STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 9

Over het verband tussen verdelingsgraad, dichtheid en gewicht van een compacte totaalgeordende topologische ruimte

door

M.A. Maurice

november 1963

Over het verband tussen verdelingsgraad, dichtheid en gewicht van een ctgtr. †)

§1. Onder de dichtheid van een topologische ruimte X verstaan we
$d(X)= \min \{\aleph \mid \exists N \subset X: \bar{N}=X, |N|=\aleph\}$.

Onder het gewicht van een topologische ruimte X verstaan we
$w(X)= \min \{\aleph \mid \exists$ basis B voor $X: |B| =\aleph\}$.

Lemma 1.1: Als X een T_0-ruimte is, geldt $|X| \leqq 2^w$, $w \leqq 2^{|X|}$

Lemma 1.2: Als X een compacte-Hausdorff ruimte is, geldt
$w \leqq |X| \leqq 2^w$

Lemma 1.3: Als X een Hausdorff-ruimte is, geldt
$d \leqq |X| \leqq 2^{2^d}$

Lemma 1.4: Als X een reguliere ruimte is, geldt
$d \leqq w \leqq 2^d$

Voor de (verwijzing naar de) bewijzen van deze lemma's zie men het artikel van J. de Groot: . . . .

§2. Hulpstelling 1: Als X een ctgtr is, en $\{x_i\}_{i<\omega_\aleph}$ is een stijgende rij of een dalende rij van het type $\omega_\aleph$ in X, dan is $d(X) \geqq \aleph$.
Bewijs: $\{(x_{i+2n}, x_{i+2n+2})\}_{i<\omega_\aleph, n<\omega}$ is een disjuncte verzameling niet-lege, open intervallen met kardinaalgetal $\aleph$.

*Lemma 2.1: Als X een ctgtr is, geldt
$d \leqq w \leqq |X| \leqq 2^d \leqq 2^w$

Bewijs: (i) als $w = |X|$, dan volgt uit $d \leqq w \leqq 2^d$, dat ook $d \leqq |X| \leqq 2^d$
(ii) als $w<|X|$, dan bestaat in X een (stijgende of dalende) rij van het type ω_w (st. I,4,3,2); dus is $d \geqq w$, dus $d=w$.
Dan volgt uit $w \leqq |X| \leqq 2^w$, dat ook $d \leqq |X| \leqq 2^d$.

---

†) Dit is een vervolg op WN 7 en WN 6. Een verwijzing naar st. I,3,2,1 (resp. st. II,3,2,1) is een verwijzing naar WN 6, st. 3,2,1 (resp. WN 7 st. 3,2,1) etc.

<u>Hulpstelling 2</u>: Als N dicht is in de ctgtr X, dan geldt voor elke ϑ-rij V voor X:

$$\vartheta \leq \sup_{x \in N} \mu_x + 1$$

<u>Bewijs</u>:

Zij $\eta = \sup_{x \in N} \mu_x$.

Indien nu $|X_p^{(\eta)}| \geq 3$ voor zekere $p \in Z_\eta$,

dan geldt voor een c, met $l(X_p^{(\eta)}) < c < r(X_p^{(\eta)})$, dat $c \notin D_\eta$; daar echter $N \subset D_\eta = \overline{D}_\eta$, terwijl $\overline{N} = X$, ontstaat een tegenspraak.

Dus: $\forall p \in Z_\eta : |X_p^{(\eta)}| \leq 2$,

en derhalve $\vartheta \leq \eta + 1$.

<u>Opmerking</u>: Het kan voorkomen, dat $\vartheta = \eta + 1$;
voorbeeld: zij $Z^{\dagger}_{\omega+1}$ de ctgtr, die uit $Z_{\omega+1}$ ontstaat door de punten (a,0) en (a,1) te identificeren, als a rationaal is; als nu V de reguliere ϑ-rij voor $Z^{\dagger}_{\omega+1}$ is, dan geldt $\vartheta(V) = \omega + 1$, $\eta(V) = \omega$.

*<u>Lemma 2.2</u>: Als X een ctgtr is, en V is een ϑ-rij voor X, dan is $|\vartheta| \leq d$.

<u>Bewijs</u>:

<u>1</u>. Als in X een (stijgende of dalende) rij van het type $\omega_{|\vartheta|}$ voorkomt, volgt het gestelde onmiddellijk uit hulpstelling 1. (dit is dus o.a. het geval als $\vartheta > \omega_{|\vartheta|}$, en als - in het geval dat $\vartheta = \omega_{|\vartheta|}$ - een $x \in X$ bestaat, met $\mu_x = \vartheta$; zie lemma I,4,3,2).

<u>2</u>. In het andere geval geldt dus

(i) $\vartheta = \omega_{|\vartheta|}$

(ii) $\forall x \in X: \mu_x < \vartheta$.

Als N nu dicht is in X, en $|N| = d$, dan is

$$\forall x \in N: \quad \mu_x < \vartheta = \omega_{|\vartheta|},$$

$$\forall x \in N: \quad |\mu_x| < |\vartheta| \leq |X| \; ;$$

daar $d \leqq |X| \leqq 2^d$ volgt

$$\forall x \in N: \quad |\mu_x| \leqq d.$$

Op grond van hulpstelling 2 is dan

$$|\vartheta| \leqq \left| \sup_{x \in N} \mu_x + 1 \right| \leqq |N| . d = d^2 = d.$$

*<u>Stelling 2.1:</u> Als X een ctgtr is, met dichtheid d en gewicht w, en $V = \{V_\gamma\}_\gamma$ is een ϑ-rij voor X met $\vartheta(V) = \vartheta$, dan geldt:

$$|\vartheta| \leqq d \leqq w \leqq |X| \leqq 2^{|\vartheta|} \leqq 2^d \leqq 2^w.$$

Bovendien gelden in de relatie

$$|\vartheta| \leqq d \leqq w \leqq |X|$$

ten minste twee der gelijktekens.

<u>Bewijs:</u>

Het eerste deel der bewering volgt onmiddellijk uit het voorgaande. Indien voorts in de realtie

$$|\vartheta| \leqq d \leqq w \leqq |X|$$

ten minste twee der ongelijktekens gelden, dan volgt

$$|X| \geqq 2^{2^{|\vartheta|}} \quad ;$$

en dit is in tegenspraak met $|X| \leqq 2^{|\vartheta|}$.

<u>Gevolg:</u> In het bijzonder is

$$|\theta| \leqq d \leqq w \leqq |X| \leqq 2^{|\theta|} \leqq 2^d \leqq 2^w,$$

terwijl in

$$|\theta| \leqq d \leqq w \leqq |X|$$

ten minste twee der gelijktekens van kracht zijn.

Voorbeelden:

(i) $X = Z_{\omega+2}$: $|\theta| < d$

(ii) $X = Z_{\omega+1}$: $d < w$

(iii) $X = Z_{\omega}$: $w < |X|$

(iv) $X = H$: $|\theta| = d = w = |X|$

*Lemma 2,3: Als X een ctgtr is, met dichtheid d, gewicht w en verdelingsgraad θ, dan geldt:

a. indien $\theta=\omega_{\aleph}$ of $\theta=\omega_{\aleph}+1$, dan is $d=\aleph$.

b. indien $\theta=\omega_{\aleph}$, dan is $w=\aleph$

Bewijs:

a. Zij V een ϑ-rij voor X, met $\vartheta(V)=\theta$.

Het is duidelijk, dat

$$\overline{\bigcup_{\tau<\omega_{\aleph}} D_\tau} = D_{\omega_{\aleph}} = D_{\omega_{\aleph}+1} = X \quad ;$$

daar echter

$$\forall \tau < \omega_{\aleph} : \ |D_\tau| \leq 2^{|\tau|} \leq \aleph$$

volgt

$$\left|\bigcup_{\tau<\omega_{\aleph}} D_\tau\right| \leq \aleph . \aleph = \aleph .$$

Dus $\quad d \leq \aleph$.

Anderzijds volgt uit $|\theta| \leq d$, dat $\aleph \leq d$. Derhalve is $d = \aleph$.

b. Zij V een ϑ-rij voor X, met $\vartheta(V)=\theta$.

Zij $N = \bigcup_{\tau<\omega_{\aleph}} D_\tau$.

Dan geldt dat de verzameling B van alle verzamelingen

$$\{x | a<x<b\} \qquad (a,b \in N)$$

een basis is voor de topologie in X;

immers: kies een open verzameling O; zonder beperking der algemeenheid zij $O=O_{rs} = \{x | r<x<s\}$; kies $y \in O$.

(i) als y zowel een linkerbuur 'y als een rechterbuur y' heeft, dan behoren 'y en y' tot zekere $D_\tau(\tau<\omega_{\aleph})$, dus tot N; dan is

$$y\in O_{'yy'}\subset O\ ,\ O_{'yy'}\in B.$$

(ii) als y een linkerbuur 'y, maar geen rechterbuur heeft, dan $'y\in N$, en bovendien is er, daar $\overline{N}=X$, een $z\in N$ zodanig dat $y<z<s$; dan is

$$y\in O_{'yz}\subset O\ ,\ O_{'yz}\in B$$

(iii) het geval dat y geen linkerbuur, maar wel een rechterbuur y' heeft, wordt analoog behandeld.

(iv) als y noch een linkerbuur, noch een rechterbuur heeft, dan bestaan z_1 en $z_2\in N$, zodanig dat $r<z_1<y<z_2<s$; dan is

$$y\in O_{z_1z_2}\subset O\ ,\ O_{z_1z_2}\in B.$$

Nu is:

$$|B|\leq|N|^2=\aleph^2=\aleph,\ \text{en dus}\ w\leq\aleph.$$

Anderzijds volgt uit $|\theta|\leq d$ dat $\aleph\leq d$, dus $\aleph\leq w$. Derhalve is $w=\aleph$.

§3. Zij X een ctgtr.
Zij P de verzameling der linker- en rechter-sprongpunten in X;
zij Q de verzameling van die paren $\{p',p''\}$ van sprongpunten, die elkaars buur zijn.
Het is duidelijk, dat $|P|=|Q|$.

*Lemma 3.1: a. Als $|P|=|X|$, dan is $w=|X|$
b. Als $|P|<|X|$, dan is $w=d$.

Bewijs:
a. Zij B een basis voor de topologie in X;
daar elke verzameling

$$\{x|x<p'',\ p''\ \text{linkersprongpunt}\}$$

open is, en bovendien een grootste element heeft (nl. de linkerbuur p' van p''), volgt, voor elk rechtersprongpunt p' de existentie van een $O \in B$, waarin p' het grootste element is; derhalve is $|B| \geq |P| = |X|$, dus $w=|X|$.

b. Zij N een deelverzameling van X, zodanig dat

$$\overline{N} = X, \ |N| = d.$$

Dan is de familie B van alle verzamelingen

$$\{x|a<x<b\} \qquad (a,b \in P \cup N)$$

een basis voor de topologie van X;
immers: zij O een open verzameling in X; zonder beperking der algemeenheid zij

$$O = O_{rs} = \{x|r<x<s\};$$

kies $y \in O$.

(i) Als $r,s \in P$, dan $O \in B$

(ii) Als $r \notin P$, $s \in P$, dan is er een $a \in N$, zodanig dat $r<a<y$; en

$$y \in O_{as} \subset O_{rs}, \quad O_{as} \in B$$

(iii) Het geval $r \in P$, $s \notin P$ wordt analoog behandeld.

(iv) Als $r,s \notin P$, dan zijn er $a,b \in N$, zodanig dat $r<a<y$ en $y<b<s$; en

$$y \in O_{ab} \subset O_{rs}, \quad O_{ab} \in B.$$

Daar nu $|P| < |X|$, dus $|P| \leq d$, volgt $|P \cup N| = d$, en dus $|B| \leq d$; d.w.z. $w=d$.

Gevolg: Als X samenhangend is, is $w=d$.

*Lemma 3.2: I. Als X een samenhangende ctgtr is, en $\theta = \theta(X)$, $d=d(X)$, $w=w(X)$, dan geldt

$$\theta \leq \omega_d$$

II. Als X een nuldimensionale ctgtr is, en $\theta=\theta(X)$, $d=d(X)$, $w=w(X)$, dan geldt

(i) $\theta \leqq \omega_d + 1$;
en als $|P| < |X|$, dan is $\theta \leqq \omega_d$

(ii) $\theta \leqq \omega_w$

Bewijs:

We geven het bewijs van het lemma voor het geval dat X nuldimensionaal is.

1. Vooraf merken we het volgende op: Als Y een nuldimensionale ctgtr is, en $p,q,r \in Y$, dan kan men twee opvolgende ϑ-splitsingen van Y aangeven, zodanig dat van de punten p,q,r geen twee tot dezelfde $Y_p^{(2)}$ $(p \in Z_2)$ behoren.

2. Als α een ordinaalgetal is, dan schrijven we

$$\alpha=\nu_\alpha + m_\alpha,$$

waarbij ν_α een limietgetal (of 0) is, en m_α een geheel getal $\geqq 0$.
Zij dan

$$\overline{\alpha} = \nu_\alpha + m_\alpha . 2$$

(Voor een limietgetal is dus $\overline{\alpha} = \alpha$).

3. We bewijzen nu eerst, dat $\theta \leqq \omega_d + 1$.
Zij $N \subset X$, $\overline{N} = X$, $|N| = d$.
Zij S de verzameling der punten s in X, die zowel een linkerbuur 's, als een rechterbuur s' hebben; dan is $S \subset N$.
Zij A de verzameling der paren {'s,s} en {s,s'}, en zij $R=N \cup A$.
Dan is ook $|R| = d$.
Zij tenslotte $\{r_i\}_{i<\omega_d}$ een welordening van R.

a. We tonen aan, dat door transfiniete inductie een ϑ-rij $V=\{V_\gamma\}_\gamma$ — $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$ — voor X kan worden gedefiniëerd, zodanig dat voor alle $\gamma \leqq \omega_d$:

$$\forall p \in Z_{\overline{\gamma}} : |X_p^{(\overline{\gamma})} \cap \bigcup_{i<\gamma} t_i| \leqq 1 ; \qquad \ldots(1)$$

hierin is $t_i = \{r_i\}$ als $r_i \in N$ en $t_i = r_i$ als $r_i \in A$.

Aldus:

(i) Voor $\alpha=0$ is ook $\alpha=0$; indien dan $V_0=\{X\}$, is aan de bewering (1) —— daar $\bigcup_{i<0} t_i = \emptyset$ —— zeker voldaan.

(ii) (ii,1) Zij V_γ^i gedefinieerd voor $\gamma \leq \overline{\delta}_1$ en zij voor al die γ voldaan aan (1).

Zij $\delta=\delta_1+1$; dan is $\overline{\delta}=\overline{\delta}_1+2$.

Daar $|X_p^{(\overline{\delta}_1)} \cap \bigcup_{i<\delta_1} t_i| \leq 1$, en daar $|t_{\delta_1}| \leq 2$, kan men, op grond van $\perp$, 2 opvolgende ϑ-splitsingen van $X_p^{(\overline{\delta}_1)}$ definiëren, zodanig, dat

$$\forall q \in Z_2 : |X_{pq}^{(\overline{\delta})} \cap \bigcup_{i<\delta} t_i| \leq 1.$$

(ii.2) Indien $\delta=\overline{\delta}$ een limietgetal is, is voor $p \in Z_\delta$:

$$X_p^{(\delta)} = \bigcap_{\gamma<\delta} X_{p/\gamma}^{(\gamma)} .$$

Als nu voor zekere $p \in Z_\delta$ zou gelden dat $|X_p^{(\delta)} \cap \bigcup_{i<\delta} t_i| \geq 2$, dan bestaan a en b ($a \neq b$), zodanig dat

$$a,b \in X_p^{(\delta)} \cap \bigcup_{i<\delta} t_i ;$$

dus ook $a,b \in \bigcup_{i<\gamma+1} t_i$ voor zekere $\gamma<\delta$;

dat wil zeggen

$$a,b \in X_{p/\gamma+1}^{(\overline{\gamma+1})} \cap \bigcup_{i<\gamma+1} t_i ,$$

dus

$$X_{p/\gamma+1}^{(\overline{\gamma+1})} \cap \bigcup_{i<\gamma+1} t_i| \geq 2;$$

dit is in strijd met de inductie-aanname.

Ergo: $\forall p \in Z_\delta$: $|X_p^{(\delta)} \cap \bigcup_{i<\delta} t_i| \leq 1$.

b. In het bijzonder is dus

$$\forall p \in Z_{\omega_d} : |X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i<\omega_d} t_i| \leq 1 \qquad \ldots(2)$$

Daar echter $\bigcup_{i<\omega_d} t_i$ dicht ligt in X, volgt uit (2) onmiddellijk dat $|X_p^{(\omega_d)}| \leq 3$; als echter $|X_p^{(\omega_d)}| = 3$, is blijkbaar $X_p^{(\omega_d)} = \{'s,s,s'\}$ voor zekere $s \in S$; maar dat betekent dat $\{s,s'\} = t_i$ voor zekere $i<\omega_d$, zodat $|X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i<\omega_d} t_i| \geq 2$, in strijd met (2).

Derhalve is $|X_p^{(\omega_d)}| \leq 2$.

Dus $\theta \leq \omega_d + 1$.

4. We bewijzen nu, dat $\theta \leq \omega_d$ als $|P| = |Q| < |X|$.
Zij $N \subset X$, $\overline{N} = X$, $|N| = d$.
Zij $R = N \cup Q$; daar $|Q| < |X|$, dus $|Q| \leq d$, is ook $|R| = d$.
Zij $\{r_i\}_{i<\omega_d}$ een welordening van R.

Op een manier, die analoog is aan die in 3. toont men de existentie aan van een $\mathcal{V}$-rij $V = \{V_\gamma\}_\gamma$ —— $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$ —— voor X, zodanig dat voor alle $\gamma \leq \omega_d$:

$$\forall p \in Z_{\overline{\gamma}}: |X_p^{(\overline{\gamma})} \cap \bigcup_{i<\gamma} t_i| \leq 1;$$

hierin is $t_i = \{r_i\}$ als $r_i \in N$ en $t_i = r_i$ als $r_i \in Q$.
In het bijzonder is dus

$$\forall p \in Z_{\omega_d} : |X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i<\omega_d} t_i| \leq 1 \qquad \ldots(3)$$

Daar $\bigcup_{i<\omega_d} t_i$ dicht is in X, volgt uit (3), dat $|X_p^{(\omega_d)}| \leq 3$; als echter $|X_p^{(\omega_d)}| = 2$ resp 3, is blijkbaar $X_p^{(\omega_d)} = \{a,b\}$ resp $X_p^{(\omega_d)} = \{a,b,c\}$, voor zeker paar buren $\{a,b\}$ (en evt. $\{b,c\}$); maar dat betekent dat $\{a,b\} = t_i$ voor zekere $i < \omega_d$, zodat

$|X_p^{(\omega_d)} \cap \bigcup_{i<\omega_d} t_i| \geqq 2$, in strijd met (3).

Derhalve is $|X_p^{(\omega_d)}| = 1$.

Dus $\theta \leqq \omega_d$.

5. We bewijzen voorts, dat $\theta \leqq \omega_{|X|}$.

Zij $\{x_i\}_{i<\omega_{|X|}}$ een welordening van X.

Op een manier, die analoog is aan die in 3. toont men de existentie aan van een ϑ-rij $V = \{V_\gamma\}_\gamma$ —— $V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p \in Z_\gamma}$ —— voor X, zodanig dat voor alle $\gamma \leqq \omega_{|X|}$:

$$\forall p \in Z_{\bar{\gamma}} : |X_p^{(\bar{\gamma})} \cap \bigcup_{i<\gamma} \{x_i\}| \leqq 1.$$

In het bijzonder is dus

$$\forall p \in Z_{\omega_{|X|}} : |X^{(\omega_{|X|})} \cap \bigcup_{i<\omega_{|X|}} \{x_i\}| \leqq 1.$$

Daar echter $\bigcup_{i<\omega_{|X|}} \{x_i\} = X$, betekent dit

$$\forall p \in Z_{\omega_{|X|}} : |X_p^{(\omega_{|X|})}| = 1.$$

Dus: $\theta \leqq \omega_{|X|}$.

6. Tenslotte tonen we aan, dat $\theta \leqq \omega_w$:

Als $|P| = |X|$, is $w = |X|$; dus $\theta \leqq \omega_{|X|} = \omega_w$;

als $|P| < |X|$, is $w = d$; dus $\theta \leqq \omega_d = \omega_w$.

*Gevolg: (vergelijk *lemma 2.3): Indien X een nuldimensionale of een samenhangende ctgtr is, met gewicht w, dichtheid d en verdelingsgraad θ, dan geldt:

a. $\theta \geqq \omega_{\aleph} + 2$ impliceert $d > \aleph$

b. $\theta \geqq \omega_{\aleph} + 1$ impliceert $w > \aleph$;

immers: als $d \leqq \aleph$ volgt $\theta \leqq \omega_d + 1 \leqq \omega_{\aleph} + 1$

en als $w \leqq \aleph$ volgt $\theta \leqq \omega_w \leqq \omega_{\aleph}$

Voorbeeld: $d(Z_\alpha) = |\alpha|$, indien $\alpha = \omega_{|\alpha|}$ of $\alpha = \omega_{|\alpha|} + 1$

$> |\alpha|$, indien $\alpha \geqq \omega_{|\alpha|} + 2$;

$w(Z_\alpha) = |\alpha|$, indien $\alpha = \omega_{|\alpha|}$

$> |\alpha|$, indien $\alpha \geqq \omega_{|\alpha|} + 1$.

Opmerking: lemma 3.2. geldt niet voor een willekeurige ctgtr;

voorbeeld: Zij $X = W(\Omega) \cup [0,1]$ (geordende vereniging);

dan is $\theta(X) = \Omega + \omega$,

en dus $\theta(X) > \omega_{|X|}$ $(=\Omega)$

$> \omega_d + 1$ $(=\Omega+1)$