STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 7

Over de homogeniteit van een compacte totaalgeordende topologische ruimte

door

M.A. Maurice

Oktober 1963

Over de homogeniteit van een ctgtr*

§1. Lemma II.1.1: Een homogene ctgtr X voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

Bewijs:

Zij $\{x_i\}_{i<\omega}$ een aftelbaar oneindige verzameling in X; daar X compact is, heeft deze verzameling een verdichtingspunt, bijv. y; y is dan de limiet van een aftelbare rij, en omdat X homogeen is, is elk punt van X, en i.h.b. a= inf X, de limiet van een aftelbare rij. Voor a betekent dit, dat in dit punt een aftelbare locale basis bestaat; daar X homogeen is, geldt dit voor elke $x \in X$; maar dat betekent dat X aan het 1e aftelbaarheidsaxioma voldoet.

Stelling II.1.1: Als X een ctgtr is, en $|X|>\mathcal{L}$, dan is X niet homogeen.

Bewijs:

Op grond van stelling I.4.3.1. gevolg, voldoet X niet aan het 1e aftelbaarheidsaxioma; en dus is (lemma II.1.1) X niet homogeen.

Lemma II.1.2: Een homogene ctgtr X is 0-dimensionaal.

Bewijs:

Zij Y een component van X. Indien $|Y|>1$, zij dan a=inf Y, b=sup Y, en zij c zodanig dat a<c<b. Als nu C_x de component in X aanduidt, waarin x ligt, is blijkbaar $C_a\setminus\{a\}= Y\setminus\{a\}$ een samenhangende deelruimte van X, terwijl $C_c\setminus\{c\}= Y\setminus\{c\}$ een niet-samenhangende deelruimte van X is. Dan is echter X niet homogeen. Dus $|Y|= 1$; d.w.z. dat X 0-dimensionaal is.

§2. Hulpstelling: Als α en $\beta = \omega^\delta$ aftelbare limietordinaalgetallen zijn, en $\alpha\leq\beta$, dan bestaat een stijgende rij $(\mu_i)_{i<\alpha}$ van het type α, zodanig dat $\lim_{i<\alpha} \mu_i = \beta$.

---

*) Dit is een vervolg op WN 6; een verwijzing naar St I.4.3.1 is een verwijzing naar WN 6, st. 4.3.1. ; enz.

Bewijs:

1. We merken eerst op, dat bij elk aftelbaar limietordinaalgetal β een rij $(\sigma_i)_{i<\omega}$ bestaat, zodanig dat $\lim_{i<\omega} \sigma_i=\beta$.
Immers: zij $(\nu_i)_{i<\omega}$ de, als type ω welgeordende, verzameling van ordinaalgetallen $<\beta$; een monotoon stijgende deelrij van de rij $(\nu_i)_{i<\omega}$ is een rij $(\sigma_i)_{i<\omega}$ met de gevraagde eigenschappen.

2. Voorts laten we zien, dat het voldoende is, de stelling te bewijzen voor ordinaalgetallen $\alpha\leqq\beta$, die geschreven kunnen worden als $\alpha=\omega^\gamma$ $(1\leq \gamma\leqq\delta)$.
Immers: als $\alpha=\omega^{\gamma_1}\cdot n_1+\omega^{\gamma_2}\cdot n_2+\ldots+\omega^{\gamma_k}\cdot n_k$, $n_i>0(i=1,2,\ldots k)$ $\delta(\geqq)\gamma_1>\gamma_2>\ldots>\gamma_k>0$, dan kan men schrijven $\alpha=\alpha'+\omega^{\gamma_k}$; als nu $(\nu_i)_{i<\omega^{\gamma_k}}$ een stijgende rij is, met limiet ω^δ, dan is ook $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een stijgende rij met limiet ω^δ, als $\mu_i= i$ voor $i<\alpha'$ en $\mu_i = \alpha'+\nu_i$ voor $\alpha'\leqq i<\alpha$.

3. We bewijzen nu de stelling door transfiniete inductie naar δ.
(i) $\delta=1$ impliceert $\beta=\omega$, $\alpha=\omega$, en de bewering is triviaal.
(ii) Zij de stelling bewezen voor $\delta<\varepsilon$
(ii,1) Zij $\varepsilon=\delta_1+1$.
Dan is $\beta=\omega^\varepsilon=\omega^{\delta_1+1}=\omega^{\delta_1}\cdot\omega=\beta_1\cdot\omega$.
Als $\alpha=\omega^\gamma=\beta$ is de bewering triviaal; zij dus $\alpha=\omega^\gamma<\beta$; dan is $\alpha\leqq\beta_1$.
Op grond van de inductie-aanname is β_1 de limiet van een stijgende rij $(\nu_i)_{i<\alpha}$ van het type α; β_1 is echter ook de limiet van een stijgende rij $(\lambda_j)_{j<\omega}$ van het type ω; indien nu

$$\begin{cases}\mu_i = \nu_i & \text{voor alle } i \text{ met } \nu_i<\lambda_0\\ \mu_i=\beta_1\cdot j+\nu_i & \text{voor alle } i \text{ met } \lambda_{j-1}\leqq\nu_i<\lambda_j,\end{cases}$$

dan is $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een stijgende rij van het type α, en $\lim_{i<\alpha}\mu_i=\beta$

(ii.2) Zij ε een limietgetal.
Dan is ε de limiet van een stijgende rij $(\varepsilon_n)_{n<\omega}$.
En ook is dan

$$\beta=\lim_{n<\omega}\omega^{\varepsilon_n}.$$

Als $\alpha=\omega^{\gamma}=\beta$ is de bewering triviaal; zij dus $\alpha=\omega^{\gamma}<\beta$.
Indien nu

$$\begin{cases} V_0 = \{\nu / \nu < \varepsilon_\omega\} \\ V_n = \{\nu / \omega^{\varepsilon_{n-1}} \leq \nu < \omega^{\varepsilon_n}\} \quad (n=1,2,\ldots), \end{cases}$$

dan bestaat dus een N, zodanig dat

$$\text{type } V_n = \omega^{\varepsilon_n} \geq \alpha \qquad \text{voor } N \leq n < \omega$$

a. Als $\alpha=\omega^{\gamma}$, $\gamma=\gamma_1+1$, dan is $\alpha=\omega^{\gamma_1+1}=\omega^{\gamma_1}.\omega=\alpha_1.\omega$.

Voor $N\leq n<\omega$ is elke ω^{ε_n} de limiet van een stijgende rij $(\nu_i^{(n)})_{i<\alpha_1}$ van het type α_1.

Definieert men nu voor $N\leq n<\omega$

$$\mu_i = \omega^{\varepsilon_{n-1}} + \nu_i^{(n)} \quad \text{voor} \quad \alpha_1.(n-N) \leq i < \alpha_1.(n-N+1),$$

dan is $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een rij van het type α, en $\lim\limits_{i<\alpha} \mu_i=\beta$.

b. Als $\alpha=\omega^{\gamma}$ en γ is limietgetal, dan is γ de limiet van een stijgende rij $(\gamma_n)_{n<\omega}$, en ook is

$$\alpha = \lim_{n<\omega} \omega^{\gamma_n}.$$

Voor $N\leq n<\omega$ is nu $\omega^{\gamma_n}<\alpha\leq\omega^{\varepsilon_n}$, en dus is ω^{ε_n} de limiet van een stijgende rij $(\nu_i^{(n)})_{i<\omega^{\gamma_n}}$ van het type ω^{γ_n}.

Definieert men nu voor $N\leq n<\omega$

$$\mu_i=\omega^{\varepsilon_{n-1}}+\nu_i^{(n)} \quad \text{voor } \omega^{\gamma_{n-N}} \leq i < \omega^{\varepsilon_{n-N+1}},$$

dan is $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een rij van het type α, en $\lim\limits_{i<\alpha} \mu_i=\beta$.

Lemma II.2.1: Zij $X = Z_{\omega_\alpha}$, $|\alpha| \leq \aleph_0$.

1. Als p geen sprongpunt is, of als p een rechtersprongpunt is, geldt: $\{x/x\leq p\} \backsim Z_{\omega_\alpha}$
2. Als p geen sprongpunt is, of als p een linkersprongpunt is, geldt: $\{x/p\leq x\} \backsim Z_{\omega_\alpha}$

Bewijs:

1. Zij $L = \{p/ \exists i_0<\omega^{\alpha} : p_i=0 \quad \text{voor } i \geq i_0\}$
$\quad R = \{p/ \exists i_0<\omega^{\alpha} : p_i=1 \quad \text{voor } i \geq i_0\}$

In beide gevallen zullen we onder i_0 steeds de kleinste index verstaan met de verlangde eigenschap.
Het is duidelijk, dat een linkersprongpunt (rechtersprongpunt) tot L(tot R) behoort, en dat een punt van L (van R), dan en slechts dan een linkersprongpunt (rechtersprongpunt) is, als i_0 een niet-limietgetal is.

(i) Zij $p \in R$.
laat $(m_\lambda)_\lambda$ de welgeordende rij van indices zijn, waarvoor $p_{m_\lambda}=1$; dan is $(m_\lambda)_\lambda$ een rij van het type ω^{α}.
Definieer nu

$$V_0 = \{x/x \leq p_0p_1\ldots\overset{m_0^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\,\overrightarrow{1111\ldots}\}$$

$$V_\lambda = \{x/p_0p_1\ldots\overset{m_{\lambda-1}^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{1}}\,\overrightarrow{000\ldots} \leq x \leq p_0p_1\ldots\overset{m_\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\,\overrightarrow{1111\ldots}\}$$

als λ een niet-limietgetal is

$$= \{x/p_0p_1\ldots\overset{n_\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\overrightarrow{000\ldots} \leq x \leq p_0p_1\ldots\overset{m_\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\,\overrightarrow{111\ldots}\}$$

als λ een limietgetal is, en $n_\lambda = \lim\limits_{i<\lambda} m_i$.

Definieer ook

$$W_0 = \{x/x \leq 0\ \overrightarrow{1111\ldots}\}$$

$$W_\lambda = \{x/\ 111\ldots\overset{(\lambda-1)^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{1}}\,\overrightarrow{0000\ldots} \leq x \leq 111\ldots\overset{\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\,\overrightarrow{11111\ldots}\}$$

als λ een niet-limietgetal is

$$= \{x/\ 1111\ldots\overset{\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overrightarrow{0000\ldots}} \leq x \leq 1111\ldots\overset{\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overrightarrow{01111\ldots}}\}.$$

als λ een limietgetal is.

Het is duidelijk, dat de verzamelingen V_λ, W_λ $(0 \leq \lambda < \omega^{\alpha})$ alle gelijkgeordend zijn met $Z_{\omega^{\alpha}}$.

Hieruit volgt, dat ook de geordende verenigingen

$$\bigcup_{\lambda<\omega^\alpha} V_\lambda \quad \text{en} \quad \bigcup_{\lambda<\omega^\alpha} W_\lambda ,$$

dus ook $\qquad \{x/x \leq p\}$ en Z_{ω^α} ,

gelijkgeordend zijn.

(ii) Op analoge wijze bewijst men, dat voor $p \in L$ geldt:

$$\{x/p \leq x\} \backsim Z_{\omega^\alpha}$$

(iii) Hieruit volgt dat voor $p \in L$, $q \in R$, $p < q$ geldt:

$$\{x/p \leq x \leq q\} \backsim Z_{\omega^\alpha}$$

2. We bewijzen vervolgens:

(i) Als β een aftelbaar limietordinaalgetal is, en $\beta \leq \omega^\alpha$, dan is Z_{ω^α} te schrijven als geordende vereniging van het type β van verzamelingen A_i $(0 \leq i \leq \beta)$, waarbij $A_i \backsim Z_{\omega^\alpha}$ voor $0 \leq i < \beta$ en $|A_\beta| = 1$.

Aldus:

Op grond van de hulpstelling bestaat een stijgende rij $(\mu_i)_{i<\beta}$ zodanig dat $\lim\limits_{i<\beta} \mu_i = \omega^\alpha$.

Zij nu

$$A_0 = \{x/x \leq 111\ldots\overset{\mu_0^{\text{e}}\text{ plaats}}{0\ \overrightarrow{111\ldots}}\}$$

$$A_i = \{x/\ 111\ldots\overset{\mu_{i-1}^{\text{e}}\text{ plaats}}{\overrightarrow{10000\ldots}} \leq x \leq 111\ldots\overset{\mu_i^{\text{e}}\text{ plaats}}{0\ \overrightarrow{1111\ldots}}\}$$

als i een niet-limietgetal is

$$= \{x/1111\ldots\overset{\nu_i^{\text{e}}\text{ plaats}}{\overrightarrow{00000\ldots}} \leq x \leq 1111\ldots\overset{\mu_i^{\text{e}}\text{ plaats}}{0\overrightarrow{1111\ldots}}\}$$

als i een limietgetal is, ~~en~~ $\nu_i = \lim\limits_{j<i} \mu_j$

$$A_\beta = \{\overrightarrow{11111\ldots}\}.$$

Dan voldoen de verzamelingen A_i $(0 \leq i \leq \beta)$ aan de gestelde eisen.

(ii) Als β een aftelbaar limietordinaalgetal is, en $\beta \leq \omega^\alpha$, dan is Z_{ω^α} te schrijven als geordende vereniging van het type β^* van verzamelingen A_i $(0 \leq i \leq \beta)$, waarbij $A_i \backsim Z_{\omega^\alpha}$ voor $0 \leq i < \beta$, en $|A_\beta| = 1$.

Bewijs als boven

3. (i) Zij nu p geen sprongpunt, en zij $(m_\lambda)_{\lambda<\beta}$ de welgeordende rij van indices, waarvoor $p_{m_\lambda} = 1$; dan is β een limietgetal.

Definieer nu

$$B_0 = \{x / x \leq p_0 p_1 \ldots \overset{m_0^e \text{ plaats}}{\downarrow 0}\ \overrightarrow{1111\ldots}\ \}$$

$$B_i = \{x /\ p_0 p_1 \ldots \overset{m_{i-1}^e \text{ plaats}}{\downarrow 1}\ \overrightarrow{0000\ldots} \leq x \leq p_0 p_1 \ldots \overset{m_i^e \text{ plaats}}{\downarrow 0}\ \overrightarrow{1111\ldots}\ \}$$

als i een niet-limietgetal is

$$= \{x /\ p_0 p_1 \ldots \overset{n_i^e \text{ plaats}}{\downarrow 0}\ \overrightarrow{000\ldots} \leq x \leq p_0 p_1 \ldots \overset{m_i^e \text{ plaats}}{\downarrow 0}\ \overrightarrow{1111\ldots}\}$$

als i een limietgetal is, en $n_i = \lim_{j<i} m_j$

$$B_\beta = \{p\}$$

Op grond van 1. en 2. (i) volgt nu gemakkelijk, dat

$$\{x / x \leq p\} \backsim Z_\omega \alpha.$$

(ii) Op dezelfde wijze kan men aantonen, dat, als p geen sprongpunt is, $\{x / p \leq x\} \backsim Z_\omega \alpha$.

Lemma II.2.2: Zij $X = Z_\omega^* \alpha$; $|\alpha| \leq \aleph_0$
Als inf X < p < sup X, dan geldt

$$\{x / x \leq p\} \backsim \{x / p \leq x\} \backsim Z_\omega^* \alpha$$

Bewijs: analoog aan dat vam lemma II.2.1.

Stelling II.2.1: Indien $|\alpha| \leq \aleph_0$ is $Z_\omega \alpha$ een homogene topologische ruimte.

Bewijs:

1. We merken eerst op: als $I \subset Z_\omega \alpha$ en I is een clopen interval in $Z_\omega \alpha$, waarvoor geldt $I \backsim Z_\omega \alpha$, dan is ook $(Z_\omega \alpha \setminus I) \backsim Z_\omega \alpha$.
Immers: als p = inf I, q= sup I, dan is ten hoogste één der verzamelingen $I_p = \{x / x < p\}$, $I_q = \{x / x > q\}$ ~~leeg~~; indien $I_p \neq \emptyset$ (en/of $I_q \neq \emptyset$) dan is $I_p \backsim Z_\omega \alpha$ (en/of $I_q \backsim Z_\omega \alpha$), op grond van lemma II,2.1;

dan is ook (in alle drie de mogelijke gevallen) $I_p \cup I_q \backsim Z_\omega \alpha$.

2. Kies nu $p, q \in Z_\omega \alpha$; $p \neq q$.

Dan is (resp. q) de doorsnede van een dalende aftelbare rij van clopen intervallen I_n (resp J_n); z.b.d.a. Zij $I_1 \cap J_1 = \emptyset$.

Zij f_0 een monotone afbeelding van $Z_\omega \alpha \setminus I_1$ op $Z_\omega \alpha \setminus J_1$;

Zij f_n een monotone afbeelding van $I_n \setminus I_{n+1}$ op $J_n \setminus J_{n+1}$.

$(n=1,2,3,\ldots)$.

Dan is de functie f die gedefinieerd wordt door

$$f(x) = f_n(x) \quad \text{als } x \in I_n \setminus I_{n+1}$$

$(n=0,1,2,3,\ldots$; $I_0 = Z_\omega \alpha$) ; $f(p) = q$, een topologische afbeelding van $Z_\omega \alpha$ op zichzelf, die voldoet aan $f(p) = q$.

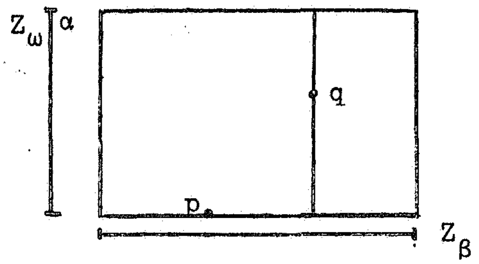
Dit betekent dat $Z_\omega \alpha$ homogeen is.

<u>Stelling II.2.2:</u> Als $Z_\omega^{**}\alpha$ de topologische ruimte is, die uit $Z_\omega^{*}\alpha$ ontstaat door identificatie van inf $Z_\omega^{*}\alpha$ en sup $Z_\omega^{*}\alpha$, dan is $Z_\omega^{**}\alpha$ homogeen.

<u>Bewijs:</u> volgt uit lemma II.2.2.

§3. <u>Stelling II.3.1:</u> Indien $\gamma = \beta + \omega^\alpha$, en $\beta \geq \omega^\alpha$, dan is Z_γ niet homogeen.

<u>Bewijs:</u> Zonder beperking der algemeenheid zij $\beta = \delta + \omega^\varepsilon$, met $\varepsilon \geq \alpha$.



(i) Kies $p=(p_i)_{i<\gamma}$ zodanig dat

$$\begin{cases} \forall\, i<\beta \;\; \exists j,k : (i<j,k<\beta \text{ en } p_i = 0, p_k = 1) \\ \forall\, i \geq \beta : p_i = 0 \end{cases}$$

Het is duidelijk, dat iedere omgeving O_p van p een deelruimte bevat, die gelijkgeordend is met $Z_{\omega^\varepsilon + \omega^\alpha}$.

Op grond van lemma I.3.4.1 geldt dus

$$\Theta(\mathcal{O}_p) \geqq \omega^{\varepsilon} + \omega^{\alpha}$$

(ii) Kies $q = (q_i)_{i<\gamma}$ zodanig dat

$$\forall i \;\; \exists j,k: (i<j,k<\gamma \quad \text{en } p_i = 0, p_k = 1).$$

Dan heeft q omgevingen $\mathcal{O}_q$, die gelijkgeordend zijn met Z_{ω^α}.
Dan is echter

$$\Theta(\mathcal{O}_q) = \omega^{\alpha}$$

(iii) $Z_\beta \cdot Z_{\omega^\alpha}$ is dus niet homogeen; hetzelfde geldt dan voor $Z_{\beta+\omega^\alpha} = Z_\gamma$.