STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 15

Enkele opmerkingen over de hoofdstelling der R-integratie

door

J. van de Lune

Oktober 1964

Enkele opmerkingen over de hoofdstelling der R-integratie

Summary

The author gives a necessary and sufficient condition for a differentiable function $f(x)$, in order that it may be written as the R-integral of its derivative, in the sense of Leibniz' formula.
The condition is, that $f(x)$ can be obtained by R-integration of at least one function $\phi(x)$. The result is complementary to the classic condition of R-integrability for the derivative.

De hoofdstelling der R-integratie zegt, dat, als de funktie $f(x)$ differentieerbaar is op het interval $[a,b]$, onder bepaalde voorwaarden betreffende $f'(x)$, de volgende betrekking geldt

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a). \tag{1}$$

In de litteratuur wordt aan $f'(x)$ een van de volgende voorwaarden gesteld:

1) $f'(x)$ is continu op $[a,b]$,

2) $f'(x)$ is R-integreerbaar[1)] op $[a,b]$.

In deze beschouwing zal worden aangetoond, dat het niet nodig is $f'(x)$ expliciet aan enige voorwaarde te binden, mits we een extra eis stellen aan $f(x)$.
M.a.w.: De geldigheid van (1) kan bewezen worden op grond van veronderstellingen die alleen $f(x)$ betreffen, en wel zonder gebruik te maken van specifiek maattheoretische begrippen.
Stelling 1. De betrekking (1) is dan en slechts dan zinvol en geldig als

1) In deze beschouwing zal onder "R-integreerbaar" uitsluitend worden verstaan "eigenlijk R-integreerbaar".

1) $f(x)$ differentieerbaar is op $[a,b]$,

2) er een op $[a,b]$ R-integreerbare funktie $\phi(x)$ bestaat, zodanig dat $f(x)$ te schrijven is als

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \phi(t)dt. \tag{2}$$

Deze stelling is gelijkwaardig met:

<u>Stelling 2.</u> Is $f(x)$ op $[a,b]$ differentieerbaar, dan is de afgeleide funktie $f'(x)$ dan en slechts dan R-integreerbaar op $[a,b]$ als er een op $[a,b]$ R-integreerbare funktie $\phi(x)$ bestaat, zodanig dat $f(x)$ aan (2) voldoet.

N.B. $\phi(x)$ dient hier beschouwt te worden als een funktie die noch a priori, noch a posteriori identiek is met $f'(x)$. Zie voor nadere bijzonderheden stelling 3.

Het bewijs van deze stellingen zullen we vooraf laten gaan door een tweetal lemma's.

<u>Lemma 1.</u> Is de funktie $\phi(x)$ op $[a,b]$ R-integreerbaar (dit impliceert de begrensdheid van $\phi(x)$) met

$$m \leq \phi(x) \leq M$$

voor elke $x \in [a,b]$, en stelt men per definitie

$$\Phi(x) = \int_a^x \phi(t)dt,$$

dan geldt, onder de voorwaarde dat $\Phi(x)$ differentieerbaar is op $[a,b]$, de ongelijkheid

$$m \leq \Phi'(x) \leq M \quad \text{voor elke } x \in [a,b].$$

Bewijs: Stellen we $H(x) = \Phi(x)-m(x-a)$ dan is $H(x)$ differentieerbaar op $[a,b]$ met

$$H'(x) = \Phi'(x)-m.$$

Voor $H(x)$ kunnen we ook schrijven

$$H(x) = \int_a^x (\phi(t)-m)dt.$$

Daar $\phi(t) \geq m$ op $[a,b]$, is $H(x)$ monotoon niet dalend; we kunnen dus concluderen

$$H'(x) \geq 0 \quad \text{of} \quad \Phi'(x) \geq m \quad \text{voor elke } x \in [a,b].$$

De ongelijkheid $\Phi'(x) \leq M$ kan op overeenkomstige wijze worden aangetoond door de funktie

$$K(x) = M(x-a)-\Phi(x)$$

te beschouwen.

Lemma 2. Onder dezelfde voorwaarden als in lemma 1 kunnen we zeggen dat $\Phi'(x)$ R-integreerbaar is op $[a,b]$.

Bewijs: Lemma 1 is van toepassing op elk deelinterval van $[a,b]$, waaruit gemakkelijk kan worden afgeleid dat de gemiddelde schommeling van $\Phi'(x)$ niet groter is dan die van $\phi(x)$. Aangezien $\phi(x)$ R-integreerbaar is op $[a,b]$, is dit ook het geval met $\Phi'(x)$.

Bewijs van stelling 1:

Dat de in stelling 1 genoemde voorwaarden nodig zijn voor (1) is zonder meer duidelijk; voor $\phi(x)$ kunnen we n.l. $f'(x)$ nemen.

Dat de voorwaarden ook voldoende zijn blijkt als volgt.

Schrijven we (2) in de vorm

$$f(x)-f(a) = \int_a^x \phi(t)dt$$

dan is het linkerlid op grond van de eerste veronderstelling differentieerbaar; de funktie $f'(x)$ is dus de afgeleide van een funktie van de vorm

$$\int_a^x \phi(t)dt.$$

Volgens lemma 2 is $f'(x)$ dan R-integreerbaar op $[a,b]$, waaruit, zoals bekend, de geldigheid van (1) volgt.
Stelling 2 is, evenals stelling 1, een direct gevolg van de lemma's 1 en 2.

Definitie: De op $[a,b]$ R-integreerbare funktie $\phi(x)$ bezit in het punt $x_0 \in [a,b]$ een ophefbare discontinuïteit t.a.v. $[a,b]$ als

1) $\phi(x)$ in x_0 discontinu is t.a.v. $[a,b]$
2) er een op $[a,b]$ R-integreerbare en in x_0 continue funktie $\phi^*(x)$ bestaat zodanig dat

$$\int_a^x \phi(t)dt = \int_a^x \phi^*(t)dt \quad \text{voor elke } x \in [a,b]. \tag{3}$$

Opmerking:

Heeft de op $[a,b]$ R-integreerbare funktie $\phi(x)$ in x_0 t.a.v. $[a,b]$ een ophefbare discontinuïteit en stellen we

$$\Phi(x) = \int_a^x \phi(t)dt$$

dan geldt zoals bekend

$$\Phi'(x_0) = \phi^*(x_0).$$

In verband met de relatie (3) impliceert dit de ondubbelzinnigheid van de funktiewaarde $\phi^*(x_0)$.

<u>Stelling 3</u>. Onder dezelfde voorwaarden als in lemma 1 geldt

1) $\Phi'(x)$ is dan en slechts dan continu in $x_0 \in [a,b]$ als $\phi(x)$ in x_0 of continu is of daar t.a.v. $[a,b]$ een ophefbare discontinuïteit bezit.
2) $\Phi'(x_0) = \phi^*(x_0)$ als $\phi(x)$ een ophefbare discontinuïteit bezit in x_0. Als $\phi(x)$ continu is in x_0 dan geldt zoals bekend $\Phi'(x_0) = \phi(x_0)$.

Voor het bewijs van stelling 3 kan gebruik gemaakt worden van het vrijwel direct uit de lemma's 1 en 2 volgende

Lemma 3. Onder dezelfde voorwaarden als in lemma 1 geldt

$$\int_a^x \phi'(t)dt = \int_a^x \phi(t)dt \quad \text{voor elke } x \in [a,b].$$

De bewijzen worden verder aan de lezer overgelaten.

Men vergelijke het een en ander met de behandeling van deze materie in de volgende bekende leerboeken:

1. Apostel, T.M. Mathematical Analysis, 1957.
2. Bourbaki, N. Eléments de Mathématique, 1949.
3. Bruyn, N.G. de, Beknopt leerboek der differentiaal- en integraalrekening, 1949.
4. Graves, L.M. The theory of functions of real variables, 1946.
5. Grüss, G. Differential- und Integralrechnung, 1953.
6. Hardy, G.H. Pure Mathematics, 1945.
7. Haupt und Aumann, Differential- und Integralrechnung, 1938.
8. Hobson, E.W. The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, 1927.
9. Jeffery, R.L. The theory of functions of a real variable, 1953.
10. Kestelman, H. Modern theories of integration, 1960, pag. 47!
11. Kowalewski, G. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 1908.
12. Kuipers, L. Leerboek der Analyse, 1960.
13. von Mangoldt - Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, 1948.
14. Rogosinski, W. Volume and Integral, 1962.
15. Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis, 1953.