STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 21

Over invarianties van eigenschappen gedefiniëerd op klassen topologische ruimten

door

J. van der Slot

juni 1966

Over invarianties van eigenschappen gedefiniëerd op klassen topologische ruimten

Definitie. Een klasse topologische ruimten $\underline{D}$ heet compleet wanneer aan de volgende axioma's voldaan is.

1. Iedere deelverzameling van een ruimte uit $\underline{D}$ is met de relatief topologie een ruimte uit $\underline{D}$.
2. Ieder topologisch product van ruimten uit $\underline{D}$ behoort tot D.
3. Iedere topologische som van ruimten uit $\underline{D}$ behoort tot $\underline{D}$.

De Hausdorffruimten, de reguliere ruimten en de volledig reguliere ruimten vormen complete klassen topologische ruimten.

Stelling 1. Zij $\mathcal{E}$ een topologische eigenschap gedefiniëerd op een complete klasse topologische ruimten $\underline{D}$. Beschouw de volgende kenmerken:

1. De eigenschap $\mathcal{E}$ is een invariant voor open deelverzamelingen.
2. De eigenschap $\mathcal{E}$ is een invariant voor gesloten deelverzamelingen.
3. De eigenschap $\mathcal{E}$ is een invariant voor willekeurige topologische producten.
4. Iedere ruimte uit $\underline{D}$ is deelruimte van een ruimte uit $\underline{D}$ met eigenschap $\mathcal{E}$.

Wanneer elke ruimte uit $\underline{D}$ een Hausdorffruimte is, dan geldt:

Als $\mathcal{E}$ voldoet aan 1, 2 en 3 dan is $\mathcal{E}$ een erfelijke eigenschap.

Als $\mathcal{E}$ voldoet aan 1, 2, 3 en 4 dan heeft iedere ruimte uit $\underline{D}$ eigenschap $\mathcal{E}$.

Bewijs. Veronderstel dat $\mathcal{E}$ voldoet aan 1, 2 en 3. Zij Y een ruimte uit $\underline{D}$ met eigenschap $\mathcal{E}$ en $X \subset Y$. We moeten bewijzen dat X eigenschap $\mathcal{E}$ heeft.

Omdat Y een T_1-ruimte is, is X te schrijven als doorsnede van een stelsel open verzamelingen van Y:

$$X = \bigcap \{O_\alpha \mid \alpha \in A\} \quad (O_\alpha \text{ open in } Y \text{ voor } \alpha \in A).$$

Beschouw de volgende deelverzameling Δ van het topologische product $\pi\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$:

$$\Delta = \{x \in \pi\{O_\alpha \mid \alpha \in A\} \mid x_{\alpha_1} = x_{\alpha_2}, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in A\}.$$

Het is niet moeilijk in te zien dat X homeomorf is met de deelruimte Δ. Omdat $\mathcal{E}$ een topologische eigenschap is blijft er dus slechts over te bewijzen dat Δ de eigenschap $\mathcal{E}$ heeft.
Elke ruimte $O_\alpha \subset Y$ behoort tot $\underline{D}$ omdat $\underline{D}$ een complete klasse is en heeft bovendien de eigenschap $\mathcal{E}$ volgens 1.
$\pi\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$ behoort ook tot $\underline{D}$ en dit topologische product heeft eigenschap $\mathcal{E}$ volgens 3.
Uit het feit dat elke O_α een Hausdorffruimte is volgt dat Δ een gesloten deelverzameling is van $\pi\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Δ heeft dus ook eigenschap $\mathcal{E}$ volgens 2.

Veronderstel nu dat $\mathcal{E}$ voldoet aan 1, 2, 3 en 4. Zij X een willekeurige ruimte uit $\underline{D}$.
Volgens 4 is X deelruimte van een ruimte Y van $\underline{D}$ met eigenschap $\mathcal{E}$. Omdat $\mathcal{E}$ aan 1, 2 en 3 voldoet volgt uit het bovenstaande dat $\mathcal{E}$ een erfelijke eigenschap is. I.h.b. heeft nu iedere deelruimte van Y de eigenschap $\mathcal{E}$ d.w.z. ook X heeft de eigenschap $\mathcal{E}$.

Toepassingen. Stel $\underline{D}$ de klasse der volledig reguliere ruimten. De volgende eventuele eigenschappen van volledig reguliere ruimten voldoen gedeeltelijk aan 1, 2, 3 en 4 van stelling 1.

	1	2	3	4
a. compact	–	+	+	+
b. locaal compact	+	+	–	+
c. co-compact	+	–	+	+
d. eigenschap k	+	+	–	+
e. voll. uniformizeerbaar	–	+	+	+
f. reëel compact	–	+	+	+

Bij alle bovenstaande eigenschappen is met behulp van stelling 1 precies na te gaan aan welk invariantie-kenmerk van 1, 2, 3 en 4 de eigenschap niet voldoet.

Beschouw bijvoorbeeld de eigenschap k. Het is niet moeilijk te bewijzen dat de eigenschap k voor volledig reguliere ruimten een invariant is voor het nemen van open en gesloten deelverzamelingen.
Omdat bovendien iedere volledig reguliere ruimte ingebed kan worden in een compacte Hausdorffruimte (dus volledig reguliere ruimte met eigenschap k) voldoet de eigenschap k aan 1, 2 en 4.
Het is nu onmogelijk dat de eigenschap k een invariant is voor willekeurige topologische producten, want dan zou uit stelling 1 volgen dat iedere volledig reguliere ruimte de eigenschap k heeft.

Het is mogelijk stelling 1 te dualiseren.
We zullen eigenschappen beschouwen die invariant zijn voor topologische sommen en perfecte afbeeldingen.

Stelling 2. Zij $\mathcal{E}$ een eigenschap gedefiniëerd op een complete klasse (Hausdorff)ruimten met de volgende kenmerken:

1. $\mathcal{E}$ is een invariant voor eindige topologische sommen.
2. $\mathcal{E}$ is een invariant voor perfecte afbeeldingen.

Dan geldt: Als X een ruimte uit de klasse $\underline{D}$ is die vereniging is van eindig veel gesloten verzamelingen met eigenschap $\mathcal{E}$, dan heeft X eigenschap $\mathcal{E}$.

Bewijs. Stel $X = \bigcup\{X_i \mid (i = 1, 2, \ldots, n\}$; X_i gesloten in X, X_i heeft eigenschap $\mathcal{E}$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$ en veronderstel verder dat X een ruimte uit $\underline{D}$ is. Beschouw de topologische som X' van de deelruimten X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Stel $X' = \bigcup_{i=1}^{n} \{(x,i) \mid x \in X_i\}$.
Definiëer op X' de equivalentierelatie $\sim$ door $(x,i) \sim (y,j) \Leftrightarrow x = y$ $(i,j = 1, 2, \ldots, n)$. De equivalentieklassen zijn eindige puntverzamelingen van X en we identificeren deze tot één punt van X.
Noem de identificatieafbeelding i; we zullen bewijzen dat de verkregen identificatieruimte juist X is. Hiervoor is het voldoende te laten zien dat $i^{-1}S$ gesloten is in X' d.e.s.d. wanneer S gesloten is in X.
$i^{-1}S$ gesloten in X' $\Longrightarrow S \cap X_i$ gesloten in X voor $i = 1, 2, \ldots, n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow S = \bigcup\{S \cap X_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ is gesloten in X (als vereniging van eindig veel gesloten verzamelingen).

S gesloten in X $\Rightarrow$ S $\cap X_i$ gesloten in X voor i = 1, 2, ..., n $\Rightarrow$ i^{-1}S gesloten in X'. De identificatieafbeelding i is verder een gesloten afbeelding en heeft de eigenschap dat het volledig origineel van ieder punt van X onder i, uit eindig veel punten bestaat.
Omdat D een complete klasse is behoort X' tot D.
Omdat elke X_i voor i = 1, 2, ..., n de eigenschap $\mathcal{E}$ heeft volgt uit 1 dat ook X' de eigenschap $\mathcal{E}$ heeft.
De afbeelding i is een perfecte afbeelding van X' op X, dus volgens 2 heeft ook de ruimte X de eigenschap $\mathcal{E}$.
Hiermee is de stelling bewezen.

Vele topologische eigenschappen zijn invariant voor eindige topologische sommen en perfecte afbeeldingen.
We noemen o.a.: compact, locaal compact, paracompact, Čech volledig, co-compact, normaal, eigenschap k.
Toepassing van stelling 2 geeft b.v. het volgende resultaat:
Een ruimte die vereniging is van eindig veel gesloten co-compacte verzamelingen, is co-compact.

Stelling 3. Stel $\mathcal{E}$ een topologische eigenschap gedefiniëerd op een complete klasse (Hausdorff)ruimten met de volgende kenmerken.

1. $\mathcal{E}$ is een invariant voor willekeurige topologische sommen.
2. $\mathcal{E}$ is een invariant voor gesloten continue afbeeldingen.

Dan geldt: Een ruimte X uit D die vereniging is van een lokaal eindig stelsel gesloten verzamelingen met eigenschap $\mathcal{E}$, heeft zelf ook eigenschap $\mathcal{E}$.

Bewijs. Analoog aan de vorige stelling (merk op dat een vereniging van een lokaal eindig stelsel gesloten verzamelingen gesloten is).

Eigenschappen die aan 1 en 2 van de vorige stelling voldoen zijn o.a. normaliteit, lokaal compact, paracompact, eigenschap k.

Men bewijst nu ook gemakkelijk:

Stelling 4. Zij $\mathcal{E}$ een eigenschap gedefiniëerd op een complete klasse topologische ruimten $\underline{D}$ met de kenmerken:

1. $\mathcal{E}$ is een invariant voor topologische sommen.
2. $\mathcal{E}$ is een invariant voor open continue afbeeldingen.

Dan geldt: Als de ruimte X vereniging is van open deelverzamelingen met eigenschap $\mathcal{E}$, dan heeft X eigenschap $\mathcal{E}$.

Stelling 4 staat duaal tegenover stelling 1.