

Hoofdstuk 1

Inleiding

1. Een coördinatenstelsel op een rechte lijn is bepaald door een punt O (de oorsprong), een positieve richting op de lijn en een lengte-eenheid. De coördinaat p van P is de lengte van OP , uitgedrukt in die lengte-eenheid, en voorzien van het teken $+$ of $-$, al naar OP in positieve of negatieve richting loopt.

Onder de maat van het lijnstuk AB of $m(AB)$ verstaan wij het getal $b-a$, waarin a de coördinaat van A en b die van B is. Men heeft $m(AB) = -m(BA)$ en $m(AB) + m(BC) = m(AC)$. $m(AB)$ hangt niet van O af maar wel van de positieve richting op de lijn en van de lengte-eenheid.

Laat op ieder der lijnen l en m een positieve richting gegeven zijn en laat φ de hoek zijn, waarover de positieve richting van l in positieve richting moet draaien om met de positieve richting van m samen te vallen. Is AB een lijnstuk op m en $A'B'$ de projectie op l , dan is $m(A'B') = m(AB) \cos \varphi$. Is BC een lijnstuk op n en ψ de hoek tussen de positieve richtingen van l en n , dan is $m(AB) \cos \varphi + m(BC) \cos \psi = m(A'C')$. De lijnen l, m en n behoeven niet in een vlak te liggen.

1 Een stelsel poolcoördinaten in het platte vlak is bepaald door een punt O (de oorsprong), een lijn OX (de poolas) met positieve richting en een lengte-eenheid.

De poolcoördinaten van een punt P worden als volgt bepaald. Kies op OP een positieve richting; laat φ de hoek zijn tussen de positieve richtingen van OX en OP , terwijl $r = m(OP)$. r en φ zijn de poolcoördinaten van P .

$$P(r, \varphi) = P(r, \varphi + k \cdot 360^\circ) = P(-r, \varphi + 180^\circ).$$

O heeft de poolcoördinaten $(0, \varphi)$; φ willekeurig. De poolcoördinaten van een punt zijn dus niet eenduidig bepaald; omgekeerd is een punt door zijn poolcoördinaten wel eenduidig bepaald. Men kan de poolcoördinaten eenduidig maken (behalve voor O) door de voorschriften $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 360^\circ$. Wij gebruiken meerduidige poolcoördinaten.

Toepassing op de kegelsneden. Neem O in het brandpunt. $OA = d$. $OP = e \cdot PQ$.

$$r = e(d - r \cos \varphi). \quad (1)$$

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \varphi} = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (2)$$

Overgang op rechthoekige coördinaten:

$$\text{Uit (1): } r = p - ex.$$

Kwadrateren en herleiden geeft:

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ waarin } a = \frac{p}{1-e^2},$$

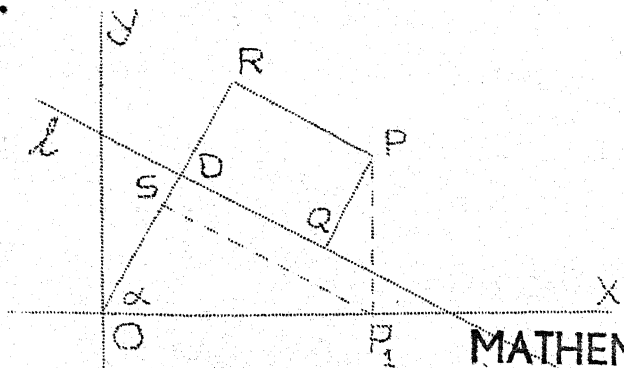
$$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \quad c = \frac{pe}{1-e^2}.$$

Hieruit volgt $p = \frac{b^2}{c}$, $d = \frac{b^2}{c}$, $e = \frac{c}{a}$.

Coördinatentransformatie tussen poolcoördinaten en rechthoekige coördinaten met dezelfde oorsprong op X -as.

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{ (kwadrant uit } \cos \varphi = \frac{x}{r} \text{).}$$

1.



Laat l een willekeurige lijn zijn, $P(p_1, p_2)$ een willekeurig punt,

D de projectie van O op l .

Laat (d, α) een stel poolcoördinaten van D zijn. Wij bepalen nog de projecties van P en P_1 op OD (R en S).

Volgens §1.3 is

$$m(OR) = p_1 \cos \alpha + p_2 \cos(\alpha - 90^\circ).$$

$$d + m(DR) = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha$$

$$m(OP) = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha - d \quad (1')$$

Nodig en voldoende opdat P op l ligt, is $m(P)=0$

$$x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha - 1 = 0 \quad (2)$$

(2) is de vergelijking van l. Men mag (2) met een willekeurig getal vermenigvuldigen.

$$ax_1 + bx_2 = c \quad (3)$$

Deelt men (3) door $\sqrt{a^2 + b^2}$, dan ontstaat (2) weer.

(2) heet de normaalvorm van Hesse van de vergelijking.

Uit (1) volgt:

Stelling. De afstand van een punt tot een lijn wordt gevonden door de coördinaten van het punt te substitueren in het eerste lid van de vergelijking van die lijn in normaalvorm. Hierbij is de afstand aan één zijde van l positief, aan de andere negatief gerekend.

§4. 1. Een Cartesisch coördinatenstelsel in de ruimte wordt bepaald door drie onderling loodrechte assen OX, OY, OZ, ieder met een positieve richting en een lengte-eenheid. Zijn P_1, P_2, P_3 de projecties van P op de assen, dan zijn de coördinaten van P:

$$m(OP_1)=p_1, m(OP_2)=p_2, m(OP_3)=p_3.$$

De afbeelding tussen punten en coördinaten-trekkallen is een-eenduidig.

2. Is op OP een positieve richting gegeven, die met OX, OY, OZ de hoeken α, β, γ maakt, dan is $\cos \alpha = p_1 : m(OP)$ enz.

Daar $m(OP)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, heeft men

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1)$$

Men kan P ook bepalen door de coördinaten α, β, γ en $m(OP)=r$ (pool-coördinaten in de ruimte). Deze coördinaten zijn niet onafhankelijk, daar de betrekking (1) er voor moet gelden.

3. Laat π een willekeurig vlak zijn, P een willekeurig punt (p_1, p_2, p_3) . D de projectie van O op π , Q de projectie van P op π . Laat (α, β, γ) een stel poolcoördinaten van D zijn. Is R de projectie van P op OD, dan geldt volgens §1.3 :

$$m(OR) = p_1 \cos \alpha + p_2 \cos \beta + p_3 \cos \gamma.$$

Evenals in §4.1 volgt hieruit

$$m(QP) = p_1 \cos \alpha + p_2 \cos \beta + p_3 \cos \gamma - d. \quad (2)$$

P ligt in π als p_1, p_2, p_3 voldoen aan

$$x_1 \cos \alpha + x_2 \cos \beta + x_3 \cos \gamma - 1 = 0 \quad (3)$$

Dit is de vergelijking van π in de normaalvorm.

Een willekeurige vergelijking van de eerste graad

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = f \quad (4)$$

brengt men, door ze door $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ te delen, op de vorm (3). Iedere vergelijking van de eerste graad stelt dus een plat vlak voor. Uit (2) volgt:

Stelling. De afstand van een punt tot een vlak wordt gevonden, door de coördinaten van het punt te substitueren in het eerste lid van de vergelijking van het vlak in normaalvorm. Hierbij is de afstand aan één zijde van het vlak positief, aan de andere zijde negatief gerekend.

Hoofdstuk 2

Vecterrekening

§5. 1. Bepalingen.

De vector $\vec{AB}$ is het gerichte lijnstuk AB.

$\vec{AB} = \vec{CD}$, als $AB \parallel CD$ en $m(AB) = m(CD)$.

$\vec{OB} = p \cdot \vec{OA}$ als OB langs OA valt en $m(OB) = p \cdot m(OA)$.

De som van twee vectoren wordt gedefinieerd door $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Stellingen. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. (commutatieve eigenschap)

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. (associatieve eigenschap)

$p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a}$ $(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$ $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$.

Al deze eigenschappen zijn eenvoudig uit een figuur af te lezen.

Zijn $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ twee niet evenwijdige vectoren in een plat vlak, dan is iedere vector $\vec{a}$ in dat vlak te schrijven als $a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Is $\vec{a} = \vec{0}$, en zijn $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ eenheidsvectoren langs OX en OY, dan zijn a_1 en a_2 de coördinaten van A. a_1 en a_2 heten de componenten van $\vec{a}$. Door drie vectoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ te beschouwen, die niet in een plat vlak liggen, breidt men het voorgaande uit in de ruimte:

$$\vec{p} = p(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) = p \cdot a_1\vec{e}_1 + p \cdot a_2\vec{e}_2 + p \cdot a_3\vec{e}_3.$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3.$$

Uit deze formules volgt:

Een vector wordt met een getal vermenigvuldigd, door elk van zijn componenten met dat getal te vermenigvuldigen.
Twee vectoren worden opgeteld, door hun overeenkomstige componenten op te tellen.

1. Parametervoorstelling van een rechte lijn l:

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} \tag{1}$$

$P(\vec{p})$ is een punt van l, $\vec{a}$ een vector $\parallel$ l. Is $Q(\vec{q})$ een tweede punt van l, dan kan men $\vec{a} = \vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ nemen; zo ontstaat

$$\vec{x} = (1 - \lambda)\vec{p} + \lambda \vec{q}. \tag{2}$$

$$\lambda = \frac{n(PX)}{n(PQ)}$$

Parametervoorstelling van een plat vlak α :

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \tag{3}$$

$P(\vec{p})$ is een punt in α ; $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn vectoren $\parallel \alpha$, maar niet onderling evenwijdig. Zijn Q en R twee punten in α , niet collineair met P, dan vindt men

$$\vec{x} = (1 - \lambda - \mu)\vec{p} + \lambda \vec{q} + \mu \vec{r} \tag{4}$$

1. De projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$ is $\text{proj. } \vec{b} = b_1 \text{proj. } \vec{e}_1 + b_2 \text{proj. } \vec{e}_2 + b_3 \text{proj. } \vec{e}_3 = b_1 \cos \alpha_1 + b_2 \cos \alpha_2 + b_3 \cos \alpha_3$, waarin $\alpha_1 =$ de hoek tussen $\vec{e}_1$ en $\vec{a}$.

Is $|\vec{a}|$ de lengte van $\vec{a}$, dan is $|\vec{a}| \cos \alpha_1 = a_1$

Is φ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$, dan vinden wij

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{1}$$

Bepaling. Ieder der leden van (1) heet het inwendig product van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en wordt geschreven als $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Volgens §4.3 kan de vergelijking van een vlak geschreven worden als $\vec{a} \cdot \vec{x} = c$

waarin $\vec{a}$ een normaalvector van het vlak is. Analogie in de vlakke meetkunde voor de vergelijking van een rechte lijn.

$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$; ook geschreven als $\vec{a}^2$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ betekent: of $\vec{a} = \vec{0}$ (de nulvector), of $\vec{b} = \vec{0}$, of $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Stelling. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
 $(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

1. In het platte vlak is nodig en voldoende, opdat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ evenwijdig zijn, dat $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

Een paar niet evenwijdige vectoren $\vec{a}, \vec{b}$ kan door geleidelijke verandering, waarbij de vectoren nooit evenwijdig worden, overgevoerd worden:

in $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ als $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$; in $(\vec{e}_1, -\vec{e}_2)$ als $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} < 0$.

Bepalingen.

In het eerste geval heet het paar $\vec{a}, \vec{b}$ positief georiënteerd, in het tweede negatief georiënteerd.

De oriëntering van driehoek ABC is dezelfde als die van het vectorpaar $\vec{AB}, \vec{AC}$; zij hangt dus af van het teken van

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ABC, BCA en CAB zijn gelijk georiënteerd, maar tegengesteld met ACB, CBA en BAC.

2. In de ruimte is nodig en voldoende, opdat drie vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ evenwijdig zijn met een vlak, dat

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Analoog met het platte vlak wordt de oriëntering van een vectordrietal bepaald door het teken van de determinant.

De oriëntering van viervlak ABCD is dezelfde als die van de vectoren $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$. Zij hangt af van het teken van

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

3. Onderwerpt men A, B, C, D aan een even permutatie, dan blijft de oriëntering dezelfde; bij een oneven permutatie gaat zij in de tegengestelde over. Door de oriëntering van viervlak ABCD is als volgt een oriëntering van ieder zijvlak vastgelegd: Breng door een even permutatie het overstaande hoekpunt achteraan en laat het dan weg. Bij ABCD behoren dus de oriënteringen ABC, ADB, ACD, CBD.

§9. Het oppervlak van driehoek ABC is

$$\frac{1}{2} |\vec{b} - \vec{a}| \cdot |\vec{c} - \vec{a}| \cdot \sin \varphi,$$

als φ de hoek BAC is

Stel $\vec{b} - \vec{a} = \vec{p}$, $\vec{c} - \vec{a} = \vec{q}$.

$$\frac{1}{2} |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{p_2^2 + p_3^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ q_3 & q_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}^2}$$

Bepaling. $\vec{p} \times \vec{q}$ is de vector $\left(\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ q_3 & q_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right)$.

(uitwendig product)

Moetkundige betekenis:

$|\vec{p} \times \vec{q}| = 2 \times \text{oppervlak driehoek ABC}$. $\vec{p} \times \vec{q}$ is loodrecht op $\vec{p}$ en op $\vec{q}$.

Het drietal vectoren $\vec{p}, \vec{q}, \vec{p} \times \vec{q}$ is positief georiënteerd.

$\vec{p} \times \vec{q} = 0$ betekent, dat of $\vec{p} = 0$ of $\vec{q} = 0$, of $\vec{p}$ en $\vec{q}$ zijn evenwijdig.

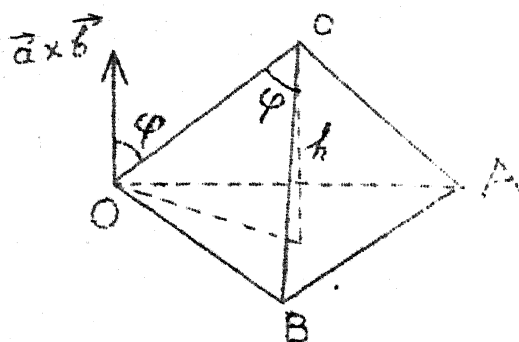
Stellingen 1. $\vec{p} \times \vec{q} = -\vec{q} \times \vec{p}$. $(k\vec{p}) \times \vec{q} = k(\vec{p} \times \vec{q})$

$$2. \vec{p} \times (\vec{q} + \vec{r}) = \vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{r}.$$

$$3. \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{a}_3, \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \vec{a}_1, \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \vec{a}_2$$

$$4. \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

10. Inhoud van een viervlak $OA=a, OB=b, OC=c$.



$$V = \frac{1}{3} h \cdot O(\triangle OAB) =$$

$$= \frac{1}{6} |\vec{c}| \cos \varphi |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Bepaling. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ heet het oind-product van $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en wordt geschreven als $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Dikwijls kent men aan I een positief of negatief teken toe, zodanig dat $I = \frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. De inhoud van een positief georiënteerd viervlak OABC is positief, die van een negatief georiënteerd viervlak negatief.
 Overzicht van de rekenregels met vectoren.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$
4. $(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$
5. $p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a}$
6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
7. $(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$
8. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
9. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
10. $(p\vec{a}) \times \vec{b} = p(\vec{a} \times \vec{b})$
11. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
12. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
13. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Uit 13 en 12 volgt:

14. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$
15. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d} = (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a})\vec{b} - (\vec{c}, \vec{d}, \vec{b})\vec{a}$

Bijzonder geval van 14: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

§12. Bepaling van afstanden.

1. Afstand van $P(\vec{p})$ tot $l(\vec{x} = \vec{q} + \lambda \vec{a})$.

Eerste oplossing: Vlak door P l: $\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$.

Snijpunt met l : $R(\vec{r} = \vec{q} + \frac{\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{q})}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a})$

$$d^2 = (\vec{p} - \vec{q})^2 - \frac{\{\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{q})\}^2}{\vec{a}^2}$$

Tweede oplossing: De loodlijn uit P op l heeft de richting van

$\vec{a} \times \{\vec{a} \times (\vec{p} - \vec{q})\}$, dus de parametervoorstelling

$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} \times \{\vec{a} \times (\vec{p} - \vec{q})\}$ De lengte is $\frac{|\vec{a} \times (\vec{p} - \vec{q})|}{|\vec{a}|}$, dus in R is $\lambda = \frac{1}{\vec{a}^2}$.

Opgave. Laat zien dat beide oplossingen tot hetzelfde resultaat voeren.

2. Loodrechte afstand tussen $l(\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a})$ en $m(\vec{x} = \vec{q} + \mu \vec{b})$.

Zoek waarden voor λ en μ zodat

$$(\vec{p} + \lambda \vec{a}) - (\vec{q} + \mu \vec{b}) = \nu (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\lambda \vec{a} - \mu \vec{b} - \nu (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{q} - \vec{p}$$

$$\lambda \vec{a}^2 - \mu (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{q} - \vec{p})$$

$$\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) - \mu \vec{b}^2 = \vec{b} \cdot (\vec{q} - \vec{p})$$

Hieruit:

$$\lambda = \frac{(\vec{q} - \vec{p}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{a} \times \vec{b})^2}$$

De lengte der loodlijn is $\frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{q} - \vec{p})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$.

Hoofdstuk 3

Toepassingen der determinanten

13. Vlakke meetkunde.

Bepaling. De kleine matrix van een stelsel lineaire vergelijkingen is de matrix gevormd uit de coëfficiënten der onbekenden. De grote matrix ontstaat uit de kleine matrix, door er de kolom der bekende termen achter te zetten.

Twee lijnen: $a_1x_1 + a_2x_2 = a_0$
 $b_1x_1 + b_2x_2 = b_0$

Rang kleine matrix	Rang grote matrix	Ligging
2	2	snijgend
1	2	evenwijdig
1	1	samenvallend
<u>Drie lijnen.</u>		
2	3	twee snijgend, derde niet door snijpunt
2	2	een punt gemeen
1	2	alle evenwijdig, niet alle samenvallend
1	1	alle samenvallend

14. Ruimte meetkunde.

Twee vlakken - als twee lijnen.

Drie vlakken.

3	3	een punt gemeen
2	3	twee snijgend, derde evenwijdig met snijlijn
2	2	twee snijgend, derde door snijlijn
1	2	alle evenwijdig, niet alle samenvallend
1	1	alle samenvallend

Opgave. Maak een dergelijke tabel voor vier vlakken.

15. Bundels. Gegeven twee snijdend lijnen: $L \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$ $M \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_0 = 0$

$\lambda L + \mu M = 0$ stelt een lijn voor door het snijpunt S. Is $P(\vec{p})$ een willekeurig van S verschillend punt, dan is de vergelijking van PS:

$$(b_1p_1 + b_2p_2 + b_0)(a_1x_1 + a_2x_2 + a_0) - (a_1p_1 + a_2p_2 + a_0)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_0) = 0$$

$\lambda L + \mu M = 0$ stelt dus iedere lijn door S voor; het is de vergelijking van de lijnenbundel om S.

Opgave: Stel de vergelijking op van de vlakkenbundel, bestaande uit alle vlakken door de snijlijn van twee gegeven snijdende vlakken.

16. 1. Vlakken schoof. Zijn drie vlakken gegeven die een punt S gemeen hebben, $\vec{a} \cdot \vec{x} + a_0 = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + b_0 = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{x} + c_0 = 0$, dan stelt

$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{x} + a_0) + \mu(\vec{b} \cdot \vec{x} + b_0) + \nu(\vec{c} \cdot \vec{x} + c_0) = 0$ een willekeurig vlak door S voor (vergelijking van de vlakken schoof om S).

2. Gegeven drie vlakken die een punt gemeen hebben:

$$\vec{a} \cdot \vec{x} + a_0 = 0 \quad \vec{b} \cdot \vec{x} + b_0 = 0 \quad \vec{c} \cdot \vec{x} + c_0 = 0$$

De voorwaarde opdat het vlak $\vec{d} \cdot \vec{x} + d_0 = 0$ door het snijpunt gaat,

luidt:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_0 \end{vmatrix} = 0$$

Zijn twee snijdende vlakken gegeven: $\vec{a} \cdot \vec{x} + a_0 = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + b_0 = 0$, dan zal het vlak $\vec{c} \cdot \vec{x} + c_0 = 0$ hun snijlijn bevatten, als de

rang van de volgende matrix twee is:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix};$$

17. Zijn $P(p_1, p_2)$ en $Q(q_1, q_2)$ twee verschillende punten in het platte vlak, dan is de vergelijking van de lijn PQ:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

Zijn P, Q, R drie punten in de ruimte, die niet op een rechte lijn liggen, dan is de vergelijking van het vlak PQR:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & q_1 & q_2 & q_3 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

Hoofdstuk 4

Cirkel en bol

§18. Imaginaire punten, lijnen en vlakken.

1. Bepaling. Een imaginair punt in het platte vlak is een geordend paar complexe getallen ($a_1 + a_1' i, a_2 + a_2' i$); de beide getallen heten de coördinaten van het punt. Een imaginaire rechte lijn is de verzameling der (reële of imaginaire) punten, waarvan de coördinaten aan een vergelijking van de eerste graad met complexe coëfficiënten voldoen. Alle stellingen, die voor hun bewijs slechts de oplossing van lineaire vergelijkingen nodig hebben gelden ook voor imaginaire punten en lijnen. Dit geldt niet meer voor stellingen over hoeken en afstanden. Twee punten heten toegevoegd complex, als hun overeenkomstige coördinaten toegevoegd complex zijn. Twee lijnen met toegevoegd complex vergelijkingen heten eveneens toegevoegd complex. Ligt een punt op een lijn, dan ligt het toegevoegd complexe punt op de toegevoegd complexe lijn.

De verbindingslijn van twee toegevoegd complexe punten is reëel; eveneens het snijpunt van twee toegevoegd complexe lijnen.

2. Bepalingen. Een imaginair punt in de ruimte is een geordend drietal complexe getallen ($a_1 + a_1' i, a_2 + a_2' i, a_3 + a_3' i$).

Een imaginaire lijn is gegeven door de parameterstelling $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$, waarin de vectoren complex zijn.

Een plat vlak is gegeven door de vergelijking $\vec{a} \cdot \vec{x} = c$, waarin $\vec{a}$ en c complex zijn. Het toegevoegd complexe punt van P is $\bar{P}$; evenzo voor lijnen en vlakken.

Stellingen. Ligt P op l , dan ligt $\bar{P}$ op $\bar{l}$; ligt P in α , dan ligt $\bar{P}$ in $\bar{\alpha}$. Door ieder complex punt gaat een reële lijn en een bundel reële vlakken. In ieder complex vlak ligt een reële lijn, of het vlak is evenwijdig met een reëel vlak.

Bepaling. Een imaginaire lijn, waardoor een reëel vlak gaat, heet onvolmaakt imaginair.

Stellingen. Een onvolmaakt imaginair lijn bevat een reëel punt of is evenwijdig met een reële lijn. Omgekeerd: een imaginaire lijn, die een reëel punt bevat of evenwijdig is met een reële lijn, is onvolmaakt imaginair.

§19. De cirkel.

1. De vergelijking van de cirkel (M, r) is $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ (1)

$$\text{of } x_1^2 + x_2^2 - 2m_1x_1 - 2m_2x_2 + c = 0 \quad (2)$$

$$c = m_1^2 + m_2^2 - r^2$$

$$\text{of } a(x_1^2 + x_2^2) + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + d = 0 \quad (3)$$

(1) of (2) heet de normaalvergelijking van de cirkel. De vergelijking van de cirkel door drie punten A, B, C , niet op een rechte lijn luidt:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 \\ a_1^2 + a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Is $r \leq 0$ of imaginair, of M imaginair, dan dient vergelijking (1) als definitie van cirkel (M, r) . Wij onderstellen M en r steeds reëel. De cirkel met straal 0: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = 0$ is ontwaard in de lijnen $x_2 - m_2 = \pm i(x_1 - m_1)$. Een lijn met richtingscoëfficiënt $\pm i$ heet isotroop.

2. Snijpunten van de lijn 1 ($\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$; $|\vec{a}| = 1$) met de cirkel (1). Substitutie geeft:

$$\begin{aligned} (\vec{p} + \lambda \vec{a} - \vec{m})^2 &= r^2 \\ \lambda^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{m}) + (\vec{p} - \vec{m})^2 - r^2 &= 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= (\vec{p} - \vec{m})^2 - r^2 \end{aligned}$$

Zijn S_1 en S_2 de snijpunten, dan volgt hieruit:

$$m(PS_1) \cdot m(PS_2) = (\vec{p} - \vec{m})^2 - r^2$$

$m(PS_1) \cdot m(PS_2)$ heet de macht van P t.o.v. de cirkel.

Stelling. De macht van P ten opzichte van een cirkel wordt gevonden door de coördinaten van P te substitueren in het linkerlid van de op nul herleide normaalvergelijking van de cirkel.

3. Gegeven de cirkels C_1 ($\vec{x}^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{x} + c = 0$)
 C_2 ($\vec{x}^2 - 2\vec{n} \cdot \vec{x} + d = 0$)

De vergelijking $2(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{x} - (c - d) = 0$ stelt een rechte lijn 1 voor; 1 is de meetkundige plaats der punten met gelijke machten t.o.v. C_1 en C_2 (machtlijn); 1 gaat door de snijpunten van C_1 en C_2 en staat loodrecht op de contraal MN .

$\lambda C_1 + (1 - \lambda) C_2 = 0$ is voor elke waarde van λ de normaalvergelijking van een cirkel door de snijpunten van C_1 en C_2 ; deze cirkels vormen een cirkelbundel. Twee willekeurige cirkels uit de bundel hebben 1 tot machtlijn.

Er zijn 4 soorten cirkelbundels:

- I C_1 en C_2 snijden elkaar in twee reële punten (basispunten).
- II C_1 en C_2 snijden elkaar in twee toegevoegd complexe punten. De bundel bevat twee reële cirkels met straal 0.
- III C_1 en C_2 raken elkaar. Alle cirkels raken elkaar in hetzelfde punt.
- IV C_1 en C_2 zijn concentrisch. Alle cirkels van de bundel zijn concentrisch.

4. Beeldt men cirkel (2) af op het punt $(m_1, m_2, 0)$, dan ontstaat een eeneenduidige afbeelding tussen de cirkels in het vlak en de punten in de ruimte. Hierbij correspondeert een cirkelbundel met een rechte lijn en omgekeerd.

De cirkel C_1 (M, r) of $(\vec{x}^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{x} + c = 0)$ snijdt de cirkel C (P, s) of $(\vec{x}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{x} + f = 0)$ loodrecht, als $(\vec{m} - \vec{p})^2 = r^2 + s^2$ of $\vec{m}^2 - r^2 + \vec{p}^2 - s^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{p} = 0$ of $2m_1 p_1 + 2m_2 p_2 - f = c$ (4)

Evenzo luidt de voorwaarde, dat C_2 ($\vec{x}^2 - 2\vec{n} \cdot \vec{x} + d = 0$) cirkel C loodrecht snijdt: $2n_1 p_1 + 2n_2 p_2 - f = d$ (5)

Beschouwen wij C_1 en C_2 als gegeven, C als veranderlijk, zodat p_1, p_2 en f lopende coördinaten zijn, dan stellen (4) en (5) vlakken in de ruimte voor; is $M \neq N$, dan zijn het snijdende vlakken. Hun snijlijn beeldt de cirkels af, die C_1 en C_2 loodrecht snijden.

Stelling. De cirkels, die twee niet concentrische cirkels C_1 en C_2 loodrecht snijden vormen een bundel β .

Iedere cirkel uit β snijdt iedere cirkel uit de bundel, door C_1 en

- C_2 bepaald, loodrecht; zo behoort bij iedere niet concentrische cirkelbundel α een loodrechte bundel β . Is α van type I, dan is β van type II en omgekeerd. De basispunten van α zijn de nulcirkels van β en omgekeerd. Is α van type III, dan ook β .
5. Alle cirkels, die cirkel C loodrecht snijden, worden afgebeeld op het vlak (4). Zij vormen een cirkelnet. M heeft gelijke macht ten opzichte van alle cirkels van het net (machtput).

Gaat men uit van een parametervoorstelling van het vlak (4), dan vindt men voor de vergelijking van het net:

$$\lambda C_1 + \mu C_2 + (1 - \lambda - \mu) C_3 = 0; \quad (6)$$

Hierin zijn C_1, C_2, C_3 drie cirkels uit het net, die niet tot een bundel behoren.

Er zijn vier soorten cirkelnetten: behalve de drie typen, waarvan de orthogonaalcirkel een straal heeft, die positief, imaginair en nul is, nog het net, bestaande uit alle cirkels, waarvan het middelpunt op een gegeven lijn ligt.

20. De bol.

1. De theorie van de bol is voor een groot deel analoog aan die van de cirkel. Vergelijking (1) uit § 19 geldt ook hier.

Opgaven. 1. Breng de vergelijking van een bol op de vormen, analoog met (2) en (3) uit § 19.

2. Leid de vergelijking af van de bol door vier punten, die niet in een plat vlak liggen.

Een bol met straal nul en het middelpunt in O heeft tot vergelijking

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \text{ Voldoet hieraan } P(p_1, p_2, p_3) \text{ dan voldoet ook}$$

$(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3)$ dus ieder punt van de lijn OP. De "bol" is een kegel met O als top en imaginaire beschrijvende. Hetzelfde geldt voor een bol met straal nul, waarvan de top niet in O ligt. De beschrijvende van deze kegels heten isotrope lijnen.

2. Voor de macht van een punt ten opzichte van een bol geldt dezelfde stelling als bij de cirkel: Twee bollen hebben een machtvlak. De theorie van de bollenbundels is geheel analoog aan die van de cirkelbundels.

Opgave. 3. Werk dit alles uit aan de hand van § 19, no. 2 en 3.

3. De voorwaarde opdat de bollen

$$(B) \vec{x}^2 - 2\vec{m} \cdot \vec{x} + c = 0 \text{ en } (B_1) \vec{x}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{x} + f = 0$$

elkaar loodrecht snijden, luidt:

$$2m_1 p_1 + 2m_2 p_2 + 2m_3 p_3 - c - f = 0 \quad (1)$$

Uit (1) volgt:

Stellingen. Snijdt de bol B de bollen B_1 en B_2 loodrecht, dan snijdt, dan snijdt B alle bollen van de bundel B_1, B_2, B_3 , die niet tot een bundel behoren loodrecht, dan snijdt B alle bollen van het volgende bollennet loodrecht:

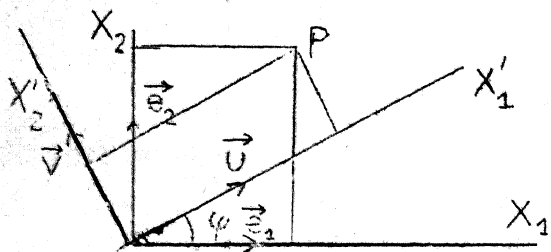
$$\lambda B_1 + \mu B_2 + (1 - \lambda - \mu) B_3 = 0$$

Snijdt de bol B de bollen B_1, B_2, B_3, B_4 , die niet tot een bollennet behoren loodrecht, dan snijdt B elke bol van de volgende bollenchoof loodrecht:

$$\lambda B_1 + \mu B_2 + \nu B_3 + (1 - \lambda - \mu - \nu) B_4 = 0$$

Hoofdstuk 5

Coördinatentransformaties en verplaatsingen in het platte vlak



21. 1. Draaiing van het coördinatensysteem.

Voor twee onderling loodrechte eenheidsvectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ als nieuwe grondvectoren in.

$$\vec{u} = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi$$

$$\vec{v} = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi$$

$$\vec{p} = p_1' \vec{u} + p_2' \vec{v} = (p_1' \cos \varphi - p_2' \sin \varphi) \vec{e}_1 + (p_1' \sin \varphi + p_2' \cos \varphi) \vec{e}_2$$

dus de coördinatentransformatie luidt:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cos \varphi - x_2' \sin \varphi \\ x_2 = x_1' \sin \varphi + x_2' \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

2. Verschuiving van het coördinatensysteem.

Wordt O verschoven naar O' (a, b), dan is

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + a \\ x_2 = x_2' + b \end{cases} \quad (2)$$

3. Algemene rechthoekige coördinatentransformatie.

Voer eerst een verschuiving, daarna een draaiing van het coördinatensysteem uit.

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cos \varphi - x_2' \sin \varphi + a \\ x_2 = x_1' \sin \varphi + x_2' \cos \varphi + b \end{cases} \quad (3)$$

22. Verplaatsingen van het vlak.

Laat door een verplaatsing het punt P overgaan in het punt Q. Wordt het coördinatensysteem mee verplaatst, dan zijn de coördinaten van Q in het nieuwe stelsel gelijk aan die van P in het oude.

Uit (3) volgt dus:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi + a \\ y_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi + b \end{cases} \quad (4)$$

Opmerking. In (3) betekenen x_1' en x_2' de coördinaten van het punt (x_1, x_2) in een ander coördinatensysteem. In (4) betekenen y_1 en y_2 de coördinaten van een ander punt in hetzelfde coördinatensysteem.

(4) heet een punttransformatie of transformatie van het vlak in zichzelf.

Opgave. Schrijf de transformatieformules uit: a) voor een draaiing om O; b) voor een parallelverschuiving.

23. Scheefhoekige coördinaten.

In 21 kunnen wij voor $\vec{u}$ en $\vec{v}$ ook twee willekeurige onafhankelijke vectoren nemen. (3) wordt dan:

$$\begin{cases} x_1 = u_1 x_1' + v_1 x_2' + a \\ x_2 = u_2 x_1' + v_2 x_2' + b \end{cases} \quad (5)$$

Is $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$, dan zijn x_1' en x_2' scheefhoekige coördinaten; anders algemene affiene coördinaten.

24. De algemene vergelijking van de tweede graad. (rechtthoekige coördinaten)

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}x_2 + a_{00} = 0 \quad (6)$$

Voert men hierin de coördinatentransformatie (1) uit, dan vindt men als coëfficiënt van $x_1'x_2'$:

$$b_{12} = -2a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + 2a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2a_{22}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\text{Dus } b_{12} = 0, \text{ als } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (7)$$

Door draaiing van het assenstelsel over een der hoeken φ , die aan (7) voldoen, gaat (6) over in

$$b_{11}x_1'^2 + b_{22}x_2'^2 + 2b_{10}x_1' + 2b_{20}x_2' + a_{00} = 0 \quad (8)$$

Geval I. $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0$

$$\text{Stel } x_1' + \frac{b_{10}}{b_{11}} = x_1'', \quad x_2' + \frac{b_{20}}{b_{22}} = x_2''$$

(assenverschuiving, vgl. (2)). Er komt: $b_{11}x_1''^2 + b_{22}x_2''^2 + b_{00} = 0$

Ia. $b_{00} \neq 0$. Deel door $-b_{00}$:

$$c_{11}x_1''^2 + c_{22}x_2''^2 = 1 \quad (9)$$

Ia.1. $c_{11} > 0, c_{22} > 0$ Ellips.

Ia.2. $c_{11} > 0, c_{22} < 0$ Hyperbool.

Ia.3. $c_{11} < 0, c_{22} < 0$ Nuldelige kegelsnede.

$$\text{Ib. } b_{00} = 0, \quad b_{11}x_1''^2 + b_{22}x_2''^2 = 0 \quad (10)$$

Ib.1. b_{11} en b_{22} hebben gelijke tekens:

$$(\sqrt{b_{11}}x_1'' + i\sqrt{b_{22}}x_2'')(\sqrt{b_{11}}x_1'' - i\sqrt{b_{22}}x_2'') = 0$$

twee snijdende, toegevoegd complexe lijnen (snijpunt reëel).

Ib.2. b_{11} en b_{22} hebben verschillende tekens.

$$(\sqrt{b_{11}}x_1'' + \sqrt{-b_{22}}x_2'')(\sqrt{b_{11}}x_1'' - \sqrt{-b_{22}}x_2'') = 0$$

twee snijdende reële lijnen.

Geval II. $b_{11} = 0, b_{22} \neq 0$. Stel in (8) $x_2' + \frac{b_{20}}{b_{22}} = x_2'', \quad x_1' = x_1''$

$$b_{22}x_2''^2 + 2b_{10}x_1'' + b_{00} = 0 \quad (11)$$

IIa. $b_{10} \neq 0$. Stel

$$x_1'' + \frac{b_{00}}{2b_{10}} = \bar{x}_1, \quad x_2'' = \bar{x}_2$$

$$b_{22}\bar{x}_2^2 + 2b_{10}\bar{x}_1 = 0. \text{ parabool.} \quad (12)$$

$$\text{IIb. } b_{10} = 0, \quad b_{00} \neq 0, \quad x_2'' = \pm \sqrt{-\frac{b_{00}}{b_{22}}}$$

IIb.1. b_{22} en b_{00} hebben gelijke tekens. Twee toegevoegd complexe, evenwijdige lijnen.

IIb.2. b_{22} en b_{00} hebben verschillende tekens. Twee reële evenwijdige lijnen.

IIc. $b_{10} = b_{00} = 0, \quad x_2''^2 = 0$. Twee samenvallende reële lijnen.

Opgave. Bepaal de vergelijking van een hyperbool op zijn asymptoten als assen.

Hoofdstuk 6

Algebraïsche krommen.

25. 1. Bepaling. Een algebraïsche kromme van de n^e graad is de meetkundige plaats van de punten, waarvan de coördinaten voldoen aan een algebraïsche vergelijking van de n^e graad in x_1 en x_2 :

$$f_n(x_1, x_2) + f_{n-1}(x_1, x_2) + \dots + f_1(x_1, x_2) + f_0 = 0 \quad (1)$$

$f_k(x_1, x_2)$ is homogeen van de graad k in x_1 en x_2 .

2. Snijpunten met een rechte lijn. $x_i = p_i + \lambda a_i$

Substitutie in (1) geeft een vergelijking van de graad n in λ (tenzij de coëfficiënt van λ^n nul is).

Stelling 1. Een rechte lijn heeft met de kromme in het algemeen n snijpunten. Een snijpunt behorende bij een r -voudige wortel, moet r -maal geteld worden.

26. Gedrag in 0. k gaat door 0 als $f_0 = 0$. Substitueer $x_i = \lambda a_i$:

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2) + \lambda^{n-1} f_{n-1}(a_1, a_2) + \dots + \lambda f_1(a_1, a_2) = 0 \quad (2)$$

Onderstel dat $f_1(x_1, x_2)$ niet identiek nul is.

Bepaling. P heet een enkelvoudig punt van k , als P op k ligt en er lijnen bestaan, die in P een enkelvoudig snijpunt met k hebben.

Bepaling. De raaklijn in een enkelvoudig punt P is de lijn, die in P een meervoudig snijpunt met k heeft.

Stelling. Is O een enkelvoudig punt van k , dan vindt men de vergelijking van de raaklijn in O , door de termen van de eerste graad in (1) gelijk aan nul te stellen. Voldoet de oplossing van $f_1(x_1, x_2) = 0$ ook aan $f_2(x_1, x_2) = 0$, dan heeft de raaklijn in O een meer dan tweevoudig snijpunt.

Bepaling. Een enkelvoudig punt, dat als snijpunt met de raaklijn in dat punt meer dan tweemaal telt, heet buigpunt.

Is $f_1(x_1, x_2) = 0$, dan telt O op iedere lijn door O als dubbel snijpunt.

Bepaling. Een punt P heet r -voudig punt van k , als er lijnen bestaan, waarvoor P als snijpunt met k r -voudig telt, maar geen lijn waarvoor P minder dan r -voudig telt.

Stelling. O is een r -voudig punt van k , als $f_0, f_1, \dots, f_{r-1}$ identiek nul zijn, maar f_r niet.

Bepaling. l is een raaklijn in het r -voudige punt van P , wanneer P als snijpunt van l met k meer dan r -voudig telt.

Stelling. Is O een r -voudig punt van k , dan stelt $f_r(x_1, x_2) = 0$ de raaklijnen in O aan k voor.

Is O een dubbelpunt, dan onderscheiden wij drie gevallen:

Twee verschillende reële raaklijnen: knooppunt.

Twee toegevoegd complexe raaklijnen: geïsoleerd punt.

Twee samenvallende raaklijnen: keerpunt.

27. Asymptotische richtingen en asymptoten.

Substitueer $x_i = p_i + \lambda a_i$ in (1)

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2) + \lambda^{n-1} \left\{ p_1 \frac{\partial f_n}{\partial a_1} + p_2 \frac{\partial f_n}{\partial a_2} + f_{n-1}(a_1, a_2) \right\} + \dots = 0 \quad (3)$$

Nadert a_2/a_1 tot een waarde, waarvoor $f_n(a_1, a_2) = 0$ dan nadert een der wortels van (3) tot ∞ .

$f_n(x_1, x_2) = 0$ stelt een aantal lijnen door O voor; deze geven de asymptotische richtingen van k aan.

Kiest men bij een bepaalde asymptotische richting a_2/a_1 het punt P zo, dat ook de coëfficiënt van λ^{n-1} in (3) nul wordt, dan is de lijn $x_1 = p_1 + \lambda a_1$ een asymptoot. De vergelijking van de asymptoot is dus:

$$x_1 \frac{\partial f_n}{\partial a_1} + x_2 \frac{\partial f_n}{\partial a_2} + f_{n-1}(a_1, a_2) = 0 \quad (4)$$

Is $\frac{\partial f_n}{\partial a_1} = \frac{\partial f_n}{\partial a_2} = 0$, dan heeft men een bijzonder geval.

§ 28. 1. Gedrag in een willekeurig punt P (p_1, p_2). Verplaats de oorsprong

naar P. $x_1 = x'_1 + p_1$, $x_2 = x'_2 + p_2$.

$$f(x_1, x_2) = f(p_1, p_2) + (x'_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + x'_2 \frac{\partial f}{\partial p_2}) + (x'^2_1 \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + 2x'_1 x'_2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_1 \partial p_2} + x'^2_2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2}) + \dots \quad (5)$$

Ligt P op k, dan is $f(p_1, p_2) = 0$. De raaklijn in P is $(x_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial p_1} +$

$+(x_2 - p_2) \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0$. P is dubbelpunt als $\frac{\partial f}{\partial p_1} = \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0$. Daar de vergelij-

kingen $f(x_1, x_2) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ geen gemeenschappelijke oplossing

behoeven te hebben, heeft een algebraïsche kromme in het algemeen geen dubbelpunt.

2. Toepassing op de kegelsneden.

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}x_2 + a_{00} = 0 \quad (6)$$

Voor de raaklijn in P vindt men, gebruik makende van $f(p) = 0$:

$$f(x; p) = a_{11}p_1x_1 + a_{12}(p_2x_1 + p_1x_2) + a_{22}p_2x_2 + a_{10}(x_1 + p_1) + a_{20}(x_2 + p_2) + a_{00} = 0$$

De asymptotische richtingen volgen uit

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

De kegelsnede is dus een ellips of nuldelig, als $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$; een hyperbool, als $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$; een parabool, als $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Zij is een orthogonale hyperbool, als $a_{11} + a_{22} = 0$.

Opgaven. 1. Pas (7) toe op de eenvoudigste vergelijkingen van ellips, hyperbool en parabool.

2. De asymptoten van een cirkel zijn de isotrope lijnen door het middelpunt.

3. Welke ontartingen behoren bij elk der aan het slot van deze paragraaf genoemde gevallen?

Hoofdstuk 7

Kwadricken.

§ 29. Omwentelingsoppervlakken.

1. Laat P($p_1, 0, p_3$) een punt in XOZ zijn en $Q(q_1, q_2, q_3)$ het punt, dat uit P ontstaat door draaiing om de Z-as over een hoek φ ; dan is

$$q_1 = p_1 \cos \varphi, \quad q_2 = p_2 \sin \varphi, \quad q_3 = p_3. \quad p_1 = \pm \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad p_3 = q_3.$$

Ligt P op de kromme $f(x_1, x_3) = 0$, dan ligt Q op het oppervlak

$$f(\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) = 0. \text{ Ligt omgekeerd Q op dit oppervlak, dan kan men } \varphi \text{ zo bepalen, dat P op de kromme } f(x_1, x_3) = 0 \text{ ligt.}$$

Stelling. De vergelijking van het omwentelingsoppervlak, dat ontstaat, door de kromme $x_2 = 0$, $f(x_1, x_3) = 0$ te wentelen om de Z-as, luidt

$$f(\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) = 0$$

2. Ellips $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ geeft omwentelingshyperboloïde $\frac{x_1^2+x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ (1)

Hyperbool $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ geeft eenbladige omwentelingshyperboloïde (omwentelingshalflak) $\frac{x_1^2+x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ (2)

Hyperbool $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1$ geeft twebladige omwentelingshyperboloïde (draaitweblad) $\frac{x_1^2+x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1$ (3)

Parabool $\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_3$ geeft omwentelingsparaboloïde (vaas) $\frac{x_1^2+x_2^2}{a^2} = 2x_3$ (4)

30. Algemene oppervlakken.

1. Door de affiene transformatie (samendrukking) $x_1=x'_1$, $x_2=\frac{a}{b}x'_2$, $x_3=x'_3$ ontstaan uit de omwentelingskwadrieken achtereenvolgens:

Ellipsoïde $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ (5)

Eenbladige hyperboloïde (halsvlak) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ (6)

Twebladige hyperboloïde (tweblad) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1$ (7)

Elliptische paraboloïde (ellipsvaas) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$ (8)

De doorsneden van het laatste oppervlak met de vlakken $x_2 = c$ zijn congruente parabolen, waarvan de toppen liggen op de parabool $x_1=0$, $\frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$

Laat men op analoge wijze de parabool $\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_3$, $x_2 = 0$ met zijn top glijden langs de parabool $\frac{x_2^2}{b^2} = -2x_3$, $x_1 = a_0$, dan ontstaat de

Hyperbolische paraboloïde (zadelvlak) $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$ (9)

2. Op het halsvlak (6) liggen de twee stelsels rechte lijnen

$$I \begin{cases} \lambda \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c} \right) = \mu \left(1 + \frac{x_2}{b} \right) \\ \mu \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} \right) = \lambda \left(1 - \frac{x_2}{b} \right) \end{cases} \quad \text{en} \quad II \begin{cases} \lambda \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} \right) = \sigma \left(1 + \frac{x_2}{b} \right) \\ \sigma \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c} \right) = \rho \left(1 - \frac{x_2}{b} \right) \end{cases}$$

Door ieder punt van het oppervlak gaat één lijn van I en één lijn van II. Twee lijnen van eezzelfde stelsel kruisen elkaar (de rang van de grote matrix der 4 vergelijkingen is 4). Twee lijnen van verschillende stelsels liggen in een vlak, zonder samen te vallen. Aan elke lijn van I is één lijn van II evenwijdig en omgekeerd.

3. Op het zadelvlak (9) liggen eveneens twee stelsels rechte lijnen:

$$I \begin{cases} \lambda \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \right) = 2\mu \\ \mu \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) = \lambda x_3 \end{cases} \quad \text{en} \quad II \begin{cases} \sigma \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) = 2\tau \\ \tau \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \right) = \rho x_3 \end{cases}$$

Hiervoor gelden analoge eigenschappen; evenwel is nooit een lijn van I evenwijdig met een lijn van II. Alle lijnen van I zijn evenwijdig met vlak $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0$, die van II met $\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0$ (richtvlakken).

Meetkundige plaatsen.

§ 32. Een vraagstuk waarin een meetkundige plaats in het platte vlak gevraagd wordt, kan dikwijls teruggebracht worden tot een vraagstuk van de volgende vorm: Gegeven zijn twee stelsels krommen $K(\lambda)$ en $L(\lambda)$, zodat de vergelijking van de algemene kromme van ieder stelsel een parameter λ bevat. Gevraagd de meetkundige plaats van de snijpunten van overeenkomstige (bij dezelfde waarde van λ behorende) krommen uit beide stelsels. Algebraïsch wil dit zeggen: de voorwaarde te zoeken, waaraan x_1, x_2 moeten voldoen, opdat de vergelijkingen $K(x_1, x_2, \lambda) = 0$ en $L(x_1, x_2, \lambda) = 0$ een gemeenschappelijke oplossing hebben. De gevraagde vergelijking wordt dus gevonden, door λ uit die twee vergelijkingen te elimineren.

In de ruimte doen zich analoge gevallen voor. Hier volgen enige voorbeelden.

§ 33. Regelvlakken.

1. Een regelvlak kan gegeven worden door een parametervoorstelling

$$\vec{x} = \vec{p}(t) + \lambda \vec{a}(t). \quad \vec{x} = \vec{p}(t) \text{ is een richtkromme.}$$

2. Laat een ruimtekromme gegeven zijn door

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (k) \quad (1)$$

3. Zijn drie krommen k_1, k_2, k_3 gegeven, dan verkrijgt men drie betrekkingen tussen $\vec{p}$ en $\vec{a}$, door te eisen, dat 1 de drie krommen snijdt. Door eliminatie van de verhoudingen van a_1, a_2, a_3 ontstaat de vergelijking van het regelvlak met de richtkrommen k_1, k_2, k_3 . Is k_1 een rechte lijn, dan brengt men door k_1 een veranderlijk vlak $\alpha + \lambda \beta = 0$; de snijpunten met k_2 en k_3 zijn $P(\lambda)$ en $Q(\lambda)$. De lijn PQ is
- $$\vec{x}_1 = t\vec{p}_1(\lambda) + (1-t)\vec{q}_1(\lambda).$$

Door eliminatie van t en λ vindt men de vergelijking van het regelvlak.

Cylinders en kegels.

- § 34 De algemene parameteraanpak van een cylinder is

$$\vec{x} = \vec{p}(t) + \lambda \vec{a};$$

die van een kegel $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}(t)$.

De vergelijking van de kegel met top P en richtkromme (1) vindt men als volgt: Substitueer (2) in (1) en elimineer λ . Substitueer in het resultaat $\vec{x} - \vec{p}$ voor $\vec{a}$.

Omwentelingsoppervlakken.

- § 35 Het geval, dat de omwentelingsas met de Z -as samenvalt, is in § 29 behandeld. Laat nu de as gegeven zijn door $\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$, en een richtkromme door (1).

Een parallelcirkel is gegeven door

$$(\vec{x} - \vec{p})^2 = r^2; \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = c \quad (4)$$

Eliminatie van $\vec{x}$ uit (1) en (4) geeft $\varphi(r^2, c) = 0$. De vergelijking van het oppervlak is dan $\varphi((\vec{x} - \vec{p})^2, \vec{a} \cdot \vec{x}) = 0$.

De omhullende van een stelsel krommen.

- § 36 Laat gegeven zijn een stelsel krommen $f(x_1, x_2, t) = 0$.

De vergelijking $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ stellen wij voor door $g(x_1, x_2, t) = 0$.

Laat P een snijpunt zijn van $f(x_1, x_2, t_0) = 0$ en $g(x_1, x_2, t_0) = 0$.

Wij onderstellen dat in de omgeving van P , t uit $g(x_1, x_2, t) = 0$ opgelost kan worden in de vorm $t = \varphi(x_1, x_2)$. Substitueren wij deze uitkomst voor t in $f(x_1, x_2, t) = 0$, dan ontstaat $h(x_1, x_2) = 0$.

Stelling. Stelt $h(x_1, x_2) = 0$ in de omgeving van P een kromme voor, dan raakt deze in P aan de kromme $f(x_1, x_2, t_0) = 0$.

Bewijs. De raaklijn in P aan $f(x_1, x_2, t_0) = 0$ is

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - p_2) = 0.$$

De raaklijn in P aan $h(x_1, x_2) = 0$ is

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) (x_1 - p_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) (x_2 - p_2) = 0.$$

Daar volgens onderstelling $\frac{\partial f}{\partial t_0} = g(x_1, x_2, t_0) = 0$, vallen de beide raaklijnen samen.

Hoofdstuk 9.

Coördinatentransformaties in de ruimte.

§ 37. Kiezen wij in de ruimte een nieuwe oorsprong (a_1, a_2, a_3) en drie willekeurige onafhankelijke grondvectoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, dan wordt de coördinatentransformatie (verg. § 23):

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 x'_1 + v_1 x'_2 + w_1 x'_3 + a_1 \\ x_2 &= u_2 x'_1 + v_2 x'_2 + w_2 x'_3 + a_2 \\ x_3 &= u_3 x'_1 + v_3 x'_2 + w_3 x'_3 + a_3 \end{aligned} \quad (1)$$

§ 38. Wij beschouwen speciaal de overgang op een nieuw Cartesisch stelsel met dezelfde oorsprong. Dan is

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = a_3 = 0. \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1 & u_1 v_1 + v_2 v_2 + u_3 v_3 &= 0 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 &= 1 & u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 &= 1 & v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

De transformatiematrix S voldoet dus aan

$$S^T S = I, \text{ of } S^T = S^{-1}. \quad (3)$$

Een matrix met deze eigenschap heet orthogonaal.

Uit (3) volgt $S S^T = I$, dus

$$\begin{aligned} u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 &= 1 & u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 &= 0 \\ u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 &= 1 & u_1 u_3 + v_1 v_3 + w_1 w_3 &= 0 \\ u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 &= 1 & u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

De betrekkingen (4) zijn equivalent met (2). Uit (3) volgt verder $(\det S)^2 = 1$, dus $\det S = \pm 1$.

Het teken hangt af van de oriëntering van het vectordrietal $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (§ 8).

Hoofdstuk 10.

Herleiding der algemene vergelijking van een kwadriek.

§ 39. De vorm $\sum a_{ik} x_i x_k$ (1) gaat door de transformatie $x_i = \sum s_{il} x'_l$ over in

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} s_{il} s_{km} x'_l x'_m &= \sum b_{lm} x'_l x'_m, \\ \text{waarin } b_{lm} &= \sum s_{il} a_{ik} s_{km}. \end{aligned} \quad (2)$$

Voeren wij de matrices $A = (a_{jk})$ en $B = (b_{jk})$ in, dan is (1) te schrijven als

$$B = S^T A S \quad (2')$$

Daar A symmetrisch ondersteld wordt, is ook B symmetrisch.

§ 40. In Lineaire Algebra § 34 is bewezen: Bij iedere matrix A kan men een matrix T vinden, zodat $H = T^{-1} A T$ de driehoeksvorm heeft.

Uit de afleiding blijkt, dat men T orthogonaal kan kiezen, zodat $T^{-1} = T^T$. Is A symmetrisch, dan is H symmetrisch, dus H heeft de diagonaalvorm. Wij vinden zo:

Stelling. De vorm (1) kan door een orthogonale transformatie op de vorm $\sum \lambda_j x_j^2$ gebracht worden, waarbij $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn.

§ 41. Stelling 1. Twee eigenvectoren van een symmetrische matrix, behorende bij verschillende eigenwaarden zijn onderling loodrecht.

Bewijs. Stel $\lambda_1 u_i = \sum a_{ik} u_k$, $\lambda_2 v_i = \sum a_{ik} v_k$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\lambda_1 \sum u_i v_i = \sum a_{ik} u_k v_i.$$

$\lambda_2 \sum u_i v_i = \sum a_{ik} u_i v_k = \sum a_{ik} u_k v_i$ (want $a_{ik} = a_{ki}$), dus $(\lambda_1 - \lambda_2) \sum u_i v_i = 0$, dus $\sum u_i v_i = 0$.

Stelling 2. Alle eigenwaarden van een reële symmetrische matrix zijn reëel.

Bewijs. Was λ_1 complex, dan was $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$, dus $\sum u_i \bar{u}_i = 0$, wat niet kan.

§ 42. De algemene vergelijking van een kwadriek

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_k + 2 \sum_{l=1}^3 a_{0l} x_l + a_{00} = 0 \quad (3)$$

kan dus door een assendraaiing gebracht worden op de vorm

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 + 2 \sum_{l=1}^3 b_{0l} x_l' + a_{00} = 0 \quad (4)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zijn de eigenwaarden; de nieuwe assen zijn eigenvectoren van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

§ 43. Om de werking van een algemene transformatie van Cartesische coördinaten te onderzoeken, maken wij (3) homogeen:

$$\sum_0^3 a_{ik} x_i x_k = 0;$$

de coördinatentransformatie is dan:

$$(T) \quad \begin{cases} x_0 = x'_0 \\ x_i = a_i x'_0 + u_i x'_1 + v_i x'_2 + w_i x'_3 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (5)$$

Verstaan wij onder D de matrix der a_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$) en onder D' de matrix der b_{ik} , dan is volgens § 39

$$D' = T^T D T \quad (6)$$

Daar de matrices S en T niet singulier zijn, is de rang, zowel van A als van D, tegenover coördinatentransformatie invariant (Lin. Alg. § 30).

Opgave. Bepaal de rang van A en D voor de verschillende ypen van kegelsneden (§ 24).

§ 44. De vergelijking van de kwadriek luidt nu

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 + 2b_{01} x_1' + 2b_{02} x_2' + 2b_{03} x_3' + a_{00} = 0 \quad (7)$$

Geval A. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ niet nul. Door een assenverschuiving brengt men (15) op de vorm

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + \lambda_3 x_3''^2 + b_{00} = 0 \quad (8)$$

A1. $b_{00} \neq 0$. Algemene kwadriek.

Het verschil tussen het aantal positieve en het aantal negatieve coëfficiënten in (16) heet de signatuur.

Signatuur 4. nuldelige kwadriek.

2. ellipsoïde of tweblad.

0. halsvlak.

A2. $b_{00} = 0$. Kegel; nuldelige of algemene kegel al naar de tekens van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Geval B. $\lambda_3 = 0$, λ_1 en λ_2 niet nul. Door assenverschuiving

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + 2b_{03} x_3'' + b_{00} = 0 \quad (9)$$

B1. $b_{03} \neq 0$. Weer assenverschuiving.

$$\lambda_1 x_1'''^2 + \lambda_2 x_2'''^2 + 2b_{03} x_3''' = 0 \quad (10)$$

Paraboloïde; elliptisch of hyperbolisch al naar de tekens van λ_1, λ_2 .

B2. In (7) is $b_{03} = 0$, $b_{00} \neq 0$.

Elliptische of hyperbolische cylinder.

B3. In (7) is $b_{03} = b_{00} = 0$.

Twee snijdende vlakken (reëel of toegevoegd complex).

Geval C. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$. Assenverschuiving geeft:

$$\lambda_1 x_1''^2 + 2b_{02} x_2'' + 2b_{03} x_3'' + b_{00} = 0. \quad (11)$$

C1. b_{02} en b_{03} niet beide nul. Kies de X_1 -as langs de lijn

$$2b_{02} x_2'' + 2b_{03} x_3'' + b_{00} = 0$$

$$\lambda_1 x_1'''^2 + 2c_{02} x_2''' = 0 \quad (12)$$

Parabolische cylinder.

C2. $b_{02} = b_{03} = 0$, $b_{00} \neq 0$.

Twee evenwijdige vlakken, reëel of toegevoegd complex.

C3. $b_{02} = b_{03} = b_{00} = 0$. Reëel dubbelvlak.

Opgave. Maak een tabel van alle typen van kwadrieken met hun eenvoudigste vergelijkingen; bereken voor elk type de rang van A en van D.

§ 45. 1. In geval A1 en B1 kan men b_{00} , resp. b_{03} berekenen, door gebruik te maken van de betrekking $\det. D' = \det. D$, die uit (6) volgt. Voor de bepaling van de gedaante van het oppervlak is het dus niet nodig, de coördinatentransformatie uit te voeren.

2. In de gevallen, waarin een of meer middelpunten aanwezig zijn (A1, A2, B2, B3, C2, C3) kan men die middelpunten direct vinden. Daartoe trachten wij door een assenverschuiving

$$x_i = x_i' + p_i$$

de termen van de eerste graad te laten wegvallen.

(3) of $f(x) = 0$ gaat dan volgens de formule van Taylor over in

$$f(p) + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i} x_i' + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} x_i' x_k' = 0 \quad (13)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} = 2a_{ik}$. Een middelpunt moet dan voldoen aan

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{10} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{20} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{30} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Dit zijn de middelpuntsvergelijkingen. Hun kleine matrix is A.

3. Uit (13) blijkt nog, dat in de genoemde gevallen de bekende term gelijk is aan $f(p)$, waarin P het middelpunt is.

4. Schema voor de bepaling van vorm en ligging van een kwadriek.

a) Bepaal de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ van A.

b) Bepaal zo mogelijk door toepassing van no. 1 of no. 3 de nog onbekende coëfficiënt. De vorm van het oppervlak is nu bekend,

c) Bepaal de asrichtingen als eigenvectoren van A.

d) Bepaal het middelpunt of de lijn of het vlak der middelpunten uit (14). Het laatste gaat niet in de gevallen B1 en C1. Men kan in deze gevallen een punt van een symmetrievlak vinden, door het midden tussen de snijpunten met een lijn in een asrichting te bepalen. (Later bespreken wij een algemene methode ter bepaling van symmetrievlakken).

§ 46. Uit de gereduceerde vergelijkingen in § 44 volgt: Heeft de karakteristieke vergelijking een dubbele wortel, dan is de kwadriek een omwentelingsoppervlak; zijn de drie wortels gelijk, dan is ze een bol. Bij een dubbele eigenwaarde λ_1 is de rang van

$A - \lambda_1 I$ gelijk aan 1. (Dit laatste geldt alleen bij reële coëfficiënten).

Opgave. Onderzoek de laatstgenoemde eigenschap bij kegelsneden.

Nodig en voldoende, opdat (3) een omwentelingskwadriek voorstelt, is dus

$$(a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_1) - a_{12}^2 = 0, \quad (a_{11} - \lambda_1)a_{23} - a_{12}a_{13} = 0 \quad (15)$$

en cyclisch.

Als $a_{12}a_{13}a_{23} \neq 0$, is (15) gelijkwaardig met

$$\lambda_1 = a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{32}}{a_{12}} \quad (\text{Jacobi}) \quad (16)$$

Opgave. Wat wordt (15) als bijv. $a_{12} = 0$?

Hoofdstuk 9

Algebraïsche Oppervlakken.

§ 47. Analooq met hoofdst. 6 tot en met de definitie van een gewoon punt Bepaling. Een raaklijn in een enkelvoudig punt P is een lijn, die in P een meervoudig snijpunt met het oppervlak heeft.

Stelling. De meetkundige plaats van de raaklijnen in een enkelvoudig punt is een plat vlak (raakvlak in P).

Bewijs. Leg O in P. Vergelijking van het oppervlak:

$$f_n(x_1, x_2, x_3) + \dots + f_2(x_1, x_2, x_3) + f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1)$$

Substitueer $x_i = \lambda a_i$.

$$\lambda^n f_n(a_1, a_2, a_3) + \dots + \lambda^2 f_2(a_1, a_2, a_3) + \lambda f_1(a_1, a_2, a_3) = 0 \quad (2)$$

De lijn $x_i = \lambda a_i$ is een raaklijn, als $f_1(a_1, a_2, a_3) = 0$.

De meetkundige plaats der raaklijnen in O is dus $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$

Stelling. Het raakvlak in een gewoon punt P snijdt het oppervlak volgens een kromme met een dubbelpunt in P.

Bewijs. Leg O in P en vlak OX_1X_2 langs het raakvlak, zodat $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Substitueer nu in (1) $x_3 = 0$; dan vallen de termen van de nulde en eerste graad weg, dus de doorsnede heeft een dubbelpunt in O

(§ 26).

Opgave. Leid deze stelling direct af uit de definitie van het raakvlak.

Heeft de doorsnijding met het raakvlak in P een knooppunt, dan heet P een hyperbolisch punt van het oppervlak; heeft de doorsnede een geïsoleerd punt, dan is P een elliptisch punt; heeft ze een keerpunt, dan is P een parabolisch punt.

Door assenverschuiving vindt men voor de vergelijking van het raakvlak in een willekeurig punt P:

$$(x_1 - p_1) \frac{\partial f}{\partial p_1} + (x_2 - p_2) \frac{\partial f}{\partial p_2} + (x_3 - p_3) \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0 \quad (3)$$

De bepalingen van een r-voudig punt en van een raaklijn en een r-voudig punt zijn als in § 26. O is een r-voudig punt, als $f_0, \dots, f_{r-1}$ identiek nul zijn, maar f_r niet. $f_r(x_1, x_2, x_3) = 0$ stelt dan de meetkundige plaats van de raaklijnen in O voor; het is een kegel van de r^e graad, met top O:

Evenals in § 27 vindt men de asymptotische richtingen uit $f_n(x_1, x_2, x_3) = 0$ (richtkegel).

§ 48. Toepassing op de kwadrieken.

1. Voor het raakvlak in een willekeurig punt P vindt men uit (3):

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} p_i x_k + \sum_{m=1}^3 a_{0m} (x_m + p_m) + a_{00} = 0$$

(vergelijk § 28, (7)).

2. Bij de algemene kwadriek (§44 geval A) is de richtkegel

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$$

Bij de paraboloid is de richtkegel ontaard in de beide richtvlakken.

§ 49. Uit $B - \lambda E = S^t(A - \lambda E)S$ volgt, dat de coëfficiënten uit de karakteristieke vergelijking invariant zijn tegenover coördinatentransformatie.

Stelt A_{ik} de minor van a_{ik} in A voor, dan zijn die invarianten:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}, A_{11} + A_{22} + A_{33}, \det. A.$$

Betekenis der invarianten

Stelling. Nodig en voldoende, opdat een kegel drie onderling loodrechte beschrijvenden bevat, is $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

Bewijs. 1. Laat er drie onderling loodrechte beschrijvenden zijn.

Leg de X_3 -as langs één ervan. $X_1 O X_2$ snijdt volgens twee onderling loodrechte lijnen, dus $a_{11} + a_{22} = 0$, dus $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$; dit geldt in ieder coördinatenstelsel.

2. Omgekeerd: is $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ en legt men de X_3 -as langs een beschrijvende, dan is $a_{33} = 0$, dus $a_{11} + a_{22} = 0$, enz.

Tegelijk is bewezen: bevat een kegel een stel van drie loodrechte beschrijvenden, dan bevat hij oneindig veel zulke stellen.

Bij een algemene kwadriek is $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ de voorwaarde, opdat er in elk stelsel drie onderling loodrechte beschrijvenden voorkomen.

Is $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ (1) de vergelijking van een kegel, dan is $a_{11}p_1x_1 + a_{22}p_2x_2 + a_{33}p_3x_3 = 0$ (2) het raakvlak in P . De loodlijn in

$$O \text{ hierop is } \frac{x_1}{a_{11}p_1} = \frac{x_2}{a_{22}p_2} = \frac{x_3}{a_{33}p_3} \quad (3).$$

Door eliminatie van p_1, p_2, p_3 uit (3) en $a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{33}p_3^2 = 0$ vindt men $a_{22}a_{33}x_1^2 + a_{33}a_{11}x_2^2 + a_{11}a_{22}x_3^2 = 0$. (4)

Dit is de complementaire kegel van (1).

Nodig en voldoende, opdat (1) drie onderling loodrechte raakvlakken

heeft, is, dat (4) drie onderling loodrechte beschrijvenden heeft, dus

$$a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} = 0 \text{ of } A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0.$$

Dit laatste geldt voor een willekeurig assenstelsel.

Stelling. Heeft een kwadriek een stel van drie onderling loodrechte raakvlakken, dan heeft ze oneindig veel zulke stellen.