit n elementen.
Zij I het eenheidsinterval $[0,1]$.

Lemma 4.4.1: Als $n \neq m$ zijn $X_n = I.A_n$ en $X_m = I.A_m$ verschillende topologische ruimten.

Bewijs: Zij $n > m$.

Als $n \geqq 2$, $m=1$ is X_n totaal onsamenhangend en X_m samenhangend.

Als $n \geqq 3$, $m=2$ heeft X_n continu veel geisoleerde punten, en X_m heeft er twee.

Zij dus nu $n > m > 2$.

Een verzameling $\{(a,2),(a,3),\ldots,(a,n-2)\}$ $(a \in I)$ van n-2 opeenvolgende geisoleerde punten in X_n zullen we aanduiden met $B_a^{(n)}$; op analoge wijze wordt $B_a^{(m)} (\subset X_m)$ gedefinieerd.

1. Als S en T twee disjuncte verzamelingen zijn van geisoleerde punten in X_n, zodanig dat voor alle $a \in I$:
$S \cap B_a \neq \emptyset \Longleftrightarrow T \cap B_a \neq \emptyset$, dan geldt blijkbaar

$\overline{S} \setminus S = \overline{T} \setminus T$.

2. Veronderstel nu, dat er een topologische afbeelding bestaat van X_n op X_m.

(i) Indien p en q (bijv. $p < q$) punten zijn in X_m, die niet tot dezelfde $B_a^{(m)}$ behoren, dan is er een $B_a^{(n)}$, zodanig dat voor alle $r \in f[B_a^{(n)}]$ geldt: $p < r < q$.

Immers: indien deze bewering onjuist is, neem dan een aftelbaar oneindige rij $\{y_i\}_{i<\omega}$ van punten tussen p en q; bij elke y_i bestaat dan een z_i zodanig dat $z_i < p$ of $z_i > q$, terwijl $f^{-1}(y_i)$ en $f^{-1}(z_i)$ tot dezelfde $B_a^{(n)}$ behoren; de verzamelingen $\{y_i\}_{i<\omega}$ en $\{z_i\}_{i<\omega}$ hebben dan verschillende verdichtingspunten, maar de verzamelingen $\{f^{-1}(y_i)\}_{i<\omega}$ en $\{f^{-1}(z_i)\}_{i<\omega}$ hebben dezelfde verdichtingspunten.

(ii) Kies een $B_{a_1}^{(n)}$; daar $n > m$ zijn er in $f[B_{a_1}^{(n)}]$ twee punten p_1 en q_1 die niet tot dezelfde $B_a^{(m)}$ behoren; bijv. zij $p_1 < q_1$;

kies nu $B_{a_2}^{(n)}$ zodanig dat voor alle $r \in B_{a_2}^{(n)}$ geldt $p_1 < r < q_1$; er zijn in $f[B_{a_2}^{(n)}]$ dan weer twee punten p_2 en q_2 die niet tot dezelfde $B_a^{(m)}$ behoren; bijv. zij $p_1 < p_2 < q_2 < q_1$; enzovoort:

de rijen $\{f^{-1}(p_i)\}_{i<\omega}$ en $\{f^{-1}(q_i)\}_{i<\omega}$ hebben dan dezelfde verdichtingspunten; de rijen $(p_i)_{i<\omega}$ en $(q_i)_{i<\omega}$ echter niet.