STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 17

Een continue functie met sterk transfiniete omkering

door D. Kruyswijk

Februari 1965

Een continue functie met sterk transfiniete omkering

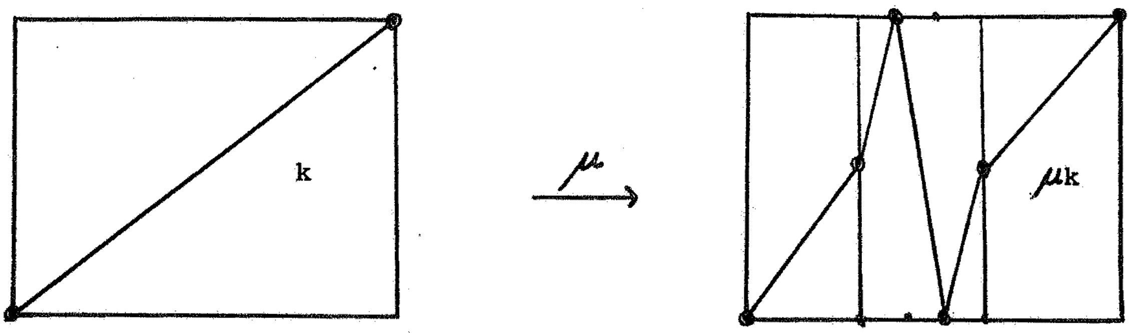
door D. Kruyswijk

Summary. We want to build a continuous function f on a finite closed interval, such that f is nowhere a constant function and such that the inversion set $f^{-1}(y)$ is transfinite for each number y covered by f. To that end, look at the diagram below. The operation μ, which has already been applied on k, should be repeated on each side of the polygon μk which has a positive direction. Then, after a long time of iterating, f is reached.

Prof.Dr. P.C. BAAYEN stelde de vraag of er een continue afbeelding f bestaat van $[0,1]$ op $[0,1]$, zodanig dat de vergelijking $f(x) = y_0$ oneindig veel oplossingen bezit voor ieder getal y_0 van het vak $[0,1]$.

Het antwoord luidt bevestigend. Misschien zijn dergelijke functies in de litteratuur voorhanden, maar een eenvoudige manier om er een te construeren behoort niet tot de algemeen bekende theorie.

Bij de nu volgende constructie kan men onderstaande grafieken raadplegen, maar men mag daar ook van afzien. Zij in elk geval k een stijgende lineaire functie op een vak $[\alpha,\beta]$.



Onder μk verstaan we een nieuwe functie op $[\alpha,\beta]$, die in de volgende alinea gedefinieerd wordt.

Verdeel $[\alpha,\beta]$ in drie gelijke stukken. Verdeel het middelste stuk nog eens in drie gelijke stukken. Laat $\alpha < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \beta$ de deelpuntenserie van deze verdeling zijn. We eisen nu dat μk overal continu is en bovendien lineair op elk der vijf deelvakken. Bovendien eisen we:

$$\begin{aligned} \mu k(\alpha) &= \mu k(x_3) = k(\alpha), \\ \mu k(\beta) &= \mu k(x_2) = k(\beta), \\ \mu k(x_1) &= \mu k(x_4) = \tfrac{1}{2}\{k(\alpha) + k(\beta)\} . \end{aligned}$$

Hiermee is μk gedefinieerd, evenals de handeling μ, welke bestaat uit het veranderen van k in μk.

Helaas hebben we nog een operatie nodig, een extensie van μ. We zullen deze M noemen en hem definieren voor iedere continue en stuksgewijs lineaire functie ϕ, welke op een eindig vak gedefinieerd is en geen constante stukken bevat.

Onder een <u>compleet stuk</u> van ϕ verstaan we de restrictie van ϕ tot een lineair stuk dat niet door een langer lineair stuk van ϕ overdekt wordt; kortom,een stuk "van hoek- of eindpunt tot volgend hoek- of eindpunt".

Onder $M\phi$ willen we verstaan:

> de unie van alle μk en alle d, waarbij k achtereenvolgens ieder stijgend compleet stuk van ϕ voorstelt en d ieder dalend compleet stuk van ϕ.

We merken op dat $M\phi$ zelf ook weer tot het bovengedefinieerde ϕ-type behoort, dat $M\phi$ het definitievak van ϕ continu afbeeldt op het waardevak van ϕ, dat $M\phi = \mu\phi$ voor iedere stijgende lineaire ϕ

en dat $M\phi = \phi$ voor iedere dalende lineaire ϕ . Ook de volgende eigenschap is voor ons doel belangrijk:

(E 1) Ieder dalend compleet stuk van ϕ is tevens een dalend compleet stuk van $M\phi$.

Nu komt de constructie van de aangekondigde functie f. Hij zal voor de dag komen als limietfunctie van een oneindige rij $f_0, f_1, f_2, \dots\dots\dots$

Zij f_0 de hoofddiagonaal van het vierkant $[0,1] \times [0,1]$. Zij voor iedere $n \geqslant 1$ de functie f_n gedefinieerd door

$$f_n = M f_{n-1}.$$

Klaarblijkelijk is dan

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant 2^{-n} \quad \text{voor alle n en alle x.}$$

Met behulp van de driehoeksongelijkheid (over absoluten) haalt men hieruit:

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant 2^{1-p} \quad \text{voor alle p,q met } 0 \leqslant p \leqslant q \text{ en voor alle x.}$$

Een bekende stelling verzekert nu het bestaan van een functie f die voor elke $x \in [0,1]$ voldoet aan

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

en die bovendien continu is op $[0,1]$. Uit (E_1) en uit de betrekking $f_{n+1} = M f_n$ $(n \geqslant 0)$ volgt nog:

E(2) De curve f overdekt ieder dalend stuk van iedere f_n.

Rest nog, te bewijzen dat f de zware omkeereigenschap bezit.

Zij y_0 een getal uit $[0,1]$. Op het dalende complete stuk van f_1, dat we d_1 zullen noemen, ligt dan een punt $P_1(x_1,y_0)$ met $f_1(x_1) = y_0$, dus ook met

$$f(x_1) = y_0.$$

Dit laatste volgt uit (E_2). Het stuk d_1 wordt zeker geflankeerd door twee dalende complete stukken van f_2, zeg d_2 en d_2^*, die elk de halve hoogte van d_1 hebben en wier gezamenlijk waardebereik dat van d_1 overdekt. Minstens een van beide stukken d_2 en d_2^* bevat daarom een punt $P_2(x_2, y_0)$ met

$$f(x_2) = y_0 \quad \text{en} \quad x_2 \neq x_1.$$

Over het nieuw-gevonden stuk kunnen we dezelfde opmerking maken als over d_1, maar nu met hogere indices voor de letters d, P, x en f. Gelukkig blijft de index van y onveranderd.

Zo voortgaande zal men steeds nieuwe x_n vinden met $f(x_n) = y_0$, terwijl geen enkele x_n gelijk is aan enige x_i met lagere index.

<u>Opmerking</u>. De geconstrueerde f bezit nog een ongebruikelijke eigenschap. Hij stijgt nergens; hij daalt bijna overal, met een relatieve helling ≤ -9, maar hij slaagt er toch in om van 0 naar 1 op te klimmen.