7604NL

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 27

Een structuurconstante bepaald voor $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_6$

door

P.C. Baayen en P. van Emde Boas

Juli 1969

Een structuurconstante bepaald voor $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_6$

door

P.C. Baayen en P. van Emde Boas

juli 1969

Voor een eindige additieve Abelse groep $G \cong C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \ldots \oplus C_{n_k}$ met $n_1 \mid n_2 \mid \ldots\ldots \mid n_k$ stellen we $\Lambda(G) = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k - k$. Verder zij $\lambda(G)$ het kleinste getal zodanig dat iedere rij van elementen uit G met lengte $> \lambda(G)$ een niet-lege deelrij met som nul bevat. Algemeen geldt $\lambda \geq \Lambda$. Het gelijkteken geldt in een groot aantal gevallen waaronder alle p-groepen, alle groepen die de directe som zijn van twee cyclische groepen en alle groepen met orde ≤ 95. (zie [1],[2],[3] en [4]). In [1] wordt aangetoond dat $G = (C_2)^4 \oplus C_6$ een voorbeeld is waarvoor $\lambda(G) > \Lambda(G)$. In deze notitie bewijzen we $\lambda(G) = \Lambda(G) + 1 = 10$ voor $G = (C_2)^4 \oplus C_6$.
Voor een algemene behandeling van dit probleem en de gebruikte notatie zie [1].

We schrijven G in de gedaante $(C_2)^5 \oplus C_3$. Elementen van G schrijven we als kolommen $\binom{x}{y}$ met $x \in (C_2)^5$. Zonodig schijven we x zelf als vector na een geschikte basis gekozen te hebben in $(C_2)^5$.

<u>Lemma 1</u>
Zij $S = \left(\binom{x_1}{y_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \binom{x_r}{y_r}\right)$ een $(C_2)^5 \oplus C_3$ - rij zodanig dat de $(C_2)^5$- rij $(x_1,\ldots\ldots,x_r)$ drie disjuncte nulrijen bevat; dan bevat S een nulrij.

Bewijs:

Laten T'_1 , T'_2 , T'_3 drie disjuncte nulrijen zijn uit $(x_1,\ldots\ldots,x_r)$; dan geldt voor de corresponderende rijen T_1 , T_2 , $T_3 \leq S$:

$$|T_1| = \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad |T_2| = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Aangezien $\lambda(C_3) = \Lambda(C_3) = 3$ bevat de C_3-rij (z_1, z_2, z_3) zeker een nulrij, zeg

$(z_1,\ldots,z_s)$. Dan is $T_1 \cup \ldots \cup T_s$ een nulrij bevat in S.

Opmerking:

Het gegeven bewijs ia een speciaal geval van de algemene bewijsmethode uit [1 , §3] .

Lemma 2:

Zij $S' = (x_1,\ldots\ldots,x_r)$ een $(C_2)^5$-rij van lengte $r \geq 9$. Dan bevat S' een nulrij met een lengte deelbaar door 4.

Bewijs:

Beschouw de $(C_2)^5 \oplus C_4$ - rij $S = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \begin{pmatrix} x_r \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Aangezien $\lambda((C_2)^5 \oplus C_4) = \Lambda((C_2)^5 \oplus C_4) = 8$ bevat de rij S een nulrij. Dit betekent dat S' een nulrij van lengte deelbaar door 4 bevat.

Stelling: $\lambda((C_2)^4 \oplus C_6) = \Lambda((C_2)^4 \oplus C_6) + 1 = 10$

Bewijs:

a) $\lambda((C_2)^4 \oplus C_6) \geq 10$.

De $(C_2)^4 \oplus C_6$ - rij S beschreven in onderstaande matrix bevat geen nulrij:

$$S = \begin{array}{|ccccc|ccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & (C_2)^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & C_3 \end{array}$$

De ongelovige Thomas kan het bewijs nalezen in [1].

b) $\lambda\ (\ (C_2)^4 \oplus C_6) < 11$

We moeten aantonen dat iedere $(C_2)^5 \oplus C_3$-rij van lengte 11 een nulrij bevat.

Stel $S = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \end{pmatrix} \right)$

Geval 1 : De C_3-rij $(y_1, \ldots, y_{11})$ bevat een nulrij T'' van lengte ≤ 2.

Zij nu T de corresponderende $(C_2)^5 \oplus C_3$ rij; dan mogen we veronderstellen dat $|T| = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ met $x \neq 0$. We kiezen een basis voor $(C_2)^5$ zodanig dat $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Laat V het complement van T in S zijn. Om dat de lengte van $V \geq 9$ is en omdat $\lambda(\ (C_2)^4 \oplus C_3) = \Lambda\ (\ (C_2)^4 \oplus C_3) = 8$ (zie [3]) bevat V een deelrij V met som

$$|V| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t = 0 \text{ of } 1.$$ Dan is het zij V hetzij $V \cup T$

een nulrij.

Geval 2: De C_3-rij $(y_1, \ldots\ldots, y_{11})$ bestaat uit 11 keer een vast element $\neq 0$. We mogen $y_i = 1$ veronderstellen.
Het probleem is nu gereduceerd tot het geven van een bewijs dat iedere $(C_2)^5$-rij van lengte 11 een nulrij van lengte 3, 6 of 9 bevat.

Geval 2a: Onder de rij $(x_1, \ldots\ldots, x_{11})$ komt het element nul voor, zeg x_{11}. Volgens lemma 2 bevatten de elementen $(x_1, \ldots\ldots, x_{10})$ een nulrij van lengte 4 of 8, zeg $(x_1, \ldots\ldots, x_k)$. Als k=4 bevat de rij $(x_5, \ldots\ldots, x_{10})$ een derde nulrij want $\lambda(\ (C_2)^5) = 5$. Als k = 8 dan is de nulrij $(x_1, \ldots, x_8)$ te splitsen in twee disjuncte nulrijen. In beide gevallen bevat $(x_1, \ldots, x_{11})$ 3 disjuncte nulrijen en volgens lemma 1 bevat S een nulrij.

Stel voor twee elementen x_p, x_q $6 \leq p, q \leq 11$ zijn de paren (i_p, j_p) en (i_q, j_q) disjunct.

Dan is $(x_p, x_q, x_{i_p}, x_{j_p}, x_{i_q}, x_{j_q})$ een nulrij van lengte 6.

Het is evenwel onmogelijk 6 verschillende paren uit 5 elementen te vormen zonder dat twee disjuncte paren optreden, en een tegenspraak volgt.

Hiermee is het bewijs van de stelling voltooid.

Inmiddels hebben de auteurs vernomen dat hetzelfde resultaat onafhankelijk is bewezen door D. Kruyswijk.

Aanvulling: Na het schrijven van deze notitie zijn opnieuw enkele nieuwe resultaten bekend geworden.
De identiteit $\lambda = \Lambda$ is nu ook bewezen voor de volgende series groepen:

VII) $G = C_3 \oplus C_3 \oplus C_{6m}$ voor $3 \nmid m$.
(als $3 | m$ is dit een speciaal geval van serie III uit [1]).

VIII) $G = C_{3.2^{n_1}} \oplus C_{3.2^{n_2}} \oplus C_{3.2^{n_3}}$

D. Kruyswijk ontwikkelde een methode om groepen te construeren waarvoor $\lambda > \Lambda$. Stelling 8,1 uit [1] is te beschouwen als een speciaal geval van deze methode. Andere toepassingen zijn:

$$\lambda((C_5)^{10} \oplus C_{15}) \geq \Lambda((C_5)^{10} \oplus C_{15}) + 1$$

Dit is een voorbeeld van een groep met oneven orde waarvoor $\lambda > \Lambda$)

$$\lambda((C_3)^3 \oplus C_6) \geq \Lambda ((C_3)^3 \oplus C_6) + 1$$

Dit is een voorbeeld van een groep met dimensie ≤ 4 waarvoor $\lambda > \Lambda$, waarmee het 3e onopgeloste probleem uit [1] in negatieve zin is opgelost.

Verwijzingen:

[1] . P van Emde Boas. A combinatorial problem on finite Abelian Groups II. Rapport ZW - 1969 - 007 Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[2] . P.C. Baayen. $(C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_{2n})!$ is true for odd n. Rapport ZW - 1969 - 006 Mathematisch Centrum, Amsterdam (in voorbereiding).

[3] . P.C. Baayen. Een combinatorisch vermoeden bevestigd voor $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_6$. WN 25. Mathematisch Centrum Amsterdam.

[4] . P. van Emde Boas. E. Wattel. Een structuur probleem opgelost voor $C_3 \oplus C_3 \oplus C_6$. WN 26. Mathematisch Centrum Amsterdam.