STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 5

Topologie.

Cursus Rotterdam 1947.

J.de Groot.

1947

Topologie

I. Topologische ruimten

1. Uit euclidische ruimten zijn u de begrippen "open verzameling", "afgesloten verzameling", "limiet", "verdichtingspunt", enz. bekend.

p is verdichtingspunt van V als in iedere omgeving van p nog een punt van V ligt.

p is limiet van V als in iedere omgeving van V bijna alle punten van V liggen.

O is open, als O met ieder punt p een hele omgeving van p bevat.

Het complement van een open (afgesloten) verzameling is afgesloten (open).

We gaan nu algemenere ruimten bekijken, waarin de begrippen open, afgesloten enz. impliciet vastgelegd zijn door axioma's.

Definitie: Een verzameling R heet een topologische ruimte, en zijn elementen heten punten, als zekere deelverzamelingen van R tot open verzamelingen zijn benoemd, zodat geldt:

1. R is open.
2. $\square$ (lege verzameling) is open.
3. Is O_1 en O_2 open, dan ook $O_1 \cap O_2$.
4. Is Σ een systeem van open verzamelingen, dan is ook $\bigcup_{O \varepsilon \Sigma} O$ open.

Uit 3 volgt, dat ook de vereniging van eindig veel verzamelingen open is.

Definitie: $A \subset R$ heet afgesloten, als $R \setminus A$ open is. Dus

1' $\square$ afgesloten.

2' R afgesloten

3' Is A_1 en A_2 afgesloten, dan ook $A_1 \cup A_2$.

4' Is Σ een systeem van afgesloten verzamelingen, dan is ook $\bigcap_{A \varepsilon \Sigma} A$ afgesloten.

Uit 3' volgt, dat ook de vereniging van eindig veel afgesloten verzamelingen afgesloten is.

Verder: Is O open, dan is $R \setminus O$ afgesloten.

Men zou ook met de axioma's voor afgesloten verzamelingen kunnen beginnen en dan de open verzamelingen per definitie kunnen invoeren.

Is A afgesloten en O open, dan is $A \setminus O$ afgesloten en $O \setminus A$ open. Want $A \setminus O = A \cap (R \setminus O)$ en $O \setminus A = O \cap (R \setminus A)$.

2. Is $S \subset R$, dan induceert R in S een topologie, d.w.z. S wordt een topologische ruimte door de afspraak:

P heet open verzameling van S als $P = O \cap S$ voor zekere open verzameling O van R.

Ga na, dat de axioma's vervuld zijn! Laat zien, dat deze d finitie equivalent is met de definitie:

B heet afgesloten verzameling van S als $B = A \cap S$ voor zeker afgesloten verzameling A van R.

Bewijs zelf: Is S open in R en P open in S, dan is P open R. Is S afgesloten in R en B afgesloten in S, dan is B afgeslote R.

Gegeven twee topologische ruimten R en S met doorsnede T, in zij dezelfde topologie induceren (dus bij iedere open O van R er een open P van S met $O \cap T = P \cap T$; en omgekeerd). Kunnen we nu R van een topologie voorzien, die in R en S de gegeven topologie in ceert?

Hebben we zo'n topologie en is Q open in $R \cup S$, dan moeten Q en $Q \cap S$ resp. open in R en S zijn. We stellen derhalve:

Q open in $R \cup S$ dan en slechts dan als $Q \cap R$ en $Q \cap S$ open in R S zijn.

Ga zelf na, dat $R \cup S$ met deze definitie aan de axioma's van pologische ruimte voldoet! We moeten verder laten zien, dat $R \cup S$ i R (en S) de gegeven topologie induceert: Is Q open in $R \cup S$, dan is $Q \cap R$ volgens afspraak open in R. Omgekeerd: gegeven een open O in dan moeten we een open Q van $R \cup S$ vinden met $O = Q \cap R$. We weten nu, dat er een open P in S is met $O \cap T = P \cap T$, en we stellen $Q = O \cup P$. is

$$Q \cap R = (O \cap R) \cup (P \cap R)$$

en $\quad P \subset S$, dus $P \cap R \subset R \cap S = T$

$\qquad$ dus $P \cap R \subset P \cap T = O \cap T \subset O$,

dus . $\quad Q \cap R = O$

en analoog $\quad Q \cap S = P$.

Dus is Q open in $R \cup S$ en $Q \cap R = O$ en beantwoordt dus aan onze eisen

3. <u>Afsluiting</u> van V(in een top.r. R) heet de kleinste afges ten verzameling van R, die V bevat. Notatie $\overline{V}$. Toon aan: $\overline{V}$ is de d snee van alle afgesloten verzamelingen, die V bevatten.

<u>Open kern</u> van V = grootste open verzameling in V bevat. Not tie $\overset{\cup}{V}$. $\overset{\cup}{V}$ is ook ... (vervolg zelf, in analogie met $\overline{V}$).

De punten van $\overset{\cup}{V}$ heten ook <u>inwendige</u> punten van V. De punten $\overline{V} \setminus \overset{\cup}{V}$ heten <u>randpunten</u> van V. De punten van $R \setminus \overline{V}$ heten <u>uitwendige</u> punten van V.

<u>Stelling 3.1</u>: Uit $V \subset W$ volgt $\overline{V} \subset \overline{W}$. Bewijs dit zelf!

<u>Stelling 3.2</u>: $\overline{V \cup W} = \overline{V} \cup \overline{W}$. Bewijs: $V \subset \overline{V}$, $W \subset \overline{W}$, dus $V \cup W \subset \overline{V} \cup \overline{W}$; $\overline{V} \cup \overline{W}$ als vereniging van twee afgesloten verzamelingen af sloten. Dus $\overline{V \cup W}$ $V \cup W$ (want $\overline{V \cup W}$ is de <u>kleinste</u> afge-

sloten verzameling, die $V \cup W$ bevat). Omgekeerd: $V \subset V \cup W \subset \overline{V \cup W}$, dus $\overline{V} \subset \overline{V \cup W}$ wegens 3.1 en evenzo $\overline{W} \subset \overline{V \cup W}$. Dus $\overline{V} \cup \overline{W} \subset \overline{V \cup W}$.

Toon aan dat $\overline{V \cap W} \subset \overline{V} \cap \overline{W}$ geldt, en laat aan een voorbeeld zien, dat het teken "$\subset$" hier niet door "=" kan worden vervangen!

<u>Stelling 3.3</u>: Is S deelruimte van R en $V \subset S$, dan is de afsluiting genomen in S van V: $\overline{V} \cap S$.

Bewijs: $\overline{V} \cap S$ is afgesloten in S en bevat V. Is gegeven een V bevattende in S afgesloten verzameling, dus $V \subset A \cap S$ (A afgesloten in R), dan is naar 3.1: $\overline{V} \subset \overline{A \cap S} \subset \overline{A} = A$, dus $\overline{V} \cap S \subset A \cap S$.

<u>Omgeving</u> U_p van p heet elke open verzameling, die p bevat. "p is <u>verdichtingspunt</u> van V" betekent: Iedere omgeving van p bevat een $q \varepsilon V$, $q \neq p$. Of te wel: $V \cap U_p \not\subset (p)$.

De verzameling van de verdichtingspunten van V wordt V' genoemd.

<u>Stelling 3.4</u>: Uit $p \varepsilon V'$ en $V \subset W$ volgt $p \varepsilon W'$. Bewijs dit zelf!

<u>Stelling 3.5</u>: Uit $p \varepsilon (V \cup W)'$ volgt $p \varepsilon V'$ of $p \varepsilon W'$.

Bewijs: Is b.v. $p \not\varepsilon W'$, dan is er een omgeving U_p^o met $U_p^o \cap W \subset (p)$. Zij U_p een willekeurige omgeving van p. Dan is $U_p \cap U_p^o$ er ook één. Dus

$$(U_p \cap U_p^o) \cap (V \cup W) \not\subset (p).$$

Anderzijds

$$(U_p \cap U_p^o) \cap W \subset (p) \;.$$

Dus

$$(U_p \cap U_p^o) \cap V \not\subset (p)$$

$$U_p \cap V \not\subset (p).$$

Dit geldt voor alle U_p. Dus $p \varepsilon V'$.

<u>Stelling 3.6</u>: Uit $O \cap V = \square$ en O open volgt: $O \cap \overline{V} = \square$.

Bewijs: Uit $O \cap V = \square$ volgt $V \subset R \setminus O$. Nu is $R \setminus O$ afgesloten, dus ook $\overline{V} \subset R \setminus O$. Dus $O \cap \overline{V} = \square$.

<u>Stelling 3.7</u>: Uit $O \cap V = \square$ en O open volgt: $O \cap V' = \square$.

Bewijs: Was $p \varepsilon O \cap V'$, dus p verdichtingspunt van V en O een omgeving van p, dan was er een $q \varepsilon O \cap V$.

<u>Stelling 3.8</u>: Is A afgesloten, dan is $A' \subset A$.

Bewijs: We passen 3.7 toe met $R \setminus A$ i.p.v. O en A i.p.v. V. Inderdaad is $(R \setminus A) \cap A = \square$, dus $(R \setminus A) \cap A' = \square$, dus $A' \subset A$.

<u>Stelling 3.9</u>: $\overline{V} \setminus V \subset V'$.

Bewijs: Zij $p \varepsilon \overline{V} \setminus V$. Was nu $p \not\varepsilon V'$, dus b.v.

$$U_p^o \cap V \subset (p),$$

dan was wegens $p \not\varepsilon V$ zelfs

$$U_p^o \cap V = \square \;,$$

dus ook

$$U_p^o \cap \overline{V} = \square \quad \text{(naar 3.7)},$$

dus in strijd met de veronderstelling.

<u>Stelling 3.10</u>: $\overline{V} \subset V \cup V'$. (Gevolg van 3.9)

<u>Stelling 3.11</u>: $V \cup V' \subset \overline{V}$.

Bewijs: $V \subset \overline{V}$. Verder $\overline{V}$ afgesloten, dus naar 3.8: $\overline{V}' \subset \overline{V}$. Dus daar $V' \subset \overline{V}'$ ook: $V' \subset \overline{V}$.

Stelling 3.12: $V \cup V' = \overline{V}$. (Gevolg van 3.10-11.)

Stelling 3.13: V afgesloten dan en slechts dan als $V = \overline{V}$. (Triviaal)

Stelling 3.14: V afgesloten dan en slechts dan als V al zijn verdichtingspunten bevat. (Gevolg van 3.12-13)

Men zou kunnen vermoeden, dat V' steeds afgesloten, $V'' \subset V'$, is (beide beweringen zijn equivalent). Dit is echter met deze axioma's niet te bewijzen. Tegenvoorbeeld: R bestaat uit de elementen $p_0, p_1, p_2, \ldots$; de niet-triviale afgesloten verzamelingen van R zijn: de eindige deelverzamelingen van R, die p_0 niet bevatten. Dan is $(p_0)' = R \setminus p_0$ en $p_0'' = R$.

Men onthoude vooral 3.12 en 3.14.

4. Gegeven twee topologische ruimten R en S en een afbeelding $f(R) \subset S$. f heet continu in het punt a van R, wanneer bij iedere omgeving $V_{f(a)}$ van f(a) een omgeving U_a van a te vinden is, zodat

$$f(U_a) \subset V_{f(a)}$$

geldt.

f heet continu, als f in alle punten van R continu is.

Stelling 4.1: f is dan en slechts dan continu, als het f-origineel van elke open verzameling van S weer open is.

Bewijs: Laat het origineel van elke open verzameling open zijn. Gegeven een $V_{f(a)}$; we stellen U_a = origineel van $V_{f(a)}$. Dan is $f(U_a) = V_{f(a)}$. - Veronderstel f continu! Gegeven een open verzameling P van S. Het origineel van P zij O. We moeten bewijzen, dat O open is. Zij a een willekeurig punt van O. Dan is P omgeving van f(a), dus is er een U_a te vinden zodat $f(U_a) \subset P$ is. Maar dan is ook $U_a \subset O$. Voor iedere a kiezen we zo'n U_a en vormen hun vereniging. Die is open als vereniging van open verzamelingen en bovendien = O. Dus is O open.

Stelling 4.2: f is dan en slechts dan continu, als het f-origineel van elke afgesloten verzameling afgesloten is. (Gevolg van 4.1)

Stelling 4.3: Is f een continue afbeelding van R in S en g er één van S in T, dan is gf er één van R in T. Bewijs dit zelf!

Stelling 4.4: R zij vereniging van twee deelruimten R_1 en R_2; f_i zij een continue afbeelding van R_i in S; $f_1 = f_2$ in $R_1 \cap R_2$. Dan is de afbeelding f die in R_i met f_i overeenstemt, continu.

Bewijs: Zij P open in S, dan is het f_i-origineel Q_i van P open in R_i en het f-origineel van P is $O_1 \cup O_2$. Nu is $p \in O_i \cap R_1 \cap R_2$ dan en slechts dan als $p \in R_1 \cap R_2$ en $f_i(p) \in P$ is. Wegens $f_1(p) = f_2(p)$ in dat geval, is $O_1 \cap R_1 \cap R_2 = O_2 \cap R_1 \cap R_2$, dus volgens 2 is $O_1 \cup O_2$ open.

Een ééneénduidige afbeelding f van R in S, die mèt zijn omgekeerde continu is, heet <u>topologisch</u> of een <u>homeomorfisme</u>. R en S heten dan homeomorf (door middel van f).

f moet dan dus aan een open verzameling in R één in S laten beantwoorden en omgekeerd. Beschouwt men a en f(a) als alleen maar verschillende namen voor hetzelfde ding, dan stemmen de begrippen "open verzameling" in R en S overeen. R en S zijn in wezen identiek.

<u>5</u>. Is $R = A \cup B$, A, B afgesloten, $A \cap B = \square$, dan zeg ik dat R <u>gesplitst</u> is in A en B. De splitsing heet triviaal, als A of B $= \square$ is.

R heet <u>samenhangend</u>, als R geen niet-triviale splitsing toelaat.

Een deelverzameling V van R heet een <u>brok</u>, als V zowel open als afgesloten is. Triviale brokken: $\square$ en R.

5.1. R is dan en slechts dan samenhangend, als R geen niet-triviale brokken bezit.

Bewijs: Zij R samenhangend. Zij V een brok van R. Dan is ook $R \setminus V$ open en afgesloten. $R = V \cup (R \setminus V)$ is een splitsing. Dus $V = \square$ of $R \setminus V = \square$ en dus $V = R$. - Zij R niet samenhangend, dus $R = A \cup B$ enz. Dan is $R \setminus B = A$ open, dus A een niet-triviale brok.

Een verzameling $V \subset R$ heet samenhangend, wanneer V als ruimte beschouwd samenhangend is.

5.2. Met V is ook $\overline{V}$ samenhangend.

Bewijs: Zij $\overline{V} = A \cup B$ een splitsing van $\overline{V}$. Dan is $V = A_1 \cup B_1$ met $A_1 = A \cap V$, $B_1 = B \cap V$ er één van V. Dus $A_1 = V$ of $B_1 = V$. Is nu $A_1 = V$, dan is $A \supset V$, dus $\overline{A} \supset \overline{V}$. Maar A is afgesloten in $\overline{V}$, dus ook in R, dus $\overline{A} = A$, dus $A = \overline{V}$. Analoog als $B_1 = V$. In elk geval is de splitsing van $\overline{V}$ triviaal.

5.3. Gegeven een systeem Σ van samenhangende verzamelingen van R met een gemeenschappelijk punt $p \in \bigcap_{V \in \Sigma} V$. Dan is $W = \bigcup_{V \in \Sigma} V$ samenhangend.

Bewijs: Zij $W = A \cup B$ een splitsing, $p \in A$. Dan is voor iedere $V \in \Sigma$ ook $V = (A \cap V) \cup (B \cap V)$ een splitsing; $p \in A \cap V \neq \square$, dus $B \cap V = \square$ voor alle $V \in \Sigma$, dus $B = \bigcup_{V \in \Sigma} (B \cap V) = \square$.

5.4. Component van p in R heet de maximale samenhangende deelverzameling van R, die p bevat. Toon er het bestaan van aan (volgt uit 5.3). Toon aan, dat elke component afgesloten is (zie

5.2). Toon aan, dat twee componenten òf geen gemeenschappelijk punt bezitten, òf samenvallen!

5.5. Zij f een continue afbeelding van R op S. Zij C,D een (niet triviale) splitsing van S. De originelen A,B van S in R vormen een (niet triviale) splitsing van R. - Bewijs dit!

5.6. Zij f een continue afbeelding van R op S. Is R samenhangend, dan ook S. (Volgt uit 5.5)

6. Zijn R en S topologische ruimten, dan wordt het "cartesische product" $R \times S$ gedefinieerd als de verzameling van de paren (a,b) met $a \varepsilon R$, $b \varepsilon S$, voorzien van de navolgende topologie: open in $R \times S$ heten de verenigingen van verzamelingen $O \times P$, waar O open en R en P open in S is. ($V \times W$ is de verzameling van alle (p,q) met $p \varepsilon V$, $q \varepsilon W$.)

Toon aan, dat zodoende werkelijk een topologische ruimte ontstaat!

Toon aan, dat $R \times (a)$ als deelruimte van $R \times S$ homeomorf is met R!

Toon aan, dat het $\times$-product associatief is in die zin, dat $(R \times S) \times T$ op een voordehand liggende wijze homeomorf is met $R \times (S \times T)$.

Is A in R en B in S afgesloten, dan ook $A \times B$ in $R \times S$. (Want $A \times B$ is het complement van $((R \setminus A) \times S) \cup (R \times (S \setminus B))$.)

$\overline{V \times W} = \overline{V} \times \overline{W}$. (Bewijs dit zelf!)

$R \times S$ samenhangend dan en slechts dan als R èn S samenhangend zijn. (Bewijs dit zelf!)

Zijn f en g continu, $f(R) \subset R_1$, $g(S) \subset S_1$, dan wordt door $h((p,q)) = (f(p), g(q))$ een continue afbeelding van $R \times S$ in $R_1 \times S_1$ gedefinieerd.

Is f een afbeelding van $R_1 \times \ldots \times R_k$ in S, dan schrijven we i.p.v. $f((x_1,\ldots,x_k))$ $(x_i \varepsilon R_i)$ korter: $f(x_1,\ldots,x_k)$. Continuïteit van zo'n afbeelding is altijd bedoeld in de zin van $R_1 \times \ldots \times R_k$.

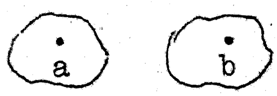
Is f continu, dan blijft f continu als men één of meer veranderlijken vasthoudt. (Bewijs dit zelf.)

II. Nieuwe axioma's.

Met de axioma's uit I valt nog niet veel te beginnen. We geven hier vier "scheidingsaxioma's" aan.

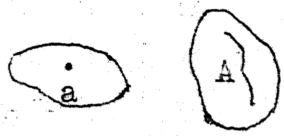
1. Bij elk paar verschillende punten a,b bestaat een omgeving U_b zo dat $a \notin U_b$.

2. Bij elk paar verschillende punten a,b bestaan omgevingen U_a, U_b met $U_a \cap U_b = \square$. (Hausdorff-ruimten.)



3. Is a een punt, A afgesloten en $a \notin A$, dan bestaat er een omgeving U_a van a en een omgeving U_A van A (d.w.z. een open verzameling, die A bevat), zo dat $U_a \cap U_A = \square$.

(Reguliere ruimten = (1) + (3).)



4. Zijn A en B afgesloten verzamelingen met $A \cap B = \square$, dan bestaan er resp. omgevingen U_A, U_B met $U_A \cap U_B = \square$. (Normale ruimten = (1) + (4))

Stelling (1) is equivalent met: (1') Elke éénpuntige verzameling (dus ook iedere eindige) is afgesloten.

Bewijs: (1) wordt verondersteld. Zij a gegeven. Bij iedere $b \neq a$ bepalen we een U_b met $a \notin U_b$. De vereniging van deze U_b is $R \setminus (a)$ en open. Dus (a) afgesloten. - Zij (a) afgesloten; dan is $R \setminus (a)$ open en omgeving van elk punt $\neq a$.

Stelling: Uit (1) volgt: (1"): Is p verdichtingspunt van V, dan bevat elke omgeving van p oneindig veel punten van V.

Bewijs: Zij U omgeving van p. Was $(U \cap V) \setminus (p)$ eindig, dan was het (naar (1') ook afgesloten, dus was $U_1 = (U \setminus V) \cup (p)$ omgeving van p (zie I.1). Maar $U_1 \cap V = (p)$, dus p niet verdichtingspunt van V.

Een rij a_n heet convergent en a een limiet van a, als in elke omgeving van a bijna alle a_n liggen.

Stelling: Uit (2) volgt: (2'): Een convergente rij heeft slechts één limiet.

Bewijs: Zijn b en c twee limieten van a_n, dan kiezen we omgevingen O_b, O_c met $O_b \cap O_c = \square$. Het is onmogelijk, dat O_b èn O_c bijna alle a_n bevatten.

Stelling: (3) is equivalent met (3'): Voor elke a en elke omgeving U_a van a is er een omgeving U'_a van a, zodat $\overline{U'_a} \subset U_a$.

Bewijs: (3) wordt verondersteld. Gegeven a en U_a. Op $A = R \setminus U_a$ passe men (3) toe. Dan zijn er omgevingen U'_a en U_A van a resp. A met $U'_a \cap U_A = \square$. $\overline{U'_a} \cap U_A = \square$ (zie I.3.6). Dus ook $\overline{U'_a} \cap A = \square$, dus $\overline{U'_a} \subset R \setminus A = U_a$. - (3') wordt verondersteld. Gegeven $a \notin A$, A afgesloten. We passen (3') toe met $U_a = R \setminus A$ en vinden een U'_a met $\overline{U'_a} \subset U_a$. We stellen $U_A = R \setminus \overline{U'_a}$.

Stelling: (4) is equivalent met (4'): Bij elke omgeving U van de afgesloten verzameling A is er een omgeving V van A, zodat $\overline{V} \subset U$. Bewijs dit zelf!

We hebben verder nodig zogenaamde machtigheidsaxioma's. Onder een basis der open verzamelingen van R verstaan we een systeem Σ van open verzamelingen, waaruit elke open verzameling verkrijgbaar is als vereniging van een deelsysteem van Σ.

Om vast te stellen, of een punt p verdichtingspunt van een V is, hoef ik $U_p \cap V$ alleen voor de $U_p \varepsilon \Sigma$ te onderzoeken. Waarom? Het analoge geldt voor limieten, en wanneer men wil nagaan of een afbeelding continu is.

V heet overal dicht in R als $\overline{V} = R$ is.

Machtigheidsaxioma 1 (Separabiliteit): In R bestaat een aftelbare overal dichte deelverzameling V.

Machtigheidsaxioma 2: Er bestaat een aftelbare basis voor de open verzamelingen in R.

Stelling: (2) → (1). Bewijs: $O_1, O_2, \ldots$ vormen een basis. Kies in O_i een a_i. Stel V = verzameling der a_i. $R\setminus\overline{V}$ is open, dus vereniging van zekere O_i. Was $R\setminus\overline{V} \neq \square$, dan was $R\setminus\overline{V} \supset O_i$ voor zekere i. Maar dan was $a_i \notin \overline{V}$, dus $a_i \notin V$ in strijd met de definitie van V.

Stelling: In ruimten met machtigheidsaxioma 2 en scheidingsaxioma 1 geldt: (a) p is dan en slechts dan verdichtingspunt van V, als p limiet is van een deelrij van V bestaande uit allemaal verschillende punten. (b) A is dan en slechts dan afgesloten, als A met elke oneindige deelrij van verschillende punten ook de evtl. limieten bevat. (c) De topologie is door het limiet-begrip volledig bepaald.

Bewijs van (a): Zij p verdichtingspunt van V. Zij $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots$ de rij van al die basisverzamelingen, die p bevatten. Zij $P_n = \bigcap_{k=1}^{n} O_{i_k}$. Zijn de onderling verschillende punten p_i $(i = 1, \ldots, n)$ reeds bepaald zodat $p_i \varepsilon P_i \cap V$ $(p_i \neq p)$ is, dan is (wegens scheidingsaxioma 1) $P_{n+1} \setminus (p_1, \ldots, p_n)$ omgeving van p, bevat dus een punt $p_{n+1} \varepsilon V$, dat van p en alle p_i $(i = 1, \ldots, n)$ verschilt. We beweren dat p limiet van de p_n is. Zij namelijk U omgeving van p; we mogen veronderstellen: $U = O_{i_l}$. $p_n \varepsilon O_{i_n} \subset O_{i_l}$ voor $n \geqq l$, dus voor bijna alle n. - Zij omgekeerd p limiet van een rij verschillende p_n uit V, dan is voor iedere omgeving U van P: $U \cap V$ oneindig, dus $\not\subset (p)$, dus p verdichtingspunt van V.

Bewijs van (b): Zij A afgesloten, $p_n \varepsilon A$ (allemaal verschillend) en p een limiet van de p_n. Dan is wegens (a) p ook verdichtingspunt van $V(p_n)$, dus (I.3.14) $p \varepsilon A$. - Zij omgekeerd met iedere deelrij van verschillende punten een eventuele limiet in A. Voor een willekeurig verdichtingspunt p van A tonen we aan dat $p \varepsilon A$ is. Wegens (a) is er een rij verschillende $p_n \varepsilon A$ met limiet p. Maar dan is inderdaad $p\varepsilon A$. Dus A afgesloten (I.3.14).

Bewijs van (c): Volgens (b) is het begrip "afgesloten verzameling", dus ook de topologie door het limiet-begrip bepaald.

<u>Stelling</u>: In ruimten met machtigheidsaxioma 2 en scheidingsaxioma 2 zijn omgevings- en limietcontinuïteit equivalent. Onder omgevingscontinuïteit verstaan we de in I.4. gedefinieerde; onder limietcontinuïteit van f in a de eigenschap: Voor elke rij a_n met $\lim a_n = a$ bestaat $\lim f(a_n) = f(a)$. (Limieten zijn hier ééndui-dig bepaald wegens scheidingsaxioma (2).)

Bewijs: We veronderstellen omgevingscontinuïteit in a. Zij nu $\lim a_n = a$ gegeven. We willen aantonen $\lim f(a_n) = f(a)$. Zij V een omgeving van $f(a)$; we moeten aantonen, dat bijna alle $f(a_n)$ in V liggen. Volgens veronderstelling is er een omgeving U van a zodat $f(U) \subset V$. Nu bevat U bijna alle a_n, dus bevat $f(U)$ bijna alle $f(a_n)$, en hetzelfde geldt voor V.-We veronderstellen, dat f <u>niet</u> omgevingscontinu in a is. Dus is er een omgeving V van $f(a)$ zodat voor elke omgeving U voor a geldt: $f(U) \not\subset V$. In elke omgeving U van a bepalen we een c zodat $f(c) \notin V$; de vereniging van deze c zij C. Nu is a verdichtingspunt van C. Dus bestaat er (machtigheidsaxioma!) een rij $a_n \varepsilon C$, $\lim a_n = a$, $f(a_n) \notin V$, dus zeker niet $\lim f(a_n) = f(a)$. Dus is f zeker ook niet limiet-continu in a.

<u>Stelling</u>: In ruimten met machtigheidsaxioma 2 volgt uit het scheidingsaxioma (3) het scheidingsaxioma (4).

Bewijs: A en B zijn afgesloten verzamelingen met $A \cap B = \square$. We geven relatief vreemde omgevingen van A en B aan. Bij ieder punt $a \varepsilon A$ bestaat een omgeving, dus ook een basisomgeving waarvan de afsluiting vreemd is tegen B (zie 3'). We sommen op alle basisomgevingen van punten van A, waarvan de afsluitingen vreemd zijn tegen B: $C_1, C_2, \ldots$. Analoog alle basisomgevingen van punten van B, waarvan de afsluitingen vreemd zijn tegen A: $D_1, D_2, \ldots$.

Dan is

$$A \subset \bigcup C_n \quad , \quad B \subset \bigcup D_n \ ,$$
$$C_n \cap B = D_n \cap A = \square \ .$$

We vormen $C_1' = C_1 \setminus \overline{C_1 \cap D_1}$, $D_1' = D_1 \setminus \overline{C_1 \cap D_1}$,

en algemeen $C_{n+1}' = C_{n+1} \setminus \overline{(C_{n+1} \cap \bigcup_1^{n+1} D_i)}$, $D_{n+1}' = D_{n+1} \setminus \overline{(D_{n+1} \cap \bigcup_1^{n+1} C_i)}$.

Dan zijn C_i' en D_i' open

$$C_i' \cap A = C_i \cap A \quad , \quad D_i' \cap B = D_i \cap B \ ,$$

dus $\bigcup C_i' \cap A = \bigcup C_i \cap A = A$, $\bigcup D_i' \cap B = \bigcup D_i \cap B = B$,

$$\bigcup C_i' \cap B \subset \bigcup C_i \cap B = \square \quad , \quad \bigcup D_i' \cap B \subset \bigcup D_i \cap B = \square \ .$$

Nu zijn $\bigcup C_i'$ en $\bigcup D_i'$ de gevraagde omgevingen van A en B.

Stelling: Geldt in R èn in S een der hier behandelde axioma's, dan geldt het ook in $R \times S$. (Bewijs dit zelf!)

Stelling: $\lim (a_n, b_n) = (\lim a_n, \lim b_n)$. (Bewijs dit zelf!)

III. Metrische ruimten

Een verzameling R heet **metrische ruimte**, als hij voorzien is van een afstandsfunctie $\rho(a,b)$ $(a, b \varepsilon R)$ met de eigenschappen

1. $\rho(a,b) = 0$ voor $a = b$,
2. $\rho(a,b) > 0$ " $a \neq b$,
3. $\rho(a,b) = \rho(b,a)$.
4. $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c)$ (axioma van de driehoek).

Voorbeeld: De (reële of complexe) **n-dim. Cartesische ruimte** E_n; punten zijn de n-tallen (reële of complexe) getallen $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$; afstand

$$\rho(x,x') = \sqrt{\Sigma \, |\xi_i - \xi_i'|^2}.$$

De **ruimte van Hilbert**: punten x zijn de oneindige getallenrijen $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ met eindige

$$|x| = \sqrt{\Sigma \, |\xi_\nu|^2};$$

$$\rho(x,x') = |x - x'|.$$

(Wegens $\sum_i^j |\xi_n - \xi_n'|^2 \leqq \sum_i^j |\xi_n|^2 + \sum_i^j |\xi_n'|^2$ is ook $|x - x'|$ eindig.)

Bolomgeving $B(a,\alpha)$ van a heet de verzameling van de x met

$$\rho(a,x) < \alpha \qquad (\alpha > 0).$$

$B(V,\alpha)$ is de verzameling van alle x met $\rho(p,x) < \alpha$ voor zekere $p \varepsilon V$.

We vatten R als topologische ruimte op, door vast te stellen, dat de $B(a,\alpha)$ $(a \varepsilon R, \alpha > 0)$ een basis voor de open verzamelingen vormen. De axioma's I zijn dan vervuld. Ga dit na voor 1 - 2,4. Voor 3 moeten we aantonen:

De doorsnee van twee bolomgevingen is vereniging van bolomgevingen. Bewijs: Zij $c \varepsilon B(a,\alpha) \cap B(b,\beta)$. We bepalen $\delta = \min(\alpha - \rho(a,c), \beta - \rho(c,b)) > 0$. Dan is

$$B(c,\delta) \subset B(a,\alpha) \cap B(b,\beta),$$

want uit $x \varepsilon B(c,\delta)$ volgt $\rho(c,x) < \delta$, dus

$$\rho(a,x) < \rho(a,c) + \rho(c,x) < \rho(a,c) + \delta < \rho(a,c) + (\alpha - \rho(a,c)) = \alpha,$$

dus $x \varepsilon B(a,\alpha)$; en analoog $x \varepsilon B(b,\beta)$. De vereniging van al deze $B(c,\delta)$ voldoet.

Bewijs dat met $\rho(a,b)$ ook $\inf(\rho(a,b), 1)$ een metriek voorstelt, en dat beide metrieken tot homeomorfe ruimten leiden!

Men hoeft dus bij onderzoek omtrent limieten, verdichtingspunten en continuïteit in metrische ruimten alleen met de bolomgevingen rekening te houden. $\lim p_n = p$, dan en slechts dan als $\lim \rho(p_n,p) = 0$.

Ook in metrische ruimten is elk verdichtingspunt van een verzameling V limiet van een deelrij verschillende punten uit V. (Bewijs dit zelf!)

Diameter van een verzameling V is: $\sup\limits_{a,b\varepsilon V} \rho(a,b)$.

Onder afstand tussen een punt p en een verzameling V verstaan we $$\rho(p,V) = \inf_{q\varepsilon V} \rho(p,q).$$

<u>Stelling 1</u>: $\rho(p,V)$ is een continue functie van p (continue afbeelding in de reële E_1).

Bewijs: $\rho(p,V) \leqq \rho(p,q)$ voor alle $q\varepsilon V$

$\leqq \rho(p,p') + \rho(p',q)$ voor alle $q\varepsilon V$,

dus ook $\rho(p,V) \leqq \rho(p,p') + \inf\limits_{q\varepsilon V} \rho(p',q)$

$= \rho(p,p') + \rho(p',V)$.

Hetzelfde geldt ook met verwisseling van p en p'. Dus
$$|\rho(p,V) - \rho(p',V)| \leqq \rho(p,p') .$$
Dus de functie $\rho(p,V)$ beeldt de bolomgeving $B(p,\alpha)$ (in R) af in de bolomgeving $B(\rho(p,V),\alpha)$ (in E_1). Hieruit volgt de continuïteit.

<u>Stelling 2</u>: Uit $\rho(p,V) = 0$, volgt $p\varepsilon\overline{V}$.

Bewijs: Uit $\rho(p,V) = 0$ volgt het bestaan van een rij $p_n\varepsilon V$ met $\lim \rho(p,p_n) = 0$. Maar dan is $\lim p_n = p$, dus of oneindig vaak $p_n = p$ of p verdichtingspunt van de verzameling der p_n. In elk geval (wegens I.3.14) $p\varepsilon\overline{V}$.

<u>Stelling 3</u>: Is A afgesloten en $\rho(p,A) = 0$, dan is $p\varepsilon A$. (Volgt uit 2.)

<u>Stelling 4</u>: In metrische ruimten geldt scheidingsaxioma 3 en ook 4.

Bewijs: Zij A afgesloten $a\notin A$. Dan is dus $\rho(a,A) = \alpha > 0$. $B(a,\frac{1}{2}\alpha)$ en $B(A,\frac{1}{2}\alpha)$ voldoen.

<u>Stelling 5</u>: In metrische ruimten volgt machtigheidsaxioma 2 uit machtigheidsaxioma 1.

Bewijs: $a_1, a_2, \ldots$ vormen een overal dichte deelverzameling van R. De verzameling van de "speciale bollen" $B(a_i,\alpha)$ met rationale $\alpha > 0$ is aftelbaar. Gegeven een willekeurige $B(a,\gamma)$ en een $x\varepsilon B(a,\gamma)$. We kiezen een rationale α met $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}(\gamma - \rho(a,x))$. Nu is x limiet van een deelrij van de a_i (evtl. = zekere a_i). Dus is er een a_i met $\rho(x,a_i) < \alpha$.

$x\varepsilon B(a_i,\alpha)$.

Voor iedere $\quad y \varepsilon B(a_i, \alpha)$
geldt $\quad \rho(a,y) \leqq \rho(a,x) + \rho(x,a_i) + \rho(a_i,y)$
$< \rho(a,x) + 2\alpha = \rho(a,x) + (\gamma - \rho(a,x)) = \gamma$.
Dus $\quad B(a_i,\alpha) \subset B(a,\gamma)$.
Iedere $x \varepsilon B(a,\gamma)$ bezit dus een in $B(a,\gamma)$ bevatte speciale bolomgeving, en dus is $B(a,\gamma)$ een vereniging van speciale bolomgevingen. Hetzelfde geldt dan voor elke open verzameling van R. Dus vormen de (aftelbaar veel) speciale omgevingen een basis.

Een topologische ruimte metriseren betekent: een met hem homeomorfe metrische ruimte vinden.

Metrisatie-stelling van Urysohn: Een topologische ruimte R, die aan de scheidingsaxioma's 1 en 3 en het machtigheidsaxioma 2 voldoet, dan worden gemetriseerd.

Het bewijs berust op de Hulpstelling: Onder dezelfde veronderstellingen is er bij twee open verzamelingen P_0 en P_1 met $\overline{P_0} \subset P_1$ een continue functie f te vinden met $0 \leqq f \leqq 1$, $f(P_0) = 0$, $f(R \setminus P_1) = 1$.

Bewijs hulpstelling: We construeren een P_r voor elk ("dyadisch") getal r van de vorm $r = k.2^{-n}$ (k,n geheel $\geqq 0$, $0 \leqq r \leqq 1$), zodat

$$\overline{P}_r \subset P_s \quad \text{voor } r < s . \qquad (*)$$

Dat geschiedt inductief. Zij P_r reeds gedefinieerd voor alle $r = k.2^{-n}$ $(0 \leqq k \leqq 2^n)$ zodat $(*)$ geldt. Dan is dus

$$\overline{P}_{k.2^{-n}} \subset P_{(k+1).2^{-n}}$$

oftewel $\quad \overline{P}_{2k.2^{-n-1}} \quad P_{(2k+2).2^{-n-1}}$.

Nu bestaat op grond van scheidingsaxioma 4' (dat immers uit de gegevens volgt; zie eind van II) een open Q zodat

$$\overline{P}_{2k.2^{-n-1}} \subset Q \quad , \quad \overline{Q} \subset P_{(2k+2).2^{-n-1}} \quad .$$

Zulk een Q nemen we als $P_{(2k+1).2n^{-1}}$.

We definiëren nu voor dyadische breuken $\geqq 0$, < 1:

$$K_r = \bigcap_{s>r} P_s \ .$$

Dan is ook $K_r = \bigcap_{t>r} \overline{P}_t$. Dat immers $\bigcap_{t>r} \overline{P}_t \supset \bigcap_{s>r} P_s$ is duidelijk; is verder $x \notin \bigcap_{s>r} P_s$, dan is er een $s_0 > r$ met $x \notin P_{s_0}$; is dan $r < t_0 < s_0$, dan is ook $x \notin \overline{P}_{t_0}$, dus $x \notin \bigcap_{t>r} P$.
Derhalve is K_r afgesloten; dit geldt ook voor $r = 1$, als we $K_1 = R$ stellen.

We stellen nu $0 \leqq f(p) \leqq 1$ in heel R en voor reële α :

$$f(p) < \alpha \quad \text{dan en slechts dan als } p \varepsilon \bigcup_{r<\alpha} P_r .$$

Hierdoor is f bepaald, n.l.

$$f(p) = \inf_{p \varepsilon P_r} r \ \text{ als } p\varepsilon P_1, \ f(p) = 1 \text{ als } p \not\varepsilon P_1 .$$

$p\varepsilon K_r$ $(r < 1)$ dan en slechts dan als $p\varepsilon P_s$ voor alle $s > r$, dus als $f(p) < s$ voor alle $s > r$, dus als $f(p) \leqq r$. Geldt ook voor $r = 1$.

Hieruit volgt voor dyadische breuken r,s $(0 \leqq r,s \leqq 1)$:

$$r < f(p) < s$$

dan en slechts dan als $p \not\varepsilon K_r$, $p\varepsilon P_s$, dus als

$$p \varepsilon P_s \setminus K_r .$$

De f-origineelverzameling van elk dyadisch interval $r < \alpha < s$ $(0 \leqq r, \ s \leqq 1)$ is dus open. Ga na, dat dit ook waar is voor $r < 0$ en $s > 1$! Hieruit volgt, dat het f-origineel van elk open interval open is, dus dat f continu is.

Dat $f(P_0) = 0$ en $f(R \setminus P_1) = 1$ is, is evident.

Bewijs van de metrisatiestelling: Een aftelbare basis $O_1, O_2, \ldots$ van R is gegeven. Voor ieder paar O_i, O_j met

$$\overline{O_i} \subset O_j$$

definiëren we volgens de hulpstelling een continue functie f_{ij}

$$0 \leqq f_{ij} \leqq 1 \quad , \quad f_{ij}(O_i) = 0, \quad f_{ij}(R \setminus O_j) = 1 .$$

We stellen

$$\rho(p,q) = \sum_{ij} 2^{-i-j} \,|\, f_{ij}(p) - f_{ij}(q) \,| .$$

Dan is $0 \leqq \rho(p,q) \leqq 1$ en $\rho(p,q) = 0$ dan en slechts dan als $f_{ij}(p) = f_{ij}(q)$ voor alle i,j. Indien $p \neq q$ is er echter wegens scheidingsaxioma 1 een omgeving, dus ook een basisomgeving O_j van p, die q niet bevat; wegens scheidingsaxioma 3 bestaat er een omgeving P van p met $\overline{P} \subset O_j$, dus ook een basis-O_i met $p\varepsilon O_i$, $\overline{O_i} \subset O_j$, $q \not\varepsilon O_j$; hiervoor is $f_{ij}(p) = 0$, $f_{ij}(q) = 1$; dus $\rho(p,q) \neq 0$. Ga zelf na, dat ρ ook de overige axioma's van metrische ruimten vervult!

We hebben door middel van ρ een metrische ruimte gedefinieerd met als punten die van R. We moeten nog aantonen, dat de door deze identiteit vastgelegde éénéénduidige relatie tussen R en de metrische ruimte topologische is, d.w.z. dat de begrippen "open verzameling" volgens de gegevens van R en volgens de metriek samenvallen.

$\rho(p,q)$ is (bij vaste p) continu (in de zin van R) als som van een gelijkmatige convergente reeks continue functies. Dus is de verzameling van de q met $\rho(p,q) < \alpha$ open, dus is elke bol, dus elke metrisch-open verzameling open in de zin van R.

Zij omgekeerd een basis-O_j gegeven. Voor elke $x\varepsilon O_j$ is er een basis-omgeving O_i met $\overline{O_i} \subset O_j$, dus een f_{ij} met $f_{ij}(x) = 0$, $f_{ij}(y) = 1$ voor $y \not\varepsilon O_j$; dus $\rho(x,y) \geqq 2^{-i-j}$ voor $y \not\varepsilon O_j$. Dus:

uit $\rho(x,y) < 2^{-i-j}$ volgt $y\varepsilon O_j$.

Dus $B(x,2^{-i-j}) \subset O_j$.

Iedere basis-verzameling, dus ook iedere open verzameling van R is derhalve een vereniging van bollen, dus metrisch-open.

Inbedding in de Hilbert-ruimte: Een topologische ruimte, die aan de eisen van de metrisatiestelling voldoet, is homeomorf met een deelverzameling van de Hilbert-ruimte.

Bewijs: We hernummeren de f_{ij} door middel van één index: $g_1, g_2, \ldots$ Aan een $p\varepsilon R$ laten we beantwoorden het punt

$$g(p) = (g_1(p), \tfrac{1}{2}g_2(p), \ldots, \tfrac{1}{n}g_n(p), \ldots)$$

van de Hilbert-ruimte. Precies als in het metrisatie-bewijs laat men zien, dat dit een topologische afbeelding is.

Opmerking: De inbedding is zelfs geschied in de zogenaamde fundamentaal-quader

$$|\xi_i| \leqq \frac{1}{i} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

van de Hilbert-ruimte.

Omgekeerd voldoet iedere deelverzameling van de Hilbert-ruimte H aan de axioma's, die bij de metrisatie verondersteld zijn. Voor de scheidingsaxioma's 1,3 is dit duidelijk, aangezien die in iedere metrische ruimte gelden (stelling 4). We moeten dit nog aantonen voor het machtigheidsaxioma 2.

Speciale bollen in H zijn de $B(x,\alpha)$ met rationale α en een z, waarvan alle coördinaten rationaal zijn en bijna alle verdwijnen. De verzameling Σ der speciale bollen is aftelbaar. Gegeven een verzameling V in H. De (aftelbaar vele) $B \cap V$ $(B\varepsilon\Sigma)$ vormen een basis van V (als ruimte). Dit blijkt zo: Zij $B(a,\gamma)$ een willekeurige bol in H $(a\varepsilon V)$, dus $B(a,\gamma)\cap V$ een willekeurige bol in V. Zij $x\varepsilon B(a,\gamma)\cap V$ en

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots).$$

We kiezen n zo groot, dat $\sum_{n+1}^{\infty} \xi_i^2 < \alpha^2$ is met α rationaal en

$$0 < \alpha \leqq \tfrac{1}{3}(\gamma - \rho(a,x)).$$

Door van x de coördinaten vanaf de (n+1)-de door 0 te vervangen, krijgen we een punt x'; $\rho(x,x') < \alpha$. We vervangen verder de eerste n coödinaten door rationale getallen, zodat voor het nieuwe punt x'' geldt: $\rho(x',x'') < \alpha$. $B(x'',\alpha)$ is een speciale bol en bevat in $B(a,\gamma)$ wegens:

$$\rho(a,y) \leqq \rho(a,x) + \rho(x,x') + \rho(x',x'') + \rho(x'',y) < \gamma,$$

indien $y\varepsilon B(x'',\alpha)$.

Dus is er voor iedere $x\varepsilon B(a,\gamma)\cap V$ een $B(x'',\alpha)\varepsilon\Sigma$ met $x\varepsilon B(x'',\alpha)\cap V \subset B(a,\gamma)\cap V$, en dus is $B(a,\gamma)\cap V$ als vereniging van $B\cap V$ $(B\varepsilon\Sigma)$ voor te stellen.

We kunnen dus zeggen:

Equivalentiestelling: De aan de scheidingsaxioma's 1,3 en aan het machtigheidsaxioma 2 voldoende ruimten zijn topologisch equivalent met de deelverzamelingen van de fundamentaal-quader van de Hilbert-ruimte.

Deze ruimten zijn ook gekenmerkt door de eigenschap metriseerbaar en separabel te zijn.

Vraag: Hoe zal men in $R \times S$ (R en S metrisch) een metriek definiëren, zodat de topologie van $R \times S$ wordt geïnduceerd?

IV. Polytopen

1. Het convexe omhulsel van een verzameling V in een cartesische ruimte wordt door T(V) aangeduid. Is V een verzameling bestaande uit r+1 punten, die niet op een (r-1)-dim. lin. deelvariëteit liggen (algemene ligging), dan heet T(V) een r-dim. simplex ($r \geq -1$). Is $W \subset V$, dan heet T(W) ondersimplex van T(V). De 0-dim. ondersimplexen van T(V) heten zijn hoekpunten, de 1-dim. zijn ribben. Punten van T(V), die reeds punten van een echte ondersimplex zijn, heten zelfkantpunten; de overige heten binnenpunten. – Let wel: zelfkant is niet hetzelfde als rand; een 1-dim. simplex in E_2 bestaat geheel uit randpunten, terwijl alleen zijn hoekpunten zelfkantpunten zijn.

Voor twee simplexen van dezelfde ruimte geldt $T(V \cap W) \subset T(V) \cap T(W)$. We zeggen, dat T(V) en T(W) netjes liggen, als zelfs $T(V \cap W) = T(V) \cap T(W)$ geldt. Een stel simplexen, die paarsgewijs netjes liggen, vormen een polytoop; hiermee bedoelen we niet alleen de vereniging van die simplexen, maar tevens haar opbouw uit die simplexen. Onder de simplexen van een polytoop verstaan we de ondersimplexen van alle samenstellende simplexen.

Een eindige polytoop bestaat uit eindig veel simplexen. Dimensie van een polytoop is de maximale dimensie, die bij zijn simplexen voorkomt. Is T een simplex van de polytoop P, dan verstaan we onder de ster van T (genaamd $\sigma(T)$) de verzameling der binnenpunten van alle simplexen van P, die een binnenpunt van T bevatten. $\sigma(T)$ is open in P.

Barycentrische coördinaten: Gegeven r+1 punten $e_0, \ldots e_r$ in algemene ligging in de E_r. Ieder punt x kan dan op één manier worden voorgesteld in de vorm $x = \Sigma \lambda_i e_i$ met $\Sigma \lambda_i = 1$; de λ_i-s heten zijn barycentrische coördinaten en hangen continu van x af. $\lambda_0 = 0$ stelt voor de lin.var. bepaald door $e_1, \ldots, e_n$; $\lambda_0 = 0$ deelt de E_r in twee halve ruimten $\lambda_0 > 0$ en $\lambda_0 < 0$; men kan niet van de één naar de ander gaan, zonder $\lambda_0 = 0$ te passeren; daarentegen kan men in beide afzonderlijk zich vrijelijk bewegen.

Aangezien λ_i continu van x afhangt is $\lambda_i > 0$ een open en $\lambda_i \geqq 0$ een afgesloten verzameling. $T(e_o, e_1, \dots, e_r)$ is de verzameling van de x met $\lambda_i \geqq 0$ (voor alle i); binnenpunten van $T(e_o, e_1, \dots, e_r)$ zijn die met $\lambda_i > 0$ (voor alle i). Dus is een r-dim. simplex (en ook een $<$ r-dim. simplex) in E_r afgesloten; de verzameling van de binnenpunten van een r-dim. simplex in de E_r is open.

Stelling: De simplexen $T(e_o, e_1, \dots, e_r)$ en $T(e'_o, e_1, \dots, e_r)$ in de E_r liggen dan en slechts dan netjes als e_o en e'_o in verschillende halve ruimten van de door $e_1, \dots, e_r$ bepaalde lin. var $\lambda_o = 0$ liggen.

Bewijs: Een gemeenschappelijk punt van de twee simplexen moet de vorm hebben

$$\sum_o^r \lambda_i e_i = \mu_o e'_o + \sum_1^r \mu_i e_i$$

waar $\quad \Sigma \lambda_i = \Sigma \mu_i = 1 \quad , \quad \lambda_i \geqq 0 \quad , \quad \mu_i \geqq 0 .$

Verder is $\quad e'_o = \sum_o^r \alpha_i e_i .$

Substitutie levert

$$\sum_o^r \lambda_i e_i = \mu_o \alpha_o e_o + \sum_1^r (\mu_i + \mu_o \alpha_i) e_i .$$

De coëfficiëntensom is rechts weer 1. Wegens de eenduidige bepaalheid van de barycentrische coördinaten is in 't bijzonder

$$\lambda_o = \mu_o \alpha_o .$$

Indien $\lambda_o = \mu_o = 0$ is, krijgen we de punten van het gemeenschappelijke ondersimplex $T(e_1, \dots, e_r)$. Is $\alpha_o < 0$, dan kunnen er geen andere gemeenschappelijke punten zijn; maar $\alpha_o < 0$ betekent juist dat e_o en e'_o in verschillende halve ruimten liggen. Is $\alpha_o > 0$ (dezelfde halve ruimte), dan hoort krachtens

$$\mu_o = \frac{\lambda_o}{\alpha_o} \quad , \quad \mu_i = \lambda_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_o} \lambda_o$$

bij ieder punt van $T(e_o, e_1, \dots, e_r)$ met $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, r)$ en voldoende kleine λ_o een ermee samenvallend punt van $T(e'_o, e_1, \dots,$ In het eerste geval liggen de simplexen netjes, in het tweede niet.

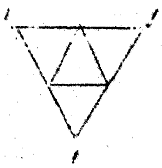
Stelling: Liggen in de E_r de simplexen $T(e_o, e_1, \dots, e_r)$ en $T(e'_o, e_1, \dots, e_r)$ netjes, dan zijn de binnenpunten van $T(e_1, \dots, e_r)$ inwendige punten van $T(e_o, e_1, \dots, e_r) \cup T(e'_o, e_1, \dots, e_r)$.

Bewijs: De barycentrische coördinaten van x in het stelsel $e_o, e_1, \dots, e_n$ heten $\lambda_i(x)$, die in het stelsel $e'_o, e_1, \dots, e_n$ heten $\mu_i(x)$. De functie $f_i(x)$, die in $\lambda_o \geqq 0$ met $\lambda_i(x)$ en in $\lambda_o \leqq 0$

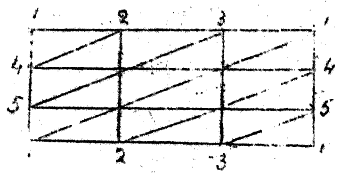
met $\mu_i(x)$ samenvalt, is in de hele ruimte continu (zie I.4.4). Dus is de verzameling $f_i(x) > 0$ $(i = 1,\dots,n)$ open. Dat is echter een deelverzameling van $T(e_0,e_1,\dots,e_n) \cup T(e_0',e_1,\dots,e_n)$, die alle binnenpunten van $T(e_1,\dots,e_n)$ bevat.

2. Gegeven een stel simplexen zonder gemeenschappelijke punten. Tussen deze simplexen zijn zekere identificaties vastgelegd, en wel als volgt: Zekere hoekpunten $e_0,e_1,\dots,e_p$ van het simplex T kunnen geïdentificeerd zijn met resp. $e_0',e_1',\dots,e_p'$ van T', en dan is $\Sigma\, \lambda_i e_i$ van T ook geïdentificeerd met $\Sigma\, \lambda_i e_i'$ van T'. De identificaties moeten samen transitief en omkeerbaar zijn, en twee verschillende punten van hetzelfde simplex mogen nooit met elkaar geïdentificeerd zijn. Zoiets noemen we een abstracte polytoop. We passen overigens dezelfde terminologie als bij de (concrete) polytopen toe.

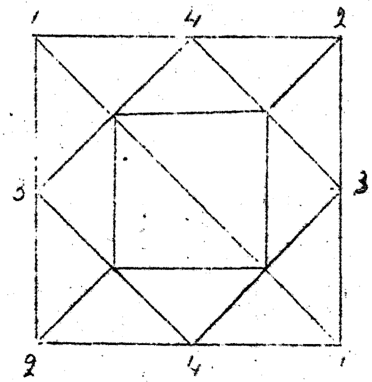
Voorbeelden: Viervlak



Torus



Projectief vlak.



De identificaties zijn deels getekend, deels door cijfers aangeduid.

Stelling: Een eindige r-dim. polytoop P kan in de E_{2r+1} worden geconcretiseerd (d.w.z. op een concrete polytoop 1-1- afgebeeld, zodat de afbeelding in ieder simplex barycentrisch is).

Bewijs: Het (te construeren) beeld van een punt of verzameling wordt door een accent aangeduid. We gaan ervoor zorgen, dat

(1.) Twee verschillende hoekpunten van P nooit hetzelfde beeld hebben.

(2.) Elke hoekpuntenverzameling V, die een simplex van P bepaalt, afgebeeld wordt in een verzameling van E_{n+1} in algemene ligging, en

(3.) De simplexen van P' paarsgewijs netjes liggen.

Volgens (1.) geldt:

$(V \cap W)' = V' \cap W'$, (V,W=verzamelingen hoekpunten)

en: uit $V' = W'$ volgt $V = W$.

Uit (2.) volgt, dat elk simplex van P éénéénduidig wordt afgebeeld. We tonen aan, dat heel P éénéénduidig wordt afgebeeld: Zi $a' = b'$. a en b zijn binnenpunten van zekere simplexen $T(V)$ en $T(W)$ van P. Dan is dus

$$a' = b' \varepsilon T(V)' \cap T(W)' = T(V') \cap T(W') = T(V' \cap W')$$

(omdat $T(V')$ en $T(W')$ netjes liggen) $= T((V \cap W)')$.

Aangezien de afbeelding in $T(V)$ en $T(W)$ 1-1 is, volgt hieruit $a, b \varepsilon V \cap W$; daar a, b binnenpunten van V en W zijn, is dus $V = W$ en wegens de éénéénduidigheid in $V = W$ dus $a = b$. Dus is de afbeelding in heel P éénéénduidig. Verder is duidelijk dat P' een polytoop is.

We moeten nu de eisen 1-3 vervullen. De constructie geschiet inductief. Laat van n hoekpunten van P (en hun simplexen) de beelden in E_{2r+1} al geconstrueerd zijn, zodat 1-3 geldt. Dat geeft een deelpolytoop $\widetilde{P'}$ van P'. We kiezen een (n+1)-de hoekpunt van P, genaamd e, met als beeld e' en voegen alle simplexen $T(e', V')$ aan $\widetilde{P'}$ toe, waarvoor $T(e, V)$ een simplex van P is. e' kiezen we willekeurig, maar verschillend van de aanwezige hoekpunten en zo, dat alle lijnen verboden gebied zijn, die een punt van een $\leqq$ r-dim. simplex van $\widetilde{P}$ verbinden met een punt van een $<$ r-dim. simplex $\widetilde{P'}$. Dan is 1-2 meteen vervuld. We tonen nu aan, dat

(α) twee nieuwe (β) een oud en een nieuw

simplex netjes liggen. Zijn $T(V_1, e)$ en $T(V_2, e)$ simplexen van P, dan moet dus

$$(\alpha) \quad T(V_1', e') \cap T(V_2', e') = T(V_1' \cap V_2', e')$$

zijn. (dim. $V_i' < r$.) Is a' in het linkerlid, dan ligt a' op lijnstukken $e'a_1'$ en $e'a_2'$ met $a_i' \varepsilon T(V_i')$. Aangezien voor e' een lijn $a_1' a_2'$ verboden zou zijn, moet $a_1' = a_2'$ zijn, dus is a' op een verbindingslijn van e' met een punt van $T(V_1' \cap V_2)$, dus in het rechterlid van (α). Hieruit volgt α.

Zijn $T(V_1)$ en $T(V_2, e)$ simplexen van P, dat moet

$$(\beta) \quad T(V_1') \cap T(V_2', e') = T(V_1' \cap V_2', e)$$

zijn. (dim. $V_1' \leqq r$, dim. $V_2' < r$.) Is a' in 't linkerlid, dan is $a' \varepsilon V_1'$ en a' op een lijnstuk $e'a_2'$, $a_2' \varepsilon T(V_2')$. Aangezien een lijn $a'a_2'$ voor e' verboden gebied zou zijn, geldt $a' = a_2'$, dus a' in het rechterlid van (β). Hieruit volgt (β).

Het verboden terrein beslaat eindig veel 2r-dim. lin. var. in de E_{2r+1}. Die putten E_{2r+1} niet uit. (Dat is inductief te zien, door het geval met een nieuwe 2r-dim. lin. var. te snijden.) Een e' zoals gewenst, bestaat dus.

3. Onderverdeling van een simplex T is een eindige polytoop, die als puntverzameling met T samenvalt. Onderverdeling van een

polytoop P is een polytoop, die ontstaat door de simplexen van P onder te verdelen.

De barycentrische onderverdeling van een simplex

$$T(0,1,\dots,r)$$

ontstaat door als nieuwe hoekpunten te kiezen de zwaartepunten van alle mogelijke ondersimplexen

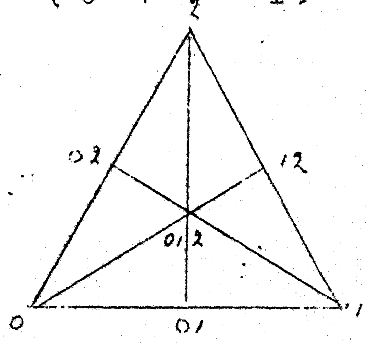
$$T(i_0,i_1,\dots,i_p),$$

genaamd $\{i_0,i_1,\dots,i_p\}$,

en als nieuwe r-dim. simplexen alle

$$T(\{i_0\}, \{i_0,i_1\}, \{i_0,i_1,i_2\},\dots, \{i_0,i_1,\dots,i_r\}).$$

(Dit zijn er $(r+1)!$).



Dat dit een onderverdeling is wordt inductief bewezen. We voeren de laatste stap uit: Is $a \in T(0,1,\dots,r)$ en $a \neq z = \{i_0,i_1,\dots,i_r\}$, dan projecteren we a vanuit z in een zelfkantpunt a' van $T(0,1,\dots,r)$. a' ligt op een echt ondersimplex van $T(0,1,\dots,r)$. Inductief weten we, dat $a' \in$ zekere $T(\{i_0\}, \{i_0 i_1\},\dots, \{i_0 i_1 \dots i_{r-1}\})$ is, dus $a \in T(\{i_0\}, \{i_0 i_1\},\dots, \{i_0 i_1 \dots i_{r-1}\}, \{i_0 i_1 \dots i_{r-1} i_r\})$. Ook z ligt hierin. De vereniging van de nieuwe r-dim. simplexen bevat dus het oude. Het omgekeerde is eveneens evident.- Ga zelf na, dat de nieuwe simplexen een polytoop vormen !

De barycentrische onderverdeling van een polytoop wordt verkregen, door zijn simplexen barycentrisch onder te verdelen.

4. De diameter van een simplex is gelijk aan zijn grootste ribbe.

Bewijs: Doorloopt p een lijnstuk, dan bereikt $\rho(p,q)$ zijn maximum in het eindpunt van het lijnstuk. (Waarom ?) Doorloopt p een simplex, dan bereikt $\rho(p,q)$ zijn maximum in een hoekpunt van het simplex. (Bewijs dit inductief, door een lijnstuk door p te leggen met op de zelfkant van het simplex zijn eindpunten!) $\rho(p,q)$ bereikt dus in een simplex bij variabele p èn q zijn maximum, als beide hoekpunten zijn.

Is T' barycentrisch deelsimplex van de r-dim. simplex T, dan is diam. $T' \leqq \frac{r}{r+1}$ diam. T.

Bewijs: $T = T(x_0,\dots,x_r)$. Na evtl. vernummering mogen we veronderstellen, dat de grootste ribbe van T' de eindpunten

$$\{x_0,\dots,x_k\} = \frac{1}{k+1}\sum_0^k x_i = a$$

en

$$\{x_0,\dots,x_k,\dots,x_l\} = \frac{1}{l+1}\sum_0^l x_i = b$$

bezit. Het punt

$$\{x_{k+1},\dots,x_l\} = \frac{1}{l-k}\sum_{k+1}^{l} \cdot x_i = c$$

ligt ook in T.

$$b = \frac{k+1}{l+1}\,a + \frac{l-k}{l+1}\,c,$$

dus $$|b - a| = \frac{l-k}{l+1}|c - a| \leqq \frac{l}{l+1}|c - a| = \frac{r}{r+1} \text{ diam T.}$$

Stelling: Bij voortgezette barycentrische onderverdeling van een eindige polytoop naderen de diameters der deelsimplexen gelijkmatig naar 0. (Bewijs dit zelf!)

V. Compacte ruimten.

1. We veronderstellen scheidingsaxioma 1.

R heet compact, als iedere oneindige deelverzameling van R een verdichtingspunt bezit.

Dus iedere ruimte uit eindig veel punten is compact. Naar Bolzano-Weierstrass bezit elke oneindige beperkte verzameling V van E_1 een verdichtingspunt; is V afgesloten, dan hoort dit verdichtingspunt ook bij V. Dus een beperkte afgesloten deelverzameling van E_1 is (als ruimte) compact. Hetzelfde geldt voor de beperkte afgesloten deelverzamelingen V van E_r. Want men kan een oneindige deelrij uittrekken, waarvan de 1e coördinaten (die immers een beperkte verzameling vormen) convergeren; hieruit één, waarvoor ook de 2e coördinaten convergeren enz. Een puntenrij, waarvan alle coördinaten afzonderlijk convergeren, convergeert. Dat levert het verdichtingspunt.

In de Hilbert-ruimte H geldt die bewering niet. De punten $a_i = (0,0,\dots 1,0,\dots)$ (op de i-de plaats een 1) hebben de afstand 1 van de oorsprong, vormen dus een beperkte verzameling V. Alle coördinaten afzonderlijk convergeren naar 0. De oorsprong zou dus het enige verdichtingspunt kunnen zijn, maar die heeft van alle punten van V de afstand 1. Dus heeft V geen verdichtingspunt.

De fundamentaalquader F van H is wel compact. Gegeven $V \subset F$, V oneindig. We kiezen een deelrij $x_n^{(1)}$ van V, waarvoor de 1e coördinaten convergeren; hieruit een deelrij $x_n^{(2)}$, waarvoor de 2e coördinaten convergeren, enz. Van de "diagonaalrij" $x_n^{(n)}$ convergeren alle coördinaten, want b.v. de k-de coördinaten vormen (op de eerste k-1 na) een deelrij van de k-de coördinaten van $x_n^{(k)}$. I.p.v. $x_n^{(n)}$ zeggen we $y_n = (\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \dots)$.

$$\lim_n \eta_{n,i} = \eta_i .$$

$$|\eta_{n,i}| \leqq \frac{1}{i} \quad , \quad |\eta_i| \leqq \frac{1}{i}$$

$y_i = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ is dus in F.

$$\sum_1^\infty (\eta_{n,i} - \eta_i)^2 = \sum_1^M + \sum_{M+1}^\infty .$$

Wegens de convergentie van $\sum_i \frac{1}{i^2}$ kan de 2e som $< \frac{1}{2}\varepsilon$ worden gemaakt, door M groot genoeg te kiezen; wegens de convergentie der coördinaten de eerste eveneens voor alle $n \geq$ zekere N. Dus $\lim y_n = y'$ is een verdichtingspunt van V.

Bewijs zelf: Een onbeperkte verzameling van een metrische ruimte is nooit compact. Een afgesloten verzameling van een compacte ruimte is (als ruimte) weer compact. Een niet afgesloten verzameling van enige ruimte is niet compact (zie II,1"). De vereniging van twee compacte ruimten is compact. Een eindige polytoop is compact.

Een systeem Σ van verzamelingen heet eindig gebonden (gebonden), als ze met zijn eindig velen (met zijn allen) een niet lege doorsnee hebben.

Een systeem Σ van open verzamelingen heet een overdekking van R, als R de vereniging van de $O\varepsilon\Sigma$ is.

R heet bicompact, als

(α) ieder eindig gebonden systeem van afgesloten verzamelingen van R ook gebonden is; oftewel:

(β) iedere overdekking van R een eindige overdekking bevat.

We tonen $\alpha \leftrightarrow \beta$ aan: Zij Σ een overdekking. Σ^* bestaat uit de complementen $R \setminus O$ van alle $O\varepsilon\Sigma$. Wegens $R = \bigcup_{O\varepsilon\Sigma} O$ is $\bigcap_{A\varepsilon\Sigma^*} A = \bigcap_{O\varepsilon\Sigma} R \setminus O$ leeg. Dus is Σ^* niet gebonden, dus, als (α) verondersteld wordt, ook niet eindig gebonden. Er is dus een eindige $\Sigma_1^* \subset \Sigma^*$, zo dat $\bigcap_{A\varepsilon\Sigma^*} A = \square$ is. Σ_1 zij de verzameling van de $O = R \setminus A$ met $A\varepsilon\Sigma_1^*$. Dan is dus $\bigcup_{O\varepsilon\Sigma_1} O = R$. Dus geldt ($\beta$). Analoog omgekeerd.

<u>Stelling 1</u>: Een afgesloten deelverzameling van een bicompacte ruimte is (als ruimte) bicompact. (Bewijs dit zelf!)

<u>Stelling 2</u>: Iedere bicompacte ruimte is compact.

Bewijs: Was V een oneindige verzameling zonder verdichtingspunt, dan was V afgesloten (zie I.3.1, I.3.14), dus ook elke $V \setminus (a)$ met $a\varepsilon V$. Deze verzamelingen zouden eindig gebonden, dus gebonden zijn, hetgeen niet klopt. Dus bestaat zo'n V niet.

<u>Stelling 3</u>: Een compacte R, die machtigheidsaxioma 2 vervult, is bicompact.

Bewijs: Gegeven een overdekking Σ. Alle basis-O met $O \subset P$ voor zekere $P\varepsilon\Sigma$, vormen een overdekking Σ', die aftelbaar is. Bij iedere $O\varepsilon\Sigma'$ hoort een $P\varepsilon\Sigma$ met $O \subset P$; deze P vormen een aftelbare overdekking $\Sigma'' \subset \Sigma$. Deze Σ'' bestaat uit verzamelingen $P_1, P_2, \dots$ We willen aantonen, dat (voor zekere n) reeds $P_1, \dots, P_n$ een overdekking vormen. Was dit niet zo, dan waren onder de $\bigcup_1^n P_i$ oneindig veel verschillende, die we $Q_1, Q_2, \dots$ noemen, $Q_i \subset Q_{i+1}$. We kiezen $a_i \varepsilon Q_{i+1} \setminus Q_i$. De a_i bezitten een verdichtingspunt a. Nu is $a_i \not\varepsilon Q_j$ voor alle $j \leqq i$, dus $a_i \varepsilon R \setminus Q_j$ voor alle $i \geqq j$. $R \setminus Q_j$ is afgesloten, dus is ook $a \varepsilon R \setminus Q_j$, dus $a \not\varepsilon Q_j$ voor alle j, dus $a \not\varepsilon \bigcup Q_j = R$, hetgeen onmogelijk is.

Een verzameling V van een metrische ruimte R heet een <u>ε-net</u> ($\varepsilon > 0$), als elk punt van R van V een afstand $< \varepsilon$ heeft.

<u>Stelling 4</u>: Een compacte metrische ruimte bezit een eindig ε-net voor elke $\varepsilon > 0$.

Bewijs: We kiezen achter elkaar punten $a_1, a_2, \dots$, zodat elk van de vereniging van de voorafgaande een afstand $\geqq \varepsilon$ heeft. Dit proces breekt af bij zekere m, want anders zouden de a_n een verdichtingspunt bezitten, hetgeen onmogelijk is. $a_1, \dots, a_m$ vormen dan een ε-net, omdat geen punt van R meer bestaat, dat van deze een afstand $\geqq \varepsilon$ heeft.

<u>Stelling 5</u>: Een compacte metrische ruimte vervult machtigheidsaxioma 1, dus (zie MI.5) machtigheidsaxioma 2, is dus bicompact (stelling 3).

Bewijs: V_n zij een ε-net voor $\varepsilon = \frac{1}{n}$. $\bigcup V_n$ is overal dicht en aftelbaar.

<u>Stelling 6</u>: Een bicompacte Hausdorff-ruimte is regulier.

Bewijs: Gegeven een afgesloten verzameling A en een punt $p \not\varepsilon A$. Bij iedere $a \varepsilon A$ is er een paar omgevingen $U_a \cap U_p^{(a)} = \square$. De $U_a \cap A$ vormen een overdekking van de bicompacte ruimte A (Stelling 1). Dus zijn er $a_1, \dots, a_m \varepsilon A$ zo dat reeds $\bigcup (U_{a_i} \cap A) = A$ is. We stellen $\bigcup U_{a_i} = U$ en $\bigcap U_p^{(a_i)} = V$. Dan zijn U en V de gevraagde vreemde omgevingen van A en p.

<u>Stelling 7</u>: Een bicompacte Hausdorff-ruimte is zelfs normaal. Bewijs dit zelf volgens hetzelfde beginsel als 6!

<u>Stelling 8</u>: Het continue beeld van een bicompacte ruimte is bicompact. - Bewijs dit zelf.

<u>Stelling 9</u>: Het continue beeld van een compacte ruimte is compact. Bewijs: Zij V' een oneindige deelverzameling van de beeldruimte R' zonder verdichtingspunt. Dan is V' afgesloten, dus wegens de continuïteit ook het origineel V van V'. V heeft een verdichtingspunt $a \varepsilon V$. Het beeld $a' \varepsilon V'$ bezit een omgeving $U_{a'}$ met $U_{a'} \cap V' = \square$. Het origineel van $U_{a'}$ is een omgeving U van a. Maar dan is ook $U_a \cap V = \square$ in strijd met het feit, dat [illegible] punt van V is. Dus was de onderstelling onjuist.

Stelling 10: Een eeneenduidige continue afbeelding van een compacte in een compacte ruimte is topologisch.

Bewijs: Is A een afgesloten verzameling van de originele ruimte, dan is A als ruimte compact, dus zijn beeld A' is compact, dus afgesloten in de beeldruimte. Bij de inverse afbeelding is dus het origineel van elke afgesloten verzameling afgesloten, dus is de inverse afbeelding ook continu.

Stelling 11: Een continue reële functie gedefiniëerd in een compacte of bicompacte ruimte bezit een maximum en een minimum. (Volgt uit 8-9.)

Stelling 12: Een continue afbeelding van een compacte metrische ruimte in een metrische ruimte is gelijkmatig continu.

Bewijs: We moeten aantonen het bestaan van een $\delta > 0$ bij gegeven $\varepsilon > 0$, zodat voor alle a, b met

$$\rho(a,b) < \delta$$

geldt $$\rho(f(a), f(b)) < \varepsilon .$$

Was die δ er niet voor zekere $\varepsilon_0 > 0$, dan was er dus voor iedere n een paar a_n, b_n met

$$\rho(a_n, b_n) < \frac{1}{n} , \qquad (*)$$

$$\rho(f(a_n), f(b_n)) \geqq \varepsilon_0 . \qquad (**)$$

Er is een deelrij n' van de natuurlijke getallen, zo dat

$$\lim a_{n'} = a$$

bestaat. Maar dan bestaat ook wegens (*)

$$\lim b_n = a,$$

en dan levert (**) een strijdigheid met de continuïteit op.

2. Een afbeelding f van een metrische ruimte in een topologische ruimte heet een ε-afbeelding, als de origineel-verzameling van ieder punt een diameter $< \varepsilon$ bezit.

Stelling 1: Is f een ε-afbeelding van een compacte R in S, dan bestaat er een $\eta > 0$, zodat van elke verzameling met een diameter $< \eta$ het origineel een diameter $< \varepsilon$ bezit.

Bewijs: Was dit niet zo, dan bestond voor elke $\eta = \frac{1}{n}$ een puntenpaar $a_n, b_n \varepsilon R$ met $\rho(a_n, b_n) \geqq \varepsilon$ en $\rho(f(a_n), f(b_n)) < \frac{1}{n}$ en we konden een deelrij n' van indices vinden, zo dat $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ bestaan. Maar dan bevatte het origineel van $f(a) = f(b)$ de twee punten a en b met $\rho(a,b) \geqq \varepsilon$, in strijd met de veronderstelling.

Stelling 2: Een compacte metrische ruimte R bezit voor iedere $\varepsilon > 0$ een ε-afbeelding op een geschikte eindige polytoop.

Bewijs: $O_1, \ldots, O_n$ vormen een eindige overdekking van R, met diameter $(O_i) < \varepsilon$. De functie

$$\alpha_i(p) = \rho(p, R \setminus O_i)$$

is continu en verdwijnt net in $R \setminus O_i$.

$$\beta_i(p) = \frac{\alpha_i(p)}{\Sigma\, \alpha_i(p)}$$

is zinvol en continu. Aan iedere O_i laten we een punt x_i van de E_{n-1} beantwoorden, zodat de $T(x_1,\dots,x_n)$ een simplex is. Met T_r duiden we een r-dim. ondersimplex van $T(x_1,\dots,x_n)$ aan.

$$f(p) = \Sigma\, \beta_i(p) x_i$$

is een continue afbeelding in $T(x_1,\dots,x_n)$. f hoeft geen "afbeelding op" te zijn. Wordt T_{n-1} niet vol overdekt door f(R) dan is er een binnenpunt r van T_{n-1}, dat niet overdekt wordt. We projecteren f(R) vanuit r op de zelfkant T_{n-1}; deze afbeelding is continu en wordt g^{n-1} genoemd. We definiëren g^{n-2} in elke T_{n-2}, dat door $g^{n-1}f(R)$ vol overdekt wordt, als identiteit en in ieder ander T_{n-2} als projectie vanuit een niet overdekt binnenpunt op de zelfkant van die T_{n-2}. g^{n-2} is eenduidig en continu. Analoog definiëren we g^{n-i} van alle $i \leqq n-1$. We stellen

$$h = g^1 g^2 \dots g^{n-2} g^{n-1} f.$$

Elk ondersimplex van T_{n-1} waarvan een binnenpunt tot h(R) behoort, ligt geheel in h(R). Dus is h(R) een polytoop.

Bij een afbeelding g^{n-i} blijft elk punt in al die simplexen, waar het in was. Is

	$h(p)$ binnenpunt van $T_j = T(x_{i_0},\dots,x_{i_j})$
dan was	$f(p)$ binnenpunt van zekere T_k met $T_k \supset T_j$.
Dus	$f(p) = \Sigma\, \beta_i(p) x_i$
met	$\beta_{i_0}(p) \neq 0$,
dus	$p \varepsilon O_{i_0}$.

De h-origineelverzameling van elk punt is dus in een O_{i_0} bevat, dus $< \varepsilon$.

Opmerking: Is $h(p) \varepsilon T(x_{i_0},\dots,x_{i_j})$, dan is zelfs $p \varepsilon O_{i_0} \cap \dots \cap O_{i_j}$.

Definitie: Een compacte metrische ruimte R is van de dimensietrap r (dim *) wanneer een r het kleinste getal is, waarvoor een ε-afbeelding (voor elke $\varepsilon > 0$) van R op een eindige r-dim. polytoop bestaat. Oftewel: dim* $R \leqq r$ dan en slechts dan, als enz.

R heet van oneindige dimensietrap, als zo'n getal r niet bestaat.

Een overdekking Σ van een metrische ruimte R heet een ε-r-overdekking, wanneer diam $O < \varepsilon$ voor elke $O \varepsilon \Sigma$ is en telkens r+2 verzamelingen $O \varepsilon \Sigma$ een lege doorsnee hebben.

Zij P een r-dim. polytoop en Σ de verzameling van de sterren van alle hoekpunten van P. Is $\sigma(e_0) \cap \dots \cap \sigma(e_m)$ niet leeg en bevat het dus een punt a, dan is er een simplex T van P (waarvan a binnenpunt is), zodat $T \subset \sigma(e_i)$ $(i = 0,\dots,m)$ geldt, maar dan zijn deze e_i hoekpunten van T, dus dim T $\geqq$ m. En omgekeerd: is $T(e_o,\dots,e_m)$ simplex van P, dan is $\sigma(e_o)\cap\dots\cap\sigma(e_m) \neq \Box$. Zijn de sterren bovendien $<\varepsilon$, dan is deze Σ dus een ε-r-overdekking, maar geen ε-(r-1)-overdekking van P.

Stelling 3: $\dim^* R \leqq r$ dan en slechts dan, als er voor elke $\varepsilon > 0$ een ε-r-overdekking van R bestaat.

Bewijs: Uit de opmerking bij stelling 1 volgt, dat het bestaan van een ε-r-overdekking tengevolge heeft het bestaan van een ε-afbeelding op een $\leqq$ r-dim. polytoop, dus als dit voor elke $\varepsilon > 0$ het geval is: $\dim^* R \leqq r$. - Zij $\dim^* R = r$, dan is er voor elke $\varepsilon > 0$ een ε-afbeelding f op een eindige polytoop P; dim P $\leqq$ r. We kiezen een $\eta > 0$ volgens stelling 1 en verdelen P zolang barycentrisch onder, tot de sterren van alle hoekpunten $< \eta$ zijn (IV.4). De nieuwe polytoop P^* is ook ten hoogste r-dim. Onder Σ verstaan we de verzameling van alle $f^{-1}(\sigma(e_i))$, waar e_i alle hoekpunten van P^* doorloopt. De verzamelingen van Σ zijn open en $< \varepsilon$ en hebben evenals de $\sigma(e_i)$ ten hoogste met zijn r+1 een niet lege doorsnee, vormen dus een ε-r-overdekking.

Stelling 4: $\dim^* R = r$ dan en slechts dan als er voor elke $\varepsilon > 0$ een ε-r-overdekking, maar niet voor elke $\varepsilon > 0$ een ε-(r-1)-overdekking van R bestaat. (Gevolg van 3.)

Let wel: We weten nog niet, of een r-dim. simplex (polytoop) nu ook van de dimensietrap r is, dus of zo'n simplex (polytoop) niet op lager-dim. polytopen ε- afgebeeld kan worden voor elke $\varepsilon > 0$. Dit zal later blijken, niet het geval te kunnen zijn. Tot nu toe weten we alleen $\dim^* P \leqq \dim P$. Het omgekeerde is een diepliggend feit.

Wel kan men door ε-afbeeldingen de dimensietrap van een compacte ruimte willekeurig verhogen. Denk aan de Peano-kromme!

5. De lege ruimte is van de dimensietrap -1. Een compacte metrische ruimte R is dan en slechts dan van de dimensietrap 0, als ieder punt van R willekeurig kleine brokomgevingen bezit. ("Slechts dan" volgt uit stelling 4, want is $O_1,\dots,O_n$ een overdekking met $O_i \cap O_j = \Box$ $(i \neq j)$, dan is er bij iedere $p \varepsilon R$ een O_{i_o} met $p \varepsilon O_{i_o} = R \setminus \bigcup_{i \neq i_o} O_i$, en dat is een brokomgeving van p.
"Dan": Uit het systeem van alle brokken met diam. $< \varepsilon$ kan men wegens de compactheid een eindige overdekking $O_1,\dots,O_n$ met brokken uittrekken; de $O'_j = O_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j} O_i$ zijn ook brokken en vormen een ε-0-overdekking.)

VI. Topologische groepen

1. G heet een topologische groep, als G een topologische ruimte en tevens een groep is en als ab ($a,b \varepsilon G$) en a^{-1} continu van a,b resp. van a afhangen.

($\varphi(a,b) = ab$ stelt een afbeelding van $G \times G$ in G voor; als zodanig hoort φ continu te zijn.)

In een topologische groep G is de links- (rechts-) vermenigvuldiging met een vast element,

$$f_a(x) = ax \quad \text{resp.} \quad g_a(x) = xa ,$$

een topologische afbeelding van G op G. Hetzelfde geldt voor $x \to x^{-1}$.

Is V open resp. afgesloten, dan ook aV, V_a en V^{-1}.

We veronderstellen in 't vervolg scheidingsaxioma 1.

Zijn G en G' topologische groepen en is G continu homomorf afgebeeld in G', dan is de kern van dit homomorfisme afgesloten ((a) is namelijk afgesloten.)

Is omgekeerd H afgesloten normaaldeler van G, dan kan men G/H topologiseren: Is O open in G, dan is de verzameling der aH met $a \varepsilon O$ open in G/H; en deze open verzamelingen vormen een basis voor G/H. -Laat zien dat de axioma's I vervuld zijn! Ook scheidingsaxioma 1 is vervuld wegens de afgeslotenheid van H. Laat zien dat het homomorfisme $a \to aH$ (van G in G/H) continu is! Toon aan, dat alle axioma's van II zich van G op G/H overdragen!

Een continu isomorfisme is niet noodzakelijk topologisch. Voorbeeld: G de optelgroep der natuurlijke getallen. G' de optelgroep der reële getallen mod. 1 (getopologiseerd als factorgroep van de optelgroep der reële getallen naar G). $f(n) = n\vartheta$ (mod.1) met irrationale ϑ. f is een isomorfe afbeelding van G op f(G), maar geen homeomorfie, want in f(G) komen verdichtingspunten voor en in G niet.

2. In 't vervolg hebben we haast uitsluitend met commutatieve groepen te maken, die we additief schrijven. Een bijzondere rol spelen de optelgroepen der

gehele getallen		(mod.0)	aangeduid	(triviaal getopol.)
" "	mod. m :	(mod.m)	"	(" ")
reële "	:	(re)	" ,	
" "	mod. 1 :	(re mod.1)	" .	

Gegeven een verzameling A en een (topologische) groep Γ. We definiëren de (topologische) "groep G boven A of Γ" : Elementen zijn de (eindige) lineaire combinaties

$$\Sigma \gamma_i a_i , \qquad \gamma_i \varepsilon \Gamma , \quad a_i \varepsilon A$$

d.w.z. slechts eindig veel coëfficiënten γ_i zijn $\neq 0$. Met deze elementen wordt zo gerekend, dat

$$\Sigma \gamma_i a_i + \Sigma \gamma_i' a_i = \Sigma(\gamma_i + \gamma_i')a_i$$

is. Verder definiëren we

$$\| \Sigma \gamma_i a_i \| = \text{verzameling der } \Sigma \gamma_i \varepsilon_i \text{ met } \varepsilon_i = 0$$
$$\text{indien } \gamma_i = 0 \text{ en } \varepsilon_i = 0, \pm 1 \text{ anders.}$$

Dat is dus een deelverzameling van Γ. Men ziet:

$$\| 0 \| = (0) \quad , \quad \| z \| = \| -z \| \quad , \quad \| z_1+z_2 \| \subset \| z_1 \| + \| z_2 \| \quad .$$

Is P een open verzameling uit Γ, dan verstaan we onder B(z,P) de verzameling der $y \varepsilon G$ met $\| z-y \| \subset P$. Door deze definitie wordt G een topologische groep. De axioma's van topologische ruimten worden net zo bewezen als dit bij metrische ruimten is geschied. Om de continuïteit van z_1+z_2 in z_1 en z_2 te bewijzen, moeten we eerst bij een gegeven omgeving P van 0 in Γ een omgeving P' van 0 in Γ bepalen, zodat $P' + P' \subset P$ is. P' bestaat, omdat in Γ de opteloperatie continu is. Is nu

$$z^0 = z_1^0 + z_2^0 \quad , \quad z = z_1 + z_2$$

dan is $\qquad z - z^0 = (z_1 - z_1^0) + (z_1 - z_2^0).$

Indien $\qquad \| z_i - z_i^0 \| \subset P'$

geldt, is $\qquad \| z - z^0 \| \subset P.$

Dus is ook in G de opteloperatie continu.

Als A een eindige verzameling is (m elementen), is G de m-voudige directe som van Γ met zichzelf; toon zelf aan, dat de topologie van G met die van het m-voudige cartesische product overeenkomt!

VII. Ontwikkelingen van ruimten en groepen

1. Een rij R_n van ruimten, waarvan ieder in de voorafgaande continu is afgebeeld,

$$f_n^{n+1} \; R_{n+1} \subset R_n,$$

heet een R_n-adische rij; zijn alle afbeeldingen "op" dan spreken we van op-R_n-adisch.

We definiëren voor alle $m > n$ de (continue) afbeeldingen

$$f_n^m \; R_m \subset R_n$$

inductief door $\qquad f_n^m f_m^l = f_n^l \quad .$

De rij R_n bepaalt een limietruimte R, de R_n-adische limiet de R_n-s. Punten van R zijn de rijen $a_n (\varepsilon R_n)$ met

$a_n = f_n^{n+1} \; a_{n+1}$; a_n heet de n-de coördinaat van het zojuist vermelde punt.

Speciale open verzamelingen in R noemen we voor willekeurig gegeven n en O_n open in R_n de verzameling van alle punten, wier n-de coördinaat ligt in O_n. De doorsnee van twee speciale open verzamelingen in R is weer een speciale open verzameling. Want als deze door O_m resp. O_n bepaald zijn en $m < n$ is, bepalen we P_n als het f_m^n-origineel van O_m en vormen $O_n \cap P_n$. Deze bepaalt een speciale open verzameling in R, die net de doorsnee van de twee gegeven verzamelingen is.

Open verzameling in R is iedere vereniging van speciale open verzamelingen. Toon aan, dat men i.p.v. "vereniging" ook kan zeggen "aftelbare vereniging" ! Toon aan, dat R inderdaad een topologische ruimte is.

f_n zij die afbeelding, die aan elk punt van R zijn n-de coördinaat toevoegt. f_n is continu (waarom?).

$$f_n^m f_m = f_n .$$

Voor $a,b \varepsilon R$, $a \neq b$, is er een n, zodat $f_n(a) \neq f_n(b)$.

2. <u>Stelling 1</u>: Met de ruimten R_n voldoet ook hun R_n-adische limiet aan een der scheidingsaxioma's 1-3 en aan machtigheidsaxioma 2.

Scheidingsaxioma 1: $a \varepsilon R$, $f_n(a) = a_n$; (a_n) afgesloten in R_n, dus zijn f_n-origineel $A^{(n)}$ afgesloten in R. $(a) = \bigcap A^{(n)}$.

Scheidingsaxioma 2: $a,b \varepsilon R$, $a \neq b$. n zo dat $f_n(a) = a_n \neq f_n(b) = b_n$. O_n, P_n omgevingen in R_n van a_n, b_n; $O_n \cap P_n = \square$. De originelen van O_n, P_n in R voldoen.

Scheidingsaxioma 3 in de vorm 3' : $a \varepsilon O \subset R$, O open. We zoeken open P met $a \varepsilon P$, $\overline{P} \subset O$. We mogen O speciaal veronderstellen, dus $O = f_n$-origineel van open $O_n \subset R_n$ voor zekere n. $a_n = f_n(a) \varepsilon O_n$. Er is open $P_n \subset R_n$ met $a_n \varepsilon P_n$, $\overline{P}_n \subset O_n$. Kies P als f_n-origineel van P_n!

<u>Stelling 2</u>: Veronderstel, dat in de R_n de topologie door het limiet-begrip bepaald is. Dan en slechts dan is in R $\lim_i a^{(i)} = a$, indien voor elke n de limiet van hun n-de coördinaten bestaat.

Bewijs: Zij $\lim_i a^{(i)} = a$. Gegeven een omgeving $O_n \subset R_n$ van a_n. Deze bepaalt een speciale $O \subset R$ met $a \varepsilon O$. Nu is $a^{(i)} \varepsilon O$ voor bijna elke i, dus $a_n^{(i)} \varepsilon O_n$ voor bijna alle i. Dus $\lim_i a_n^{(i)} = a_n$. - Zij $\lim_i a_m^{(i)} = a_m$ voor elke m $(a_m^{(i)} = f_m(a^{(i)}))$; wegens de continuïteit van f_n^m is dan $\lim_i f_n^m (a_m^{(i)}) = f_n^m (a^{(i)})$, dus $a_n = f_n^m a_m$. Dus definiëert de rij a_n een punt a van R. Zij O speciale omgeving van a, dus $O = f_{n_o}$-origineel van open O_{n_o} uit R_n. Nu is $a_{n_o} \varepsilon O_{n_o}$, dus bijna alle $a_{n_o}^{(i)} \varepsilon O_{n_o}$, dus bijna alle $a^{(i)} \varepsilon O_n$. Hieruit volgt $\lim a^{(i)} = a$.

Opmerking: De veronderstelling is in 't bijzonder vervuld bij metrische ruimten R_n en bij ruimten, die aan scheidingsaxioma 2 en machtigheidsaxioma 2 voldoen. Naar stelling 1 is in het laatste geval ook in R de topologie door het limietbegrip bepaald.

Stelling 3: Zijn de R_n metrische ruimten, dan is ook in R een metriek mogelijk.

Bewijs: We mogen veronderstellen, dat de metrieken ρ_n (resp. in R_n) aan $\rho_n(x,y) \leqq 1$ voldoen. We vormen in R:

$$\rho(a,b) = \Sigma\, 2^{-n}\, \rho_n(a_n,b_n).$$

We moeten aantonen, dat de door de metriek ρ in R geïnduceerde topologie met de R_n-adische samenvalt, of te wel (volgens opmerking bij stelling 2) dat het begrip limiet in beide gevallen hetzelfde is. Is nu $\lim a^{(i)} = a$ volgens de metriek, dus $\lim \rho(a^{(i)},a) = 0$, dan is a fortiori $\lim \rho(a_n^{(i)}, a_n) = 0$ voor elke n, dus $\lim a^{(i)} =$ $= a$ (R_n-adische topologie) wegens stelling 2. Aan de andere kant is $\rho(a,b) = \Sigma\, 2^{-n}\, \rho_n(f_n(a),f_n(b))$ als gelijkmatig convergente som van continue functies in R (R_n-adische topologie) weer continu (R_n-adisch). Dus volgt uit $\lim a^{(i)} = a$ (R_n-adisch) : $\lim \rho(a^{(i)},a) = 0$, dus $\lim a^{(i)} = a$ (metrisch).

Stelling 4: Zijn de R_n metrisch compact, dan ook R.

Bewijs: Zij V een oneindige deelverzameling van R. Is $f_1(V)$ eindig, dan is er een oneindige rij verschillende $a^{(i)} \varepsilon V$ met allemaal identieke $f_1(a^{(i)})$. Is $f_1(V)$ oneindig, dan bezit het een verdichtingspunt. In elk geval is er een oneindige deelrij verschillende ${}^{(1)}a^{(i)} \varepsilon V$ met convergente ${}^{(1)}a_1^{(i)}$. Op $V^{(1)} = \bigcup {}^{(1)}a^{(i)}$ en $f_2(V^{(1)})$ passen we dezelfde redenering toe en vinden een deelrij ${}^{(2)}a^{(i)}$ van ${}^{(1)}a^{(i)}$ met convergente ${}^{(2)}a_2^{(i)}$. Zo gaan we door en vinden dus algemeen een deelrij verschillende ${}^{(n)}a^{(i)}$ van ${}^{(n-1)}a^{(i)}$ met convergente ${}^{(n)}a_n^{(i)}$. Van de "diagonaalrij" ${}^{(i)}a^{(i)}$ zijn alle termen verschillend en convergeren voor iedere n de n-de coördinaten. Dus bestaat $\lim {}^{(i)}a^{(i)}$ en is verdichtingspunt van V.

Stelling 5: Zijn de R_n metrisch compact en niet leeg, dan is ook R niet leeg.

Bewijs: $S_n = \bigcap_m f_n^m R_m$ is als doorsnee van niet lege afgesloten verzamelingen in de bicompacte R_n niet leeg en $f_k^n S_n = S_k$. Er is dus een rij $a_n \varepsilon R_n$, $f_n^m a_m = a_n$, die een punt van R definiëert.

3. We spreken van een continue afbeelding g^n van de R_n-adische rij R_n in de ruimte Q, als bijna alle R_n continu afgebeeld zijn in Q,

$$Q \leftarrow R_k \leftarrow R_{k+1} \leftarrow \dots \leftarrow R$$

$$g^n R_n \subset Q ,$$

zo dat

$$g^n f_n^m = g^m$$

is. Een dergelijke afbeelding induceert er één van R in Q,

$$g R \subset Q$$

$$g = g^n f_n.$$

(Waarom is g hierdoor eenduidig bepaald?)

We spreken van een continue afbeelding g_n van een ruimte Q in de R_n-adische rij R_n, als Q in de afzonderlijke R_n continu is afgebeeld,

$$g_n \, Q \subset R_n \; ,$$

met
$$f_n^m \, g_m = g_n \; .$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_2 \leftarrow \dots \leftarrow R \; . \\ \qquad\qquad\qquad\quad \leftarrow Q \; . \end{array}$$

Een dergelijke afbeelding bepaalt er een van Q in R

$$g \, Q \subset R$$
$$f_n \, g = g_n$$

(dus $g(x)$ is het punt van R, waarvan de n-de coördinaat $g_n(x)$ is.
g is inderdaad continu, want is O een speciale open verzameling van R, dus bepaald door een $O_{n_o} \subset R_{n_o}$, dan is het g-origineel van O de verzameling van alle punten van O, waarvan de n_o-de coördinaat in O_{n_o} valt, dus gelijk aan het g_{n_o}-origineel van O_{n_o}, dus open.

We spreken van een continue afbeelding φ_n^m van een rij R_n in een rij S_n ($f_n^m \, R_m \subset R_n$, $g_n^m \, S_m \subset S_n$), wanneer

$$\varphi_n^m \, R_m \subset S_n$$

bij vaste n voor bijna alle m continu is gedefinieerd en

$$\varphi_n^p \, f_p^m = g_n^q \; \varphi_q^m = \varphi_n^m$$

geldt (voor zover gedefinieerd).

$$\begin{tikzcd} R_1 & R_2 \arrow[l] \arrow[dl] & \dots \arrow[l] \arrow[dl] & R \arrow[l] \\ S_1 & S_2 \arrow[l] & \dots \arrow[l] & S \arrow[l] \end{tikzcd} \; .$$

Een dergelijke afbeelding induceert er één van R in S, $\varphi(R) \subset S$,

$$g_n \, \varphi = \varphi_n^k \, f_k \; .$$

(Men passe de twee vorige opmerkingen toe, waardoor eerst een limietafbeelding van R in de S_n wordt tot stand gebracht, en dan van R in S.)

Is de rij R_n in de rij S_n continu afgebeeld (φ_n^m) en de rij S_n in de rij R_n (ψ_n^m) zo dat

$$\psi_n^p \, \varphi_p^m = f_n^m \quad , \quad \varphi_n^p \, \psi_p^m = g_n^m \quad ,$$

dan heten de rijen homeomorf. Hierdoor wordt een homeomorfie van de limietruimten geïnduceerd.

4. Een tegenhanger van de R_n-adische ontwikkeling is de R_n-ale. Gegeven een rij ruimten (R_n-ale rij), waarvan elke in de volgende continu is afgebeeld,

$$f_{n+1}^n \, R_n \subset R_{n+1} \; .$$

We beschouwen puntenrijen a_n (gedefinieerd voor bijna alle n) met

$$a_{n+1} = f_{n+1}^n \, a_n .$$

Twee dergelijke rijen heten confinaal, als ze vanaf een zekere index overeenstemmen. De "R_n-ale" limietruimte R is de verzameling van klassen confinale punten, waarbij open in R elke verzameling O is, die als volgt ontstaat:

Neem een k en een open $O_k \subset R_k$, dan een $O_{k+1} \subset R_{k+1}$ met $f_{k+1}^k O_k \subset O_{k+1}$ enz. O wordt gedefinieerd als verzameling van die punten van R, die (voor bijna alle n) een n-de coördinaat in O_n bezitten. (De n-de coördinaat van een punt van R is niet meer eenduidig bepaald.)

We kunnen weer $f_n^m \; R_m \subset R_n$ inductief definiëren door

$$f_n^m \, f_m^1 = f_n^1$$

en $f^n \; R_n \subset R$ als die afbeelding, die aan een punt $a_n \in R_n$ toevoegt het door de rij $f_m^n \; a_n$ (m variabel) bepaalde punt van R. We hebben weer

$$f^n \, f_n^m = f^m \; .$$

f^n is continu, want het f^n-origineel van de boven gedefinieerde open $O \subset R$ is de vereniging (over k) van de f_{n+k}^n-originelen der open verzamelingen O_{n+k}, dus open.

De inhoud van 2 heeft geen R_n-aal analogon. De inhoud van 3 kan bijna woordelijk worden overgenomen.

<u>5</u>. We veronderstellen nu, dat de R_n topologische groepen zijn (we noemen ze ook G_n) en de afbeeldingen tussen hen homoemorfismen. Dan zijn de limieten (thans G_n-adisch en G_n-aal genaamd) ook weer topologische groepen.

G_n-adisch geval: Voor $a,b \in G$ wordt $ab \in G$ gedefinieerd als het punt van R met n-de coördinaat $a_n b_n$. Zo'n punt is er, want wegens

$$f_n^m(a_m b_m) = f_n^m \, a_m \cdot f_n^m \, b_m = a_n \, b_n$$

vormen de $a_n b_n$ een rij die een punt van G definieert. We hebben dus

$$f_n(ab) = a_n b_n \; .$$

en derhalve is ook f_n een continu homoemorfisme. Dat de groep-axioma's werkelijk in G gelden, is gemakkelijk te zien.

G_n-aal geval: analoog.

<u>6</u>. De R_n-adische rij mag uit ruimten R_n met eindig veel elementen bestaan. De R_n-adische limiet is dan nuldimensionaal. Want voor iedere n vormen de originelen in R van de afzonderlijke punten van R_n een overdekking van R met eindig veel brokken, waarvan de diameters (bij willekeurige keuze van de metriek) met $n \to \infty$ naar 0 naderen. Bezit voor elke n elk punt $a_n \in R_n$ meer dan één f_n^{n+1}-originelen, dan is ieder punt van R verdichtingspunt van R, dus geen punt geïsoleerd. Want is a_n weer de n-de coördinaat van a, dan kunnen we $b_{n+1} \neq a_{n+1}$ zo bepalen, dat $f_n^{n+1} b_{n+1} = a_n$. Nu is er een $a^{(n+1)} \in R$ met $f_{n+1} \, a^{(n+1)} = b_{n+1}$, en men heeft $\lim a^{(n)} = a$.

Compacte ruimten zonder geïsoleerd punt heten perfect.

Iedere nuldimensionale compacte ruimte S kan in een R_n-adische rij van eindige ruimten worden ontwikkeld.

Men bepale namelijk voor elke n een $\frac{1}{n}$-overdekking van S met brokken $O_1^{(n)},\dots,O_{p_n}^{(n)}$. Men vorme alle mogelijke $O_{i_1}^{(1)} \cap O_{i_2}^{(2)} \cap \dots \cap O_{i_n}^{(n)}$. Deze vormen ook een $\frac{1}{n}$-overdekking van S met brokken $P_1^{(n)},\dots,P_{q_n}^{(n)}$, maar nu geldt tevens, dat elke $P^{(n)}$ bevat is in een $P^{(n-1)}$. Aan elke $P_i^{(n)}$ voege men een punt $a_n^{(i)}$ toe. De $a_n^{(i)}$ zijn de punten van R_i. Men stelle verder

$$f_n^{n+1}\, a_{n+1}^{(j)} = a_n^{(i)}$$

indien

$$P_j^{(n+1)} \subset P_i^{(n)} .$$

De R_n-adische limiet R van de R_n is homeomorf met S. Een $a^*\varepsilon$ S bepaal namelijk ondubbelzinnig een rij van brokken $P_{i_n}^{(n)}$ met $a^* \varepsilon\, P_{i_n}^{(n)}$, en du een rij $a_n^{(i_n)}$, die een punt a van R vastlegt. Men gaat gemakkelijk na dat de relatie $a \leftrightarrow a^*$ een homeomorfisme is.

De nuldimensionale compacte ruimten S zijn dus identiek met de ruimten, die in R_n-adische rijen van eindige ruimten kunnen worden on wikkeld.

Is S ook nog perfect, dan bevat elke gebezigde brok $O_i^{(n)}$ meer dan één punt, en men mag dus eisen, dat hij bij de volgende stap in tenminste twee brokken uiteenvalt. Men kan het brokkensysteem dan zel zo modificeren, dat elke brok bij de volgende stap in precies twee brokken uiteenvalt. Nummert men die telkens met 0 en 1, dan is dus el punt a van R gekenmerkt door een oneindige rij van nullen en enen, di we in de volgorde

$$\dots i_2 i_1 i_0 \qquad (*)$$

zullen opschrijven. De partiële rij

$$i_{n-1} \dots i_1 i_0 \qquad (**)$$

stelt dan het punt a_n (n-de coördinaat van a) voor. Speciale verzameling in R is elke verzameling van rijen (*) met hetzelfde eindige stuk (**) (voor willekeurige n).

Uit het voorafgaande volgt, dat alle perfecte nuldimensionale ruimten onderling homeomorf zijn. De perfecte nuldimensionale ruimten zijn ontdekt door Cantor als zekere deelverzamelingen van het lijnsegment (0,1). Men verwijdere uit (0,1) het open interval $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$; uit de rest weer de (open) middenste derden $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ en $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, en ga zo door. Er ontstaat een dalende rij afgesloten verzamelingen met als doorsnee het "discontinuum van Cantor", een perfecte nuldimensionale ruimte. Zijn punten kunnen in het driptallig stelsel worden geschreven als oneindige breuken, waarin als cijfers alleen 0 en 2 voorkomen.

De verzameling der punten (*) kan ook als optelgroep worden opgevat:

$$
\begin{array}{r}
\ldots i_2\ i_1\ i_0 \\
+\quad \ldots j_2\ j_1\ j_0 \\
\hline
\ldots k_2\ k_1\ k_0
\end{array}\quad ,
$$

waarbij men gewoon (van rechts beginnend) optelt, rekening houdend met de overdracht, dus b.v.

$$
\begin{array}{r}
\ldots 1101 \\
\ldots 0111 \\
\hline
\ldots 0100 \ldots,
\end{array}
$$

of

$$
\begin{array}{r}
\ldots 11111 \ldots \\
\ldots 00001 \\
\hline
00000
\end{array}\quad .
$$

Ten aanzien van de "eindige" rijen (bijna alle cijfers 0) is dat de gewone optelling, wanneer men die opvat als voorstellingen in het tweetallig stelsel van de natuurlijke getallen. Het gebied van de natuurlijke getallen is hier echter op een eigenaardige wijze uitgebreid (met "oneindige" getallen). Men heeft b.v. $\lim 2^n = 0$.

We hebben hier met een G_n-adisch voortgebrachte groep te maken. G_n is de optelgroep der gehele getallen mod 2^n en $f_n^{n+1}\ x_{n+1} = x_n$, indien $x_{n+1} \equiv x_n \bmod 2^n$ is. G_n is echter ook als ring op te vatten (met de gewone vermenigvuldiging). Aangezien

$$f_n^{n+1}\ (x_{n+1}y_{n+1}) = f_n^{n+1}(x_{n+1})\ f_n^{n+1}(y_{n+1})$$

geldt, kan men ook $\lim G_n$ tot ring maken, door nog te definiëren

$$f_n(xy) = f_n(x)f_n(y).$$

$\lim G_n$ is dus zelfs een integriteitsgebied (geen nuldelers!). Want is $x_{n+1} \equiv x_n \bmod 2^n$, $y_{n+1} \equiv y_n \bmod 2^n$, $x_n y_n \equiv 0 \bmod 2^n$, dan kunnen we schrijven

$$x_n = 2^{k_n}\, u_n\ ,\ y_n = 2^{l_n}\, v_n \quad (u_n,\ v_n \text{ oneven}),$$

dus

$$(2u_{n+1} - u_n)2^{k_n} \equiv (2v_{n+1} - v_n)2^{l_n} \equiv 0 \bmod 2^n\ ,$$

en derhalve of alle $x_n \equiv 0 \bmod 2^n$, of alle $y_n \equiv 0 \bmod 2^n$.

$\lim G_n$ kan dus tot een lichaam worden aangevuld. In de schrijfwijze van (x) geschiedt dit, door de getallenrijen "achter de komma" met eindig veel plaatsen voort te zetten. Dit lichaam heet van ouds het 2-adische lichaam (Hensel). Algemener voor een willekeurig priemgetal p i.p.v. 2 het "p-adische lichaam". Als generalisatie van dit proces hebben we de gedefiniëerde ontwikkelingen van ruimten en groepen R_n-adisch en G_n-adisch genoemd.

7. G_n rij voor alle n-de optelgroep der reële getallen mod 1, en

$$f_n^{n+1}\ (a) = 2a.$$

Bij de stap van n naar n+1 wordt de "cirkel" dus dubbel overdekt. De zo ontstaande merkwaardige limietgroep heet solenoïde (v.Dantzig).

VIII. Homologiegroepen.

1. Simplex-rooster of kort "rooster" Σ heet een verzameling, waarvan de elementen de naam hoekpunt en zekere niet-lege deelverzamelingen de naam (absoluut) simplex dragen, indien elke niet-lege deelverzameling van een simplex weer simplex is. Dimensie van een simplex = aantal hoekpunten min 1. Dimensie van de rooster = maximale dimensie van zijn simplexen. I.p.v. d-dim.simplex zeggen we kort ook d-simplex.

Aan elk (absoluut) d-simplex $|t_d| = (a_o,\dots,a_d)$ laten we beantwoorden twee georiënteerde d-simplexen. We rangschikken de hoekpunten van $|t_d|$ willekeurig en gooien die rangschikkingen, die even permutaties van elkaar zijn, in dezelfde klasse. De twee zo ontstaande klassen heten georiënteerde simplexen (van tegengestelde oriëntering). Aanduiding:

$$t_d = [a_o,\dots,a_d]$$
$$[a_{i_o},\dots,a_{i_d}] = \mathrm{sgn}(i_o,\dots,i_d).\ [a_o,\dots,a_d].$$

We vormen nu eindige lineaire combinaties van (georiënteerde) d-simplexen met coëfficiënten uit een gegeven optelgroep Γ. Met deze lineaire combinaties, d-ketens genaamd, rekenen we op voor de hand liggende manier. Ze vormen dan zelf een commutatieve groep, $K_d(\Sigma)$ of Γ genaamd. Dus een keten is eigenlijk niets anders dan een functie $\alpha(t_d)$ met als argumenten de d-simplexen van Σ en als waarden elementen uit Γ, die voor bijna alle argumenten verdwijnt, en zodanig dat $\alpha(-t_d) = -\alpha(t_d)$ is. Som en verschil γ van twee ketens α en β is gedefinieërd door

$$\gamma(t_d) = \alpha(t_d) \pm \beta(t_d).$$

Wil men de keten $\alpha(t_d)$ als lin. combinatie van α-simplexen opvatten, dan schrijft men

$$\Sigma\,\alpha(t_d)t_d\ ,$$

waarbij in de som elk $|t_d|$ éénmaal aan de beurt dient te komen. Simplex van een keten is een simplex, dat er met een coëfficiënt $\neq 0$ in optreedt.

We definiëren de zelfkant van een d-keten als een (d-1)-keten en beginnen met die van een simplex.

$$\mathfrak{z}[a_o,\dots,a_d] = \Sigma(-1)^i[a_o,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_d]\ ,$$

waar het dakje betekent, dat het ervan voorzien hoekpunt vervalt. Voor $d = 0$ stellen we $\mathfrak{z}\,t_d$ steeds 0. Wil deze definitie zinvol zijn, dan moeten we aantonen, dat die uitdrukking onafhankelijk is van de keuze van de volgorde $a_o,\dots,a_d$ in zijn pariteitsklasse. We tonen wéér aan:

$$\Sigma(-1)^i[a_{p_o},\dots,\hat{a}_{p_i},\dots,a_{p_d}] = \mathrm{sgn}(p_o,\dots,p_d)\Sigma(-1)^i[a_o,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_n].$$

We hebben

$$[a_{p_o},\dots,a_{p_d}] = \mathrm{sgn}(p_o,\dots,p_d)[a_o,\dots,a_d] ;$$

Laten we hier a_{p_i} weg dan krijgen we

$$[a_{p_o},\dots,\hat{a}_{p_i},\dots,a_{p_d}]=\mathrm{sgn}(p_o,\dots,p_d)(-1)^{p_i-i}[a_o,\dots,\hat{a}_{p_i},\dots,a_d] ,$$

en hieruit volgt dan alternerend te sommeren het gestelde.

Dus: $\partial(-t_d) = -\partial(t_d)$.

We definiëren verder

$$\partial\,\Sigma\,\alpha(t_d)t_d = \Sigma\,\alpha(t_d)\,\partial t_d .$$

We tonen aan:

$$\underline{\partial\,\partial\,k_d = 0} .$$

We hoeven dit alleen te bewijzen voor een d-simplex:

$$\begin{aligned}
\partial\partial[a_o,\dots,a_d] &= \partial\Sigma(-1)^i[a_o,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_d] \\
&= \Sigma(-1)^i\,\partial[a_o,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_d] \\
&= \sum_i(-1)^i\Big(\sum_{j<i}(-1)^j[a_o,\dots,\hat{a}_j,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_d] + \\
&\qquad \sum_{j>i}(-1)^{j-1}[a_o,\dots,\hat{a}_i,\dots,\hat{a}_j,\dots,a_d]\Big) \\
&= \sum_{i>j}(-1)^{i+j}[a_o,\dots,\hat{a}_j,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_d] - \\
&\qquad \sum_{j>i}(-1)^{i+j}[a_o,\dots,\hat{a}_i,\dots,\hat{a}_j,\dots,a_d].
\end{aligned}$$

Deze twee sommen zijn inderdaad gelijk, zoals men ziet door in de tweede i en j te verwisselen.

∂ is voor iedere $d>0$ een homomorfisme van $K_d(\Sigma)$ cf Γ in $K_{d-1}(\Sigma)$ cf Γ. De kern van ∂ is een ondergroep $J_d(\Sigma)$ cf Γ, genaamd de groep van de cyclussen. Een k_d met $\partial k_d = 0$ heet dus <u>cyclus</u> of <u>gesloten</u>. Het feitelijke beeld bij ∂, dus ∂K_d heet H_{d-1}, de groep van de <u>zelfkanten</u>. Een cyclus, die zelfkant is, heet ook <u>homoloog</u> 0 (~ 0); is $j-j' \sim 0$, dan schrijven we $j \sim j'$ (j homoloog j'). We hebben aangetoond:

$$H_{d-1}(\Sigma) \text{ cf } \Gamma \subset J_{d-1}(\Sigma) \text{ cf } \Gamma.$$

De factorgroep

$$G_d = J_d \,|\, H_d$$

heet de d-dim. <u>homologiegroep</u> of <u>groep van Betti</u> van Σ of Γ.

Voor $d = 0$ geldt: ∂t_o heeft de coëfficiëntensom nul. Dus elke 0-zelfkant heeft de coëfficiëntensom nul.

Iets algemener kunnen we twee roosters beschouwen, $\Sigma \subset \Sigma_o$ (ieder simplex uit Σ is ook simplex in Σ_o). Dan is

$$K_d(\Sigma) \subset K_d(\Sigma_o) \quad , \quad J_d(\Sigma) \subset J_d(\Sigma_o).$$

We definiëren

$$H_d(\Sigma_1\Sigma_0) = H_d(\Sigma_0) \cap K_d(\Sigma) = H_d(\Sigma_0) \cap J_d(\Sigma),$$
$$G_d(\Sigma_1\Sigma_0) = J_d(\Sigma) \mid H_d(\Sigma_1\Sigma_0) .$$

De elementen van de Bettigroep zijn dus de cyclussen, waarmee men zo dient te rekenen, dat een cyclus, die zelfkant is als nul wordt beschouwd. Twee cyclussen, die op deze wijze worden geïdentificeerd (hun verschil is een zelfkant) zijn onderling homoloog.

2. Onder simpliciale afbeelding f van Σ in Σ' verstaat men een afbeelding van de hoekpunten, waarbij simplexen in simplexen overgaan. f induceert een afbeelding van de bijbehorende groepen:

$$f[a_0,\dots,a_d] = [f(a_0),\dots,f(a_d)] ,$$

indien $f(a_i) \neq f(a_j)$ voor $a_i \neq a_j$, anders $= 0$. Verder

$$f\, \Sigma\, \alpha(t_d)t_d = \Sigma\, \alpha(t_d) f\, t_d ,$$

zodat f een homomorfisme van $K_d(\Sigma)$ in $K_d(\Sigma')$ wordt. f en $\mathfrak{z}$ zijn verwisselbaar:

$$f\, \mathfrak{z} = \mathfrak{z}\, f.$$

We hoeven dit alleen met een simplex als argument aan te tonen. Voor het geval dat $f\, t_d \neq 0$ is, is $f\, \mathfrak{z}\, t_d = \mathfrak{z}\, f\, t_d$ evident. Is $f\, t_d = 0$, dan moeten we aantonen, dat ook $f\, \mathfrak{z}\, t_d = 0$ is. Zij $f\, t_d = 0$, dus b.v. $f(a_0) = f(a_1)$. Dan is

$$f\, \mathfrak{z}\, t_d = f[a_1,\dots,a_d] - f[a_0,a_2,\dots,a_d] + f[a_0,a_1,a_3\dots] + \dots ,$$

waarbij de eerste twee termen identiek zijn en de overige verdwijnen. Dus inderdaad $f\, \mathfrak{z}\, t_d = 0$.

Uit de verwisselbaarheid van f en $\mathfrak{z}$ volgt: Is $k_d \in J_d(\Sigma)$, dus $\mathfrak{z}\, k_d = 0$, dan is ook $f\, \mathfrak{z}\, k_d = \mathfrak{z}\, f\, k_d = 0$, dus $f\, k_d \in \Sigma'$, dus

$$f\, J_d(\Sigma) \subset J_d(\Sigma') .$$

Evenzo: is $k_d \in H_d(\Sigma)$, dus $k_d = \mathfrak{z}\, k_{d+1}$, dan is $f\, k_d = \mathfrak{z}\, f\, k_{d+1}$, dus $f\, k_d \in H_d(\Sigma')$, dus

$$f\, H_d(\Sigma) \subset H_d(\Sigma') .$$

Derhalve induceert f ook een homomorfisme

$$f\, G_d(\Sigma) \subset G_d(\Sigma') .$$

Hetzelfde geldt voor $G_d(\Sigma,\Sigma_0)$ resp. $G_d(\Sigma',\Sigma_0')$, indien nog f een simpliciale afbeelding van Σ_0 in Σ_0' is.

Deze homomorfismen zijn ook continu, indien Γ een topologie bezit en K_d overeenkomstig wordt getopologiseerd (zie VI). We hebben n.l.

$$\| f\, \Sigma\, \alpha(t_d)t_d \| = \| \Sigma\, \alpha(t_d) f\, t_d \| \subset \Sigma\, \| \alpha(t_d) f t_d \| \subset$$

$$\Sigma\, \| \alpha(t_d)t_d \| = \| \Sigma\, \alpha(t_d)t_d \| .$$

Dus als $\| f\, k_d \| \subset P$ is voorgeschreven, hoeven we alleen $O = P$ te kiezen, om te bereiken dat uit

$$\| k_d \| \subset O \text{ volgt } \| f\, k_d \| \subset P.$$

Om dergelijke redenen is $\mathfrak{z}$ een continue afbeelding van K_d in K_{d-1}. Is $P \subset \Gamma$ gegeven (P omgeving van 0), dan bepale men een omgeving O van 0 zodat $\underbrace{O+\ldots+O}_{(d+1)\text{ keer}} \subset P$. Is nu $\|\Sigma\alpha(t_d)t_d\| \subset O$, dan heeft $\|\Sigma\alpha(t_d)t_d\|$ coëfficiënten, die (d+1)-voudige sommen van $\alpha(t_d)$-s zijn, dus $\|\mathfrak{z}\Sigma\alpha(t_d)t_d\| \subset O+\ldots+O \subset P$.

3. Voorbeelden.

1. Σ bestaat uit de hoekpunten 1,2,3,4 en de simplexen (1 2 3), (2 4), (2 4) en hun deelverzamelingen. 1-cyclussen zijn de lineaire combinaties van

$$[1\ 2] + [2\ 3] + [3\ 1] \quad \text{en} \quad [1\ 2] + [2\ 4] + [4\ 1].$$

De eerste is zelfkant van

$$[1\ 2\ 3],$$

en alle 1-zelfkanten zijn veelvouden van deze. G_1 is isomorf met Γ. Er zijn geen niet-triviale 2-cyclussen, dus $G_2 = (0)$. De 0-cyclussen zijn de lineaire combinaties van alle [i]. Een 0-cyclus is dan en slechts dan zelfkant, als zijn coëfficiëntensom nul is. "Slechts dan" weten we al van vroeger. "Dan" volgt uit het algemene feit.

Σ wordt samenhangend genoemd, wanneer bij elk tweetal hoekpunten a,b van Σ hoort een rij hoekpunten $a_0,\ldots,a_p$, zodat $a_0 = a$, $a_p = b$ en $(a_i\ a_{i+1})$ absoluut simplex van Σ is. Men ziet dan, dat

$$\Sigma[a_i\ a_{i+1}] = [a] - [b],$$

dus elke [a] - [b] is zelfkant. Is nu gegeven

$$k_0 = \Sigma\alpha(c)[c] \text{ met } \Sigma\alpha(c) = 0,$$

dan kunnen we ook schrijven

$$k_0 = \Sigma\alpha(c)([c] - [c_0])$$

met een vaste c_0, en dat is zelfkant. Dus in een samenhangende Σ is elke 0-keten met coëfficiëntensom 0 zelfkant, en derhalve $G_0(\Sigma)$ isomorf Γ.

Is Σ niet samenhangend, dan kan het in een aantal p samenhangende losse delen gesplitst en $G_0(\Sigma)$ wordt isomorf met p keer de directe som van Γ - s (althans voor eindige p).

2. Zie figuren viervlak en torus p.17. Het is duidelijk wat hier met simplexen is bedoeld. Voert men de voorgeschreven randidentificaties niet uit dan kan men de 2-simplexen zodanig optellen, dat bij de zelfkantvorming de inwendige 1-simplexen wegvallen en als zelfkant een som van de randsimplexen overblijft. Voert men de randidentificaties wel uit, dan vallen ook deze weg en men krijgt een niet triviale 2-cyclus, waarvan alle andere veelvouden zijn. Anders is het geval van het projectieve vlak (fig. p.17). De zelfkant van de bedoelde 2-keten k_2 is $2\{[1\ 3]+[3\ 2]+[2\ 4]\}$. Voor Γ = (mod 0) is er geen niet-triviale 2-cyclus, voor Γ =(mod 2) is er precies één, voor Γ = (re mod 1) is er de cyclus $\frac{1}{2}k_2$. De genoemde cycli zijn niet zelfkanten, omdat er geen 3-simplexen zijn.

Bij het viervlak is elke 1-cyclus zelfkant, bij de torus heeft men de cycli

$$[1\ 5]+[5\ 4]+[4\ 1] \quad \text{en} \quad [1\ 2]+[2\ 3]+[3\ 1]$$

waar alle anderen uit lineair kunnen worden gecombineerd, terwijl geen niet-triviale lineaire combinatie ervan een zelfkant is. Dus $G_1 = \Gamma + \Gamma$.

Bij het projectieve vlak is elke 1-cyclus homoloog aan een veelvoud van Γ $[1\ 3]+[3\ 2]+[2\ 4]$.
In het geval Γ =(mod 0) is zijn dubbele zelfkant, dus G_1 = 2-cyclische groep. Voor Γ =(re mod 1) is

$$\alpha\{[1\ 3]+[3\ 2]+[2\ 4]\} = \partial\tfrac{\alpha}{2}k_2\ ,$$

dus $G_1 = (0)$.

4. Gegeven een Σ bestaande uit één simplex $(a_0,\dots,a_d)$. We definiëren een rooster $\Pi(\Sigma)$ genaamd het prisma boven Σ (afhankelijk van een vaste keuze der hoekpunten).

Hoekpunten: a_i $(i=0,\dots,d)$, a_i' $(i=0,\dots,d)$. (We zeggen, dat het nieuwe hoekpunt a' boven a ligt.)
Simplexen: $(a_0,\dots,a_i,a_i',\dots,a_d')$ $(i=0,\dots,d)$ en hun deelverzamelingen.

Voor een willekeurige eindige rooster Σ definiëren we een $\Pi(\Sigma)$ als volgt: We leggen in Σ een vaste nummering der hoekpunten vast. We maken een tweede exemplaar Σ' van Σ met hoekpunten a' (behorende resp. bij a). De hoekpunten van $\Pi(\Sigma)$ worden door die van $\Sigma \cup \Sigma'$ gevormd. In elk simplex van Σ rangschikken we de hoekpunten volgens de gegeven orde en construeren dienovereenkomstig de $\Pi(t_d)$. Simplexen van $\Pi(\Sigma)$ zijn die van de afzonderlijke $\Pi(t_d)$.

In het vervolg schrijven we simplexen in de gegeven volgorde der hoekpunten op.

We definiëren voor $t_d = [a_0,\dots,a_d]$ de keten

$$\Pi(t_d) = \Sigma(-1)^i[a_0,\dots,a_i,a_i',\dots,a_d'].$$

Dan is
$$\partial\Pi(t_d) = \sum_i(-1)^i \sum_{j\le i}(-1)^j[a_0,\dots,\hat{a}_j,\dots,a_i,a_i',\dots,a_d']$$
$$+ \sum_i(-1)^{i-1} \sum_{j\ge i}(-1)^j[a_0,\dots,a_i,a_i',\dots,\hat{a}_j',\dots,a_d'].$$

De termen $i = j$ vallen hier tegen elkaar weg behalve die met $i = j = 0$ en $i = j = d$, die

$$[a_0',\dots,a_d'] - [a_0,\dots,a_d]$$

geven. De rest is gelijk aan

$$-\Pi\,\partial t_d\ ,$$

want

$$\Pi\,\partial t_d = \Pi\,\Sigma(-1)^j[a_0,\dots,\hat{a}_j,\dots,a_d] = \Sigma(-1)^j\,\Pi\,[a_0,\dots,\hat{a}_j,\dots,a_d]$$

$$= \sum_j (-1)^j \Big(\sum_{i<j} (-1)^i [a_0,\ldots,a_i,a_i',\ldots,\widehat{a_j'},\ldots,a_d'] +$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i-1} [a_0,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_i,a_i',\ldots,a_d'] \Big)$$

$$= - \sum_i (-1)^{i-1} \sum_{j>i} (-1)^j [a_0,\ldots,a_i,a_i',\ldots,\widehat{a_j'},\ldots,a_d']$$

$$- \sum_i (-1)^i \sum_{j<i} (-1)^j (a_0,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_i,a_i',\ldots,a_d'],$$

en dat is inderdaad op het teken na net die rest. Dus

$$\mathfrak{Z}\,\Pi\, t_d = t_d' - t_d - \Pi\,\mathfrak{Z}\, t_d \;,$$

en algemener voor willekeurige ketens:

<u>Stelling</u>: $\mathfrak{Z}\,\Pi\, k_d = k_d' - k_d - \Pi\,\mathfrak{Z}\, k_d$.

Is k_d een cyclus j_d, dan luidt die formule

$$\mathfrak{Z}\,\Pi\, j_d = j_d' - j_d \;.$$

IX. Homologiegroepen van compacte ruimten.

1. R zij een compacte metrische ruimte. Is $\vartheta > 0$, dan verstaan we onder $\Sigma_\vartheta(R)$ de rooster met als hoekpunten alle punten van R en met als (absolute) simplexen alle eindige puntenverzamelingen van R met diameter $< \vartheta$. Een d-simplex $< \vartheta$ resp. d-keten met alle simplexen $< \vartheta$ heet een ϑ-d-simplex resp. ϑ-d-keten.

Voor $\vartheta' < \vartheta$ is $\Sigma_{\vartheta'} \subset \Sigma_\vartheta$. De afbeelding, waardoor aan elk ho hoekpunt van een $\Sigma_{\vartheta'}$ hetzelfde punt (opgevat als punt van Σ_ϑ) wordt toegevoegd, heet χ. Deze afbeelding is simpliciaal.

Zij steeds $\varepsilon < \eta$. We definiëren $K_\varepsilon(R) = K(\Sigma_\varepsilon)$, $J_\varepsilon(R) = J(\Sigma_\varepsilon)$, enz., en

$$G_{\varepsilon,\eta}(R) = G_d(\Sigma_\varepsilon(R), \Sigma_\eta(R)).$$

Dat is dus de groep van de ε-cyclussen, waarbij ε-cyclussen, die η-randen zijn, als 0 worden beschouwd.

De afbeelding χ induceert een homomorfisme

$$G_{\varepsilon,\eta} \leftarrow G_{\varepsilon',\eta'} \qquad \text{indien } \varepsilon' \le \varepsilon \;,\; \eta' \le \eta \;.$$

We laten ε en η monotone nulrijen doorlopen en krijgen een G_n-adische rij

$$G_{\varepsilon_1,\eta_1} \leftarrow G_{\varepsilon_2,\eta_2} \leftarrow \cdots$$

De limiet ervan heet de <u>homologiegroep of Bettigroep</u> of Γ van R, $G_d(R)$ of Γ.

De limiet hangt niet essentiëel af van de keuze van de rijen ε_n, η_n. Want voor twee dergelijke rijen heeft men

$$\cdots \leftarrow G_{\varepsilon_n \eta_n} \leftarrow G_{\varepsilon_{n+1} \eta_{n+1}} \leftarrow \cdots$$

$$\cdots \leftarrow G_{\varepsilon'_n \eta'_n} \leftarrow G_{\varepsilon'_{n+1} \eta'_{n+1}} \leftarrow \cdots$$

waarbij de pijlen steeds de door χ geïnduceerde homomorfismen aanduiden. Volgens de stelling in VII 3 einde toegepast op groepen zijn de limieten topologisch isomorf.

Als elementen van $G(R)$ kan men opvatten de <u>convergente cyclussen</u>. Hieronder verstaan we rijen van ε_n-cyclussen j_{d,ε_n} zodanig dat voor elke n

$$j_{d,\varepsilon_n} \widetilde{\eta_n}\, j_{d,\varepsilon_{n+1}} \qquad (\eta_n\text{-homoloog})$$

is, d.w.z.

$$j_{d,\varepsilon_n} - j_{d,\varepsilon_{n+1}} = \mathfrak{z}\, k_{d,\eta_n} .$$

Hierbij dient men twee convergente cyclussen $\{j_{d,\varepsilon_n}\}$ en $\{j'_{d,\varepsilon_n}\}$ te vereenzelvigen (ze zijn <u>homoloog</u>), indien

$$j_{d,\varepsilon_n} \widetilde{\eta_n}\, j'_{d,\varepsilon_n}$$

is.

2. Onder ϑ-<u>verschuiving</u> van een keten verstaan we een afbeelding van de betrokken hoekpunten waarbij de afstand tussen beeld en origineel $< \vartheta$ is.

<u>Stelling:</u> Een ε-cyclus blijft bij ϑ-verschuiving f $(\varepsilon+2\vartheta)$-homoloog met zichzelf.

Bewijs: We construeren namelijk boven de hoekpuntenrooster Σ van j_d een abstract prisma. Dan is $\mathfrak{z}\Pi j_d = j'_d - j_d$. We beelden dit door een afbeelding φ af in R, waarbij het punt a' boven a terecht komt in f(a). Dan wordt $\varphi\mathfrak{z}\Pi j_d = \mathfrak{z}\varphi\Pi j_d = fj_d - j_d$, waarbij $\varphi\Pi j_d$ uit simplexen met diameter $< \varepsilon + 2\vartheta$ is samengesteld, dus $fj_d \widetilde{\varepsilon+2\vartheta}\, j_d$.

Voor elke $\vartheta > 0$ kunnen we in R een <u>eindig</u> ϑ-net bepalen, d.w.z. een eindige verzameling, waarvan elk punt van R een afstand $< \vartheta$ heeft. Zij R_n een ϑ_n-net in R, waarbij ϑ_n een monotone rij met $\vartheta_n < 2^{-n}$ is. We mogen veronderstellen: $R_n \subset R_{n+1}$. Zij g_n een ϑ-verschuiving met $g_n R \subset R_n$, g = identiteit op R_n.

We bepalen de monotone nulrijen ε_n en η_n zo, dat steeds

$$\varepsilon_n \geq \varepsilon_{n+1} + 2\vartheta_n , \quad \eta_n \geq \eta_{n+1} + 2\vartheta_n$$

is.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \leftarrow & G_{\varepsilon_n \eta_n}(R) & \leftarrow & G_{\varepsilon_{n+1} \eta_{n+1}}(R) & \leftarrow & \cdots \\
& \uparrow & \swarrow g_n & \uparrow & & \\
\cdots \leftarrow & G_{\varepsilon_n \eta_n}(R_n) & \leftarrow & G_{\varepsilon_{n+1} \eta_{n+1}}(R_{n+1}) & \leftarrow & \cdots
\end{array}$$

De met verticale pijlen aangeduide homomorfismen worden door de identieke afbeelding van R_n in R geïnduceerd. De relatie $\vartheta \swarrow \uparrow$ is triviaal, $\uparrow \swarrow$ geldt, omdat een ε_{n+1}-cyclus bij een ϑ_n-verschuiving aan zichzelf $(\varepsilon_{n+1} + 2\vartheta_n)$-homoloog blijft en $\varepsilon_{n+1} + 2\vartheta_n \leqq \varepsilon_n < \eta_n$ is.

Dus is $G(R)$ topologisch isomorf met $\lim G_{\varepsilon_n \eta_n}(R_n)$.

De $G_{\varepsilon_n, \eta_n}(R_n)$ zijn groepen met eindig veel voortbrengenden.

$G(R)$ is dus G_n-adische limiet van dergelijke groepen.

Is Γ compact, dan ook $K_{\eta_n}(R_n)$, omdat het eindig veel voortbrengenden heeft. Wegens de continuïteit van $\mathfrak{z}$ (zie einde VIII 2) is ook $\mathfrak{z}\, K_{\eta_n}(R_n) = H_{\eta_n}(R_n)$ compact. Hetzelfde geldt voor de kern van $\mathfrak{z}$, $J_{\varepsilon_n}(R_n)$. $G_{\varepsilon_n \eta_n}(R_n)$ is dus factorgroep van een compacte groep naar een compacte (dus afgesloten) ondergroep, dus zelf compact. $G(R)$ als G_n-adische limiet van compacte groepen is compact.

Is Γ discreet, dan ook $G_{\varepsilon_n \eta_n}(R_n)$.

3. Een continue afbeelding f van R in S induceert een continu homomorfisme van de bijbehorende homologiegroepen. Want men kan ε_n', η_n' bij gegeven ε_n, η_n zo bepalen, dat f elke ε_n'-verzameling in een ε_n-verzameling en elke η_n'-verzameling in een η_n-verzameling afbeeldt. Dit induceert

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \leftarrow & G_{\delta_n' \eta_n'}(R) & \leftarrow & G_{\varepsilon_{n+1}' \eta_{n+1}'}(R) & \leftarrow \ldots \\
& \downarrow f & & \downarrow f & \\
\ldots \leftarrow & G_{\varepsilon_n \eta_n}(S) & \leftarrow & G_{\varepsilon_{n+1} \eta_{n+1}}(S) & \leftarrow \ldots
\end{array}$$

Hierdoor wordt een continu homomorfisme van de limieten geïnduceerd. Dus ook:

<u>Stelling</u>: Zijn R en S homeomorf, dan zijn G(R) en G(S) dus topologisch isomorf. De homologiegroepen zijn topologische invarianten.

Bij continue afbeelding gaan convergente in convergente cyclussen over en homologe in homologe.

4. $\tilde{R}$ zij het Cartesisch product van R met een lijnsegment $0 \leqq s \leqq 1$. j zij een ε-cyclus in R; de hieraan beantwoordende exemplaren in $R \times s$ heten $j^{(s)}$. Dan $j^{(0)} \sim j^{(1)}$.

Bewijs: Zij δ = maximale diameter der simplexen van j en $\vartheta < \varepsilon - \delta$. We verdelen het interval $0 \leqq s \leqq 1$ in intervallen $< \vartheta$ door eindig veel deelpunten $s_1 < s_2 < \ldots$. Het is voldoende, te bewijzen $j^{(0)} \underset{\varepsilon}{\sim} j^{(s_1)}$. We vormen $\pi\, j^{(0)}$ en identificeren op natuurlijke wijze $j^{(s_1)}$ met $j^{(0)1}$. Dan blijkt uit stelling VIII 4 het gestelde.

Een continue schaar afbeeldingen $f_s(R) \subset S$ $(0 \leq s \leq 1)$ heet een continue <u>overvoering</u> van f_o in f_1. We noemen f_o en f_1 onderling <u>homotoop</u> en nemen ze in dezelfde <u>afbeeldingsklasse</u> (van R in S) op.

<u>Stelling</u>: Homotope afbeeldingen induceren dezelfde homomorfismen van $G_d(R)$ in $G_d(S)$. Het homomorfisme der homologiegroepen is dus een klasse-invariant.

Bewijs: We kunnen $f_s(R)$ opvatten als afbeelding F van $\tilde{R}$ in S. Bij gegeven $\eta > 0$ bepalen we $\varepsilon > 0$ zo dat het beeld van een ε-verzameling $< \eta$ is, en tonen aan dat voor elke ε-cyclus j in R geldt: $f_o j \underset{\eta}{\sim} f_1 j$ in S. Noemen we de exemplaren van j in $R \times 0$ resp. $R \times 1$: $j^{(o)}$ resp. $j^{(1)}$, dan is $j^{(o)} \underset{\varepsilon}{\sim} j^{(1)}$ in $\tilde{R}$, dus $F j^o$ $F j^1$; verder $f_o j = F j^{(o)}$, $f_1 j = F j^{(1)}$, dus $f_o j \underset{\eta}{\sim} f_1 j$.

5. Van een ruimte R bestaande uit een enkel punt zijn de groepen $G_d(R)$ triviaal, d.w.z. $= 0$ voor $d > 0$, $= \Gamma$ voor $d = 0$.

<u>Stelling</u>: Laat de ruimte R zich in zichzelf op een punt <u>contraheren</u>, dan zijn $G_d(R)$ triviaal.

Bewijs: De contractie is een continue overvoering van de identieke afbeelding (van R in R) in een <u>constante</u> afbeelding (van R in één punt). Derhalve zijn de groepen Γ dezelfden als van een enkel punt.

Speciaal zijn de $G_d(R)$ van een convexe afgesloten verzameling in een Cartesische ruimte triviaal.

6. Zij a een punt van de compacte ruimte R en S de deelverzameling van alle punten $b \varepsilon R$ met de eigenschap: er is in R voor elke $\varepsilon > 0$ een eindige puntenrij $a = a_1, \ldots, a_m = b$, zodat $\rho(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$. Dan is S de component van a in R (zie I.5,4).

Bewijs: S_ε zij de verzameling van alle punten die door eindig veel sprongen $< \varepsilon$ bereikbaar zijn. S_ε $(\varepsilon > 0)$ is open, want als $b \varepsilon S_\varepsilon$, dan ook een hele ε-omgeving van b in S_ε. S_ε is afgesloten, want als $\lim a_i = a$, $a_i \varepsilon S_\varepsilon$, dan $\rho(a_i, a) < \varepsilon$ voor zekere i, dus $a \varepsilon S_\varepsilon$. $S = \bigcap_{\varepsilon > 0} S_\varepsilon$ is dus afgesloten en S_ε als open verzameling een omgeving van S. Was S vereniging van twee vreemde afgesloten niet lege deelverzamelingen S' en S", dan was ϑ = afstand $(S', S'') > 0$. Zijn U'_δ en U''_δ δ-omgevingen van S' en S", dan is voor $\delta < \frac{1}{3}\vartheta$:

$$\rho(U'_\delta, U''_\delta) \geq \frac{1}{3}\vartheta \qquad (1).$$

Verder is voor voldoende kleine (van ε afhangende) $\delta > 0$

$$U'_\delta \cup U''_\delta \subset S_\varepsilon \qquad (2),$$

want was $(U'_\delta \cup U''_\delta) \cap (R \setminus S_\varepsilon) \neq \square$ voor alle $\delta > 0$, dan was wegens de compactheid $\bigcap_\delta \overline{(U'_\delta \cup U''_\delta)} \cap (R \setminus S_\varepsilon) \neq \square$ dus $S \neq S_\varepsilon$. Voor $\varepsilon < \frac{1}{3}\vartheta$ zijn (1) en (2) met elkaar in strijd. Dus is S samenhangend. - Is verder $T \supset S$, dan is $T \cap S_\varepsilon$ open en afgesloten in T, en is T ook nog samenhangend, dan is dus $T = T \cap S_\varepsilon$, dus $T \subset S_\varepsilon$ voor elke ε, dus $T = S$. Derhalve is S maximaal samenhangend.

De convergente 0-cyclus, waarvan alle ε_n-0-cyclussen uit hetzelfde [c] bestaan, wordt met $\{c\}$ aangeduid.

Stelling: Twee punten $a,b \in R$ behoren dan en slechts dan tot dezelfde component van R, indien de convergente cyclussen $\{a\}$ en $\{b\}$ homoloog zijn.
Bewijs: Behoren a,b tot dezelfde componenten, dan bestaat een rij $a = a_1,\dots,a_m = b$ met $\rho(a_i,a_{i+1}) < \eta$, dus is $\Sigma[a_i,a_{i+1}] = k$ een η-keten met $\mathfrak{z} k = [b] - [a]$, dus $[a] \underset{\eta}{\sim} [b]$. Is omgekeerd $\mathfrak{z} k = [b] - [a]$ en k een η-keten, dan is elk simplex van k geheel in S_η of geheel erbuiten. Is k' de keten, die in S_η met k overeenstemt en alleen simplexen van S_η bevat, en is c een hoekpunt van k', dan treden alle simplexen, waar c hoekpunt van is, in k' met dezelfde coëfficiënt op als in k, dus $\mathfrak{z} k' = \mathfrak{z} k = [b] - [a]$. Dus $a,b \in S_\eta$ voor elke $\eta > 0$. Dus $a,b \in S$.

Hieruit volgt als speciaal geval:

Stelling: Dan en slechts dan $G_0(R) = \Gamma$ als R samenhangt.

7. Onder een retractie van een compacte ruimte R op een deelruimte S verstaat men een afbeelding f van S in R, die op R de identiteit is. (B.v. retractie van bolschil op randsfeer door projectie uit het middelpunt.)

Algemeen wordt door de identieke afbeelding i van R in een groter ruimte S een homomorfisme van $G_d(R)$ in $G_d(S)$ voortgebracht.

Stelling: Is S op R retraheerbaar, dan is dit homomorfisme een isomorfisme.
Bewijs: Door f wordt een homomorfisme van $G_d(S)$ in $G_d(R)$ bepaald; f_i is het identieke automorfisme van $G_d(R)$, dus is i een isomorfisme.

8. Is R de F_n-adische limiet van de R_n, dan is G(R) topologisch isomorf met de G_n-adische limiet van $G(R_n)$.
Bewijs: We wijzigen de in R_n vastgestelde metriek ρ_n als volgt:

$$\rho^*_n(a_n,b_n) = \sum_1^n 2^{-i}\rho_i(a_i,b_i) \qquad (\text{als } a_i = f^n_i a_n,\ b_i = f^n_i b_n)$$

en definiëren in $\lim R_n$:

$$\rho^*(a,b) = \sum_1^\infty 2^{-i}\rho_i(a_i,b_i). \qquad (\text{als } a_i = f_i a,\ b_i = f\, b).$$

f^m_n en f_n voeren dan elke verzameling $< \vartheta$ over in een verzameling $< \vartheta$. We krijgen de volgende relaties:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & G_{\varepsilon_m\eta_m}(R_n) \arrow[l] \arrow[u] & G_{\varepsilon_m\eta_m}(R_{n+1}) \arrow[l, "f_n^{n+1}"'] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] & G_{\varepsilon_m\eta_m}(R) \arrow[l] \\
\cdots & G_{\varepsilon_{m+1}\eta_{m+1}}(R_n) \arrow[l] \arrow[u, "\chi"'] & G_{\varepsilon_{m+1}\eta_{m+1}}(R_{n+1}) \arrow[l, "f_n^{n+1}"'] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \arrow[u, dotted] & G_{\varepsilon_{m+1}\eta_{m+1}}(R) \arrow[l] \\
\cdots & G(R_n) \arrow[l] \arrow[u, dotted] & G(R_{n+1}) \arrow[l] \arrow[u, dotted] & \cdots \arrow[l] \arrow[u, dotted] & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

In de rechterhoek onderaan staat als verticale limiet $G(R)$, dus ook als horizontale limiet.

X. Homologiegroepen van polytopen

1. Een eindige polytoop is een compacte ruimte (die we van een metriek kunnen voorzien) en bezit als zodanig homologiegroepen in de zin van IX. Maar bij een polytoop P hoort ook een simplexrooster $\Sigma^*(P)$ met als hoekpunten de hoekpunten van P en als simplexen die deelverzamelingen $(e_o,\dots,e_p)$, die een (concreet) simplex $T(e_o,e_1,\dots,e_p)$ van P vormen. De homologiegroepen van deze rooster worden (voorlopig) G^* genoemd. We willen in dit hoofdstuk bewijzen dat G en G^* op wel bepaalde wijze topologisch isomorf zijn. We beschouwen alleen eindige polytopen.

2. De barycentrische onderverdeling van P zij $\tilde{P}^o$. (Zie de notatie van IV.3; we laten echter in 't vervolg de akkolades weg.) We definiëren een continue homomorfe afbeelding $\underline{v}$, verfijning genaamd, van $K(P)$ in $K(P')$. Voor een d-simplex van P zij

$$\underline{v}[0,1,\dots,d] = \Sigma\ \mathrm{sgn}(i_o,i_1,\dots,i_d)[i_o,i_oi_1,\dots,i_oi_1\dots i_d],$$

waarbij de som loopt over alle permutaties $i_o,i_1,\dots i_d$ van $0,1,\dots,d$. Voor een $k_d\varepsilon K_d$ zij

$$\underline{w}\ \Sigma\alpha(t_d)t_d = \Sigma\alpha(t_d)\underline{w}\ t_d.$$

We tonen aan

$$\partial\ \underline{v} = \underline{w}\ \partial.$$

Bewijs: We hoeven het gestelde alleen voor een simplex te bewijzen.

$$\partial\ \underline{v}[0,1,\dots,d] = \Sigma\ \mathrm{sgn}(i_o,i_1,\dots,i_d)\partial[i_o,i_oi_1,\dots,i_oi_1\dots i_d] =$$

$$=\Sigma\ \mathrm{sgn}(i_o,i_1,\dots,i_d)\sum_p(-1)^p[i_o,\dots,\widehat{i_oi_1\dots i_p},\dots,i_oi_1\dots i_d]. \quad (*)$$

Voor $p<d$ treedt het simplex $[i_o,\dots,\widehat{i_oi_1\dots i_p},\dots i_oi_1\dots i_d]$ (met hetzelfde teken) in de zelfkant op van $[i_o,\dots,i_1\dots xi_p,i_1\dots xi_pi_{p+1},\dots,i_1\dots i_d]$ en van $[i_o,\dots i_1\dots i_{p-1}i_{p+1},i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}i_p,\dots i_1\dots i_d]$; het

permutatiesignum is voor deze twee simplexen echter tegengesteld. Derhalve vervallen in (*) alle termen met $p < d$ en over blijft:

$$\Sigma\ \mathrm{sgn}(i_0, i_1, \ldots, i_d)(-1)^d [i_0, i_0 i_1, \ldots, i_0 i_1, \ldots i_{d-1}].$$

We vatten hier samen de summanden met i_d = vaste j:

$$(-1)^j \Sigma\ \mathrm{sgn}'(i_0, i_1, \ldots i_{d-1})[i_0, i_0 i_1, \ldots, i_0 i_1 \ldots i_{d-1}],$$

waar sgn' de pariteit aanduidt van $(i_0, i_1, \ldots, i_{d-1})$ als permutatie van $(1, \ldots, \hat{j}, \ldots, d)$, en waar de som over al deze permutaties loopt. De som i_0 dus $= \underline{v}[0, \ldots, \hat{j}, \ldots, d]$, en hieruit volgt het beweerde.

3. Evenals vroeger de continuïteit van $\wr$ bewijst men die van $\underline{v}$.

Uit 2 volgt, dat $\underline{v}$ cyclussen in cyclussen en zelfkanten in zelfkanten afbeeldt.

Na een vaste volgorde van de hoekpunten van P te hebben aangenomen, definiëren we een afbeelding $\underline{s}$, die aan elk punt $p \varepsilon P$ toevoegt het hoekpunt met het hoogste nummer van het laagstdimensionale simplex van P, dat p bevat. Bij $\underline{s}$ blijft elk punt van P in alle simplexen, waar het tevoren in was. Derhalve brengt $\underline{s}$ een simpliciale afbeelding van $\Sigma^*(\tilde{P})$ op $\Sigma^*(P)$ voort.

<u>Stelling</u>: $\underline{v}$ is ten aanzien van de groepen G^* van P en $\tilde{P}$ een topologisch isomorfe afbeelding <u>op</u>.

We bewijzen eerst de eigenschap van $\underline{v}$ een topologische isomirfie te zijn: We vormen $\underline{s}\ \underline{v}$ en beschouwen dit speciaal in de onderverdelingen van het simplex $|0, 1, \ldots, d|$. Dan is $\underline{s}\ \underline{v}(i_0, \ldots, i_p) = \max\limits_{j=0,\ldots,p} i_j$.

Derhalve is

$$\underline{s}[i_0, i_0 i_1, \ldots, i_0 i_1 \ldots i_d] \neq 0$$

dan en slechts dan als $i_j = j$ voor alle $j = 0, 1, \ldots, d$ geldt, en wel is dan

$$\underline{s}[0, 01, \ldots, 01 \ldots d] = [0, 1, \ldots, d].$$

We hebben dus

$$\underline{s}\ \underline{v}[0, 1, \ldots, d] = [0, 1, \ldots, d].$$

$\underline{s}\ \underline{v}$ is dus de identieke afbeelding van K_d^* en dus ook van $G_d^*(P)$ op zichzelf. Dus is $\underline{v}$ een topologische isomorfe afbeelding <u>in</u>.

De uitspraak "$\underline{v}$ is een afbeelding op" kan ook als volgt worden geformuleerd: Iedere cyclus uit $\Sigma^*(\tilde{P})$ is homoloog met de verfijning van een cyclus uit $\Sigma^*(P)$. Bewijs straks!

4. Wanneer een Σ' deelrooster van Σ is en k een keten van Σ, dan zullen we onder $k \cap \Sigma'$ verstaan de keten (functie), die op Σ' met k overeenstemt en overigens nul is. D.w.z. we houden in k alleen de simplexen van Σ (met dezelfde coëfficiënten aan). Is $k \cap \Sigma' = k$, dan zeggen we ook $k \subset \Sigma'$.

Is k een keten van Σ dan verstaan we onder $\Sigma(k)$ de deelrooster bestaande uit de hoekpunten en deelverzamelingen van die simplexen, die in k met coëff. $\neq 0$ optreden.

5. <u>Stelling</u>: 1. Voor de G^* van een polytoop bestaande uit één r-simplex T_r geldt: $G^*_d = (0)$ voor $d > 0$, $G^*_0 = \Gamma$. 2. Hetzelfde geldt voor de G^* van de barycentrische onderverdeling $\tilde{T}_r$ van T_r. 3. Voor de polytoop S_{r-1} bestaande uit de zelfkantsimplexen van T_r geldt: $G^*_d = (0)$ voor $0 < \alpha < r-1$ en $d \geqq r$, en $G^*_d = \Gamma$ voor $d = 0$ en $d = r-1$.

Bewijs: 1. $G^*_d = 0$ voor $d \geqq r$ is evident. Zij dus $d < r$. We vormen $\pi(\Sigma^*(T_r))$ en beelden het "dak" ervan in een vast hoekpunt a van T_r af (afb. φ); dat is een simpliciale afbeelding in $\Sigma(T_r)$, omdat elke deelverzameling van $\Sigma^*(T_r)$ simplex is. Nu is elke $j^0_d \in J(\Sigma^*(T_r))$ homoloog het j'_d (dak-exemplaar). Dus $\varphi(j_d) \subset (a)$. Voor $d > 0$ betekent dit: $j_d \sim 0$. Voor $d = 0$: $j_d \sim$ veelvoud van $[a]$.

2. We gaan net zo te werk, maar beelden het dak in het zwaartepunt van T_r af.

3. Voor $d \neq r-1$ is het bewijs analoog aan de voorafgaande. Zijn $0, 1, \dots, r$ de hoekpunten van T_r, dan is $\mathfrak{z}[0,1,\dots,r] = j$ een cyclus (cf mod 0) van $\Sigma^*(S_{r-1})$. Zij $j'_{r-1} = \Sigma(-1)^i \alpha_i [0,\dots,\hat{i},\dots,r]$ een willekeurige $(r-1)$-cyclus, dus

$$0 = \mathfrak{z}\, j'_{r-1} = \Sigma(-1)^i \alpha_i \Big(\sum_{j<i} (-1)^j [0,\dots,\hat{j},\dots,\hat{i},\dots,r] - \sum_{j>i} (-1)^j [0,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,r] \Big).$$

In deze som treedt het simplex $[0,\dots,\hat{k},\dots,\hat{l},\dots,r]$ met de coëfficiënt $(-1)^l \alpha_l (-1)^k - (-1)^k \alpha_l (-1)^l = 0$ op, dus α_i = vaste α, dus $j'_{r-1} = \alpha j_{r-1}$.

6. <u>Stelling $A_{d,r}$</u>: Is $\dim P \leqq r$, dan is elke d-cyclus van $\Sigma^*(\tilde{P})$ homoloog met de verfijning van een d-cyclus van $\Sigma^*(P)$.

<u>Stelling $B_{d,r}$</u>: Hetzelfde gespecialiseerd voor $P = S_r$.

<u>Bewijs</u> door de inductie:

1. $A_{d,r} \to B_{d,r}$. (Triviaal.)
2. $A_{d,r-1}$ & $B_{d-1,r-1} \to A_{d,r}$ (voor $d > r$ is $A_{d,r}$ triviaal).

Grondslag van de inductie:

3. $B_{0,r}$. (Dit betekent, dat $G_0(\Sigma^*(\tilde{S}_r)) = \Gamma$ is en het volgt onmiddellijk uit de "samenhang" van $\tilde{S}_r$.)

Om 2 te bewijzen, onderscheiden we de gevallen $d = r$ en $d < r$.

$d = r$: Zij j cyclus van $\Sigma^*(\tilde{P})$. We nemen een simplex T_d van P en vormen $k_d = j_d \cap \Sigma^*(\tilde{T}_d)$. Wegens $\mathfrak{z} j_d = 0$ is $\mathfrak{z} k_d \subset \Sigma^*(\tilde{S}_{d-1})$, waar S_{d-1} de zelfkantpolytoop van T_d is. Wegens $B_{d-1,r-1}$ is de cyclus $\mathfrak{z} k_d$ van de vorm $\alpha\, \underline{v}\, \mathfrak{z} t_d$, waar t_d het d-simplex behorende bij T_d is.

Dus is $k_d - \alpha \underline{v} t_d$ een d-cyclus in $\Sigma^*(\widetilde{T}_d)$, dus naar 5.2 nulhomoloog en aangezien er geen hoger dim. simplexen zijn, zelfs = 0. Dus $k_d = = \alpha \underline{v} t_d$. Sommeert men dit over alle T_d van P, dan krijgt men $j_d = = \underline{v} \Sigma \alpha(t_d) t_d$.

$d < r$: Zij j_d cyclus van $\Sigma^*(\widetilde{P})$. We vormen weer $k_d = j_d \wedge \Sigma^*(\widetilde{T}_r)$. Nu is wegens $B_{d-1,r-1}$: $\partial k_d \sim 0$ in $\Sigma^*(\widehat{S}_{r-1})$, dus $\partial k_d = \partial k_d'$, $k_d' \subset \Sigma^*(\widetilde{S}_{r-1})$. Verder is de cyclus $k_d - k_d' \subset \Sigma^*(\widetilde{T}_r)$ dus naar 5.2: $k_d - k_d' = \partial k_{d+1}$ met $k_{d+1} \subset \Sigma^*(\widetilde{T}_r)$. Voor $j_d' = j_d - k_d + k_d'$ geldt dus: $j_d \sim j_d'$ en $j_d \wedge \Sigma^*(\widetilde{T}_r) \subset \Sigma^*(\widehat{S}_{r-1})$. Men herhaalt hetzelfde nu met een tweede T_r van P en gaat zo door, tot men een j_d'''' krijgt, $\sim j_d$ en $\subset \Sigma^*(\widetilde{S}_{r-1})$ dus in de barycentrische onderverdeling van een $\leq (r-1)$-dim. polytoop. Wegens $A_{d,r-1}$ is j_d'''' (dus ook j_d) homoloog met de verfijning van een d-cyclus van $\Sigma^*(P)$.

Hiermede is de stelling uit 3 volledig bewezen.

7. Eigenschap ω van een polytoop P betekent: hoekpunten, die met zijn tweeën een simplex vormen, vormen met zijn allen een simplex.

Voor elke P bezit $\widetilde{P}$ de eigenschap ω. Want zijn $a_0 \dots a_p$ en $b_0 \dots b_q$ twee hoekpunten van $\widetilde{P}$, die een simplex vormen, dan is een der verzamelingen $(a_0, \dots, a_p)$ en $(b_0, \dots, b_q)$ deelverzamelingen van de andere. Voor een stel hoekpunten van $\widetilde{P}$, die met zijn tweeën simplexen vormen geldt dus, dat hun bijbehorende hoekpuntverzamelingen van P in een opstijgende rij kunnen worden gerangschikt, dus tot een simplex van $\widetilde{P}$ aanleiding geven.

8. Zij P een polytoop met de eigenschap ω. We vormen bij elk hoekpunt a van P de ster, genomen in $\widetilde{P}$, en hiervan de afsluiting, genaamd $\tau(a)$. ϑ zij de minimumafstand tussen twee vreemde $\tau(a)$. Elk punt van P ligt in minstens één $\tau(a)$. We definiëren een (niet-continue) afbeelding φ : Voor elk punt $p \varepsilon P$ zij $\varphi(p)$ een der hoekpunten a van P met $p \varepsilon \tau(a)$.

φ beeldt elke verzameling $< \vartheta$ van P op een simplex van $\Sigma^*(P)$ af. Want is $\rho(p,q) < \vartheta$, $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$, dan is $\tau(a) \wedge \tau(b) \neq \square$. Er bestaat dus een hoekpunt van $\widetilde{P}$, waar a en b elk een simplex mee vormen. Dit hoekpunt heeft dus de vorm (ab...). Dus vormen a,b een simplex van P. Is V een verzameling van P met diameter $< \vartheta$, dan vormen de punten van $\varphi(V)$ dus met zijn tweeën, dus met zijn allen een simplex.

9. Zij P een polytoop en Q een onderverdeling. Gegeven twee afbeeldingen φ en ψ van $\Sigma^*(Q)$ op $\Sigma^*(P)$ met de eigenschap, dat (indien $|t|$ een simplex van P is) de hoekpunten van de onderverdeling van $|t|$ in hoekpunten van $|t|$ worden afgebeeld. (Dit is b.v. het geval met de φ uit 8.) Dan brengen φ en ψ hetzelfde homomorfisme

van $G^*(Q)$ in $G^*(P)$ voort.

We moeten dus aantonen, dat voor elke cyclus j van $\Sigma^*(Q)$ geldt: $\varphi j \sim \psi j$ in $\Sigma^*(P)$. We vormen $\Pi(\Sigma^*(Q))$ en de afbeelding Φ, die in het "grondvlak" met φ en in het "dakvlak" met ψ overeenstemt. Φ is simpliciaal, $j \sim j'$ (aan j beantwoordende dakcyclus), $\Phi j \sim \Phi j'$, dus $\varphi j \sim \psi j$.

10. Is Q de n-de barycentrische onderverdeling $P^{(n)}$ van P, dan kunnen we $G^*(P)$ met $G^*(Q)$ door middel van $\underline{v}^n$ identificeren (stelling uit 3). Bij $P^{(i+1)}$ hoort een simpliciale afbeelding $\underline{s}_i$ van $\Sigma^*(P^{(i+1)})$ in $\Sigma^*(P^{(i)})$, die op de G^* invers met $\underline{v}$ is. $\underline{s}_{n-1}\underline{s}_{n-2}\cdots\underline{s}_0$ is daar dus op G^* de inverse van $\underline{v}^n$, kan dus zelve als identieke afbeelding worden beschouwd. Een willekeurige afbeelding φ, die aan de veronderstellingen van 9 voldoet, induceert in G^* dus het identieke automorfisme.

11. <u>Stelling</u>: $G_d(P)$ topologisch isomorf $G_d^*(P)$.
Bewijs: We mogen veronderstellen, dat P de eigenschap ω bezit (anders kunnen we wegens 3 tot P' overgaan). We vormen successieve barycentrische onderverdeling: $P', P'', \ldots, P^{(n)}, \ldots$. We noteren bij elke $P^{(n)}$ de maximale simplexdiameter δ_n en het getal ϑ_n uit 8. We kiezen een monotone rij natuurlijke getallen p_n, zo dat

$$\vartheta_{p_{n-1}} > 3\,\delta_{p_n}$$

is. We kiezen verder de monotone nulrijen ε_n, η_n zo dat

$$\vartheta_{p_{n-1}} > \eta_n > \varepsilon_n + 2\delta_{p_n} \quad , \quad \varepsilon_n > \delta_{p_n}$$

is. We definiëren φ_n naar 8 als een afbeelding van P in $\Sigma^*(P^{(p_n)})$, die elke verzameling $< \vartheta_{p_n}$ op een simplex afbeeldt en op $\Sigma^*(P^{(p_n)})$ de identiteit is.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & G^*(P^{(p_n)}) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & G^*(P^{(p_{n+1})}) \arrow[l, "\varphi_n"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & G_{\varepsilon_n\eta_n}(P) \arrow[l] & G_{\varepsilon_{n+1}\eta_{n+1}}(P) \arrow[l, "\chi"] \arrow[ul, "\varphi_n"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

De verticale betrekkingen ontstaan door de identieke afbeeldingen van $\Sigma^*(P^{(p_n)})$ in $\Sigma_{\varepsilon\eta}(P)$, die simpliciaal zijn wegens $\delta_{p_n} < \varepsilon_n < \eta_n$.

De φ_n-s zijn simpliciaal wegens $\delta_{p_{n+1}} < \vartheta_{p_n}$ en $\varepsilon_{n+1} < \eta_{n+1} < \vartheta_{p_n}$.

De geldigheid van $\overset{\leftarrow}{\nwarrow}\uparrow$ is triviaal. Die van $\downarrow\overset{\nwarrow}{\leftarrow}$ volgt uit het feit, dat voor een $j_{\varepsilon_{n+1}\eta_{n+1}}$ de afbeelding $\downarrow\nwarrow$ een δ_n-verschuiving is, waarbij deze cyclus met zichzelf $(\varepsilon_{n+1} + 2\delta_n)$-homoloog blijft (zie IX 2), dus (wegens $\varepsilon_n + 2\delta_{p_n} < \eta_n$) ook η_n-homoloog; in de G-en wordt dus dezelfde afbeelding als door χ geïnduceerd.

Naar 10 stelt φ de identieke afbeelding voor, indien men $G^*(P^{(p_n)})$ met $G^*(P^{(p_{n+1})})$ door $\underline{v}^{p_{n+1}-p_n}$ met elkaar identificeert. De limiet van de bovenste rij is dus topologisch isomorf met $G^*(P)$; die van de onderste is $G(P)$. Volgens VII 3 zijn ze dus topologisch isomorf.

12. Als convergente cyclus beantwoordende bij $G^*(P) \longleftrightarrow G(P)$ aan een cyclus $j \varepsilon J(\Sigma^*(P))$ kunnen we nemen: de rij

$$\underline{v}^n j .$$

Gegeven twee eindige polytopen P en Q en een simpliciale afbeelding f van $\Sigma^*(P)$ in $\Sigma^*(Q)$. Hierbij hoort een "simpliciale afbeelding" f van P in Q, die in $\Sigma^*(P)$ met de gegeven afbeelding overeenstemt en in elk simplex van P affien is (d.w.z. $f(\Sigma \lambda_i e_i) = \Sigma \lambda_i f(e_i)$, $\Sigma \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$). f induceert een continu homomorfisme van G(P) in G(Q), maar ook van $G(P^*)$ in $G(Q^*)$. Deze homomorfismen zijn identiek (als men G(P) met $G^*(P)$ en G(Q) met $G(Q^*)$ identificeert volgens het isomorfisme van 11). Het is immers duidelijk, dat f ook afbeeldingen van $\underline{v}^n(P)$ in $\underline{v}^n(Q)$ induceert en dat hierbij aan $\underline{v}^n j$ beantwoordt $\underline{v}^n f\ j$. Laat men n variëren, dan zijn dit juist de convergente cyclussen horende bij j en fj.

13. <u>Stelling</u>: Gegeven twee eindige polytopen P en Q en een continue afbeelding $f(P) \subset Q$. Van Q wordt (ω) verondersteld. f is homotoop met een simpliciale afbeelding van een geschikte onderverdeling van P in Q.

Bewijs: De sterren (zie IV 1) $\sigma(e')$ van de hoekpunten van Q vormen een overdekking van Q. Voor elke $x' \varepsilon Q$ is er dus een e', zo dat $\alpha(x',e') = \rho(x', Q \setminus \sigma(e')) > 0$ is. Nu is $\alpha(x',e')$ continu in x', dus ook $\max\limits_{e'} \alpha(x',e')$, maar bovendien > 0, bezit dus een positief minimum ε. De ε-omgeving van elke x' is dus in een ster bevat.

We kiezen $\delta > 0$, zodat f elke δ-verzameling in een ε-verzameling afbeeldt. We kiezen de onderverdeling P^o van P zo fijn, dat elke ster van $P^o < \delta$ is. Dan geldt voor elk hoekpunt e van P^o: Er is een hoekpunt Q, genaamd $\varphi(e)$, zodat

$$f(\sigma(e)) \subset (\varphi(e)).$$

Gegeven een simplex $T(e_o,\ldots,e_p)$ van P^o. Elk binnenpunt x ervan, hoort ook tot $\sigma(e_i)$, dus $f(x) \varepsilon \sigma(\varphi(e_i))$, dus f(x) binnenpunt van een simplex met hoekpunt $\varphi(e_i)$. Dus zijn de $\varphi(e_i)$ hoekpunten van een simplex Q. φ is dus een simpliciale afbeelding van $\Sigma^*(P^o)$ in $\Sigma^*(Q)$ en kan worden uitgebreid tot simpliciale afbeelding van P^o in Q.

x kan willekeurig worden gekozen. Bevat $T(e_o,\ldots,e_p)$ weer x als binnenpunt, dan is $f(x) \varepsilon \sigma(\varphi(e_i))$. Is f(x) binnenpunt van T', dan is $\varphi(e_i)$ hoekpunt van T', dus wegens de simplicialiteit ook $\varphi(x)\varepsilon T'$. Dus f(x) en $\varphi(x)$ liggen in een gemeenschappelijk simplex.

We definiëren $f_t(x)$ als het punt, dat het lijnstuk $f(x)\,\varphi(x)$ in de verhouding t : (1-t) verdeelt. Dan is f_t een continue overvoering van f in φ.

Opmerking: Door ook nog Q onder te verdelen, kan men zelfs bereiken, dat f en φ willekeurig weinig verschillen - φ is simpliciale approximatie van f.

14. Wil men de afbeeldingsklassen van twee polytopen onderzoeken, dan kan men zich dus tot de studie van simpliciale afbeeldingen beperken; in iedere afbeeldingsklasse zijn ook simpliciale afbeeldingen.

Wil men weten of twee afbeeldingen tot dezelfde klasse behoren, dan kijkt men naar het homomorfisme der homologiegroepen, dat zij induceren; verschilt dat voor beide, dan horen ze zeker niet tot dezelfde klasse. (Het omgekeerde geldt over 't algemeen niet.) Afbeeldingen, die met een constante afbeelding homotoop zijn, heten ook inessentieel. Hierbij hoort (IX 5) het nul-homomorfisme der homologiegroepen van dim > 0 (alles wordt in 0 afgebeeld). Een niet-nulhomomorfisme $(d > 0)$ verraadt dus essentialiteit van de afbeelding.

15. Een noodzakelijk criterium voor homeomorfie van twee ruimten is: overeenstemmen van de homologiegroepen (die immers topologische invarianten zijn).

Van zekere polytopen kennen we al de homologiegroepen (zie VIII 3). Als volgt een handige methode van berekening:

Voorbeeld torus: Iedere j_1 kan continu op de rand van het model worden geveegd, is dus homoloog met een in de rand liggende cyclus, dus lineaire combinatie uit de "horizontale" en "verticale" cyclus.

Het "op de rand vegen" wordt als volgt gerechtvaardigd:

Gegeven een cyclus j_d van $\Sigma^*(P)$. De "concrete" simplexen van $|j_d|$ vormen een deelpolytoop S, dat door de identieke afbeelding in S is afgebeeld. We beschouwen een schaar $f_t\,(S) \subset P$, f_0 = identiteit. f_t induceert de identieke afbeelding van $G_d(S)$ in $G_d(P)$. De bij j_d horende convergente cyclus $\{\underline{v}^n\ j_d\}$ is dus homoloog $f_1\{\underline{v}^n\ j_d\}$.

Ligt nu $f_1 S$ in een deelpolytoop T (in ons voorbeeld de rand van het model), dan kunnen we j_d vervangen door een in T liggende cyclus.

Zoek volgens deze methode op de homologiegroepen van de volgende polytopen:

Zelfkantpolytoop van concreet r-simplex.

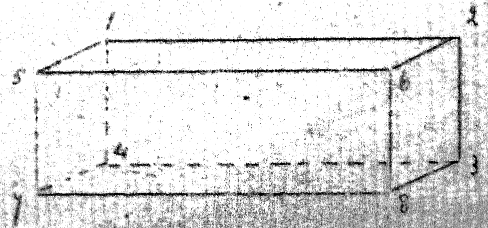
Balk met identificaties:

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7 = 8,

12 = 34 = 56 = 78;

14 = 23 = 68 = 57,

15 = 26 = 38 = 47,



1265 = 4387, 2386 = 1475, 1234 = 5678 (3-dim. torus).
Bol met diametraalidentificaties op de rand (3-dim. projectieve ruimte).
Ruimte (aangevuld met oneigenlijk punt), waar 3 vreemde bollen uit zijn geponst, waarbij de randen S_i en S_i' ($i = 1,2,3$) van de gaten zijn geïdentificeerd, en wel S_i met S_i' (het is nog belangrijk, of de identificatie met behoud van de oriëntering of tegengesteld geschiedt).
Toon aan: De G_1 cf mod.1 van de n-dim. torus T_n (Cartesisch product van n cirkelomtrekken) is met T_n zelf homeomorf.
De G_1 cf mod.1 van de solenoïde (zie VII 7) is met de solenoïde zelf homeomorf.
Definiëer T_ω (ω-dim. torus) als volgt: De punten van T_n zijn vastgelegd door n coördinaten, die reële getallen mod. 1 zijn.
Beeld T_{n+1} op T_n af door weglaten van de (n+1)-de coördinaat (f_n^{n+1}). De F_n-adische limiet van de T_n is T_ω.
Bewijs dat $G_1(T_\omega)$ cf mod. 1 homeomorf T_ω is!

XI. Afbeeldingsgraad, dimensie en gebied.

1. Een r-polytoop heet pseudovariëteit, indien
   1. elk (r-1)-simplex ervan op ten hoogste twee r-simplexen ligt,
   2. bij twee r-simplexen ervan een hele geordende rij r-simplexen is te vinden, met de gegeven simplexen als eerste en laatste en zo dat opeenvolgende één (r-1)-simplex gemeen hebben.

Van een r-dim. pseudovariëteit is $G_r = \Gamma$ of (0). Want is j_r een cyclus en t_{r-1} een simplex dat op twee t_d ligt, dan kan (wegens 1) t_{d-1} in $\mathfrak{z}\, j_d$ alleen wegvallen, wanneer beide t_r in j_r dezelfde coëfficiënt (op het teken na) hebben. Dus wegens 2: Alle t_r hebben in j_r (op het teken na) dezelfde coëfficiënt. Zijn j_r en j_r' twee cyclussen $\neq 0$ die in één t_d overeenstemmen, dan leert beschouwing van $j_d - j_d'$, dat zo in alle t_d overeenstemmen, dus $j_r = j_r' = \alpha \Sigma t_r$ waarbij de t_r in een éénduidige bepaalde oriëntering dienen te worden genomen. Dus indien er een cyclus $\neq 0$ is, is $J_r = \Gamma$, dus $G_r = \Gamma$.

Als $G_r = \Gamma$, spreken we van gesloten pseudovariëteit. Indien een cyclus Σt_d (mod.0) bestaat, spreken we van oriënteerbare pseudovariëteit. Σt_r is op het teken na bepaald en heet de grondcyclus.

Iedere r-pseudovariëteit met elk (r-1)-simplex op precies twee r-simplexen is gesloten of mod 2, want $\mathfrak{z}\, \Sigma t_r \equiv 0$ mod 2.

Het projectieve vlak is gesloten (mod 2), maar niet oriënteerbaar.

Onderverdeling van een (gesloten, oriënteerbare) pseudovariëteit is weer (gesloten, oriënteerbare) pseudovariëteit.

Bij afbeelding van twee oriënteerbare pseudovariëteiten wordt de grondcyclus van de eerste op een veelvoud (c-voud) van die van de tweede afgebeeld. c heet de afbeeldingsgraad.

2. De r-simplex (als polytoop) zullen we ook r-bol noemen, B_r, zijn zelfkantpolytoop (r-1)-sfeer, S_{r-1} (de 0-sfeer bestaat dus uit twee losse punten). We zullen hiermee ook de meetkundige voorstellingen van bol en sfeer verbinden. Dit wordt door de topologische equivalentie van de betrokken figuren gerechtvaardigd. Bol en sfeer zijn pseudovariëteiten.

3. Elke echte afgesloten deelverzameling V van de S_r kan op een punt worden samengetrokken. Want is a een punt $\notin$ V en b zijn antipode, dan kunnen we elk punt x van V in de tijd 0 tot 1 eenparig van x naar a' laten lopen. Dat is een overvoering φ_t met φ_0 = identiteit, $\varphi_t(V)$ = constant.

Een afbeelding f van een polytoop P in S_r, waarbij fP echt deel van P is, is inessentiëel, want f is homotoop met $\varphi_t f$ en $\varphi_1 f$ is constant.

4. De identieke afbeelding van S_r in S_r induceert de identieke afbeelding van de grondcyclus (afbeeldingsgraad 1) is dus essentiëel.

5. <u>Stelling</u>: Gegeven een $\frac{1}{3}\vartheta$-afbeelding f van een eindige polytoop P (met de eigenschap (ω)) in een ruimte R. f induceert een isomorfisme van de homologiegroepen van P in die van R. (Definitie van ϑ in X 8.)

Bewijs: Gegeven een cyclus j in $\Sigma^*(P)$. We veronderstellen $f\underline{v}^n j_{\frac{1}{3}\vartheta}\sim 0$ (voor bijna alle n) en bewijzen $j \sim 0$ in $\Sigma^*(P)$. Voor elk $a' \varepsilon R$ kiezen we één origineel g(a') in P. Dan is $\rho(a, gfa) < \frac{1}{3}\vartheta$, dus is $gf\underline{v}^n j$ een $\frac{1}{3}\vartheta$-verschuiving van $\underline{v}^n j$, maar wegens de veronderstelling ook $gf\underline{v}^n j \underset{\vartheta}{\sim} 0$, dus ook $\underline{v}^n j \underset{\vartheta}{\sim} 0$. Dus $\underline{v}^n j$ is zelfkant van een ϑ-keten k. Voor grote n is φ (zie X 8) een simpliciale afbeelding van $\Sigma_\vartheta(P)$ in $\Sigma^*(P)$, dus ook $\varphi\underline{v}^n j = \partial\varphi k$. Maar $\varphi\underline{v}^n j \sim j$ in $\Sigma^*(P)$ (zie X 11), dus inderdaad $j \sim 0$ in $\Sigma^*(P)$.

6. <u>Stelling</u>: De r-simplex (als polytoop beschouwd) kan niet door ε-afbeeldingen met willekeurig kleine $\varepsilon > 0$ in (r-1)-polytopen worden afgebeeld.

Bewijs: S_{r-1} zij de zelfkantsfeer van de simplex T_r en j de grondcyclus van S_{r-1}. f zij een ε-afbeelding van T_r in P ((r-1)-dim.) We vormen een onderverdeling T' van T_r en een simpliciale approximatie φ van f, zodat φ en f hoogstens η verschillen (zie V, 2, st. 1). Dan is ook φ een ε-afbeelding van T_r in P. Is ε klein genoeg, dan is (naar 5) $\varphi j \neq 0$. Nu is $j \sim 0$ in $\Sigma^*(\overline{P}'($, dus $\varphi j \sim 0$ in $\Sigma^*(P)$. Dit is onmogelijk, omdat er in $\Sigma^*(P)$ geen r-dim. simplexen zijn.

7. <u>Stelling</u>: Dimensie en dimensie-trap stemmen overeen. De dimensie van een polytoop is een topologische invariant. (Volgt uit 6. Zie V,4.)

8. Gegeven een afbeelding F van B_{r+1} (straal = 1, middelpunt 0) in een ruimte R. Zij ρ de afstand van $z \varepsilon B_{r+1}$ van 0, $\zeta(z)$ zijn projectie vanuit 0 op S_r (alleen van $\rho \neq 0$ gedefiniëerd). We stellen $f_{1-\rho}(\zeta(z)) = F(z)$. Hierdoor wordt een schaar $f_t(x)$ gedefiniëerd ($f_t(S_r) \subset R$), indien we nog $f_1(x) \equiv F(0)$ stellen. We hebben $f_0(x) = F(x)$. Omgekeerd brengt elke schaar $f_t(S_r) \subset R$ met f_1 = constant een afbeelding $F(B_{r+1}) \subset R$ voort, zodat $f_0(x) = F(x)$ is.

Dat een afbeelding $f(S_r) \subset R$ inessentiëel is, komt dus overeen met de uitspraak: f kan worden voortgezet tot een afbeelding van B_{r+1} in R.

9. In verband met 4 hebben we dus:

<u>Stelling</u>: De identieke afbeelding van S_r in zichzelf kan niet worden voortgezet tot een afbeelding van B_{r+1} in S_r. Anders geformuleerd: Het is niet mogelijk B_{r+1} op S_r af te beelden zodat elk randpunt in zichzelf overgaat.

10. Twee afbeeldingen f_0 en f_1 van S_r in zichzelf, die nooit antipodisch zijn (dus $f_0(x)$ nooit antipode van $f_1(x)$) behoren tot dezelfde klasse.

Want we kunnen $f_t(x)$ definiëren als punt dat de kortste grotecirkel-boog $f_0(x)f_1(x)$ in de verhouding $t : (1-t)$ verdeelt, en hebben dan een overvoering.

Een afbeelding $f(x)$ zonder antipodische toevoeging (dus $f(x)$ nooit antipode van x) behoort dus tot de klasse van de identiteit en kan derhalve niet op heel B_{r+1} worden voortgezet.

11. Een afbeelding f in de S_r kan ook worden gerepresenteerd door een veld van vectoren der lengte 1 ; in elk punt a brengt men de vector $f(a)$ aan. De identieke afbeelding van S_r in S_r beantwoordt aan het vectorveld der buitennormalen. Naar 9 kan dit dus niet op heel B_r worden voortgezet (altijd vectoren der lengte 1). Hetzelfde geldt van het veld der binnennormalen (want anders hoefde men de richtingen alleen om te keren). Men heeft zelfs de

<u>Stelling</u>: Een op S_r gegeven overal naar buiten (binnen) wijzend vectorveld (lengtes 1) kan niet op heel B_{r+1} worden voortgezet.

Want bij een naar buiten wijzend vectorveld hoort een nooit antipodische afbeelding.

12. <u>Stelling</u>: Een afbeelding f van B_{r+1} in zichzelf bezit een vast punt.

Bewijs: We veronderstellen, dat er geen vast punt is. Dan bestaat het (continue) vectorveld $\frac{x, f(x)}{\rho(x, f(x))}$. Zijn vectoren zijn voor $x \varepsilon S_r$ naar binnen gericht. Dit is in strijd met 11.

13. Voor het volgende is het practisch de S_r zo als polytoop voor te stellen, dat de antipodische afbeelding a simpliciaal is. Men kan dit als volgt doen:

De S_1 (cirkel) wordt in vier kwadranten verdeeld (dus als een vierhoek). Heeft men voor de S_{r-1} de gevraagde voorstelling gevonden, dan vat men haar als evenaarsfeer van een S_r op, door een "noordpool n en een zuidpool z" toe te voegen en met de simplexen van S_{r-1} te verbinden. Is j_{r-1} grondcyclus van S_{r-1}, $j_{r-1} = \Sigma t_{r-1}$, dan is $j_r = \Sigma[n, t_{r-1}] - \Sigma[z, t_{r-1}]$ grondcyclus van S_r.

We tonen door inductie aan: $\underline{a} j_r = (-1)^{r-1} j_r$ (dus afbeeldingsgraad van $\underline{a}$ is $(-1)^{r-1}$).

Voor $j = 1$ is dit duidelijk. We veronderstellen $\underline{a} j_{r-1} = (-1)^{r-2} \cdot j_{r-1}$ als juist. $\underline{a} j_r = \Sigma \underline{a}[n, t_{r-1}] - \Sigma \underline{a}[z, t_{r-1}] = \Sigma[z, \underline{a} t_{r-1}] +$
$- \Sigma[n, \underline{a} t_{r-1}] = [z, \underline{a} \Sigma t_{r-1}] - [n, \underline{a} \Sigma t_{r-1}] = [z, (-1)^{r-2} \Sigma t_{r-1}] +$
$- \Sigma[n, (-1)^{r-2} \Sigma t_{r-1}] = (-1)^{r-1}(\Sigma[n, t_r] - \Sigma[z, t_r]) = (-1)^{r-1} j_{r-1}$. Dus:

Stelling: De antipodische zelfafbeelding van S_r is van de graad $(-1)^{r-1}$, behoort dus voor even r zeker niet tot de klasse van de identiteit.

14. Stelling: Een tangentiaal vectorveld (lengtes 1) is aan de evendimensionale sferen niet mogelijk.

Bewijs: Bestaat zulk een vectorveld, dan kan men elk punt in de door de bijbehorende vector bepaalde richting op een halve grote cirkel naar zijn antipode laten lopen, en dus hoort dan $\underline{a}$ tot de klasse van de identiteit.

15. Stelling: Een zelfafbeelding f van S_r (r even), die nergens antipodisch is, bezit een vast punt.

Bewijs: We tekenen bij elke $x \varepsilon S_r$ de tangentiaalvector wijzende naar $f(x)$. Volgens 14 is het mogelijk, die op lengte 1 te normeren, dus is er een $x = f(x)$.

16. Vele vragen over sferenafbeeldingen blijven hier nog onbeantwoord. Later zullen we onder meer aantonen, dat de gelijkheid der afbeeldingsgraden ook voldoende is ervoor, dat twee zelfafbeeldingen van de S_r tot dezelfde klasse behoren. Voorlopig weten we alleen, dat de voorwaarde noodzakelijk is.

17. We bewijzen nog de

Stelling van de "invariantie van gebied": Gegeven twee afgesloten begrensde verzamelingen V en W van de Cartesische E_r en een topologische afbeelding f van V op W. Dan beantwoordt bi inwendig punt een inwendig punt en aan een randpunt een randpunt.

Deze stelling zal zijn bewezen, als het lukt, de begrippen "inwendig punt en randpunt" van een verzameling in E_r topologisch invariant te definiëren. Dit geschiedt als volgt:

Een punt x van V is inwendig punt dan en slechts dan, wanneer voor elke voldoende kleine omgeving U van x in V geldt: G_{r-1} (rand van U) of mod 0 is niet-triviaal.

We gaan dus aantonen: 1. Is x randpunt van V, dan zijn er willekeurig kleine omgevingen U met rand U' zo dat $G_{r-1}(U') = (0)$ is. 2. Is x inwendig punt van V, dan is voor elke keuze van U (voldoende klein) met rand U': $G_{r-1}(U') \neq (0)$.

Ad 1: We kiezen een (willekeurig kleine) open bol B met als middelpunt x en als randster S, en zodanig dat $S \cap V$ echt deel van S is, en stellen nu $U = B \cap V$, dus $U' = S \cap V$. We moeten dan aantonen: Is M echt afgesloten deel van de d-dim. sfeer S $(d = r-1)$, dan is $G_d(M) = (0)$. Dat geschiedt in 18.

Ad 2: Zie 19.

18. $P^{(n)}$ zij een rij polytopen, homeomorf met S en zo dat $P^{(n+1)}$ onderverdeling van $P^{(n)}$ is. $Q^{(n)}$ zij de kleinste deelpolytoop van $P^{(n)}$, die M bevat. Van zekere n_0 af aan is $Q^{(n)}$ echt deel van $P^{(n)}$. Verder: $\bigcap Q_n = M$. De $Q^{(n)}$ vormen een R_n-adische rij met als afbeeldingen f_n^{n+1} de identieke afbeeldingen en met als limiet M. Dus (zie IX 8) $G_d(M) = \lim G_d(Q^{(n)})$. We hoeven dus alleen nog aan te tonen: $G_d(Q^{(n)}) = (0)$ voor $n \geqq n_0$. Zij j een d-cyclus van $\Sigma^*(Q^n)$, dan is a fortiori j een d-cyclus van $P^{(n)}$, dus treden alle t_d van $P^{(n)}$ in j met dezelfde coëfficiënt (absoluut genomen) op. Aangezien in $P^{(n)}$, dus ook in j, minstens één t_d van $P^{(n)}$ ontbreekt, is die coëfficiënt 0, dus $j = 0$, dus $G_d(Q^n) = (0)$, dus $G_d(M) = (0)$.

19. Zij x inwendig punt van V en U een zo kleine bolomgeving van x, dat $U \subset V$ en dus ook S (randsfeer van U) $\subset V$ is. Zij U_1 een willekeurige omgeving van x, $U_1 \subset U$, en U_1' de rand van U_1. We wijzen op U_1' een convergente d-cyclus $(d = r-1)$ aan, die (op U_1') niet homoloog 0 is.

Op S is er een niet-nulhomologe convergente d-cyclus, bestaande uit een rij ε_n-d-cyclussen j_{ε_n} $(\lim \varepsilon_n = 0)$ zodat voor geen nulrij η_n geldt: $j_{\varepsilon_n} \underset{\eta_n}{\sim} 0$. Maar deze j_{ε_n} vormen ook een convergente cyclus in de bol $\overline{U}$, die als zodanig wel 0-homoloog is. Dus is er een nulrij ε_n' en een rij ketens $k_{\varepsilon_n'}$ in $\overline{U}$, zodat $\partial k_{\varepsilon_n'} = j_{\varepsilon_n}$. We vormen $k'_{\varepsilon_n'} = k_{\varepsilon_n'} \cap \overline{U} \setminus U_1$ en $j'_{\varepsilon_n'} = \partial k'_{\varepsilon_n'} - j_{\varepsilon_n}$. Is t een simplex dat in j_{ε_n} (met coëfficiënt $\neq 0$) optreedt, dan moet t gelegen zijn zowel op een simplex van $k'_{\varepsilon_n'}$, dat geheel in $\overline{U}\setminus U_1$ ligt als ook op één, dat niet geheel in $\overline{U}\setminus U_1$ ligt. Dus ligt t in een ε_n'-omgeving van U_1'. In de ε_n'-omgeving van elk hoekpunt a van $j'_{\varepsilon_n'}$ is dus een punt a' van U_1' te vinden. Door $a \to a'$ brengen we een ε_n'-verschuiving van $j'_{\varepsilon_n'}$ in $j''_{3\varepsilon_n'}$ tot stand; volgens IX 2 geldt $j'_{\varepsilon_n'} \underset{3\varepsilon_n'}{\sim} j''_{3\varepsilon_n'}$ in $\overline{U}\setminus U_1$. Dus $j_{\varepsilon_n} \underset{3\varepsilon_n'}{\sim} j''_{3\varepsilon_n''}$.

We beweren, dat de convergente cyclus $\{ j''_{3\varepsilon_n''} \}$ in U_1' voldoet, d.w.z. niet nulhomoloog is in U_1'.

Anders was namelijk ook $\{ j_{\varepsilon_n} \} \sim 0$ in $\overline{U}\setminus U_1'$, dus induceerde de inbedding van S in $\overline{U}\setminus U_1'$ geen isomorfisme; dit is naar IX 7 in strijd met het bestaan van een retractie van $\overline{U}\setminus U_1'$ op S (te weten de projectie vanuit x op S).

XII. Homologiegroepen van halfcompacte ruimten.

1. R heet plaatselijk compact, wanneer elk punt van R een omgeving met compacte afsluiting bezit.

Voorbeeld: $R = S\setminus A$, waar S compact en A afgesloten in S is. (Want bij elke $x \in R$ is er een omgeving $U \subset S$ met $\overline{U} \cap S = \square$, dus $\overline{U}$ compact, $U \cap R$ omgeving in R en $\overline{U \cap R}$ compact.)

2. Wegens de separabiliteit kan R met aftelbaar veel van die omgevingen U_n worden overdekt. Stellen we $R_n = \overline{\bigcup_1^n U_i}$, dan is R vereniging van de open kernen van een opstijgende rij compacte ruimten R_n.

Is R nog op een andere wijze zo voorgesteld door middel van een rij R_n', dan geldt voor elke m: $R_m \subset R_n'$ voor bijna alle n. Want $R_m \subset \bigcup \breve{R}_n'$, dus is R_m (wegens de compactheid) reeds bevat in een eindige partiaalsom, dus is er een m_0 met $R_m \subset \bigcup_1^{m_0} \breve{R}_n' \subset R_{m_0}'$.

3. R is homeomorf met de R_n-ale limiet van de R_n, waarbij f_n^{n+1} (en f_n) de identieke afbeelding is. (Ga dit zelf na!) Kiezen we een andere voortbrengende rij R_n', dan zijn beide rijen homeomorf wegens 2. De f_n^{n+1} bepalen continue homomorfismen van $G_d(R_n)$ in $G_d(R_{n+1})$.

We definiëren de homologiegroepen van R als G_n-ale limieten van die met de R_n. Deze definitie hangt niet af van de keuze van de rij R_n. Zij is topologisch invariant. Een element van $G_d(R)$ wordt ...s bepaald door een convergente cyclus liggende in zekere R_m, die als 0 wordt beschouwd, indien hij voor zekere n in R_n nulhomoloog is.

4. Wat is hier de betekenis van G_0? Zijn de convergente cyclussen $\{a\}$ en $\{b\}$ homoloog, dan is er een n, zodat a en b in dezelfde componenten van R_n liggen (en omgekeerd). a en b kunnen dan door een <u>continuum</u> (niet-lege compacte samenhangende ruimte) worden verbonden. Omgekeerd, is er een a en b bevattend continuum C, dan vormen de $\breve{R}_n \cap C$ een overdekking van C, dus $C \subset R_n$ voor bijna alle n. De C bevattende component van R_n bevat dus a en b. Dus:

Dan en slechts dan $\{a\} \sim \{b\}$ als a en b door een continuum in R kunnen worden verbonden.

Anders geformuleerd: De verzameling van alle punten, die met a door een continuum kunnen worden verbonden, heet <u>constituent</u> van a.

$\{a\} \sim \{b\}$ dan en slechts dan als a en b in één constituent liggen.

5. Een plaatselijk compacte ruimte heet plaatselijk samenhangend, als elk punt willekeurig kleine samenhangende omgevingen bezit.

De verzameling (in vlakke coördinaten) bestaande uit

$(x = 0, |y| \leqq 1)$ en $(x \neq 0 \quad y = \sin \frac{1}{x})$

is samenhangend, maar in de punten x = 0 niet plaatselijk samenhangend.

Elke open verzameling van de cartesische R_n is plaatselijk samenhangend. (Bewijs dit zelf!)

In plaatselijk compacte, plaatselijk samenhangende R vallen de begrippen "component" en "constituent" samen.

Bewijs: We hoeven alleen aan te tonen, dat elk puntenpaar van een component S van R door een continuum kan worden verbonden. Bij elk punt van R is er een samenhangende omgeving met compacte afsluiting; met aftelbaar vele kan R overdekt worden (separabiliteit): $U_1, U_2, \ldots$. Zij $a \varepsilon U_1$. We vormen de vereniging V_n van alle U_i, die met U_{n-1} een niet lege doorsnede hebben, hierbij $V_1 = U_1$ stellende. Dan is $\bigcup V_n$ samenhangend, dus $\subset S$, dus $= S$. Dus $b \varepsilon$ zekere V_n; dus bestaat er een rij $U_{i_1}, \ldots, U_{i_p}$ met $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}} \neq \square$ en $a \varepsilon U_{i_1}$, $b \varepsilon U_{i_p}$.

Dan is $\bigcup_{j=1}^{p} \bar{U}_{i_j}$ een a met b verbindend continuum.

Hieruit volgt

<u>Stelling</u>: In een plaatselijk compacte, plaatselijk samenhangende R is $\{a\} \sim \{b\}$ dan en slechts dan, als a en b in een zelfde component van R liggen.

Opmerking: Het complement van een afgesloten deel van een eindige polytoop is pl. compact èn pl. samenhangend.

XIII. Groepentheoretische dualiteit.

1. De optelgroep der reële getallen mod 1 wordt ook Ω genoemd. Ω is compact en samenhangend. De eindige ondergroepen van Ω zijn cyclisch en van de vorm: gehele veelvouden van $\frac{1}{m}$, waar m een geheel getal is. De oneindige ondergroepen zijn overal dicht in Ω. (Zie Groepentheorie I.) Afgesloten ondergroepen van Ω zijn, dus eindig of $= \Omega$. .

2. Torusgroepen Ω_n heten de directe sommen van een aantal groepen Ω (zie ook X einde!). De Ω_n-adische limiet hiervan (zie de afbeelding in X einde) heet Ω_ω (ω-dim. torusgroep).

3. Met X, Y, Z duiden we aftelbare discrete commutatieve groepen aan, met A, B, C compacte commutatieve groepen.

4. Onder een karakter a van een aftelbare (compacte) commutatieve groep verstaan we een homomorfisme (continu homomorfisme) in Ω : $ax \subset \Omega$.

5. De karakters van een groep X vormen zelf een groep. Voor twee karakters a en b definiëre men namelijk

$$(a \pm b)x = ax \pm bx \qquad (x \in X).$$

$a \pm b$ is inderdaad een karakter, want

$$(a \pm b)(x \pm y) = a(x \pm y) \pm b(x \pm y) = (ax \pm ay) \pm (bx \pm by)$$
$$= (a \pm b)x \pm (a \pm b)y.$$

De groep A van de karakters kan worden getopologiseerd door de limietdefinitie:

$$(\lim a_n)x = \lim a_n x.$$

Ga na dat $\lim a_n$ (indien hij bestaat) weer een karakter is! Ga na, dat

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_b.$$

Met behulp van open verzamelingen kan de topologisering als volgt geschieden. Is O open in Ω en $x_0 \in X$, dan is de verzameling $P(x_0, O)$ van alle a met $ax_0 \in O$ open in A, en alle aldus verkrijgbare $P(a, O)$ vormen een basis voor de open verzamelingen van A.

Inderdaad: liggen in elke omgeving van a bijna alle a_n, dan betekent dit: uit $ax_0 \in O$ volgt $a_n x_0 \in O$ (bijna alle n): dus $\lim a_n x_0 = ax$. En omgekeerd.

A vervult axioma II 2. Want gegeven $a_1 \neq a_2$, dan is er een x_0, zodat $a_1 x_0 \neq a_2 x_0$, dus zijn er omgevingen O_i van a_0 met $O_1 \cap O_2 = \square$. Maar dan zijn $P(x_0, O_i)$ vreemde omgevingen van a_1 en a_2.

A vervult machtigheidsaxioma 2. Want we kunnen ons bij de O beperken tot een aftelbare basis van Ω, en X is ook aftelbaar.

A is compact. Want zij V een oneindige deelverzameling van A;

x_i doorloopt X. Nu bezit ax_1 (in de compacte Ω) voor $a\varepsilon V$ een verdichtingspunt, dus is er een deelrij van V, a'_n zodat

$$\lim a'_n x_1 \text{ bestaat.}$$

Uit a'_n trekke men een deelrij a''_n, zodat

$$\lim a''_n x_2 \text{ bestaat,}$$

enz.:

$$\lim a_n^{(p)} x_p \text{ bestaat.}$$

Dan bestaat ook

$$\lim a_n^{(n)} x_i$$

voor alle i, dus $\lim a_n^n$ bestaat en is verdichtingspunt van V.

Een karakter a van een m-cyclische groep $(0, x, 2x, \ldots (m-1)x)$ is bepaald, als ik zijn waarde voor x ken. Wegens $\underbrace{x + \ldots + x}_{m\text{-maal}} = 0$ is $ax + \ldots + ax = 0$, dus $ax = \frac{p}{m} \bmod 1$ (p geheel). De karaktergroep is dus de m-cyclische groep $(0, \frac{1}{m}, \ldots \frac{m-1}{m})$.

Een karakter a van een ∞-cyclische groep $(\ldots, -2x, -x, 0, x, 2x, \ldots)$ is door ax bepaald, dat een willekeurig element van Ω kan zijn. De karaktergroep is homeomorf met Ω.

We beschouwen een directe som X+Y. Is a een karakter van X en b één van Y, dan is er een karakter c van X+Y die op X+0 met a en op 0+Y met b overeenstemt, dus

$$c(x+y) = ax + by.$$

Is omgekeerd een karakter c van X+Y gegeven, dan worden hierdoor karakters a en b bepaald, die resp. op X en Y met c overeenstemmen. Ga na, dat de karaktergroep van X+Y topologisch isomorf is met de directe som van die van X en van Y !

Aangezien een eindige commutatieve groep directe som van cyclische groepen is, is hij isomorf met zijn karaktergroep.

Elke commutatieve groep met eindig veel voortbrengenden is directe som van cyclische groepen. Hierdoor beheersen we de karaktergroepen van alle groepen met eindig veel voortbrengenden.

6. De (continue) karakters x van een compacte commutatieve groep A vormen weer een groep X, die we echter niet topologiseren. We duiden het karakter x, door het functieteken x <u>achter</u> het argument $a(\varepsilon A)$ te plaatsen, aan. x+y is gedefinieerd door

$$a(x+y) = ax + ay.$$

De karaktergroepen van compacte commutatieve groepen zullen we α-groepen noemen; ze zijn aftelbaar (maar dit bewijzen we hier niet).

Toon weer aan, dat de karaktergroep van een directe som isomorf met de directe som van de karaktergroepen is !

Door

$$ax = ma \quad (m \text{ geheel})$$

is een (continu) karakter van $A = \Omega$ bepaald. We beweren, dat dit alle zijn.

Gegeven een α-omgeving V_α van 0 in Ω met $\alpha \leqq \frac{1}{3}$, dan bezit de vergelijking $2\xi = \eta$ in V precies één oplossing, die we $\frac{1}{2}\eta$ noemen (d.w.z. $\eta \varepsilon V$ gegeven, ξ gevraagd). We definiëren dan inductief $2^{-(n+1)}\eta = \frac{1}{2}2^{-n}\eta$.

Zij x een karakter van $A = \Omega$. Wegens zijn continuïteit is er een omgeving U van 0 in A met $Ux \subset V_{\frac{1}{3}}$ en $U \subset V_{\frac{1}{3}}$. Zij $a_0 \neq 0$, $a_0 \varepsilon U$; dus ook $\frac{1}{2}a_0 \varepsilon U$. De waarde van x in $\frac{1}{2}a_0$ moet voldoen aan de vergelijking $2((\frac{1}{2}a_0)x) = a_0x$ en liggen in U, is dus eenduidig bepaald door $(\frac{1}{2}a_0)x = \frac{1}{2}(a_0x)$. Inductief volgt hieruit, dat (voor alle natuurlijke n) $(2^{-n}a_0)x$ eenduidig bepaald is door a_0x. Maar dan is ook $(p2^{-n}a_0)x$ eenduidig bepaald a_0x (p geheel). De puntverzameling van de $p2^{-n}a_0$ vormt een oneindige ondergroep van A, is dus overal dicht in A en derhalve is x in 't geheel eenduidig bepaald door zijn waarde in a_0. We kiezen $a_0 = \frac{1}{s}$ (εU, s geheel). Wegens $sa_0 = 0$ is $s(a_0x) = 0$, dus $a_0x = \frac{m}{s}$ (m geheel), dus $a_0x = ma_0$. Het karakter x stemt dus in a_0 overeen met het karakter

$$ax = ma,$$

is er dus in 't geheel mee identiek.

7. Gaan we van X uit en vormen we de karaktergroep A, dan kan elk $x \varepsilon X$ weer als karakter op A worden opgevat. Preciezer: X verschijnt homomorf afgebeeld in de karaktergroep van de karaktergroep van X. Deze afbeelding heet ζ. Is ζ een isomorfisme op?

Beginnen we met A, dan krijgen we een continu homomorfisme van A in de karaktergroep der karaktergroep van A, ook weer ζ genaamd. Is ζ een isomorfisme op?

8. Een homomorfisme $fX \subset Y$ induceert een continu homomorfisme van B, de karaktergroep van Y, in A, die van X, $Bf \subset A$ aangeduid, n.l.

$$(bf)x = b(fx) \qquad (\text{voor alle } x \varepsilon X).$$

Een continu homomorfisme $Bf = A$ induceert een homomorfisme van X (karaktergroep van A) in Y (die van B), $fX \subset Y$, aangeduid:

$$b(fx) = (bf)x \qquad (\text{alle } b \varepsilon B).$$

9. Stelling: Een G_n-ale rij X^n induceert voor de bijbehorende karaktergroepen A_n een G_n-adische rij (afbeeldingen $f_n^mX^n \subset X^m$, $A_nf_n^m \subset A_n$, $m > n$). Is $\lim X^n = X$ en $\lim A_n = A^*$, dan is A_* topologisch isomorf met de karaktergroep A van X.

Bewijs: $X_n \to X$ induceert een continu homomorfisme $A_n \leftarrow A$ voor alle n, dus in de limiet een continu homomorfisme $A^* \leftarrow A$, dat als volgt nader is gedefinieerd: Is

$$x = (x^m \to x^{m+1} \to \dots)$$

en $a \in A$, dan is de bijbehorende

$$a^* = (a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow \dots)$$

met $$a_n x^n = ax \qquad \text{(bijna alle n).}$$

Wegens $a_n x^n = a_m x^m = (a_m f_n^m) x^n$, dus $a_n = a_m f_n^m$ is dan werkelijk een afbeeldingsrij. Dit homomorfisme is een isomorfisme. Want is voor zekere a^*

$$a = 0 \text{ , dan is } a_n x^n = 0 \text{ , } a_n y^n = 0 \text{ , } a_n = 0$$

dus $$a^* = 0.$$

Het is een afbeelding op, want gegeven een

$$a^* = (a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow \dots)$$

dan is $a_n x^n$ onafhankelijk van n, definieert (bij variabele x) dus een karakter a van $\bigcup f_n y^n = X$.

De afbeelding is wegens de compactheid van A ook in de omgekeerde richting continu, dus een topologisch isomorfisme.

10. Stelling: Een G_n-adische rij A_n induceert voor de bijbehorende karaktergroepen X^n een G_n-ale rij. Is $\lim A_n = A$ en $\lim X^n = X^*$, dan is X^* isomorf met de karaktergroep van A.

Bewijs: $A_n \xleftarrow{f_n} A$ induceert een homomorfisme $X^n \to X$, dus in de limiet: $X^* \to X$. Nadere definitie: Aan

$$x^* = (x^m \to x^{m+1} \to \dots)$$

wordt toegevoegd de $x \in X$ met

$$ax = (af_m)x^m \quad (= (af^m f_m^n)x^m = (af^m) f_m^n x^m = (af_n)x^n \text{ , dus onafhankelijk van m).}$$

Zij $x = 0$; we willen aantonen: $x^* = 0$. Uit $x = 0$ volgt $(af_m)x^m = 0$, dus $(Af_m)x^m = 0$. Nu is

$$Af_m = \bigcap_n A_n f_m^n$$

dus wegens de compactheid

$$A_n f_m^n \subset U \qquad \text{(bijna alle n)}$$

waar U een gegeven omgeving van Af_m is. Nu is $(Af_m)x^m = 0$, dus

$$(A_n f_m^n) x^m$$

een ondergroep van Ω met diameter $< \frac{1}{3}$ indien maar U voldoende klein (dus n voldoende groot) is. Zulk een ondergroep is noodzakelijk $= (0)$, dus

$$(A_n f_m^n) x^m = 0 \qquad \text{(bijna alle n),}$$

dus $$A_n (f_m^n x^m) = 0$$

dus $$x^n = 0,$$

dus $$x = 0.$$

We beginnen nu met een $x \varepsilon X$ en zoeken een

$$x^* = (x^m, x^{m+1}, \dots),$$

zodat $\qquad ax = (af_n)x^n \qquad$ (alle $a \varepsilon A$).

De kern H_n van $A_n \leftarrow A$ is (als origineelverzameling van 0) willekeurig klein voor bijna alle n, dus is $H_m x$ een willekeurig kleine ondergroep van Ω, dus $= (0)$ voor zekere m.

$$(a + H_m)x$$

is dus een eenwaardige functie op de verzameling van de $a + H_n$, dus op de factorgroep $A|H_m \cong A_m$. Als zodanig noemen we hem x^m, dus

$$ax = (af_m)x^m.$$

We stellen nu $x^n = f_m^n x^m$, dus

$$ax = (af_n f_m^n)x^m = (af_n)f_m^n x^m = (af_n)x^n$$

voor alle $n \geq m$, hetgeen bewezen moest worden.

11. Dualiteitsstelling: X is isomorf afgebeeld op de karaktergroep van de karaktergroep van een X. (zie 7.)

Bewijs: De dualiteitsstelling is duidelijk voor (eindige of oneindige) cyclische X. - Gegeven een X en Y waarvoor de stelling juist is en zij Z de directe som van X en Y. De bijbehorende karaktergroepen heten A, B, C. Is $c \varepsilon C$, dan is c op $X + 0$ bekeken wezenlijk een karakter $a \varepsilon A$, en op $0 + Y$ bekeken een karakter $b \varepsilon B$. Nu stemt $a + b$ met c overeen op $0 + Y$ en op $X + 0$, dus op $X + Y$. Dus $c = a+b$. Verder is elke $a + b$ een karakter van Z. Dus C = directe som van A en B. (Met inbegrip van de topologie - ga na !) Geheel analoog: karaktergroep van $A + B$ = directe som van X en Y.

De dualiteitsstelling geldt derhalve voor alle X met eindig veel voortbrengenden (directe sommen van eindig veel cyclische groepen).

Elke aftelbare groep X met elementen $x_1, x_2, \dots$ kan worden opgevat als G_n-ale limiet van X^n (voortgebracht door $x_1, \dots, x_n$) met de identieke afbeeldingen als f_n^{n+1}. Naar 9-10 geldt de stelling ook voor G_n-ale limieten van groepen, waarvoor ze reeds geldt.

12. Dualiteitsstelling: A is topologisch isomorf afgebeeld op de karaktergroep van zijn karaktergroep.

Deze stelling volgt uit 11 voor alle A, die als karaktergroepen van zekere X optreden. Alle A bezitten deze eigenschap, maar dit is een dieper liggend feit, dat we hier niet bewijzen; we hebben het trouwens niet nodig.

13. Zijn X en A karaktergroepen van elkaar en is Y (resp. B) ondergroep (resp. afgesloten ondergroep) van X resp. A, dan verstaan we onder annulator van Y (van B) de verzameling van alle a met $aY = 0$ (resp. x met $Bx = 0$).

De annulatoren zijn afgesloten ondergroepen van A (resp.X).

Is $Y \subset Y_1 \subset X$, dan staan de annulatoren in de omgekeerde betrekking.

Annulatorstelling: De annulator van de annulator van Y is Y zelve.

Bewijs: Zij Y_1 de annulator van de annulator van Y. Dan is zeker $Y \subset Y_1$. Zij $Y \not\subset Y_1$, dus b.v. $z \in Y_1 \setminus Y$. We definiëren een karakter a van Y als volgt: $aY = 0$, $az = \frac{1}{m_1}$ mod 1 indien m het kleinste positieve getal is met $mz \in Y_1$, en $az = \frac{1}{2}$ mod 1, indien zo'n getal niet bestaat a is hierdoor gedefinieerd op de door Y en z voortgebrachte groep $Y^{(1)}$, want elk element van $Y^{(1)}$ is eenduidig te schrijven als combinatie van een element Y en van z. We kiezen (zo mogelijk) een $z_1 \in Y_1 \setminus Y^{(1)}$ en stellen verder $az_1 = 0$; de door z en $Y^{(1)}$ voortgebrachte groep heet $Y^{(2)}$; a is op $Y^{(2)}$ zinvol. Zo gaan we inductief door en vinden dus een $a \in A$ met

$$aY = (0) \quad , \; aY_1 \neq (0) \; .$$

a behoort tot de annulator van Y, dus zou $aY_1 = (0)$ zijn. Deze strijdigheid toont aan, dat $Y_1 = Y$ moet zijn.

Een dergelijke stelling geldt voor afgesloten ondergroepen van A. Het bewijs blijft achterwege.

14. Stelling 1. Zij $X \xrightarrow{f} Y$ een homomorfisme. Voor de karaktergroepen geldt dan $A \xleftarrow{f} B$. Annulator van de kern van $X \to Y = Bf$.

Bewijs: Zij $x \in K$ (= kern), dus $fx = 0$. Dan $Bfx = 0$, dus $x \in$ annulator van Bf. En omgekeerd.

Andere formulering (zie 13): Kern van $(X \to Y)$ = annulator van Bf.

Eveneens geldt: Stelling 2. Zij $A \xleftarrow{f} B$ een homomorfisme. Voor de karaktergroepen is dus $X \xrightarrow{f} Y$. Annulator van kern van $(A \leftarrow B)$ = fX. De andere formulering gaat ook door, als einde 13 als juist wordt verondersteld.

15. Stelling 1: Is $X \to Y$ een isomorfisme, dan is $A \leftarrow B$ "op".

Bewijs: Wegens 14.1 is Bf = annulator van kern van $X \to Y$, dus Bf = annulator van (0) uit X, dus = A.

Stelling 2. Is $X \to Y$ op, dan is $A \leftarrow B$ iso.

Bewijs: Wegens 14.2: Annulator van kern van $(A \leftarrow B)$ = fX = Y. Zij $b \in$ kern van $A \leftarrow B$, dan is dus $bY = 0$, dus $b = 0$.

Analoge stellingen in de omgekeerde richting.

16. Uit 14-15 volgt

Stelling: Is $X \subset Y$, dan is de karaktergroep A van X isomorf met de factorgroep van B naar de annulator van X (t.a.v. Y).

Bewijs: Men beschouwe $X \subset Y$ als identieke afbeelding van X in Y en passe 14 en 15.1 toe.

<u>Stelling</u>: Is $Z \subset X$, dan is X/Z isomorf met de annulator van de karaktergroep C van Z (t.a.v. de karaktergroep A van X).

Bewijs: Men beschouwe $X \to X/Z$ en passe 14 en 15.2 toe.

XIV. Topologische dualiteit

We beschouwen in 't vervolg eindige simplexroosters Σ. We passen de dualiteit toe op de diverse groepen horende bij de rooster. Als coëfficiëntenbereik nemen we een compacte groep Γ. De karaktergroep van Γ heet Γ^*.

<u>1</u>. K_d cf Γ is weer een compacte groep en wel directe som van een aantal groepen Γ (evenveel als Σ d-simplexen heeft). De karaktergroep van K_d cf Γ is directe som van evenveel groepen Γ^*. We geven er een meer concrete voorstelling van:

Aan elk simplex t_d ("laagsimplex") laten we formeel een symbool t^d ("hoogsimplex") beantwoorden. Is $t_d = [a_0,\dots,a_d]$, dan duiden we t^d, waar geen misverstand mogelijk is, ook door $[a_0,\dots,a_d]$ aan. We stellen

$$t^d t_d = +1,\ -1,\ 0$$

naar gelang t^d en t_d aan dezelfde, tegengestelde of geheel verschillende simplexen beantwoorden. De $\Sigma \gamma^* t^d$ vormen dan de karaktergroep van K_d cf Γ, die we K^d cf Γ^* zullen noemen,

$$\Sigma \gamma^* t^d \, \Sigma \gamma t_d = \Sigma \gamma^* \gamma \quad t^d t_d .$$

<u>2</u>. $K_d \xrightarrow{\partial} K_{d-1}$ induceert een homomorfisme $K^d \xleftarrow{\partial} K^{d-1}$, waarbij

$$(t^{d-1} \partial) t_d = t^{d-1} (\partial t_d)$$

moet zijn. D.w.z. t^d treedt dan en slechts dan in $t^{d-1} \partial$ met de coëfficiënt +1 op, indien in de bijbehorende t_d de bijbehorende t_{d-1} met deze coëfficiënt optreedt. Dus

$$[a_0,\dots,a_e] \partial = \Sigma [c, a_0,\dots,a_e].$$

$t^e \partial$ is zo iets als de "franje" van t^e.

<u>3</u>. Deze rechter-∂ geeft aanleiding tot nieuwe homologiebegrippen, ook "<u>cohomologie</u>" genaamd.

$$J^d = \text{kern van } (K^{d+1} \leftarrow K^d)$$

is de groep der <u>d-co-cyclussen</u>,

$$H^d = K^{d-1} \partial$$

die der <u>d-co-zelfkanten</u>,

$$G^d = J^d / H^d$$

de <u>d-co-homologiegroep</u>.

4. $k^dH_d = 0$ dan en slechts dan als $k^d \mathfrak{z} K_{d+1} = 0$, dus als $k^d \mathfrak{z} = 0$, dus als $k^d \varepsilon J^d$. Dus

Annulator van H_d (in K^d) $= J^d$.

Evenzo: Annulator van H^d (in K_d) $= J_d$.

Dus: H_d en J^d annulatoren van elkander; evenzo H^d en J_d.
J_d is dus op te vatten als karaktergroep van K_d/H_d; evenzo J_d als karaktergroep van K^d/H^d.

Hierbij is H^d de annulator van J_d/H_d in K_d/H_d; resp. H_d die van J^d/H^d in K^d/H^d.

Dus zijn G_d en G^d karaktergroepen van elkander.

De kennis van de cohomologiegroepen levert dus (voorlopig) niets nieuws.

5. Zij f simpliciale afbeelding van rooster Σ in rooster Σ'; simplexen t resp. u. $K_d(\Sigma) \xrightarrow{f} K_d(\Sigma')$ induceert $K^d(\Sigma) \xleftarrow{f} K^d(\Sigma')$, waarbij

$$(u^d f)t_d = u^d(ft_d)$$

moet zijn. Dus t^d treedt in $u^d f$ dan en slechts dan met de coëfficiënt ± 1 op, als voor de bijbehorende t_d en u_d geldt $ft_d = u_d$. $u^d f$ bestaat dus uit de f-originelen van u^d.

Zij speciaal Σ' deelrooster van Σ en f de identieke afbeelding. $k^d f$ is dan de doorsnee van k^d met Σ'. Let wel ! Is j_d cyclus in Σ', dan is het ook cyclus in Σ, maar voor een cocyclus j^d is zo iets niet waar. Hier geldt: Is j^d cocyclus in Σ, dan is zijn doorsnee met Σ' cocyclus in Σ !

6. Voor compacte ruimten R kan men de co-begrippen door G_n-ale limiet-overgang definiëren. $G_d(R)$ is namelijk op de ene of andere wijze als G_n-adische limiet van de G-s van eindige roosters gedefinieerd; deze G_n-adische rij induceert een G_n-ale voor de groepen G^d.

7. We beschouwen een concreet simplex $T(0,\ldots,r)$ en zijn barycentrische onderverdeling $\widetilde{T}$. We definiëren de duaalster van een ondersimplex $[0,\ldots,i]$ binnen $[0,\ldots,r]$:

$$\vartheta[0,\ldots,i] = \sum_{(j)} \mathrm{sgn}(0\ldots i j_1 \ldots j_p \ldots j_{r-i}) .$$
$$[0\ldots i, 0\ldots i j_1, \ldots, 0\ldots i j_1 \ldots j_p, \ldots, 0 \ldots i j_1 \ldots j_p \ldots j_{r-1}] ,$$

waar de som loopt over alle permutaties $j_1 \ldots j_{r-1}$ van $i+1 \ldots r$.
$|\vartheta[0,\ldots,i]|$ is dus de vereniging van de simplexen van $\widetilde{T}$, die met het zwaartepunt van $[0\ldots i]$ beginnen.

Zij T_j het ondersimplex van T, dat door weglaten van het hoekpunt j ontstaat. De duaaloperator genomen in T_j (als zelfkantsimplex van T georiënteerd) heet ϑ_j.

ϑ (resp. ϑ_j) wordt in heel $K_i^*(T)$ (resp. $K_i^*(T_j)$) als een homomorfisme voortgezet, dus er wordt distributief mee gerekend.

$$\partial\vartheta[0,\dots i] = \sum_{(j)} \operatorname{sgn}(0,\dots i, j_1\dots j_p\dots j_{r-1})\Big([0\dots i j_1,\dots] + \sum_{p=1}^{r-i-1}(-1)^p$$

$$[0\dots i,\dots \widehat{0\dots i j_1\dots j_p},\dots, 0\dots i j_1\dots j_p\dots j_{r-1}] + (-1)^{r-i}$$

$$[0\dots i,\dots, 0\dots i j_1\dots j_{r-i-1}]\Big) \ .$$

De middelste summanden vervallen, omdat

$$[0\dots i,\dots, 0\dots i j_1\dots j_{p-1}.\widehat{0\dots i j_1\dots j_{p-1} j_p}, 0\dots i j_1\dots j_{p-1} j_p j_{p+1},\dots]$$

$$= [0\dots i,\dots, 0\dots i j_1\dots j_{p-1}, \widehat{0\dots i j_1\dots j_{p-1} j_{p+1}}, 0\dots i j_1\dots j_{p-1} j_{p+1} j_p,\dots]$$

en beide vormen met tegengesteld teken optreden. We vatten nu in het eerste deel de summanden met dezelfde $j_1 = j$ samen en in het derde die met dezelfde $j_{r-i} = ji$

$$\partial\vartheta[0,\dots i] = \sum_j \vartheta[0,\dots, ij] + \sum(-1)^{r-j}\vartheta_j[0,\dots i]$$

$$= (-1)^{i+1}\sum\vartheta[j,0,\dots,i] + \sum(-1)^{r-j}\vartheta_j[0,\dots i]$$

$$= (-1)^{i+1}\vartheta([0\dots i]\partial) + \sum(-1)^{r-j}\vartheta_j[0,\dots,i] \ .$$

We beschouwen nu een oriënteerbare r-pseudovariëteit P met de grondcyclus $\sum t_r$. We definiëren in P :

$$\vartheta t_i = \sum \vartheta^{(t_r)} t_i \ ,$$

waar ϑ^{t_r} de duaaloperator in t_r is en de som loopt over alle t_r, die t_i bevatten. Voor ketens wordt ϑ weer distributief gedefinieerd. Aangezien iedere t_{r-1} precies twee keer en met tegengesteld teken in de ∂t_r optreedt, vervallen in $\partial\vartheta[0\dots i]$ de termen $\vartheta j[0\dots i]$ en we krijgen

$$\partial(\vartheta k^i) = (-1)^{i+1}\vartheta(k^i\partial).$$

We vatten ϑ op als een homomorfisme van $K^i(P)$ in $K_{d-i}(\widetilde{P})$ (dezelfde coëfficiëntenbereiken). Dan is volgens de bewezen formule

$$\vartheta J^i(P) \subset J_{r-i}(\widetilde{P}) \ ,$$
$$\vartheta H^i(P) \subset H_{r-i}(\widetilde{P}) \ .$$

Dus kan ϑ worden opgevat als een homomorfisme

$$\vartheta G^i \subset G_{r-i} \ .$$

Uitgaande van een vaste hoekpunten-volgorde in P, hebben we een simpliciale afbeelding σ, die aan elk hoekpunt van $\widetilde{P}$ toevoegt het hoekpunt met het hoogste nummer van zijn dragersimplex. σ induceert het identieke automorfisme van de homologiegroepen. I.p.v. ϑ kunnen we evengoed gebruiken $\sigma\vartheta$, hetgeen het voordeel heeft, dat de onderverdeling meteen is geëlimineerd.

Schrijven we nu alle simplexen volgens de gegeven orde, dan wordt

$$\partial\vartheta[a_0,\dots,a_i] = \Sigma\pi([a_0\dots a_r])[a_i\dots a_r] \; ,$$

indien $\Sigma\pi(t_r)t_r$ de grondcyclus van P is.

8. $|\partial\vartheta t^i|$ wordt de <u>krans</u> $\mathfrak{P}(t^i)$ van $|t^i|$ genoemd. Daarnaast beschouwen de $|\partial\mathring{\sigma}\vartheta t^i| = \mathfrak{A}(t^i)$.

$\mathfrak{A}(t^i)$ is dus de vereniging van alle simplexen van P, die met $|t^i|$ een simplex vormen, maar geen hoekpunt van $|t^i|$ bevatten. $\mathfrak{P}(t^i)$ is voor $t^i = [a_0,\dots,a_i]$ de vereniging van alle $|[a_0\dots a_i b_1,\dots, a_0\dots a_i b_1\dots b_{d-i}]|$.

$\mathfrak{P}(t^i)$ en $\mathfrak{A}(t^i)$ zijn homeomorf. Want in een simplex $[0,1,\dots,d]$ hebben

$$0\dots i \quad , \quad 0\dots i\dots j \quad , \quad i\dots j$$

resp. de barycentrische coördinaten

$$\frac{1}{i+1}(1,1,\dots,\overset{i+1}{1},0\dots0 \;\; , \;\; \frac{1}{j+1}(1,1\dots\overset{j+1}{1},0\dots0), \;\; \frac{1}{j-1}(0,0,\dots,0,\overset{i+2}{1},1,\dots\overset{j+1}{1},0\dots0),$$

liggen dus op één rechte. Door projectie vanuit $a_0\dots a_i$ gaat dus $a_0\dots a_i b_1\dots b_2$ over in $b_1\dots b_1$ en $\mathfrak{P}(t^i)$ in de onderverdeling van $\mathfrak{A}(t^i)$.

$|\vartheta t^i|$ ontstaat uit $\mathfrak{P}t^i$ door alle verbindingssegmenten naar het zwaartepunt van $|t^i|$ te trekken. Omgekeerd is $\mathfrak{P}t^i$ de rand van $|\vartheta t^i|$.

Uit $|t^i| \subset |t^j|$ volgt $|\vartheta t^i| \supset |\vartheta t^j|$;

$$\vartheta(t^i) \cap \vartheta(t^j) = \vartheta(t^i \cup t^j).$$

9. In de topologie spelen een bijzondere rol de in het klein euclidische r-dim. ruimten, d.w.z. ruimten, waar ieder punt een omgeving bezit homeomorf met de r-dim. bol. Men noemt deze ruimten, indien ze nog samenhangend en separabel zijn, <u>variëteiten</u>. (Vaak stelt men nog de eis, dat ze in 't geheel homeomorf met polytopen zijn.)

We willen bijzonderheden van variëteiten bestuderen, maar hiervoor is het doelmatig, van een iets andere variëteitsdefinitie uit te gaan, de zogenaamde <u>homologie-variëteit</u>.

Een r-pseudovariëteit heet <u>r-homologie-variëteit</u>, indien alle $\mathfrak{A}(t^i)$ (dus ook alle $\mathfrak{P}(t^i)$) dezelfde homologiegroepen bezitten als de (r-i-1-sfeer (willekeurig coëfficiëntenbereik).

Vanzelf heeft dan iedere $|\vartheta(t^i)|$ dezelfde groepen als het r-simplex (of de r-bol).

<u>Dualiteitsstelling, richting Poincaré: In een homologie-variëteit is ϑ voor de homologiegroepen resp. cohomologiegroepen een isomorfisme op</u>.

Dus: de homologiegroepen van de dimensies i en r - i bepalen elkaar wederzijds; G^i en G_{r-i} zijn homeomorf, G_i en G_{r-i} zijn elkanders karaktergroepen (indien de coëfficiëntenbereiken in deze relatie staan).

Het bewijs loopt vrijwel woordelijk als dat in X 6. We moeten aantonen: 1. Iedere j_d is op homologie na te schrijven als een ϑj^{r-d}. 2. Is $\vartheta j^{r-d} = \partial k_{d+1}$, dan is het ook $= \partial \vartheta k^{r-d-1}$.

1. We mogen j_d als cyclus van $\Sigma^*(\tilde{P})$ veronderstellen. We redeneren inductief: Indien $|j_d| \subset \bigcup |\vartheta t^{r-i}|$ $(i > d)$, dan kunnen we een $j_d' \sim j_d$ vinden met $|j_d'| \subset \bigcup |\vartheta t^{r-i+1}|$. Hebben we tenslotte een $j_d'''' \sim j_d$ gevonden met $|j_d''''| \subset \bigcup |\vartheta t^{r-d}|$, dan tonen we aan, dat j_d'''' zelfs een lineaire combinatie van ϑt^{r-d} - s is.

Inductiestap: Voor een ϑt^{r-i} vormen we $k_d = j_d \cap |\vartheta t^{r-i}|$. ∂k_d moet in de rand van $|\vartheta t^{r-i}|$ liggen, dus in $\mathfrak{P}(t^{r-i})$. Deze polytoop heeft de homologiegroepen van de (i-1)-sfeer; $d-1 < i-1$, dus $\partial k_d = \partial k_d'$, met $|k_d'| \subset \mathfrak{P}(t^{r-i})$. We stellen $j_d' = j_d - k_d + k_d'$. Dan is $j_d' \sim j_d$, want $k_d' - k_d$ is een cyclus in $|\vartheta t^{r-i}|$ en ~ 0, omdat $|\vartheta t^{r-i}|$ de groepen van de simplex heeft. Nu bevat j_d' geen binnensimplexen meer van $|\vartheta t^{r-i}|$. Verdere bewerking in dezelfde geest leidt tot een cyclus, die uitsluitend in $\bigcup |\vartheta t^{r-i+1}|$ verloopt.

Slotstap: Zij $j_d \subset \bigcup |\vartheta t^{r-d}|$. We vormen weer $k_d = j_d \cap |\vartheta t^{r-d}|$ en $\partial k_d \subset \mathfrak{P}(t^{r-d})$. In deze polytoop hebben we de cyclus $\partial \vartheta t^{r-d}$, die zeker niet homoloog 0 is en waarin ieder simplex met coëfficiënt ± 1, 0 optreedt; bovendien moet de d-homologiegroep die van de d-sfeer zijn. Dus $\partial k_d = \alpha \partial \vartheta t^{r-d}$. Hieruit volgt, dat $k_d - \alpha \vartheta t^{r-1}$ een d-cyclus in $|\vartheta t^{r-d}|$ is, die ~ 0 moet zijn, maar door de afwezigheid van (d+1)-simplexen zelfs = 0 moet zijn. Dus $k_d = \alpha \vartheta t^{r-d}$. Dus $j_d = \Sigma j_d \cap |\vartheta(t^{r-d})| = \Sigma \alpha(t^{r-d}) \vartheta t^{r-d}$.

2. We hebben $\vartheta j^{r-d} = \partial k_{d+1}$, waarbij k_{d+1} een keten van $\Sigma^*(\tilde{P})$ is. We doen het weer inductief: Is $|k_{d+1}| \subset \bigcup \vartheta t^{r-i-1}$ $(i > d)$, dan kunnen we een k_{d+1}' met $|k_{d+1}'| \subset \bigcup \vartheta t^{r-i}$ vinden zodat $\partial k_{d+1}' = \partial k_{d+1}$. Hebben we tenslotte $|k_{d+1}''''| \subset \bigcup |\vartheta t^{r-d-1}|$, dan zal k_{d+1}'''' een lineaire combinatie van ϑt^{r-d-1} - s blijken te zijn.

Inductiestap: $\bar{k}_{d+1} = k_{d+1} \cap |\vartheta t^{r-i-1}|$. Aangezien $|\partial k_{d+1}| \subset \bigcup |\vartheta(t^{r-d})|$ is $|\partial \bar{k}_{d+1}| \subset$ rand van $|\vartheta t^{r-i-1}| = \mathfrak{P}(t^{r-i-1})$. Nu is $\partial \bar{k}_{d+1} = \partial \bar{\bar{k}}_{d+1}$ met $|\bar{\bar{k}}_{d+1}| \subset \mathfrak{P}(t^{r-i-1})$. Stellen we $k_{d+1}' = k_{d+1} + - \bar{k}_{d+1} + \bar{\bar{k}}_{d+1}$, dan is $\partial k_{d+1}' = \partial k_{d+1}$. Zo gaan we door met alle ϑt^{r-i-1}.

Slotstap: $\vartheta j^{r-d} = \mathfrak{z}\, k_{d+1}$, $|k_{d+1}| \subset \cup |\vartheta t^{r-d-1}|$, $\bar{k}_{d+1} \cap |\vartheta\, t^{r-i-1}|$, $|\mathfrak{z}\, \bar{k}_{d+1}| \subset \mathfrak{p}(t^{r-d-1})$, $\mathfrak{z}\, \bar{k}_{d+1} = \alpha\, \mathfrak{z}\, t^{r-d-1}$, $\bar{k}_{d+1} = \alpha\, \vartheta\, t^{r-d-1}$ enz.

10. Onze definitie van homologie-variëteit is onbevredigend, n.l. niet topologisch invariant. We stellen er een equivalente voor in plaats.

De vereniging van de simplexen, die het punt p bevatten, heet zijn (afgesloten) simpliciale omgeving.

Een oriënteerbare r-pseudovariëteit heet r-homologievariëteit *, als de rand van de simpliciale omgeving van elk punt dezelfde homologiegroepen als de (r-1)-sfeer bezit.

Is p binnenpunt van $|t^d|$, dan ontstaat de rand van zijn simpliciale omgeving door $|\mathfrak{z}\, t^d|$ te verbinden met $\breve{\mathfrak{R}}(t^d)$. Om "homologievariëteit = homologievariëteit *" in te zien, hoeven we alleen aan te tonen:

Is Q de verbindingspolytoop van de polytoop P met een sfeer S^{d-1}, dan is $G_{i+d}(Q)$ isomorf $G_i(P)$ voor $i > 0$, $G_i(Q) = 0$ voor $0 < i \leqq d$, $G_0(Q) = \Gamma$.

We hoeven dit ook alleen weer aan te tonen voor $d = 1$, omdat de verbinding met een S^{d-1} tot stand komt, door achtereenvolgens d keer met een S^0 te verbinden. Aangezien $i = 0$ triviaal is, veronderstellen we $i > 0$.

De S^0 bestaat uit twee punten n en z. Voor t_i uit $\Sigma^*(P)$ vormen we $\alpha t_i = [n, t_i] - [z, t_i]$ en zetten α distributief voort. (Merk op dat α de lege verzameling in $[n] - [z]$ afbeeldt, en dat dit àlleen voor $i > 0$ als nul telt !)

$$\mathfrak{z}\, \alpha k_i = \alpha\, \mathfrak{z}\, k_i \quad ,$$

dus brengt α een homomorfisme van $G_i(P)$ in $G_{i+1}(Q)$ voort. Is nu j_{i+1} in $\Sigma^*(Q)$ gegeven, dan kunnen we schrijven

$$j_{i+1} = [n, k_i] - [z, k_i'] + k_{i+1} \ ,$$

waar in k_{i+1} geen der hoekpunten n en z optreedt. Wegens $\mathfrak{z}\, j_{i+1} = 0$ is

$$\mathfrak{z}\, k_i = \mathfrak{z}\, k_i' = 0 \quad \text{en} \quad k_i - k_i' + \mathfrak{z}\, k_{i+1} = 0.$$

Verder

$$\mathfrak{z}\, [z, k_{i+1}] = k_{i+1} - [z, \mathfrak{z}\, k_{i+1}] = k_{i+1} - [z, k_i'] + [z, k_i],$$

dus
$$j_{i+1} \sim [n, k_i] - [z, k_i] = \alpha k_i .$$

α is dus zelfs een homomorfisme van $G_i(P)$ <u>op</u> $G_{i+1}(Q)$. Is nu $\alpha j_i \sim 0$, dan kunnen we schrijven

$$[n, j_i] - [z, j_i] = \mathfrak{z}\, ([n, k_{i+1}] - [z, k_{i+1}'] + k_{i+2}) \ ,$$

waaruit volgt

$$j_i = -\partial k_{i+1} = -\partial k'_{i+1} \quad ,$$

dus $j_i \sim 0$. $\varkappa$ is dus een isomorfisme op.

11. Vóór we tot de topologisch invariante definitie van homologievariëteit komen, definiëren we de "plaatselijke homologiegroepen rond een punt p". In een compacte ruimte R beschouwen we van p een dalende rij omgevingen U_n met $\bigcap \bar{U}_n = (p)$. Van de plaatselijk compacte ruimte $\bar{U}_n \setminus (p)$ beschouwen we de homologiegroepen. Krachtens de identieke afbeeldingen van $\bar{U}_{n+1} \setminus (p)$ in $\bar{U}_n \setminus (p)$ vormen die een G_n-adische rij. De limietgroepen ervan heten $G(R,p)$. Het is duidelijk, dat ze van de keuze der rij U_n niet afhangen.

Een afgesloten beperkte verzameling V van een euklidische ruimte heet sterachtig vanuit $p \in V$, indien V door vermenigvuldiging vanuit p met factoren $\leqq 1$, $\geqq 0$ in zichzelf overgaat.

Stelling: Bezit p in R een omgeving U met rand T, zo dat $\bar{U}$ (topologisch gesproken) sterachtig is, dan zijn de $G(R,p)$ dezelfden als de $G(T)$.

Bewijs: We stellen $U_1 = U$ en laten U_n uit T ontstaan door vermenigvuldiging met $\frac{1}{n}$. Is $n_1 \leqq n_2$, $m_1 \leqq m_2$, dan brengt de identieke afbeelding van $\bar{U}m_2 \setminus Un_1$ in $\bar{U}m_1 \setminus Un_2$ een isomorfisme van de bijbehorende groepen voort, omdat de grotere op de kleinere verzameling kan worden geretraheerd. In het schema

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bar{U}_1 \setminus U_1 & \subset & \bar{U}_1 \setminus U_2 & \subset & \bar{U}_1 \setminus U_3 & \subset & \bar{U}_1 \setminus U_4 & \subset & \cdots \\
 & & & & \cup & & \cup & & \\
 & & \bar{U}_2 \setminus U_2 & \subset & \bar{U}_2 \setminus U_3 & \subset & \bar{U}_2 \setminus U_4 & \subset & \cdots \\
 & & & & \cup & & \cup & & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

brengen dus alle inclusies isomorfismen op voor de bijbehorende groepen voort. De limieten der horizontale rijen zijn, wat de groepen aangaat, de $G(\bar{U}_n \setminus (p))$, die dus ook onderling en met $G(\bar{U}_1 \setminus U_1) = G(T)$ isomorf zijn. Voor hun limiet, $G(R,p)$ geldt dan hetzelfde.

We passen deze stelling toe op een r-polytoop; de simpliciale omgeving van elk punt is sterachtig. T is de rand ervan.

We kunnen derhalve de definitie van homologie-variëteit * vervangen door de equivalente:

Een r-homologie-variëteit ** is een oriënteerbare r-pseudovariëteit met als plaatselijke homologiegroepen rond elk punt die van de (r-1)-sfeer.

De eis, dat we met een oriënteerbare pseudovariëteit P hebben te maken, kan nu worden vervangen door de zwakkere: P is een samenhangende r-polytoop met $G_r(P)$ cf (mod 0) = (mod 0). Want XI 1,1 volgt nu uit het feit, dat de krans van elk (r-1)-simplex een 0-sfeer moet zijn; XI 1,2 volgt uit de samenhang (men vorme een maximaal onderpolytoop P' van P, dat aan XI 1,2 voldoet; is nu |t| een maximaal simplex van $P \cap (\overline{P \setminus P'})$ dan bestaat $\mathfrak{K}(t)$ uit twee losse stukken en heeft dus een niet-triviale 0-de groep, zodat dim t $\geq$ r-1 zou zijn, in strijd met de maximaliteit van P'; maar nu zou $P \cap (\overline{P \setminus P'}) = \emptyset$ zijn, in strijd met de samenhang). De oriënteerbaarheid van P is vervangen door de eis van het bestaan van een r-cyclus mod 0.

In 't geheel blijkt dus onze definitie topologisch invariant te zijn, d.w.z. is van twee homeomorfe polytopen de één een r-homologievariëteit, dan is de ander het ook.

Het is ook duidelijk, dat de in het klein euklidische r-polytopen onder onze definitie vallen, want daar bezit elk punt omgevingen, die met de (r-1)-sfeer zelfs homeomorf zijn.

12. P zij een oriënteerbare r-pseudovariëteit. M zij een nietlege onderpolytoop van P. $\widetilde{P}$ zij de barycentrische onderverdeling van P. N zij de onderpolytoop van $\widetilde{P}$, bestaande uit die simplexen van $\widetilde{P}$, die geen punt van M bevatten.

Is $t \not\subset \Sigma^{*}(P)$, dan is voor elke t' met $t' \supset t$ ook $t' \not\subset \Sigma^{*}(P)$ en het zwaartepunt van $t' \notin P$, dus is dan $|\vartheta(t)| \subset \Sigma^{*}(N)$. Is k een keten, waarvan geen simplex in $\Sigma^{*}(P)$ ligt, dan is dus $|\vartheta(k)| \subset \Sigma^{*}(N)$.

We stellen

$$\tau = \mathfrak{z}\vartheta$$

en beschouwen dit speciaal voor de $k^i \varepsilon K^i(\Sigma^{*}(M))$, $i < r$. Zij $j^i \varepsilon J^i(\Sigma^{*}(M))$. We passen de formule

$$\mathfrak{z}\vartheta k^i = (-1)^{i+1}\vartheta(k^i\mathfrak{z}) \qquad (*)$$

van p. 66 toe en merken op, dat $j^i\mathfrak{z}$ geen simplex van M bevat. Dus is

$$|\tau j^i| \subset N.$$

Maar τj^i is zelfkant van ϑk^i, dus cyclus, dus

$$\tau j^i \quad \varepsilon \quad J_{r-i-1}(\Sigma^{*}(N)).$$

Is $j^i \; \varepsilon \; H^i(\Sigma^{*}(M))$, dus $j^i = k^{i-1}\mathfrak{z} \cap \Sigma^{*}(M)$, $k^{i-1} \varepsilon K^{i-1}(\Sigma^{*}(M))$, dan is $k^{i-1}\mathfrak{z} = j^i + k^i$ en $|\vartheta(k^i)| \subset \Sigma^{*}(N)$, dus $\tau(k^{i-1}\mathfrak{z}) = \tau j^i + \tau k^i$. Het linkerlid verdwijnt wegens (*), dus is τj^i een zelfkant, nl. van $-\vartheta k^i$. Dus

$$\tau H^i(\Sigma^{*}(M)) \subset H_{r-i-1}(\Sigma^{*}(N)).$$

τ induceert derhalve een homomorfisme

$$\tau G^{*i}(M) \subset G^{*}_{r-i-1}(N)$$

(bij overeenstemmende coëfficiënten bereiken).

13. τ zal onder zekere voorwaarden zelfs een isomorfe afbeelding op zijn. Hierbij is er echter een afwijking t.a.v. de G^0 en G.

Een 0-cyclus in enige simplexrooster kan alleen zelfkant zijn, als zijn coëfficientensom 0 is. Laten we alleen dergelijke cyclussen toe, dan krijgen we de "gereduceerde" 0-homologiegroep $\hat{G}_0$, die één voortbrengende minder bezit dan G_0. De annulator van $\hat{G}_0$ in G_0 wordt voortgebracht door de som van de 0-simplexen. Definieert men

$\hat{G}^o$ als factor groep van G^o naar die annulator, dan zijn $\hat{G}_o$ en $\hat{G}^o$ weer duaal en beide bezitten één voortbrengende minder dan G_o en G^o.

Stelling: Is P een r-homologievariëteit met dezelfde homologiegroepen als de r-sfeer, dan is τ in

$$\tau G^{*i}(M) \subset G^{*}_{r-i-1}(N)$$

een isomorfisme op. Voor $i = o$ resp. $i = r-1$ moet men hierbij met de gereduceerde homologiegroepen rekenen.

Bewijs: Een gegeven j_{r-i-1} $(\Sigma^*(N))$ mogen we op homologie (in $\Sigma^*(N)$) na in de vorm ϑk^{i+1} aannemen, waar k^{i+1} geen simplexen van M bevat; het bewijs in 9 laat nl. zien, dat men een gegeven cyclus vervangen kan door één opgebouwd uit duaalsterren ϑt^{i+1} en aangezien ieder stuk vervangen wordt door één dat in dezelfde dragerduaalster ligt, raakt men hierbij niet buiten $\Sigma^*(N)$. Nu is $0 = \mathfrak{z}\, j_{r-i-1} = \mathfrak{z}\vartheta k^{i+1} = \pm\vartheta k^{i+1}\mathfrak{z}$, dus $k^{i+1}\mathfrak{z} = 0$, dus $k^{i+1} \varepsilon J^{i+1}(\Sigma^*(P))$.

Nu is voor $i+1 < r$: $G^{i+1}(\Sigma^*(P) = (0)$. Dus $k^{i+1} = k^i\mathfrak{z}$, dus

$$j_{r-i-1} = \vartheta(k^i\mathfrak{z}) = \pm\mathfrak{z}\vartheta k^i.$$

$k^i\mathfrak{z}$ bevat geen simplexen van M, dus is $j^i = k^i \cap \Sigma^*(M)$ een cyclus van $\Sigma^*(M)$; $|\vartheta(j^i - k^i)| \subset \Sigma^*(N)$

$$j_{r-i-1} = \pm\tau j^i \mp \mathfrak{z}\vartheta(j^i - k^i)$$

dus in $\Sigma^*(N) \sim \pm\tau j^i$. Dus is τ van de G^* een afbeelding op.

In het geval $i + 1 = r$ wordt $k^{i+1} = k^i\mathfrak{z}$ dan en slechts dan mogelijk als de coëfficiëntensom van k^{i+1} verdwijnt, dus als de coëfficiëntensom van de gegeven $j_{r-i-1} = j_o$ verdwijnt. τ beeldt dan dus af op de ondergroep van $G_o(N)$, die de 0-cyclussen met coëfficiëntensom 0 representeert, dus op $\hat{G}_o$ (N).

Is voor een $j^i \varepsilon J^i(M)$, $\tau j^i \sim 0$ in N, dan mogen we veronderstellen, dat τj^i zelfkant is van een uit duaalsterren opgebouwde keten ϑk^i met een k^i, die geen simplexen van M bevat, dus

$$\mathfrak{z}\tau j^i = \mathfrak{z}\vartheta k^i$$

Dan is
$$\vartheta((j^i - k^i)\mathfrak{z}) = 0,$$
dus
$$(j^i - k^i)\mathfrak{z} = 0,$$
dus wegens $G^i(\Sigma^*(P)) = 0$ voor $0 < i < r$:

$$j^i - k^i = k^{i-1}\mathfrak{z}.$$

Neemt men hier de doorsnee met $\Sigma^*(M)$, dan blijkt

$$j^i \sim 0 \text{ in } \Sigma^*(M).$$

Dus is τ voor de G^* een isomorfisme.

In het geval $i = 0$ bezit $G^i(\Sigma^*(P)$ één voortbrengende, te weten Σt^o (over alle hoekpunten van $\Sigma^*(P)$). Hiervan is $j^o - k^o$ dus een veelvoud, dus $j^o \equiv$ veelvoud van som over alle hoekpunten van $\Sigma^*(M)$. Omgekeerd, bezit j^o deze vorm, dan bevat $j^o - \Sigma t^o$ geen hoekpunten van M, dus $\vartheta(j^o - \Sigma t^o)$ geheel in $\Sigma^*(N)$, dus $\tau j^o = \mathfrak{z}\vartheta j^o = \mathfrak{z}\vartheta(j^o - \Sigma t^o)$ wegens $(\Sigma t^o)\mathfrak{z} = 0$, dus $\tau j^o \sim 0$ in N. Derhalve is τ een homomorfisme, die de voortbrengende Σt^o (over $\Sigma^*(M)$) annuleert. Op $\hat{G}^o$ is τ dus een isomorfisme.

14. Dualiteitsstelling - richting Jordan-Brouwer-Alexander. Zij P een r-homologievariëteit met dezelfde homologiegroepen als de r-sfeer. Zij M een niet lege afgesloten deelverzameling van P. Dan is $G^1(M)$ isomorf met $G_{r-i-1}(P\setminus M)$; ipv. G^0 en G_0 neme men hierbij de gereduceerde groepen $\hat{G}^0$ en $\hat{G}_0$.

Deze stelling neemt de vorm van een dualiteit aan, wanneer men $G^i(M)$ door $G_i(M)$ (duaal coëfficientenbereik) vervangt.

Speciaal geldt deze stelling voor het geval dat P de r-sfeer is. De homologie-eigenschappen van $P\setminus M$ zijn door die van M bepaald, onverschillig hoe M in P ingebed is.

Is P de 2-sfeer en M een enkelvoudige gesloten kromme, d.w.z. het topologische beeld van de 1-sfeer, dan stelt de uitspraak voor i = 1 de stelling van Jordan voor: een enkelvoudige gesloten kromme verdeelt de sfeer (of het vlak) in twee delen. Want $\hat{G}_0(P\setminus M)$ moet dan 1 voortbrengende bezitten, dus $G_0(P\setminus M)$ twee voortbrengenden, dus $P\setminus M$ twee componenten.-Een enkelvoudige boog M (topologisch beeld van het lijnstuk) verdeelt de 2-sfeer P niet. Want $\hat{G}_0\ (P\setminus M) = (e)$, dus $G_0(P\setminus M)$ bezit één voortbrengende en $P\setminus M$ één component.

Algemener (Brouwer): Het topologische beeld van een oriënteerbare (r-1)-pseudovariëteit verdeelt de r-sfeer in twee delen.

Het aantal delen, waarin een afgesloten verzameling M een sfeer verdeelt, is een topologische invariant van M.

Het complement van een enkelvoudige gesloten krommen in de 3-sfeer bezit een 1-homologiegroep van één voortbrengende.

15. Om 14 te bewijzen, vormen we successievelijke onderverdelingen P_n van P met tot nul naderende maas. M_n bestaat uit die simplexen van P_n, die punten van M bevatten. Dan is $\cap M_n = M$. Voor de bijbehorende N_n geldt: $\cup N_n = P\setminus M$. $G^i(M)$ is de G_n-ale limiet van de $G^i(M_n)$ en $G_{r-i-1}(P\setminus M)$ is die van de $G_{r-i-1}(N_n)$ (telkens door de identieke afbeeldingen geïnduceerd). Om de isomorfie van de limieten in te zien, moeten we aantonen:

Zijn j^i_n en j^i_{n+1} cocyclussen van $\Sigma^*(M_n)$ en $\Sigma^*(M_{n+1})$, die in het verband $j^i_{n+1}\mathfrak{w} = j^i_n$ staan, waar $\mathfrak{w}$ de verfijning (als afbeelding van $K_i(\Sigma^*(M_n))$ in de $K_i(\Sigma^*(M_{n+1}))$) is, dan zijn τj^i_n en τj^i_{n+1} (als convergente cyclussen van N_n en N_{n+1} opgevat) homoloog in N_{n+1}.

I.p.v. $\mathfrak{w}$ gebruikt men als relatie tussen $\Sigma^*(P_n)$ en $\Sigma^*(P_{n+1})$ beter een simpliciale afbeelding φ, die elk punt in zijn dragersimplex (uit $\Sigma^*(P_n)$) verplaatst; we weten dat $\varphi\,\mathfrak{w}$ de identieke afbeelding van de homologie groepen induceert. Tussen de j^i veronderstellen we dan het verband $j^i_n\,\varphi = j^i_{n+1}$.

We veronderstellen verder, dat de hoekpunten van zowel $\Sigma^*(P_n)$ als ook $\Sigma^*(P_{n+1})$ in een vaste volgorde zijn gegeven, en dat hierbij die van $\Sigma^*(M_n)$ evenals voor $\Sigma^*(M_{n+1})$ aan de overige voorafgaan, verder dat φ de orde behoudt ($a \leqq a'$ impliceert $\varphi a \leqq \varphi a'$).

$\mathscr{b}_n$ resp. $\mathscr{b}_{n+1}$ zijn de simpliciale afbeeldingen van $\Sigma^*(\tilde{P}_n)$ in $\Sigma^*(P_n)$ resp. $\Sigma^*(\tilde{P}_{n+1})$ in $\Sigma^*(P_{n+1})$, die aan elk hoekpunt het hoogstgenummerde hoekpunt van zijn dragersimplex toevoegen. $\mathscr{b}_n N_n$ resp. $\mathscr{b}_{n+1} N_{n+1}$ bevatten dan geen punten van M_n resp. M_{n+1}.

I.p.v. de homologie van τj^i_n en τj^i_{n+1} kunnen we dan die van $\mathscr{b}_n\ \tau j^i_n$ en $\mathscr{b}_{n+1}\ \tau j^i_{n+1}$ (in N_{n+1}) bewijzen.

Volgens p. 67 boven is

$$\mathscr{b}_n \vartheta [a_o \dots a_i] = \Sigma\pi\ ([a_o \dots a_r])[a_i \dots a_r],$$

waar alle simplexen volgens de vaste volgorde geschreven zijn en $\Sigma\pi([a_o \dots a_r])[a_o \dots a_r]$ de grondcyclus van P_n is.

$$[a_o \dots a_i]\ \varphi = \Sigma\ [b_o \dots b_i]$$

(som over alle geordende simplexen met $\varphi b_j = a_j$).

$$\varphi \mathscr{b}_{n+1} \vartheta([a_o \dots a_i]\ \varphi\ ) = \varphi \Sigma\pi([b_o \dots b_r])[b_i \dots b_r]$$
$$= \Sigma\pi\ ([b_o \dots b_r])[a_i \dots a_r],$$

waar de som loopt over alle geordende simplexen $[b_o \dots b_r]$ met $\varphi b_j = a_j$ ($j = o \dots i$) en $\Sigma\pi\ ([b_o \dots b_r])$ de grondcyclus van P_{n+1} is, die door $\mathscr{w}$ uit die van P_n ontstaat; $\varphi b_j = a_j$ ook voor $j > i$. Nu is φ voor de homologiegroepen van $P_{n+1} \to P_n$ de identiteit, dus van de graad 1, dus

$$\Sigma\pi([b_o \dots b_n]) = 1,$$

waar de som loopt over alle $[b_o \dots b_n]$ met $\varphi\ [b_o \dots b_n]$ = vaste $[a_o \dots a_r]$

Derhalve is voor $t^i = [a_o \dots a_i]$

$$\varphi \mathscr{b}_{n+1} \vartheta(t^i \varphi) = \mathscr{b}_n \vartheta t^i.$$

Past men hierop $\mathfrak{z}$ toe en vervangt men t^i door j^i_{n+1}, dan krijgt men

$$\varphi \mathscr{b}_{n+1}\ \tau j^i_{n+1} = \mathscr{b}_n\ \tau j^i_n\ ,$$

waaruit de homologie van $\mathscr{b}_{n+1}\ \tau j^i_{n+1}$ en $\mathscr{b}_n \tau j^i_n$ (in N_{n+1}) volgt.

16. Opmerking. De dualiteitsmethoden in de topologie zijn afkomstig van Pontrjagin.

XV. Afbeeldingsklassen.

1. We beschouwen de continue afbeeldingen van een oriënteerbare r-pseudovarieteit P met grondcyclus Σt_r in de r-sfeer S_r (zie XI 2) en bewijzen de

Stelling: De afbeeldingsklasse is volledig bepaald door de afbeeldingsgraad.

We kunnen ons hierbij beperken tot afbeeldingen, die simpliciaal zijn t.a.v. een onderverdeling van P (zie X 14). De simplexen van P worden t, die van S_r worden u genaamd.

2. We mogen veronderstellen, dat de "zuidpool" van S_r inwendig van zeker simplex u_r van S_r is. S_r wordt als eenheidssfeer in de (n+1)-dim.euklidische ruimte gedacht. Bij elk punt $p \varepsilon S_r$, $p \neq$ een der polen, hoort een halve grote cirkel, die de polen verbindt (meridiaan), en waar p op ligt; deze snijdt de evenaar - S_{r-1} in een punt $\vartheta(p)$. De sferische afstand tussen p en de zuidpool heet $\eta(p)$. Door $\vartheta(p)$, $\eta(p)$ is p bepaald; voor de polen geldt: $\eta(p) = 0, \pi$.

$\zeta(S_r) \subset S_r$ heet een meridiaan-afbeelding als $\vartheta\zeta(p) = \vartheta(p)$ en $\eta\zeta(p) = \min(\pi, \alpha(\vartheta(p)) \cdot \eta(p))$ is met een continue $\alpha \geqq 1$. ζ beeldt dus elke meridiaan op zichzelf af en wel zekere meridiaanboog lineair in de hele meridiaan en de rest in de noordpool. ζ behoort tot de klasse van de identiteit, zoals men ziet door α te vervangen door $\alpha_t = 1 + t(\alpha - 1)$ en t van 0 naar 1 te laten lopen.

ζ zij een vaste meridiaan-afbeelding, die $S_r \setminus u_r$ op de noordpool afbeeldt.

Bij elke afb. f hoort $\bar{f} = \zeta f$, die elke t_r of op heel S_r of op de noordpool afbeeldt. Beide horen tot dezelfde klasse. We kunnen ons tot afbeeldingen $\bar{f}$ beperken.

We kunnen afbeeldingen f toelaten, die in iedere t_r afzonderlijk simpliciaal zijn (zonder aansluiting op de randen); $\bar{f}$ is dan nog steeds eenduidig en continu.

$\bar{f}$ is volkomen bepaald, als we weten welke t_r door f op u_r worden afgebeeld en in welke volgorde de hoekpunten van de diverse t_r aan die van u_r beantwoorden.

De afbeeldingsgraad van f en $\bar{f}$ is het aantal t_r (algebraisch geteld), die op u_r worden afgebeeld.

3. We bewijzen straks de volgende vervangingsprincipes:

(a). Zij gegeven een t_r^o met $ft_r^o = \pm u_r$ en een simpliciale afbeelding $\pi t_r^o = t_r^o$ (die dus de hoekpunten van t_r aan een <u>even</u> permutatie onderwerpt). We stellen $f_1 = f\pi$ in t_r^o en $f_1 = f$ overigens. Dan horen $\bar{f}$ en $\bar{f}_1$ tot dezelfde klasse.

(b). Zij gegeven t_r^o met $ft_r^o = \pm u_r$ en t_r^1 met $ft_r^1 \neq \pm u_r$, zodat t_r^o en t_r^1 een t_{r-1} gemeen hebben. We definiëren een f_1 zodat $f_1 t_r^o \neq \pm u_r$, $f_1 t_r^1 = \pm u_r$ is, en overigens $f = f_1$. Dan horen $\bar{f}$ en $\bar{f}_1$ tot dezelfde klasse.

(c). Zij gegeven t_r^o met $ft_r^o = u_r$ en t_r^1 met $ft_r^1 = - u_r$, zodat t_r^o en t_r^1 een t_{r-1} gemeen hebben. We definiëren een f_1 met $f_1 t_r^o \neq \pm u_r$, $f_1 t_r^1 \neq \pm u_r$, $f_1 = f$ overigens. Dan horen $\bar{f}$ en $\bar{f}_1$ tot dezelfde klasse.

Uit deze principes volgt de stelling XV 1:

Bestaan er t_r^o en t_r^p met $ft_r^o = u_r$ en $ft_r^p = - u_r$, dan vormen we een rij t_r^i $(i = o, \ldots, p)$ (zie XI 1), zodat t_r^i en t_r^{i+1} een t_{r-1} gemeen hebben. Na de rij eventueel te hebben ingekort, mogen we veronderstellen, dat $ft_r^i \neq \pm u_r$ $(i = 1, \ldots, p-1)$. Op grond van (b) mogen we f vervangen door f_1 met $f_1 t_r^o \neq \pm u_r$, $f_1 t_r^1 = u_r$, $f_1 = f$ overigens. Herhaling van dit proces leidt tot een f, die aan de voorwaarden van (c) voldoet. Toepassing van (c) geeft een f, waarbij twee simplexen minder op u_r worden afgebeeld. Zo doorgaande krijgt men een f, die alle t_r, voorzover ze in u_r worden afgebeeld, met hetzelfde teken afbeeldt.

Gegeven zo'n f en twee simplexen t_r^o en t_r^p met $ft_r^o = \pm u_r$, $ft_r^p \neq \pm u_r$, dan kan men f wijzigen in f_1, zodat $f_1 t_r^o \neq \pm u_r$ en $f_1 t_r^p = \pm u_r$, $f_1 = f$ overigens. Dit geschiedt als volgt: Men neemt een rij t_r^i zoals boven. Indien $ft_r^i \neq \pm u_r$ en $ft_r^{i+1} = \pm u_r$, vervange men f door f^1 op grond van (b) met $f^1 t_r^i = \pm u_r$, $f^1 t_r^{i+1} \neq \pm u_r$, $f^1 = f$ overigens. Zo doorgaande krijgt men een f^* met $f^* t_r^i = \pm u_r$ voor $i \leqq j$ en $f^* t_r^i \neq \pm u_r$ voor $i > j$. Evenzo kan f_1 in f^* wijzigen, dus ook f in f_1.

Door herhaaldelijk dit proces toe te passen, kan men f vervangen door een f_1, waarbij precies $|m|$ van te voren gegeven simplexen t_r op u_r worden afgebeeld (positief of negatief naar gelang of $m > 0$ of < 0 is).

Tenslotte kan men op grond van (a) ervoor zorgen, dat bij ieder van die simplexen t_r de afbeelding geschiedt met een gegeven volgorde van de hoekpunten, die met het teken in $ft_r = \pm u_r$ in overeenstemming is.

De afbeeldingsklasse heeft hierdoor geen wijziging ondergaan. Alle f met dezelfde afbeeldingsgraad zijn in dezelfde afbeelding overgevoerd. De afbeeldingsgraad bepaalt dus de afbeeldingsklasse.

4. Bewijs van 3a: Elke even permutatie is als product van een aantal 3-kringen te schrijven. We mogen dus veronderstellen, dat π een 3-kring is, en wel, als $t_r^0 = [0\ 1\ \ldots r]$ is, de 3-kring (0 12), dus $\pi(o) = 1$, $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 0$. Ieder punt $p \varepsilon t_r^0$ is voor te stellen als zwaartepunt van twee massa's α en β $[\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geqq 0]$ gelegen resp. in een punt p' van [0 12] en in een punt p" van [3 4 ...r]; α, β, p', p" zijn eenduidig en continu bepaald door p (behalve voor $\alpha = 0$ of $\beta = 0$), en bij gegeven α, β, p', p" is een p als zwaartepunt te vinden. We beelden [0 1 2] topologisch af op de eenheidscirkelschijf door middel van een afbeelding φ. We beelden de eenheidscirkelschijf topologisch op zichzelf af door een schaar draaiingen ψ_τ over de hoek $\frac{2\pi}{3}\tau$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$, zodat $\psi_1\varphi(0) = \varphi(1)$, dus ook $\psi_1\varphi(1) = \varphi(2)$, $\psi_1\varphi(2) = \varphi(0)$. We stellen $p'_\tau = \varphi^{-1}\psi_\tau\varphi(p')$ en definiëren p_τ door middel van de gegevens p'_τ en α_τ, β_τ, p''_τ = constanten. $\overline{fp_\tau}$ is dan in t_r^0 de gevraagde continue overvoering van $\overline{f}$ in $\overline{f}_1$; in de andere simplexen blijft $\overline{f}$ onveranderd.

Bewijs van 3b: $t_r^0 = [0, a_1, \ldots, a_r]$, $t_r^1 = [1, a_1, \ldots a_r]$. Een $p \varepsilon t_r^0$ is zwaartepunt van twee massa's α, β $(\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geqq 0)$ gelegen resp. in een punt p' van $[o\ a_1]$ en in een punt p" van $[a_2 \ldots a_r]$. Analoog $p \varepsilon t_r^1$, met $[1\ a_1]$ i.p.v. $[0\ a_1]$. α, β, p', p" zijn eenduidig en continu bepaald door $p \varepsilon t_r^1 \cup t_r^2$ (behalve voor $\alpha = o$ of $\beta = o$), en bij gegeven α, β, p', p" is een bijbehorende $p \varepsilon t_r^1 \cup t_r^2$ te vinden. We beelden $[0\ a_1]$ resp. $[a_1\ 1]$ lineair af op de lijnstukken $-1 \leqq x \leqq 0$ resp. $0 \leqq x \leqq 1$ (afbeelding φ), zodat $\varphi(0) = -1$, $\varphi(a_1) = 0$, $\varphi(1) = 1$. We beelden $-1 \leqq x \leqq 1$ op zichzelf af door de schaar ψ_τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$:

$$\begin{aligned}
\psi_\tau(x) &= -1 + (1-\tau)(x+1) && \text{voor } -1 \leqq x \leqq 0 \\
&= (1-\tau)x + \tau(x-1) && \quad\text{"}\quad 0 \leqq x < 1 \\
&= x && \quad\text{"}\quad x = 1
\end{aligned}$$

ψ_τ is continu behalve voor $x = 1$.

We stellen $p'_\tau = \varphi^{-1}\psi_\tau\varphi(p')$ en definiëren p_τ door middel van de gegevens p'_τ en α_τ, β_τ, p''_τ = constanten. p_τ is continu behalve voor $p' = 1$; hetzelfde geldt voor fp_τ als functie van p en τ, d.w.z. continu voor $p \notin [1a_2 \ldots a_{r_1}]$. Desondanks is $\overline{fp_\tau} = \zeta fp_\tau$ continu voor alle $p \varepsilon t^o_r \cup t^1_r$. Want een $q \varepsilon [1, a_2, \ldots, a_r]$ bezit voor elke $\varepsilon > 0$ een omgeving U (in t^1_r) zo dat voor $p \varepsilon U$ geldt: $1 - \varphi(p') < \varepsilon$. Voor $1 - x < \varepsilon$ is $\psi_\tau(x) > -\varepsilon$, dus voor $p \varepsilon U$ is p'_τ gelegen of op $[a_1 1]$ of in een $\varepsilon\, l$ -omgeving van a_1 op $[0\ a_1]$ (l = lengte van $[0\ a_1]$). Als U voldoende klein is, is dus p_τ in t^1_r of in een voorgeschreven omgeving van $t^r_0 \cap t^r_1$ gelegen en aangezien deze verzamelingen door ζf in de noordpool worden afgebeeld, ligt a_τ $\overline{\zeta fp_\tau}$ in een omgeving van de noordpool, terwijl $\overline{\zeta fq_t}$ constant = noordpool is. Dus is $\overline{\zeta fp_\tau}$ continu voor $p \varepsilon t^o_r \cup t^1_r$. Stellen we $f_1 p = fp_1$, dan is $f_1 t^o_r$ = noordpool, $f_1 t^1_r = ft^o_r = \pm u_r$. De continue overvoering van $\overline{f}$ in $\overline{f}_1$ wordt door ζfp_τ gegeven.

Bewijs van 3 c: Definitie van p', p'', α, β, φ als in 3b.

$$\psi_\tau(x) = (1-\tau)\,x - \tau \quad \text{voor } -1 \leqq x \leqq 0,$$
$$= (1-\tau)\,x + \tau \quad \text{"}\ \ 0 \leqq x \leqq 1,$$

Op grond van 3a mogen we veronderstellen, dat $f(0) = f(1)$ en $f(a_i)$ eenduidig bepaald is, dus a_i in t^o_r en t^1_r hetzelfde beeld bezit. Twee punten p met dezelfde α, β, p'' en tegengestelde $\varphi(p')$ hebben dus dezelfde $f(p)$. Derhalve is (met p'_τ en p_τ als in b) fp_τ eenduidig, ondanks de tweeduidigheid van ψ_τ voor $x = 0$. Met $f_1 p = fp_1$ is $f_1(t^o_r \cup t^1_r) = f\,|\mathfrak{z}(t^o_r + t^1_r)| \neq \pm u_r$.

<u>5.</u> Onder de voorwaarden van stelling 1 geldt

<u>Stelling</u>: Bij elke gehele m is er een afbeelding van P in S_r van de graad m.

Bewijs: Men neme P in een zodanige onderverdeling, dat er op zijn minst m r-simplexen zijn. Grondcyclus = $\sum_1^n t^i_r$; $n \geqq m$. Men beelde $t^1_r, \ldots, t^m_r$ elk met de graad 1 op u_r simpliciaal af, verder $t^{m+1}_r, \ldots, t^n_r$ op de noordpool; afbeelding f. Dan is $\overline{f}$ continu en van de graad m.

<u>6.</u> Speciaal volgt uit het voorafgaande: Er zijn afbeeldingen van S_r inzichzelf van elke gewenste graad, en twee afbeeldingen horen dan en slechts dan tot dezelfde klasse, als hun graden overeenstemmen. Een afbeelding van S_r in S_r is dan en slechts dan inessentieel, als de graad 0 is.

7. Gegeven in een normale ruimte R een afgesloten verzameling A en een continue functie f, gedefinieerd in A, met $\sigma(f) = \sup f - \inf f =$ eindig. Dan is er een continue functie h in R met $|f(x) - h(x)| \leqq \frac{2}{3}\sigma$ voor $x \varepsilon A$ en $\inf f \leqq h \leqq \sup f$.

Bewijs: We mogen $\inf f = 0$, $\sup f = 3$ veronderstellen. We definieren afgesloten deelverzamelingen A_i $(i = 0, \ldots, 3)$ van A door:

$$x \varepsilon A_i \quad : \quad i - 1 \leqq f(x) \leqq i.$$

Op grond van de normaliteit is er in R een continue functie g_i $(i = 1,2,3)$ met

$$g_i(x) = 0 \qquad \text{voor } x \varepsilon A_0 \cup \ldots \cup A_{i-1},$$

$$g_i(x) = 1 \qquad \text{"} \quad x \varepsilon A_{i+1} \cup \ldots \cup A_3.$$

$$0 \leqq g_i \leqq 1 \qquad \text{voor } x \varepsilon R$$

We stellen

$$h(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x).$$

Dan is voor

$$x \varepsilon A_i \; : \; i - 1 \leqq h(x) \leqq i,$$

dus $\qquad |f(x) - h(x)| \leqq 2 \qquad$ voor $x \varepsilon A$,

en $\qquad 0 \leqq h(x) \leqq 3 \qquad$ " $x \varepsilon R$

8. Stelling: Een functie f, continu gedefinieerd in de afgesloten verzameling A van de normale ruimte R kan tot een continue functie in heel R worden voortgezet.

Bewijs: Aangezien ieder (eindig of oneindig) interval monotoon continu kan worden afgebeeld op het interval $(-1,+1)$ (evtl. zonder eindpunten) mogen we veronderstellen: $|f| \leqq 1$. We kunnen een rij continue functies f_i, h_i resp. in A en R definieren door $f_1 = f$ en de inductie

$$|f_i(x) - h_i(x)| \leqq (\tfrac{2}{3})^i \quad \text{voor} \quad x \varepsilon A, \; |h_i(x)| = (\tfrac{2}{3})^{i-1},$$

$$f_{i+1}(x) = f_i(x) - h_i(x) \text{ voor } x \varepsilon A.$$

Indien de bepaling ervan geslaagd is voor $i = n$ en

$$|f_n(x)| \leqq (\tfrac{2}{3})^{n-1}$$

vaststaat, is volgens 7 immers de bepaling van h_{n+1} mogelijk en dus ook

$$|f_{n+1}(x)| = |f_n(x) - h_n(x)| \leqq (\tfrac{2}{3})^n.$$

Nu is voor $x \varepsilon A$

$$f_1(x) - f_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x) - f_{i+1}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x),$$

dus $\qquad f(x) = \sum_1^{\infty} h_i(x) \qquad$ voor $x \varepsilon A$

en het rechterlid zinvol en continu voor $x \varepsilon R$.

9. Een continue afbeelding f van de afgesloten A (van de normale ruimte R) in de n-sfeer S kan in een omgeving van A (in R) worden voortgezet als continue afbeelding in S.

Bewijs: We nemen S als eenheidssfeer in de (n+1)-dim.cartesische ruimte R_{n+1}. We zetten iedere coordinaat functie f_i ($i = 1, \ldots, n+1$) van f voort in R. Het f-origineel van ($R_{n+1} \setminus$ nulpunt) is een omgeving U van A. We beperken de nieuwe f tot U. Zij γ de afbeelding, die $R_{n+1} \setminus$ nulpunt radiaal op S_n afbeeldt. Dan is γf in U gedefinieerd en een voortzetting van de gegeven f.

10. Stelling: Gegeven een compacte separabele ruimte Q met de afgesloten deelverzameling P en twee afbeeldingen f_0 en f_1 van P in de r-sfeer S, uit dezelfde klasse. Bezit f_0 een voortzetting $f_0 Q \subset S$, dan ook f_1.

Bewijs: $R = Q \times (0 \leqq \tau \leqq 1)$,

$$A = Q \times (\tau = 0) \cup P \times (0 \leqq \tau \leqq 1).$$

F wordt in A gedefinieerd:

$$F(q \times (\tau = 0)) = f_0(q) \qquad \text{voor } q \in Q$$

$$F(p \times \tau) = f_\tau(p) \quad \text{(gegeven overvoering) voor } p \in P.$$

A is afgesloten in R, F is continu en kan volgens 9 in een omgeving van A wordán voortgezet.

We stellen $\varphi_\varepsilon(\tau) = \begin{matrix} 1 - \frac{\tau}{\varepsilon} \\ 0 \end{matrix}$ voor $\begin{matrix} 0 \leqq \tau \leqq \varepsilon \\ \varepsilon \leqq \tau \leqq 1 \end{matrix}$, $0 < \varepsilon \leqq 1$,

en

$$g_\varepsilon(q \times \tau) = q \times \varphi_\varepsilon(\tau).$$

Dan is $\bigcap_{\varepsilon > 0} g_\varepsilon(R) = A$,

dus voor zekere δ:

$$g_\delta(R) \subset U,$$

$$g_\delta = \text{identiteit in } A.$$

$F g_\delta$ is een voortzetting van F in heel R. Speciaal voor $\tau = 1$ bekeken, is het een voortzetting van f_1 in heel Q.

Opmerking: Willen we in het vervolg de voortzetbaarheid van een afbeelding onderzoeken, dan mogen we haar door een andere uit dezelfde klasse vervangen.

11. Stelling: Zij Q een polytoop, $\dim Q \leqq r + 1$, P een onderpolytoop, f een afbeelding $f\ Q < S_r$. Dan en slechts dan is f voortzetbaar in Q, indien

$$G^r(Q)\chi \supset G^r(S_r) f.$$

Hierbij is χ de identieke afbeelding van P in Q, en de cohomologiegroepen zijn bedoeld cf mod 0.

De noodzakelijkheid is evident. Want is F de voortzetting van f, dan is $f = F\chi$, dus $G^r(S_r)f = G^r(S_r)F\chi \supset G^r(Q)\chi$.

Naar 10 mogen we f door een simpliciale approximatie vervangen, dus van te voren veronderstellen, dat f simpliciaal is (in een geschikte verdeling van P). Zij u^r een simplex van S_r; als cocyclus opgevat brengt u^r de $G^r(\Sigma^*(S_r))$ voort. $u^r f$ is cocyclus van $\Sigma^*(P)$. Verondersteld worde, dat in $\Sigma^*(P)$, $u^r f \sim j^r\chi = j^r \cap \Sigma^*(P)$, waar j^r een geschikte cocyclus van $\Sigma^*(Q)$ is. Dus $u^r f - j^r\chi = k^{r-1}\mathfrak{z} \cap \Sigma^*(P) = k^{r-1}\mathfrak{z}\chi$, $u^r f = (j^r + k^{r-1}\mathfrak{z})\chi$. We mogen derhalve zelfs veronderstellen:

$$u^r f = j^r\chi ,$$

d.w.z. $u^r f$ voortzetbaar als cocyclus van $\Sigma^*(Q)$.

Met een simpliciale f luidt de stelling dus: Dan en slechts dan is f voortzetbaar in Q, indien $u^r f$ voortzetbaar is als cocyclus j^r in $\Sigma^*(Q)$ (na evtl. onderverdeling van Q).

Wegens 10 is het voldoende, de voortzetbaarheid van $\bar{f} = \zeta f$ te bewijzen (zie 2). Zij $j^r = \Sigma\alpha(t^r)t^r$. We vormen een onderverdeling van Q, waarbij elke t^r in ten minste $|\alpha(t^r)|$ simplexen wordt onderverdeeld (verfijning $\mathfrak{w}$). Voor $t^r \not\subset \Sigma^*(P)$ beelden we $\alpha(t^r)$ van die simplexen simpliciaal op u^r of $-u^r$ af (naar gelang of $\alpha(t^r) > 0$ of < 0 is) en de overigen in de noordpool. $\bar{f}$ is nu op alle t^r van $\Sigma^*(Q)$ gedefinieerd.

We beschouwen nu een $t_{r+1} \not\subset \Sigma^*(P)$; $\mathfrak{z}\, t_{r+1} = \Sigma\, t^i_r$. De bijbehorende cosimplexen zijn t^{r+1} en t^r_i; in $t^r_i\mathfrak{z}$ treedt t^{r+1} met de coëfficient 1 op; in $j^r\mathfrak{z}$ met de coëfficient $\Sigma\alpha(t^r_i)$. Dus $\Sigma\alpha(t^r_i) = 0$. Wegens $f(\mathfrak{w}\, t^i_r) = \alpha(t^i_r)\, u^r$ wordt de grondcyclus $\Sigma\mathfrak{w}\, t^i_r$ van de randsfeer van t_{r+1} door f in 0 afgebeeld; f is daar dus inessentieel (zie 6) en kan in heel t_{r+1} worden voortgezet (zie XI 8). Hiermede is $\bar{f}$ continu in heel Q voortgezet.

12. <u>Stelling</u>. Zij P een polytoop, dim P $\leq$ r. Dan en slechts dan horen twee afbeeldingen f_0 en f_1 van P in de S_r tot dezelfde klasse, als ze de $G^r(S_r)$ ef mod 0 eender afbeelden.

<u>Bewijs</u>: "Slechts dan" is evident. - We mogen f_0, f_1 simpliciaal in een zekere verdeling van P veronderstellen. We vormen de prisma Q boven P en beelden grondvlak P en dakvlak P' volgens $f_0\vartheta$ en $f_1\vartheta$ af, waar ϑ de projectie van Q op P is; deze afbeelding van P $\cup$ P' heet F. $u^r f_0$ en $u^r f_1$ zijn volgens veronderstelling cohomoloog in $\Sigma^*(P)$, dus $u^r f_0 - u^r f_1 = k^{r-1}\mathfrak{z} \cap \Sigma^*(P)$ met $k^{r-1} \subset \Sigma^*(P)$. Nu is $j^r = u^r f_1\vartheta + k^{r-1}\mathfrak{z}$ cocyclus in $\Sigma^*(Q)$; $j^r \cap \Sigma^*(P) = u^r f_1 + (u^r f_0 - u^r f_1) = u^r f_0$, $j^r \cap \Sigma^*(P') = u^r f_1\vartheta \cap \Sigma^*(P')$. En anderzijds $u^r F = u^r f_0 + u^r f_1\vartheta \cap \Sigma^*(P')$, dus $j^r \cap \Sigma^*(P \cup P') = u^r F$. Derhalve is j^r een voortzetting van

$u^r F$ in $\Sigma^*(Q)$. Naar 11 bestaat een voortzetting van F in geheel Q en stelt een overvoering van f_0 in f_1 voor.

Men kan deze stelling ook uitspreken met de homologiegroep, dus:

<u>Stelling</u>: Zij P een polytoop, dim $P \leq r$. Dan en slechts dan horen twee afbeeldingen f_0 en f_1 van P in S_r tot dezelfde klasse, als ze $G_r(P)$ cf mod 1 eender afbeelden.

(Speciaal is een afbeelding f dan en slechts dan inessentieel, als ieder r-cyclus cf mod 1 in 0 wordt afgebeeld)

Voor orienteerbare r-pseudovarieteiten komt dit neer op XV 1.

Ook geldt weer onder dezelfde veronderstellingen:

<u>Stelling</u>: Bij elk homomorfisme φ: $G_r(P)$ cf mod 1 $\rightarrow G_r(S_r)$ mod 1 hoort een afbeelding $f(P) \subset S_r$, die dit homomorfisme induceert.

Bewijs: φ induceert een homomorfisme van $G^r(S_r)$ cf mod 1 in $G^r(P)$ cf mod 1; het beeld van de voortbrengende van $G^r(S_r)$ wordt gerepresenteerd door een cocyclus j^r van $\Sigma^*(P)$, $j^r =$ $= \Sigma \alpha(t^r) t^r$. We verdelen de simplexen van P weer als in het bewijs van 11 en definiëren f in de afzonderlijke t_r weer simpliciaal en zo dat $f \varkappa t_r = \alpha(t_r) u_n$ is. $\overline{f}$ is continu en $u^r f_r = j^r$. Derhalve induceert $\overline{f}$ de gegeven φ.

<u>13</u>. Men kan 11 ook met homologiebegrippen formuleren:

$$G^r(Q)_\chi \supset G^r(S_r)\ f$$

dan en slechts dan als voor elk element a van $G_r(P)$ cf mod 1 geldt:

$$G^r(Q)_\chi\, a = 0 \quad \text{impliceert} \quad G^r(S_r)\ fa = 0.$$

De eerste vergelijking komt neer op $\chi a = 0$, de tweede op $f(a) = 0$. Dus $\chi(a) = 0$ impliceert $fa = 0$.

<u>Stelling</u>: Onder de veronderstellingen van 11 is f dan en slechts dan voortzetbaar, als elke r cyclus cf mod 1 in $\Sigma^*(P)$, die nulhomoloog in $\Sigma^*(Q)$ is, door f in 0 wordt afgebeeld.

<u>14</u>. De diverse stellingen zijn ook uit te breiden op compacte ruimten i.p.v. polytopen.

De belangrijkste resultaten in dit hoofdstuk zijn van H.Hopf afkomstig.

Het probleem der afbeeldingsklassen voor de afbeeldingen van een $\leqslant$ r-dim. polytoop in de r-sfeer is hiermee volledig opgelost. Laat men de dimensie-voorwaarde vallen, dan wordt het probleem veel moeilijker. Het is maar nog ten dele opgelost. Een speciaal geval (afbeeldingen in de 1-sfeer) komen we later nog tegen.

XVI. De cohomologiering.

1. Σ is een simplex-rooster met vaste nummering van de hoekpunten. Simplexen worden altijd volgens deze orde opgeschreven. We definiëren een product van cosimplexen:

$$[a_0\ a_1\ \dots a_i][a_i\ a_{i+1}\ \dots a_{i+j}] = [a_0 \dots a_i \dots a_{i+j}]\ ,$$

alle andere producten $= 0$.

Door de eis van distributiviteit is het product dan voor willekeurige ketens cf mod 0 gedefinieerd. Heeft men coefficienten bereiken Γ_i waartussen een distributieve vermenigvuldiging gedefinieerd is ($\Gamma_i\ \Gamma_j \subset \Gamma_{i+j}$), dan is ook een product tussen K^i cf Γ_i en K^j cf Γ^j, $\subset K^{i+j}$ cf Γ^{i+j} gedefinieerd.

2. $(t^i\ t^j)\mathfrak{z} = t^i\mathfrak{z}\ .t^j + (-1)^i\ t^i.t^j\mathfrak{z}$.

Bewijs: Zij $t^i = [a_0 \dots a_i]$, $t^j = [a_i \dots a_j]$, $t^{i+j} = [a_0 \dots a_i \dots \dots a_j]$. $t^{i+j}\mathfrak{z} = \Sigma(-1)^{s(b)}\ [a_0 \dots b \dots a_i \dots a_{i+j}] + \Sigma(-1)^{s(b)}[a_0 \dots \dots a_i \dots b \dots a_{i+j}]$, waarbij $s(b)$ het aantal aan b voorafgaande a aangeeft. De formule volgt hier onmiddellijk uit. - Zij $t^i = [a_0 \dots a_i]$, $t^j = [a'_i \dots a'_{i+j}]$ met $a_i < a'_i$ in de gegeven volgorde Dan is $t^i\mathfrak{z}\ .t^j = (-1)^{i+1}\ [a_0 \dots a_i a'_i][a'_i \dots a'_{i+j}] = (-1)^{i+1}[a_0 \dots \dots a_i a'_i \dots a'_{i+j}]$ en $t^i.t^j\mathfrak{z} = [a_0 \dots a_i][a_i a'_i \dots a_{i+j}] = [a_0 \dots a_i a'_i \dots a_{i+j}]$, terwijl $t^i t^j = 0$ is. De formule komt dus ook weer uit. In alle andere gevallen staat aan beide kanten 0.

3. Uit 2 volgt

$$(k^i k^j)\mathfrak{z} = k^i\mathfrak{z}\ .k^j + (-1)^i k^i.t^j\mathfrak{z}$$ voor willekeurige coëfficientenbereiken. Dus is het product van cocyclussen een cocyclus. Is één der cocyclussen een zelfkant, b.v. $k^i = k^{i-1}\mathfrak{z}$, dan is

$$(k^{i-1}k^j)\mathfrak{z} = k^i.k^j + (-1)^{i-1}k^{i-1}.k^j\mathfrak{z} = k^i k^j\ ,$$

dus het product ook een zelfkant. Vervangt men in een product van cyclussen een cyclus door een cohomologe, dan verandert het product dus op cohomologie na niet. Er wordt dus een productvorming tussen de cohomologiegroepen geïnduceerd:

$$G^i\ G^j \subset G^{i+j}$$

4. Σ en Σ' zijn twee simplex-roosters met simplexen, t resp. u en f een simpliciale afbeelding, $f\Sigma \subset \Sigma'$, die de orde niet verstoort. Men ziet zonder meer: $(u^i u^j)\ f = u^i f.u^j f$.
Hieruit volgt de analoge relatie voor de cohomologiegroepen.

5. We tonen nu aan, dat de gedefinieerde vermenigvuldiging van de cohomologiegroepen van Σ niet afhangt van de keuze van de volgorde der hoekpunten van Σ.

Hiervoor vormen we de barycentrische onderverdeling $\tilde{\Sigma}$ van Σ.

s is de simpliciale afbeelding van $\tilde{\Sigma}$ in Σ, waarbij aan een punt $\{a_0 \ldots a_i\}$ van $\tilde{\Sigma}$ het hoogst genummerde onder de $a_0, \ldots, a_i$ wordt toegevoegd. We rangschikken de hoekpunten van Σ^* zo dat voor $t_i \subset t_j$ het "zwaartepunt" van t_i vóór dat van t_j komt, en zo dat s de orde niet verstoort. Hoekpunten van $\tilde{\Sigma}$ vormen dan en slechts dan een simplex op volgorde, indien ze de zwaartepunten zijn van een opstijgende rij simplexen van Σ. Voor twee simplexen u^i, u^j van $\tilde{\Sigma}$ hangt dus $u^i\, u^j$ niet meer af van de in Σ aangenomen volgorde en hetzelfde geldt t.a.v. de productvorming tussen de cohomologiegroepen van $\tilde{\Sigma}$. We hebben voor $g^i \in G^i(\tilde{\Sigma})$, $g^j \in G^j(\tilde{\Sigma})$ naar 4:

$$(g^i g^j)\, s = (g^i s)(g^j s).$$

Veranderen we in Σ de volgorde, dan krijgen we een nieuw product dat we voor een ogenblik door o aanduiden, maar ook een nieuwe s, die we s' zullen noemen.

$$(g^i g^j)\, s = (g^i s') \circ (g^j s')$$

en $\quad g^k s = g^k s'$, voor alle dimensies k,

dus $\quad (g^i s) \circ (g^j s) = (g^i s)(g^j s)$.

Daar s een isomorfisme van de groepen van $\tilde{\Sigma}$ op die van Σ induceert, is bewezen, dat beide producten overeenstemmen.

6. Door G_n - ale grensovergang kan men nu op grond van 4 de producten tussen de cohomologiegroepen van compacte ruimten definiëren. Voor polytopen P stemmen ze met die voor $\Sigma^*(P)$ overeen.

7. Het is evident, dat de gedefinieerde producten associatief zijn. I.p.v. commutativiteit geldt de wet:

$$g^j g^i = (-1)^{ij} g^i g^j.$$

Bewijs: Behalve het oude product definiëren we een nieuw, aangeduid door o en gebaseerd op de tegengestelde volgorde. Is $\overline{t^i}$ het simplex dat uit t^i ontstaat door de volgorde om te keren, dan is

$$\overline{t^i} = \alpha(i) t^i \quad \text{met } \alpha(i) = \begin{cases} 1 & \text{voor } i = 0,3 \bmod 4, \\ -1 & \text{voor } i = 1,2 \bmod 4. \end{cases}$$

Dus wegens $\overline{t^i t^j} = \overline{t^j} \circ \overline{t^i}$,

$$\alpha(i+j)\, t^i t^j = \alpha(j) t^j \circ \alpha(i) t^i.$$

Voor de cohomologiegroepen speelt het verschil tussen beide vermenigvuldigingen geen rol meer.

$$g^j g^i = \alpha(i)\alpha(j)\alpha(i+j)\, g^i g^j.$$

$\alpha(i)\alpha(j)\alpha(i+j)$ hangt alleen nog voor de pariteiten van i en j af; men ziet, dat het $= (-1)^{ij}$ is.

8. Voor alle $g^i \varepsilon G^i$ stelt de linksvermenigvuldiging met g^i een homomorfisme van G^j in G^{i+j} voor. Hierdoor wordt een homomorfisme van G_{i+j} in G_j (coefficientenbereiken duaal met die van G^{i+j} en G^j) geïnduceerd. Dus is er ook een vermenigvuldiging

$$G_{i+j} G^i \subset G_j .$$

We kunnen die al voor de simplexen op volgorde definiëren (en hiermede voor ketens) :

$$t_{i+j} \; t^i = t_j \; ,$$

indien

$$t_{i+j} = [a_0 \ldots a_i \ldots a_{i+j}], \; t^i = [a_0 \ldots a_i], \; t_j = [a_i \ldots a_{i+j}],$$

en

$$t_{i+j} t'^i \; = 0,$$

als deze constellatie niet aanwezig is.

We hebben met deze t_{i+j}, t^i, t_j :

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}(t_{i+j} \; t^i) &= \sum_p (-1)^{p-i} [a_i \ldots \hat{a}_p \ldots a_{i+j}] \\ &= \sum_{p>i} (-1)^{p-i} [a_i \ldots \hat{a}_p \ldots a_{i+j}] + [a_{i+1} \ldots a_{i+j}] \\ &= \sum_{p>i} (-1)^{p-i} [a_0 \ldots a_i \ldots \hat{a}_p \ldots a_{i+j}][a_0 \ldots a_i] + \\ &\qquad + [a_0 \ldots a_i a_{i+1} \ldots a_{i+j}] \; [a_0 \ldots a_i a_{i+1}] \; . \\ &= (-1)^i \mathfrak{z} \; t_{i+j} \cdot \; t^i + \; (-1)^{i+1} \; t_{i+j} \cdot \; t^i \mathfrak{z} \; , \end{aligned}$$

en analoog voor andere gevallen.

Dus ook

$$\mathfrak{z}(k_{i+j} k^i) = (-1)^i \mathfrak{z} \, k_{i+j} \cdot k^i + (-1)^{i+1} k_{i+j} \cdot \, k^i \mathfrak{z} \; .$$

Het product van cyclus en cocyclus is dus een cyclus; is een der factoren homoloog resp. cohomoloog 0, dan ook het product. De geïnduceerde productvorming tussen de G_{i+j} en G^i is net die, waarvan we uitgingen.

Duidelijk is ook de associatieve wet

$$k_{i+j+1} \; (k^i k^j) \; = \; (k_{i+j+1} k^i) \; k^j .$$

Bij simpliciale afbeeldingen $f\Sigma \subset \Sigma'$ gedraagt het product zich als volgt (t = simplex van Σ, u van Σ') :

$$f \; t_{i+j} \cdot \; u^i = f \; (t_{i+j} \cdot u^i f) .$$

Op grond hiervan kan men opnieuw de onafhankelijkheid t.a.v. de volgorde der hoekpunten bewijzen. Men kan ook door limiet overgang dit product in compacte ruimten invoeren.

Het eerder gedefinieerde $k^i k_i$ (XIV 1) is niets anders dan de coefficientensom van de 0-cyclus $k_i k^i$ volgens het nu gedefinieerde product.

Is Σ de rooster van een oriënteerbare r-pseudovariëteit met grondcyclus

$$j_r = \Sigma\,\pi\,([a_0\ldots a_r])\,[a_0\ldots a_r],$$

en $t^i = [a_0\ldots a_i]$, dan is

$$j_r t^i = \Sigma\,\pi\,([a_0\ldots a_r])\,[a_i\ldots a_r] = \delta\vartheta t^i$$

(zie p.67). We kunnen derhalve $\delta\vartheta$ identificeren met de grondcyclus. Verschillende vroeger bewezen formules volgen hieruit opnieuw. Uit de associatie wet volgt

$$\delta\vartheta(k^i k^l) = (\delta\vartheta\, k^i)k^l.$$

9. Σ zij nu de rooster van een r-homologievariëteit. Dan kunnen we ook een snede definiëren. Simplexen zijn hiervoor niet geschikt. We moeten werken met figuren, die zich wederzijds in "algemene" ligging bevinden, zo dat de doorsnijding van een i-dim. en een j-dim. iets (i+j-r)- dim. is. Hiervoor kunnen we gebruiken: simplexen van Σ enerzijds en duaalsterren anderzijds; de "doorsnijding" van t_p en ϑt^i bestaat dan uit simplexen van de barycentrische onderverdeling $\tilde{\Sigma}$ van Σ, die gemeenschappelijk zijn aan $|\varkappa t_p|$ en $|\vartheta t^i|$.

We doen voor een ogenblik afstand van de vaste volgorde in Σ. Zij $t_p = [0, \ldots, p]$, $t^i = [0, \ldots i]$ en laten we alles bekijken binnen $t_r = [0,\ldots,r]$. Een simplex van $\varkappa t_p$ resp. ϑt^i heeft de vorm

$$[a_0\ldots a_k,\ a_0\ldots a_k\ldots a_l,\ldots\ ] \text{ met alle } a = 0, \ldots p,$$
$$[0\ldots i\ldots b_m,\ 0\ldots i\ldots b_m\ldots b_n,\ldots\ ] \text{ met alle } b=i+1,\ldots,r.$$

Willen deze overeenstemmen, dan moeten $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $\ldots, a_i = i$ zijn in alle $h \leqslant p$. Dus, de maximale simplexen van de doorsnijding zijn

$$[0\ldots i, 0\ldots i\ c_1,\ldots,0\ldots i\ c_{p-i}] \text{ met } c = i+1,\ \ldots,\ p.$$

We definiëren derhalve binnen t_r de "snede" door $(p = i+j)$:

$$t_{i+j} \otimes \vartheta t^i = \Sigma\ \mathrm{sgn}\ (0\ldots i\ c_1,\ldots,c_{p-i})[0\ldots i, 0\ldots i\ c_1, \ldots, 0\ldots i\ c_1\ldots c_{p-i}].$$

Practischer werkt men weer met

$$\delta(t_{i+j} \otimes \vartheta t^i) = [i, i+1,\ldots\ i+j].$$

Hieruit blijkt

$$\delta(t_{i+j} \otimes \vartheta t^i) = t_{i+j}t^i.$$

Tussen willekeurige ketens, cyclussen, enz. is hiervoor een snede gedefinieerd.

$$g_{i+j} \otimes \vartheta g^i = g_{i+j}g^i,$$

$$G_{i+j} \otimes G_{r-i} \subset G_j.$$

Men kan voor de definitie van $\otimes$ ook tot het cohomologieproduct teruggaan: Op grond van de associatieve wet heeft men

$$\delta\vartheta(k^i k^j) = \delta\vartheta k^i \cdot k^j = \delta(\delta\vartheta k^i \circledR \vartheta k^j) .$$

De snede is associatief en commutatief of anticommutatief.

10. G_i en G^i waren bij duale coëfficientenbereiken duaal; de dualiteit werd door de productvorming $t^i t_i = {0 \atop 1}$ voor $|t_i| \neq |t^i|$, $|t_i| = |t^i|$ veroorzaakt. Wegens het topologisch isomorfisme

$\vartheta G^i = G_{r-i}$ zijn ook G_i en G_{r-i} duaal; de dualiteit wordt voortgebracht door de coëfficientensom van $g_i \cdot \vartheta g^{r-i} = g_i \circ g_{r-i}$, het zogenaamde snedegetal.

Zij nu Σ de rooster van een homologie<u>sfeer</u>. We definiëren voor cyclussen j_i en j_{r-i-1} een <u>schakelgetal</u>; deze cyclussen worden ~ 0 verondersteld (hetgeen alleen voor de dimensie 0 een extra-eis is),

$$j_i = \partial k_{i+1} , \quad j_{r-i-1} = \partial k_{r-i} .$$

$$v(j_i, j_{r-i-1}) = \text{coëfficientensom van } j_i \circledR k_{r-i} .$$

Voor de mogelijkheid van deze definitie moeten we dus nog veronderstellen, dat j_{r-i-1} de vorm heeft

$$j_{r-i-1} = \vartheta j^{i+1},$$

dus

$$j^{i+1} = k^i \partial .$$

We mogen dan veronderstellen (zie * op p. 66):

$$k_{r-i} = (-1)^{i+1} \vartheta k^i,$$

dus kunnen ook schrijven

$$v(j_i, j_{r-i-1}) = \text{coëfficientensom van } (-1)^{i+1} j_i k^i .$$

of:

$$v(j_i, \partial\vartheta k^i) = j_i k^i .$$

Deze definitie is onafhankelijk van de keuze van k^i. Want zij ook nog

$$j^{i+1} = \overline{k}^i \partial,$$

dus

$$(k^i - \overline{k}^i)\partial = 0 .$$

dan is

$$j_i(k^i - \overline{k}^i) \sim 0$$

(omdat $j_i \sim 0$ is), dus de coëfficientensom is 0, dus bij beide definities van het schakelgetal hetzelfde.

Het schakelgetal gedraagt zich commutatief of anticommutatief in de volgende zin: Zij

$$j_i = \vartheta j^{r-i} , \qquad j_{r-i-1} = \vartheta j^{i+1}$$

$$j^{r-i} = k^{r-i-1}\partial , \qquad j^{i+1} = k^i \partial ,$$

dus

$$\vartheta j^{r-i} = (-1)^{r-i} \partial\vartheta k^{r-i-1} , \quad \vartheta j^{i+1} = (-1)^{i+1} \partial\vartheta k^i,$$

$$\delta\vartheta j^{r-i} = (-1)^{r-i} \partial\delta\vartheta k^{r-i-1} , \quad \delta\vartheta j^{i+1} = (-1)^{i+1} \partial\delta\vartheta k^i .$$

We vergelijken met elkaar $v(\mathfrak{b} j_i, j_{r-i-1})$ en $v(\mathfrak{b}' j_{r-i-1}, j_i)$, waarbij aan $\mathfrak{b}'$ de tegengestelde volgorde als aan $\mathfrak{b}$ ten grondslag ligt (zie eind van 7) :

$$v(\mathfrak{b} j_i, j_{r-i-1}) = \text{coëff.som}(-1)^{i+1} \mathfrak{b} j_i \cdot k^i = \text{coëff.som}\ (-1)^{i+1} j^{r-i} k^i$$

$$v(\mathfrak{b}' j_{r-i-1}, j_i) = \text{coëff.som}(-1)^{r-i} \mathfrak{b}' j_{r-i-1} k^{r-i-1} = \text{coëff.som}\ (-1)^{r-i} j^{i+1}{}_{\circ}\, k^{r-i-1} = \text{coëff.som}\ (-1)^{r-i} (-1)^{(i+1)(r-i-1)} k^{r-i-1} j^{i+1}.$$

Nu is

$$0 \sim (k^{r-i-1} k^i)_{\mathfrak{z}} = k^{r-i-1}{}_{\mathfrak{z}} \cdot k^i + (-1)^{r-i-1} k^{r-i-1} \cdot k^i{}_{\mathfrak{z}} = j^{r-i} k_i + (-1)^{r-i-1} k^{r-i-1} j^{i+1} ,$$

dus

$$v(\mathfrak{b} j_i, j_{r-i-1}) = (-1)^{(i+1)(r-i)}\, v(\mathfrak{b}' j_{r-i-1}, j_i).$$

We kunnen nu de isomorfie tussen $G^{*i}(M)$ en $G^*_{r-i-1}(N)$ (zie XIV 12-14) als een dualiteit tussen $G^*_i(M)$ en $G^*_{r-i-1}(N)$ door middel van het schakelgetal formuleren. We gaan uit van de dualiteit in M tussen $G^*_i(M)$ en $G^{*\,i}(M)$, die door $j_i j^i$ is bepaald (duale coëfficiëntenbereiken) Nu is juist

$$j_i j^i = v(j_i, \mathfrak{z}\,\mathfrak{g}\, j^i) = v(j_i, \tau j^i)$$

Dus het schakelgetal verbindt de groepen $G^*_i(M)$ en $\tau G^{*\,i}(M) = G^*_{r-i-1}(N)$ duaal met elkaar. (Voor de dimensie 0 weer de gebruikelijke afwijking!)

We merken nog op, dat

$$v(j_i, j_{r-i-1})$$

niet verandert, als ik j_i door een j_i' vervang met

$$j_i \sim j'_i \text{ in } P \setminus |j_{r-i-1}| ;$$

evenzo als ik j_{r-i-1} vervang door j'_{r-i-1} met

$$j_{r-i-1} \sim j'_{r-i-1} \text{ in } P \setminus |j_i| .$$

Om dit in te zien hoef ik maar $|j_{r-i-1}|$ resp. $|j_i| = M$ te stellen en op te merken, dat $j_i j^i$ alleen van de homologie - resp. cohomologie<u>klasse</u> afhangt.

<u>11</u>. Bij een toepassing van deze resultaten hebben we straks een simpliciale verdeling nodig van het cartesische product van twee niet-ontaarde simplexen

$$J\,(a_0,\ldots,a_d) \quad \text{en} \quad T\,(b_0,\ldots,b_e)$$

(convexe verzamelingen voortgebracht door de hoekpunten in een Cartesische ruimte). Een punt ervan is een paar

$$\Sigma \lambda_i a_i \quad , \Sigma \mu_j b_j \qquad (\Sigma\lambda_i = \Sigma\mu_j = 1),$$

dus gekenmerkt door een systeem

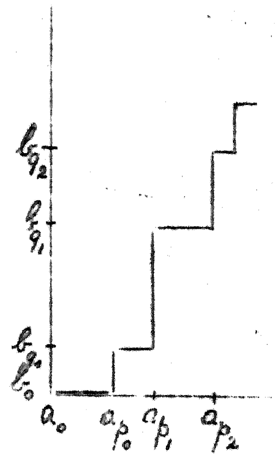
$$\lambda_0,\ldots,\lambda_d \;\; ; \mu_0,\ldots,\mu_e.$$

Als hoekpunten van de simpliciale verdeling kiezen we de punten

$$a_i b_j,$$

dus met de barycentrische coördinaten

$$0,\ldots,1,\ldots,0 \;\; ; \;\; 0,\ldots 1, \ldots,0.$$



Als (d + e) -dim. simplexen wijzen we aan de

$$T\,(a_0 b_0,\ldots,a_{p_0} b_0, \; a_{p_0} b_1,\ldots,a_{p_0} b_{q_0},\ldots);$$

d.w.z. afwisselend lopen de indices van a en van b op (zie tekening), tot d resp. e. Een punt behoort dan en slechts dan tot dit simplex als voor zijn λ en μ geldt:

$$\lambda_0 + \ldots + \lambda_{p_0-1} \leqq \mu_0 \leqq \lambda_0 + \ldots + \lambda_{p_0} ,$$

$$\mu_0 + \ldots + \mu_{q_0-1} \leqq \lambda_0 + \ldots + \lambda_n \leqq \mu_0 + \ldots + \mu_n ,$$

$$\lambda_0 + \ldots \lambda_{p_1-1} \leqq \mu_0 + \ldots + \mu_{q_0} \leqq \lambda_0 + \ldots + \lambda_{p_1} ,$$

enz.

Hieruit blijkt, dat we met deze (d+e)-simplexen het cartesische product uitputten en dat ze paarsgewijs netjes liggen, dus dat we met een simpliciale verdeling te maken hebben.

12. We willen nu van het cartesisch product $S^d \times S^e$ van twee sferen de cohomologie eigenschappen vaststellen. We stellen S^d resp. S^e voor als cubus

$$C^d \;\; : |x_i| \leqq 1 \quad , i = 1, \ldots, d$$

$$C^e \;\; : |x_i| \leqq 1 \quad , i = d+1, \ldots, e$$

met de afspraak, dat de rand van C^d als één punt beschouwd moet worden, evenzo die van C^e. Dan wordt S^{d+e} voorgesteld door

$$C^{d+e} \; : |x_i| \leqq 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, d+e$$

met bovengenoemde identificaties. Rand van C^{d+e} = (rand C^d) x $C^e \cup C^d$ x (rand C^e) : dus in $S^d \times S^e$ bekeken = $a \times S^e \cup S^d \times b$.

Elke cyclus van dim $<$ d+e van $S^d \times S^e$ kan op deze verzameling worden geveegd. Het is duidelijk, dat de enige cyclussen van positieve dimensie hiervan zijn: de grondcyclus van S^d, die van S^e enz - lineaire combinaties. Ook voor $d = e$ zijn die twee cyclussen onafhankelijk in $S^d \times S^e$, want een evtl. afhankelijkheid zou bij het uitvegen blijven behouden.

Hieruit volgt in cohomologie-formulering: $G\ (S^d \times S^e) = \Gamma$, $G^d = G^e = \Gamma$ voor $d \neq e$, $G^d = \Gamma + \Gamma$ voor $d = e$, $G^{d+e} = \Gamma$ (het laatste b.v. omdat $S^d \times S^e$ een varieteit is).

Zij π_1 resp. π_2 de projectie van $S^d \times S^e$ op S^d resp. S^e. S^d en S^e zijn volgens zekere verdelingen met zekere volgorde van de hoekpunten gegeven, t^d en u^e zijn er resp. een speciaal simplex van; $t^d = [0,\ldots,d]$, $u^e = [\overline{0}, \ldots \overline{e}]$.

t^d is tevens de grondcocyclus van S^d, u^e die van S^e. Als hoekpunten van $S^d \times S^e$ nemen we de paren $a\overline{a}$ (a hoekpunt van S^d, $\overline{a}$ van S^e); de cartesische producten van de simplexen verdelen we onder volgens 11. Als voortbrengend element van H^d resp. H^e kunnen we nemen $t^d\pi_1$ resp. $u^e\pi_2$. Nu is

$$t^d\pi_1 = \Sigma\ [0\overline{b}_0,\ 1\overline{b}_1,\ \ldots,\ d\overline{b}_d] \qquad (\overline{b}_0 < \overline{b}_1 < \ldots < \overline{b}_d),$$

$$u^e\pi_2 = \Sigma\ [b_0\overline{0},\ b_1\overline{1},\ \ldots,\ b_e\overline{e}] \qquad (b_0 < b_1 < \ldots < b_e).$$

In $t^d\pi_1 \cdot u^e\pi_2$ kunnen alleen summanden blijven staan met $d\overline{b}_d = b_0\overline{0}$, dus

$$t^d\pi_1 \cdot u^e\pi_2 = [0\overline{0},\ 1\overline{0},\ \ldots,\ d\overline{0},\ d\overline{1},\ \ldots,\ d\overline{e}\ ] =$$

grondcocyclus van $S^d \times S^e$. Verder ziet men, dat (ook voor $d = e$)

$$t^d\pi_1\ t^d\pi_1 = u^e\pi_2 \cdot u^e\pi_2 = 0$$

is. Hiermee beheersen we de cohomologiering van $S^d \times S^e$: j^d basiselement van G^d, j^e van G^e, j^{d+e} van G^{d+e}; $j^d j^d = j^e j^e \sim 0$, $j^d j^e \sim j^{d+e}$.

13. Het doel van het voorafgaande is, afbeeldingen f te bekijken van $S^d_{(1)} \times S^d_{(2)}$ in S^d (d even).

Is j^d grondcocyclus van S^d, dan is $j^d f$ ook d-cocyclus, dus naar 12 cohomoloog aan een lineaire combinatie van $j^d_{(1)}\pi_1$ en $j^d_{(2)}\pi_2$:

$$j^d f \sim \alpha_1 j^d_{(1)}\pi_1 + \alpha_2 j^d_{(2)}\pi_2.$$

Naar 4 is

$$j^d f \cdot j^d f \sim (j^d \cdot j^d)\ f\ ,$$

maar $j^d \cdot j^d = 0$ in S^d, dus naar 12

$$\alpha_1\alpha_2\ \left(j^d_{(1)}\pi_1 \cdot j^d_{(2)}\pi_2 + j^d_{(1)}\pi_2 \cdot j^d_{(2)}\pi_1\right) \sim 0,$$

dus naar 7 en 12

$$2\alpha_1\alpha_2\ j^{2d} \sim 0$$

met j^{2d} als grondcocyclus van $S^d \times S^d$. Dus $\alpha_1 = 0$ of $\alpha_2 = 0$.

Nu is α_i niets anders dan de afbeeldingsgraad van f bekeken op $S^d_{(i)}$, want $j^d f \cap S^d_{(i)} = \alpha_i j^d_{(i)}$.

Dus geldt

Stelling: Er is geen continue afbeelding van $S^d_1 \times S^d_2$ in S^d (d even) waarbij beide factoren met een graad $\neq 0$ worden afgebeeld. - Of:

Een continue afbeelding in S_d, die op $S^d_1 \times b \cup a \times S^d_2$ gegeven is met graden $\neq 0$, kan niet in $S^d_1 \times S^d_2$ worden voortgezet.

Is een der graden 0, dan gaat dit wel. Naar XV, 10 mogen we namelijk f in $a \times S_2$ als constante afbeelding veronderstellen, en dan kunnen we van alle $p \varepsilon S^d_1$, $q \varepsilon S^d_2$ stellen: $f(p,q) = f(p,b)$.

Nog een andere formulering: Men vraagt zich af, of tussen de elementen van de S^d een continue vermenigvuldiging kan worden gedefinieerd, dus een product $p\, q \varepsilon S^d$ (voor alle paren p, $q \varepsilon S^d$), dat continu in beide factoren is. Zulk een product is nu niets anders dan een continue afbeelding van $S^d \times S^d$ in S^d.

Dit kan nu altijd op triviale manier, b.v.

$$pq = p \qquad \text{of } pq = q.$$

Het aantal oplossingen (algebraisch topologisch gesproken) van

$$px = r \qquad (p, r \text{ gegeven})$$

beantwoordt aan de afbeeldingsgraad van S_2, dat van

$$xq = r \qquad (q, r \text{ gegeven})$$

aan die van S_1. We zoeken nu een niet-triviale vermenigvuldiging, d.w.z. een waarbij die afbeeldingsgraden $\neq 0$ zijn en we weten:

Stelling: Voor even d is er geen niet triviale continue vermenigvuldiging in de S^d.

Daarentegen geldt:

Stelling: Voor elke oneven d is er een niet-triviale continue vermenigvuldiging in S^d.

Voorbeeld: p q is het spiegelpunt in S^d van q t.a.v. p. Houden we p vast, dan is $q \to pq$ een 1-1 afbeelding van S^d op zichzelf, dus van de graad ± 1. Houden we q vast dan wordt S^d bij $p \to pq$ twee keer overdekt, dus graad $= \pm 2$.

Men zou van de vermenigvuldiging nog kunnen eisen, dat zij een rechts één en een links één bezit. Hiervoor is noodzakelijk en voldoende, dat de afbeeldingsgraden ± 1 zijn.

Zo'n vermenigvuldiging bestaat in de

S^1 : vermenigvuldiging der complexe getallen van absolute waarde 1,

S^3 : " " quaternionen van absolute waarde 1,

S^7 : " " octaven van absolute waarde 1.

Deze vermenigvuldigingen zijn zelfs ééneénduidig.

Of er nog meer mogelijkheden zijn, is onbekend. Wel weet men, dat alleen de sferen van dimensie $= 2^{n-1}$ in aanmerking komen.

Correcties en Aanvullingen bij "Topologie"

p.11, Stelling 4, Bewijs 2e helft: Zij A en B afgesloten, $A \cap B = \square$.
We stellen:
U = verzameling van de x met $\rho(a,x) < \frac{1}{3}\rho(a,B)$ voor geschikte $a \varepsilon A$,
V = " " " y " $\rho(b,y) < \frac{1}{3}\rho(b,A)$ voor geschikte $b \varepsilon B$.
Dan zijn U en V omgevingen van A en B, en $U \cap V = \square$.

p.12, regel 12 v.o. : Inclusie-teken aanvullen.
" 8 " : Index van P is: $(2k+1).2^{-n-1}$.
" 5 " : Immers dat (i.p.v. Dat immers).

p.15, regel 4 v.o. : e_r i.p.v. e_n .

p.18, regel 8 v.b. : $a,b \varepsilon T(V \cap W)$
8-9 v.b.: Driekeer T(V) i.p.v. V en T(W) i.p.v. W.
20 v.b. : $\widetilde{P}'$.
23 " : achter "simplexen" inlassen (α).
15 v.o. : "dus" vervangen door $a_1' = a_2' \varepsilon T(V_1') \cap T(V_2') = T(V_1' \cap V_2')$, (omdat de simplexen van $\widetilde{P}$ netjes liggen). Dus
12 v.o. : achter "simplexen" inlassen (β), dan i.p.v. dat
11 v.o. : e tussen de laatste haakjes vervalt.
9 v.o. : $a' \varepsilon T(V_1')$.
8 v.o. : vóór "in" inlassen: $\varepsilon T(V_1') \cap T(V_2') = T(V_1' \cap V_2')$ (zie boven) = rechterlid.

p.19, no.4, regel 4 : een eindpunt.

p.21, regel 18 v.o. : $\alpha \rightarrow \beta$.

p.22, regel 6-5 v.o.: Volzin "Dan ... V'" vervangen door: We construeren een verzameling V, die van elk punt van V' precies één origineel bevat.
4 v.o. : εV en $\varepsilon V'$ vervallen.
3 " : $\square$ vervangen door: (a').
2 " : $\square$ " " : (a).

p.23, regel 2 v.b. : "op een andere ruimte" i.p.v. "in een compacte ruimte".
1 v.o. : "niet negatief" achter "continu".

p.24, regel 2 v.b. : "niet negatief" achter "zinvol".
6 v.b. : $= T_{n-1}$ inlassen achter $T(x_1, \ldots, x_n)$.

p.25, regel 7 v.b : 2 i.p.v. 1.

p.26, regel 12 v.b. : Inlassen: Dat ab continu van a,b afhangt, kan men ook als volgt uitdrukken: Bij gegeven omgeving U_{ab} van ab zijn er omgevingen U_a, U_b van a,b met $U_aU_b \subset U_{ab}$.

Dus in 't bijzonder: Bij elke omgeving U van e is er een omgeving V van e met $VV \subset U$.

Hieruit volgt: Elke topologische groep voldoet aan scheidingsaxioma 3.

Bewijs (zie vorm 3'): Gegeven een omgeving U van a, gevraagd een omgeving V van a met $\overline{V} \subset U$. Door het geheel met a^{-1} te vermenigvuldigen, kunnen we het terugbrengen tot a = e. We bepalen dan de omgeving V van e, zodat $VV \subset U$. Zij $c \varepsilon \overline{V}$. cV^{-1} is omgeving van c, dus is er een $b \varepsilon V \cap cV^{-1}$. Dan is $c \varepsilon bV \subset VV \subset U$. Dus $\overline{V} \subset U$.

p.26, aan het eind van regel 13 inlassen: Dan is G dus zelfs regulier. Het is voldoende, scheidingsaxioma 1 voor e te veronderstellen (d.w.z. (e) is afgesloten; vanzelf is dan elke eenpuntige verzameling afgesloten).

p.26, regel 16 v.b. : (e) i.p.v. (a).
25 " : "natuurlijke" i.p.v. "gehele".
22-23 : "Toon ... overdragen" vervalt.

p.27, regel 5-6 v.b.: = verzameling der $\Sigma \gamma_i \varepsilon_i$ met $\varepsilon_i = 0, \pm 1$.
10 v.b.: Achter inlassen: De $B(z,P)$ vormen een basis der open verzamelingen van G.
12 " : Achter "geschied" inlassen: Hiervoor is vooral nodig te bewijzen: Is $x \varepsilon B(z,P)$, dan is er een $B(x,Q) \subset B(z,P)$. Dat kan als volgt geschieden: Voor elke $\gamma \varepsilon \| x-z \|$ is er een U (omgeving van 0) zodat $\gamma + U \subset P$. De doorsnede van deze (eindig veel) U zij Q. Dus $\| x-z \| + Q \subset P$. Dus voor $y \varepsilon B(x,Q)$ geldt: $\| x-z \| + \| y-z \| \subset P$. Dus ook $\| z-y \| \subset P$, dus $y \varepsilon B(z,P)$.

p.28, einde van stelling 2: en gelijk is aan de n-de coördinaat van a.

p.29, stelling 5, bewijs, 1e regel ... van een dalende rij niet lege ...

p.30, Einde van 3: Gegeven een dubbelrij

$$f^{m_1m_2}_{n_1n_2} R_{m_1m_2} \subset R_{n_1n_2}\ , \quad m_1 \geq n_1, m_2 \geq n_2, \quad m_1+m_2 > n_1+n_2,$$

$$f^{m_1m_2}_{n_1n_2} f^{b_1b_2}_{m_1m_2} = f^{l_1l_2}_{n_1n_2}\ ,$$

dan zijn de ruimten

$$\lim_{n_1} \lim_{n_2} R_{n_1n_2}\ , \quad \lim_{n_2} \lim_{n_1} R_{n_1n_2}\ , \quad \lim_{n} R_{nn}$$

homeomorf.

$$\begin{array}{ccccccc}
R_{11} & \longleftarrow & R_{12} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & R_1 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
R_{21} & \longleftarrow & R_{22} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & R_2 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
R_{01} & \longleftarrow & R_{02} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & R_{nn}
\end{array}$$

We bedoelen dit als volgt: De gegeven afbeeldingen induceren er één van $R_k = \lim\limits_{n} R_{kn}$ in $R_l = \lim R_{ln}$, genaamd

$$f^k_l = \lim_n f^k_{ln} = \lim_n \lim_m f^{km}_{ln}\ .$$

De R_k vormen nu ook weer een I_n-adische rij met

$$R = \lim_l R_l$$

$$f_l = \lim_k f^k_l$$

$$f_{ln} = f^p_{ln} f_p\ .$$

De ruimten R_{nn} vormen eveneens zo'n rij met limiet R'. f_{nn} beelden R in de rij R_{nn} af, waardoor een afbeelding van R in R' wordt geïnduceerd, d.w.z. aan $a\varepsilon R$ wordt dat punt $a'\varepsilon R'$ toegevoegd, waarvan de nn-de coördinaat (voor alle n) $f_{nn}a$ is. We tonen aan, dat deze afbeelding ook in de omgekeerde zin eenduidig en continu is.

We stellen $a_{ln} = f^{nn}_{ln} a_{nn}$. Door $a' \to a_{ln}$ (nu vaste n) wordt R' in de rij R_{ln} afgebeeld, dus ook in de limiet, R_l, waarbij $a \to a_l$. Dus is R' in de rij R_l afgebeeld dus in de limiet, R, en dat is net de omgekeerde van de afbeelding waar we van uitgingen. – Analoog de homeomorfie van R' en $\lim\limits_{n_1} \lim\limits_{n_2} R_{n_1n_2}$.

p.31, regel 8 v.b. ;achter "bezitten". Dus $O = \bigcup f^l O_l$.
no.5, regel 2 : homomorfismen.

p.32, regel 4 einde : onderling vreemde

p.34, regel 4, achter "elke": eenpuntige verzameling en elke
regel 19, achter "deze" : eindige.

p.35, regel 5 : "door" i.p.v. "dan".

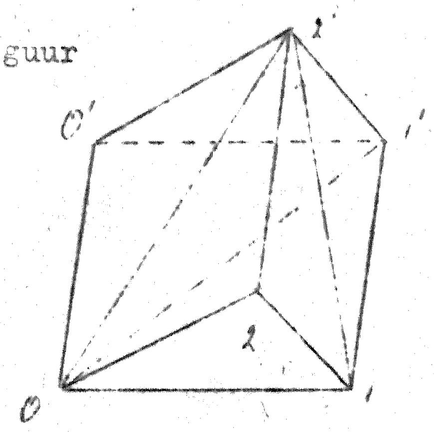
p.36, regel 2-3 : 1 achter Σ door komma vervangen.

p.37, na regel 3:

J_d als kern van ζ is afgesloten in K_d. H_d als ζ-beeld van K_{d+1} hoeft niet afgesloten te zijn. Wel is dit zo, wanneer men met compacte groepen heeft te maken, hetgeen bij ons het geval is. Dan is $G_d = J_d | H_d$ een behoorlijke groep.

p.37, regel 9 : Is P een omgeving van O in Γ, ...

p.38 : Ontbreekt de figuur



p.38 : Tussen regel 9 en 10 v.o. ontbreekt $\Pi(k_d)$ wordt gedefinieerd door $\Pi(\Sigma\alpha(t_d)t_d) = \Sigma\alpha(t_d)\,\Pi(t_d)$.

p.38, regel 9 v.o. : Onder Σ-teken ontbreekt : $\leqq$
" 8 " : " " " " : $\geqq$

p.39, regel 1, 2, 3, 4 : Onder Σ-teken ontbreekt
- regel 1: $<$
- regel 2: $>$
- regel 3: $>$
- regel 4: $<$

p.39, IX.1. R zij een separabele compacte ...
regel 12 v.o.: $G_{d,\varepsilon,\eta}$

p.40, regel 1-2 : ontbreken twee schuine pijlen, de één van onderen naar boven, de andere omgekeerd.
regel 6 v.o.: $\dot{\zeta}_n$
regel 1-2 v.o.: g_n hoort bij de schuine pijl en bij de horizontale pijl eronder.