STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 23

Ruimten met minimale basis

door

P. van Emde Boas

november 1966

§1. Inleiding

Laat $\{X;\mathcal{O}\}$ een topologische ruimte zijn.
Een stelsel deelverzamelingen $\mathcal{B}$ heet een basis voor de topologie $\mathcal{O}$ als iedere $O \in \mathcal{O}$ te schrijven is als vereniging van elementen $B \in \mathcal{B}$
We zullen een basis $\mathcal{B}$ minimaal noemen als voor iedere $B \in \mathcal{B}$ de familie $(\mathcal{B} \setminus \{B\})$ geen basis meer is.

Een ruimte die een minimale basis bezit zal een miniruimte worden genoemd. Bekende voorbeelden van Miniruimten zijn de discrete en de indiscrete ruimte. We zullen zien dat een T_1 miniruimte noodzakelijk discreet is. Hierop is het ervaringsfeit dat er weinig nette voorbeelden van miniruimten bestaan terug te voeren.

In dit rapport zal de eigenschap "$\{X,\mathcal{O}\}$ bezit een minimale basis" op andere wijze worden gekarakteriseerd. De eigenschap is equivalent met de mogelijkheid de topologie te definiëren in termen van een partiële ordening en een deelverzameling $C \subset X$ van "centrale" punten.

Aan de andere kant blijkt het mogelijk te zijn iedere topologische T_0 ruimte in te bedden in een T_0-miniruimte. (Deze inbedding is zonder meer te generaliseren voor niet T_0 ruimten; aangezien iedere ruimte door identificatie van ononderscheidbare punten tot een T_0 ruimte gemaakt kan worden zonder de topologie essentiëel te wijzigen zal ik hier niet op in gaan.)

Een speciale klasse van miniruimten wordt gevormd door de neutrale ruimten. Dit zijn topologische ruimten waar ook de familie van gesloten verzamelingen een topologie vormt.
Neutrale ruimten werden eerder door de schrijver en anderen gebruikt om voorbeelden te construeren om de onafhankelijkheid van een aantal topologische eigenschappen aan te tonen (zie WN 18).

Alle in dit rapport behandelde ruimten worden geacht T_0 ruimten te zijn.

§2. Neutrale ruimten en centrale punten

Def. 1 : Zij $\{X,\mathcal{O}\}$ een topologische ruimte en zij $\mathcal{G}$ de familie der gesloten deelverzamelingen van X. Dan heet de ruimte $\{X,\mathcal{O}\}$ neutraal indien de familie $\mathcal{G}$ een topologie voor X is. De ruimte $\{X,\mathcal{G}\}$ heet de contraruimte van $\{X,\mathcal{O}\}$.

Prop. 1 : De volgende equivalentie geldt:

a) $\{X,\mathcal{O}\}$ is een neutrale ruimte;

b) de doorsnede van willekeurig veel open verzamelingen is open;

c) de vereniging van willekeurig veel gesloten verzamelingen is gesloten;

d) ieder punt bezit een kleinste open omgeving:
(d.w.z. $\forall p \, \exists_{O(p) \in \mathcal{O}} [p \in O \in \mathcal{O} \Longrightarrow O(p) \subset O]$.

Met O(p) zal in het vervolg altijd een kleinste open omgeving van p worden bedoeld.

Bewijs : a) ==> b) ==> c) ==> a) is duidelijk een gevolg van de definitie.

b) ==> d) de doorsnede van alle open verzamelingen die p omvatten is de kleinste open omgeving van p.

d) ==> b) stel $p \in \bigcap_{\alpha \in I} O_\alpha$ $O_\alpha \in \mathcal{O}$ dan $p \in O_\alpha$ dus
$p \in O(p) \subset O_\alpha$ voor iedere $\alpha \in I$ dan $O(p) \subset \bigcap_{\alpha \in I} O_\alpha$.
De doorsnede van willekeurig veel open verzamelingen is omgeving van ieder van zijn punten en daarom open.

Def. 2 : Een topologische ruimte heet een miniruimte als de ruimte een minimale basis bezit; dat wil zeggen er is een basis waarvan geen enkele echte deelfamilie een basis is.

Prop. 2 : Een neutrale ruimte is een miniruimte.

<u>Bewijs</u> : De verzameling $\{O(p) \mid p \in X\}$ is een basis voor de topologie daar $O \in \mathcal{O} \iff O = \bigcup_{p \in O} O(p)$.

Stel $O(p)$ is te schrijven als vereniging van basiselementen. Dan volgt $p \in O(q)$ voor zekere q, dus $O(p) \subset O(q)$. Maar ook $O(q) \subset O(p)$, dus $O(q) = O(p)$.

Nu zit p in iedere omgeving van q en q in iedere omgeving van p. Aangezien de ruimte T_0 is volgt $p = q$. Hieruit volgt dat de basis $\{O(p) \mid p \in X\}$ minimaal is.

<u>Def. 3</u> : Stel dat in een willekeurige topologische ruimte het punt c een minimale omgeving $O(c)$ bezit. Dan noem ik c een centraal punt en $O(c)$ de bij c behorende centraal open verzameling.

<u>Prop. 3</u> : Zij c een centraal punt en $O(c)$ de bij c horende centraal open verzameling dan zit $O(c)$ in iedere basis voor de topologie.

<u>Bewijs</u> : Analoog als prop. 2.

Blijkbaar is een neutrale ruimte gekarakteriseerd door het feit dat ieder punt centraal is (zie prop. 1 d)).

Uit prop. 2 volgt ook nog:

<u>Gevolg 1</u> : Zij X een neutrale ruimte dan is gew $X = ||X||$.

Een gevolg van de eigenschap T_0 is

<u>Gevolg 2</u> : Als c en d centrale punten zijn van $\{X, \mathcal{O}\}$ dan geldt $c \neq d \iff O(c) \neq O(d)$.

§3. <u>Miniruimten</u>

<u>Prop. 4</u> : Een basis $\mathcal{B}$ voor een topologische ruimte $\{X, \mathcal{O}\}$ is dan en slechts dan minimaal als iedere $B \in \mathcal{B}$ een centraal open verzameling is behorende bij een punt $c_B \in X$.

<u>Bewijs</u> : Uit prop. 3 volgt dat een basis bestaande uit centraal open verzamelingen minimaal is.

Stel dat $\mathcal{B}$ minimaal is en B is niet centraal open.
Dan is er voor iedere $x \in B$ een $B(x) \in \mathcal{B}$ zodanig dat $B(x)$ x omvat en een echt deel van B is. Dan geldt $B \neq B(x)$ $\forall x \in B$ en $B = \bigcup_{x \in B} B(x)$ dus kan men B uit de basis weglaten.
Aangezien $\mathcal{B}$ minimaal is volgt hieruit een tegenspraak.

Een gevolg van deze stelling is

<u>Prop. 5</u> : Zij $\{X, \mathcal{O}\}$ een miniruimte. Dan bezit $\{X, \mathcal{O}\}$ één en slechts één minimale basis.

<u>Bewijs</u> : Zij $\mathcal{B}$ een minimale basis. Volgens proposities 3 en 4 zit $\mathcal{B}$ in iedere basis voor de topologie. Dan is een basis dan en slechts dan minimaal als ze gelijk is aan $\mathcal{B}$.

De centrale punten en de centraal open verzamelingen karakteriseren blijkbaar de gehele topologie. We zullen in het vervolg de verzameling der centrale punten aangeven door C. Verder definiëren we op X een partiële ordening.

<u>Def. 4</u> : $x \leq y \iff [x \in O \in \mathcal{O} \implies y \in O]$

De reflexiviteit en de transitiviteit zijn duidelijk.
De relatie $\leq$ is antisymmetrisch daar de ruimte T_0 is verondersteld.

Een equivalente formulering van definitie 4 is

<u>Def. 4'</u> : $x \leq y \iff [x \in B \in \mathcal{B} \implies y \in B]$

Als c een centraal punt is volgt:
$c \leq x$ dan en slechts dan als $x \in O(c)$.

<u>Stelling 1</u>: Zij $\{X, \mathcal{O}\}$ een miniruimte. Zij $\leq$ de boven gedefiniëerde partiële ordening en C de verzameling der centrale punten dan gelden de volgende drie eigenschappen:

a) $\forall_{x \in X} \exists_{c \in C} [c \leq x]$

b) $\forall_{a,b \in C} \forall_{x \in X} [[a \leq x,\ b \leq x] \implies \exists_{y \in C} [a \leq y, b \leq y, y \leq x]]$

c) $\forall_{x,y \in X} [[\forall_{c \in C} [c \leq x \implies c \leq y]] \implies x \leq y]$.

Bewijs : a) $x \in X \Longrightarrow x \in O(c)$ voor een $c \in C$ dus $c \leq x$.

b) $O(a) \cap O(b)$ is een open verzameling, dus

$\forall_{x \in O(a) \cap O(b)} \exists_{y \in C}$ met $x \in O(y) \subset O(a) \cap O(b)$

dus $\forall_x$, $a \leq x$, $b \leq x \Longrightarrow \exists_y$ met $a \leq y$, $b \leq y$ en $y \leq x$.

c) Stel voor iedere $O(c)$ volgt $x \in O(c) \Longrightarrow y \in O(c)$;

aangezien de $O(c)$ een basis vormen geldt dus ook

$\forall_{O \in \mathcal{O}}[x \in O \Longrightarrow y \in O]$, dus $x \leq y$ geldt.

De in stelling 1 genoemde eigenschappen a), b) en c) blijken de gewenste karakterisering van een miniruimte op te leveren.

Stelling 2: Zij X een verzameling, C een deelverzameling van X en $\leq$ een partiële ordening op X terwijl a), b) en c) gelden:

a) $\forall_{x \in X} \exists_{c \in C}[c \leq x]$

b) $\forall_{a,b \in C} \forall_{x \in X}[[a \leq x, b \leq x] \Longrightarrow \exists_{y \in C}[a \leq y, b \leq y, y \leq x]]$

c) $\forall_{x,y \in X}[[\forall_{c \in C}[c \leq x \Longrightarrow c \leq y]] \Longrightarrow x \leq y]$

Definiëer vervolgens voor $c \in C$ de verzameling $O(c)$ als volgt:

$O(c) = \{x \in X \mid c \leq x\}$.

Dan is $\{O(c)\}_{c \in C}$ een basis voor een T_0 topologie op X. Deze topologie bezit $\{O(c)\}_{c \in C}$ als minimale basis en C als verzameling van centrale punten.

De aldus gedefiniëerde topologie wordt aangegeven met $I_{\leq}^{C}$.

Bewijs : I. $\{O(c)\}_{c \in C}$ is een basis. Immers uit a) volgt dat $X = \bigcup_{c \in C} O(c)$, uit b) volgt dat $O(a) \cap O(b) = \bigcup_{\substack{a \leq c \\ b \leq c}} O(c)$.

II. In de aldus gedefiniëerde topologie geldt

$$\forall_{x,y \in X} \forall_{O \in I_{\leq}^{C}}[[x \in O \Longrightarrow y \in O] \Longleftrightarrow x \leq y].$$

Stel $x \in O \Longrightarrow y \in O$. Dan geldt i.h.b.

$\forall_{c \in C}[x \in O(c) \Longrightarrow y \in O(c)]$ dus $\forall_{c \in C}[c \leq x \Longrightarrow c \leq y]$

en c) impliceert $x \leq y$.

Stel $x \leq y$ en $x \in O$ dan $x \in O(c)$ voor zekere c, dus $c \leq x$
$x \leq y$ ==> $c \leq y$ dan ook $y \in O(c)$, dus $y \in O$.

III. O(c) is centraal open met c als centraal punt.
Zij $c < p$ dan $c \in O$ ==> $p \in O$ (zie II).
Dus $p \in O(c)$ ==> $[c \in O$ ==> $p \in O]$.
Blijkbaar is O(c) de kleinste open omgeving van c.

IV. De topologie is T_0. Immers $x \leq y$ en $y \leq x$ ==> $x = y$.
Dus "x in iedere omgeving van y en y in iedere omgeving van x" impliceert $x = y$.

V. Als O centraal open is en X centraal punt van O dan volgt $x \in C$ en $O = O(x)$.

Stel $x \in O$ dan $\exists_c$ met $x \in O(c) \subset O$ maar x is centraal in O centraal open. Dit wil zeggen $O = O(c)$.
Dan hebben c en x dezelfde kleinste omgeving. Aangezien de ruimte T_0 is volgt $c = x$.

Gevolg van III en V: De $I^C_{\leq}$-centrale punten zijn juist de punten uit de verzameling C. De bijbehorende centraal open verzamelingen zijn juist de O(c). Aangezien $\{O(c)\}_{c \in C}$ blijkbaar een basis is bestaande uit centraal open verzamelingen is het een minimale basis. Daarmede is stelling 2 bewezen.

Indien een miniruimte gegeven is kan volgens stelling 1 een partiële ordening $\leq$ en een verzameling C van centrale punten met eigenschappen a), b) en c) gevonden worden. Stelling 2 leert dat bij deze $\leq$ en C weer een miniruimte behoort. Dit is juist weer de oorspronkelijke ruimte.

Immers: c centraal in O(c) centraal open <==>

$$[c \leq x \iff x \in O(c)] \iff O(c) \subset I^C_{\leq}.$$

Gecombineerd geven stelling 1 en stelling 2 dus de volgende

<u>Karakteriseringsstelling:</u> $\{X,\mathcal{O}\}$ is een miniruimte $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O} = I^C_{\leq}$.

Hierbij is C de verzameling van centrale punten en $\leq$ de door $\mathcal{O}$ geïnduceerde partiële ordening en gelden de regels a), b) en c).

Om te bewijzen dat een ruimte een miniruimte is is het dus voldoende een C en een $\leq$ te vinden zodanig dat de topologie te schrijven is als $I^C_{\leq}$.

§4. Invarianties

<u>Prop. 6</u> : De disjuncte topologische vereniging van een stelsel miniruimten is weer een miniruimte.

<u>Bewijs</u> : Zij $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ (X_α disjunct) en $\mathcal{B}_\alpha$ voor iedere X_α een minimale basis dan is $\bigcup_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ een minimale basis voor X.

<u>Prop. 7</u> : Het doosproduct van een stelsel miniruimten is weer een miniruimte.

<u>Bewijs</u> : Zij $X = \prod_\alpha X_\alpha$ en $\mathcal{B}_\alpha$ een minimale basis van X_α. Dan is de verzameling $\mathcal{B} = \{\prod_\alpha B_\alpha \mid B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha\}$ een minimale basis voor de doosproduct topologie op X.

Dat $\mathcal{B}$ een basis is is duidelijk. Bovendien is als p_α centraal punt is van B_α het punt $(p_\alpha)_\alpha$ centraal punt van $\prod_\alpha B_\alpha$. Dus iedere verzameling in $\mathcal{B}$ is centraal open.

<u>Prop. 8</u> : Een open deelruimte van een miniruimte is weer een miniruimte.

<u>Bewijs</u> : Zij A open in X en C de verzameling van centrale punten in X. X is een miniruimte $\{X, I^C_{\leq}\}$.

Dan geldt voor iedere open $O \in \mathcal{O}$ dat $O \cap A = \bigcup_{c \in A \cap C \cap O} O(c)$.

Verder is iedere $O(c)$ met $c \in C \cap A$ zowel open in X als relatief open in A.

Hieruit volgt dat de familie $\{O(c) \mid c \in C \cap A\}$ een basis is voor de relatief topologie op A. Aangezien iedere $O(c)$ uit deze familie centraal open is is de basis minimaal.

Prop. 9 : Een gesloten deelruimte van een miniruimte is weer een miniruimte.

Bewijs : Zij $\{X, I^{C}_{\leq}\}$ een miniruimte en B gesloten in X.
Nu volgt uit het feit dat B gesloten is dat:
$O(c) \cap B \neq \emptyset \iff c \in B$.

Hieruit is af te leiden $B = \bigcup_{c \in B \cap C} (O(c) \cap B)$.

De familie $\{O(c) \cap B \mid c \in B \cap C\}$ vormt een basis voor de relatief topologie. Al deze verzamelingen zijn centraal open in B dus B is een miniruimte.

Voor neutrale ruimten geldt eenvoudig:

Prop. 10 : Iedere deelruimte van een neutrale ruimte is weer neutraal.

Bewijs : Zij $\{X, I^{X}_{\leq}\}$ een neutrale ruimte en $A \subset X$. Dan vormt de familie $\{O(a) \cap A \mid a \in A\}$ een basis voor de relatief topologie op A. Iedere verzameling uit deze familie is in A centraal open dus A is als een deelruimte een miniruimte. Verder is ieder punt in A centraal punt van een open verzameling uit deze basis dus de ruimte A is neutraal.

Opm. 1 : Prop. 7 geldt niet voor gewone producten: Een tegenvoorbeeld is het discontinuum van Cantor als product van aftelbaar veel doubletten.

Opm. 2 : Prop. 10 geldt niet voor miniruimten: Een tegenvoorbeeld is als volgt te construeren:
X is de verzameling der reële getallen, $\leq$ de gewone ordening "kleiner of gelijk" en C de verzameling der rationale getallen.
De deelruimte der irrationale getallen is nu beslist geen miniruimte.

§5. Een minificatie van een topologische ruimte

Stelling 3: Iedere topologische T_0 ruimte kan dicht worden ingebed in een T_0 miniruimte.

Bewijs : Zij $\{X,\mathcal{O}\}$ een topologische T_0 ruimte en $\mathcal{B}$ een basis die de lege verzameling niet bevat.
Kies bij iedere niet centraal open verzameling B uit een punt c_B. $c_B \neq c_{B'}$ als $B \neq B'$, $c_B \notin X$. We gaan deze punten gebruiken om iedere basis verzameling centraal open te maken.

Definiëer de ruimte $\{\hat{X}_{\mathcal{B}},\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{B}}\}$ als volgt:

$\hat{X}_{\mathcal{B}} = X \cup \{c_B \mid B \in \mathcal{B},\ B \text{ niet centraal open}\}$.

Verder definiëren we een basis $\{\hat{O}\}_{O \in \mathcal{O}}$ als volgt:

$\hat{O} = O \cup \{c_B \mid B \in \mathcal{B},\ B \subset O,\ B \text{ niet centraal open}\}$.

Hieruit volgen o.a. de volgende uitspraken:

1e. $\hat{\emptyset} = \emptyset$, want $\emptyset \notin \mathcal{B}$
2e. $\hat{O}_1 \cap \hat{O}_2 = \widehat{O_1 \cap O_2}$, want $B \subset O_1 \cap O_2 \iff B \subset O_1$ en $B \subset O_2$
3e. $O_1 \subset O_2 \iff \hat{O}_1 \subset \hat{O}_2$, want $B \subset O_1 \implies B \subset O_2$
4e. $\hat{O} = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset O}} \hat{B}$, want $B \subset O \implies c_B \in \hat{B} \subset \hat{O}$

Uit 2e volgt dat de familie $\{\hat{O} \mid O \in \mathcal{O}\}$ een basis is voor een topologie $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{B}}$. Uit 4e volgt dat de familie $\{\hat{B} \mid B \in \mathcal{B}\}$ een basis is voor dezelfde topologie.

Nu geldt bovendien nog: B niet centraal open en $c_B \in \hat{O} \implies B \subset O \implies \hat{B} \subset \hat{O}$.
Als B centraal open was dan is er een $q_B \in X$ met $q_B \in \hat{O} \implies q_B \in O \implies B \subset O \implies \hat{B} \subset \hat{O}$.
Hieruit volgt dat de familie $\{\hat{B} \mid B \in \mathcal{B}\}$ een basis is bestaande uit centraal open verzamelingen:

$\{\hat{X}_{\mathcal{B}},\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{B}}\}$ is dus een miniruimte.

$X \cap \hat{B} = B \neq \emptyset$ voor iedere $B \in \mathcal{B}$ dus X ligt dicht in X . Verder gelden de formules.

$\forall_{O\in\mathcal{O}}[O = \hat{O}\cap X]$ en

$\forall_{B\in\mathcal{B}}[X\cap\hat{B} = B\in\mathcal{O}]$.

Samen impliceren laatste twee formules dat X topologisch ligt ingebed in $\hat{X}_{\mathcal{B}}$.

Tenslotte dient bewezen te worden dat $\hat{X}_{\mathcal{B}}$ een T_0 ruimte is. $x,y\in\hat{X}_{\mathcal{B}}$ moeten dus zijn te onderscheiden. Voor $x,y\in X$ volgt dit uit het feit dat X een T_0 ruimte is.
Zij $x\in X$, $y = c_B$. Stel $x\in\hat{B}$ dan $x\in B$. B niet centraal open dus er is een B' met $x\in B'\subset B$, $B'\neq B$. Dan $x\in\hat{B}'$, $c_B\notin\hat{B}'$.

Zij $x=c_{B_1}$, $y = c_{B_2}$, $B_1\neq B_2$. Stel $y\in\hat{B}_1$, dan geldt $B_2\subset B_1$, $B_2\neq B_1$ dus $x\notin\hat{B}_2$.
$\hat{X}_{\mathcal{B}}$ is dus een T_0 ruimte.

<u>Opm. 3</u> : De minificatie kan in het algemeen niet minimaal geconstrueerd worden. Als $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ twee bases van $\mathcal{O}$ zijn en $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}_2$ dan volgt dat $\hat{X}_{\mathcal{B}_1}$ een echte deelruimte is van $\hat{X}_{\mathcal{B}_2}$.

<u>Opm. 4</u> : Als $\mathcal{B}$ een minimale basis is volgt $\hat{X}_{\mathcal{B}} = X$.

<u>Opm. 5</u> : De grootste basis van een topologie is $\mathcal{O}$ zelve. Toch is in het algemeen $\hat{X}_{\mathcal{O}}$ geen maximale minificatie. Zij $\{O_n\}$ een stijgende rij open verzamelingen. Dan is $\bigcup_{n=1}^{\infty}\hat{O}_n$ een open verzameling uit $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}}$ die niet centraal open is.
Dan is $\hat{X}_{\mathcal{O}}$ dus een echte deelruimte van $\widehat{(\hat{X}_{\mathcal{O}})}_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}}}$ etc.

§6. <u>Enkele andere eigenschappen</u>

<u>Prop. 11</u> : Een T_1 miniruimte is discreet.

<u>Bewijs</u> : Zij O centraal open en c het centrale punt van O. In een T_1 ruimte geldt:

$$[\forall_{O\in\mathcal{O}}[c\in O \implies d\in O]] \implies c = d.$$

Hieruit volgt $O = \{c\}$.

Iedere centraal open verzameling bestaat dus uit één punt. Aangezien ieder punt van X bevat is in een centraal open verzameling zijn alle éénpuntsverzamelingen open. De ruimte is dus discreet.

Prop. 12 : Iedere miniruimte bevat een dicht liggende neutrale deelruimte.

Bewijs : De verzameling der centrale punten is een dicht liggende neutrale deelruimte.

Opm. 6 : De omkering geldt niet: Neem een willekeurige Hausdorff compactificatie van de natuurlijke getallen.

Prop. 13 : Zij $\{X, I^X_{\leq}\}$ een neutrale ruimte. Dan is $\{X, I^X_{\geq}\}$ de contraruimte van X.

Bewijs : De kleinste gesloten verzameling die p omvat is gegeven door: $\{x \in X \mid G \text{ gesloten, } p \in G \implies x \in G\} =$
$= \{x \in X \mid O \text{ open, } X \in O \implies p \in O\} = \{x \in X \mid x \leq p\} =$
$= \{x \in X \mid p \geq x\}$. Dit is juist de kleinste open omgeving van p in de topologie $I^X_{\geq}$.

Een eigenschap die zich bijzonder makkelijk laat herkennen in de partiële ordening is compactheid:

Prop. 14 : Een miniruimte is compact d.e.s.d. als er een eindig aantal centrale punten bestaat zodat ieder punt in de ordening vooraf wordt gegaan door één ervan.
Dus $\exists_{c_1 \ldots c_n}$ met $\bigcup_{i=1}^{n} O(c_i) = X$.

Het bewijs hiervan is duidelijk.