

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 18b

Avondcursus wiskunde 1951-1952;

Analyse 2.

W.Peremans.



1851
1952

ZW

Avondcursus 1951-1952.

Analyse

door

Dr W. Peremans

§ 34. Bepaalde integralen.

We beschouwen een n -dimensionale Euclidische ruimte R_n , waarvan de punten dus uit n -tallen reële getallen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ bestaan (zie § 10). We maken de afspraak punten van deze ruimte met Latijnse letters en reële getallen met Griekse letters te schrijven. We beschouwen nu een functie $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ die aan de punten van een zekere deelverzameling V van R_n reële getallen toevoegt en die aan de volgende voorwaarden voldoet:

1° de punten van V , waarvoor $\varphi \neq 0$, vormen een begrensde verzameling W , d.w.z. er is een getal $\delta_1 > 0$, zodat voor de punten van W geldt $|x| < \delta_1$;

2° de functie φ is begrensd, d.w.z. er is een getal $\delta_2 > 0$, zodat voor alle punten $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in V$ geldt $|\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)| < \delta_2$.

We schrijven, als $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, al naar het ons het beste uitkomt, $\varphi(x)$ of $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

We maken nu de functie φ tot een functie, die in de gehele R_n gedefinieerd is door voor $x \notin V$ te definiëren $\varphi(x) = 0$. Het is duidelijk dat daarbij de voorwaarden 1° en 2° vervuld blijven.

We gaan nu R_n verdelen in rechthoekige hokjes, waarvan de lengte der ribben $\frac{1}{2^m}$ (m een natuurlijk getal) is. Een hokje krijgen we door een n -tal gehele getallen $k_1, \dots, k_n$ te kiezen; het hokje is dan de verzameling der punten $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, waarvoor geldt $\frac{k_i}{2^m} \leq \xi_i < \frac{k_i+1}{2^m}$ voor

$i=1, \dots, n$. Een dergelijk hokje heet een hokje uit de m^e (hokjes)verdeling. Het spreekt vanzelf, dat ieder punt van R_n in één en slechts één hokje van de m^e verdeling ligt. Verder is het duidelijk, dat slechts eindig veel hokjes uit de m^e verdeling punten met W gemeen hebben, n.l. als 1 een geheel getal $\geq \delta_1$ is, ten hoogste $(2^{m+1} - 1)^n$.

Opgave 127. Ga dit laatste na.

Als $m_1 < m_2$, is een willekeurig hokje van de m_2^e verdeling deelverzameling van een hokje uit de m_1^e verdeling. Als n.l. $k_1, \dots, k_n$ gegeven zijn, bepalen we $l_1, \dots, l_n$ zo, dat

$\frac{l_i}{2^{m_1}} \leq \frac{k_i}{2^{m_2}} < \frac{l_i+1}{2^{m_1}}$. Hieruit volgt $k_i < (l_i+1)2^{m_1-m_2}$ en omdat hierin gehele

getallen staan geldt:

$$k_i + 1 \leq (l_i + 1) 2^{m_1 - m_i}, \text{ dus } \frac{k_i + 1}{2^{m_i}} \leq \frac{l_i + 1}{2^{m_1}}. \text{ Uit } \frac{k_i}{2^{m_i}} \leq \frac{l_i}{2^{m_1}} < \frac{k_i + 1}{2^{m_i}}$$

volgt dus $\frac{l_i}{2^{m_1}} \leq \frac{l_i + 1}{2^{m_1}}.$

An 117.

Het aantal hokjes van de m_2^e verdeling, dat bevat is in een hokje van de m_1^e verdeling bedraagt $2^{(m_2 - m_1)n}$ (nog steeds geldt $m_1 < m_2$).

Opgave 128. Bewijs dit.

We noemen 2^{-mn} de grootte van een hokje uit de m^e verdeling. Dan is de som van de grootten van de hokjes van de m_2^e verdeling die bevat zijn in een hokje van de m_1^e verdeling, gelijk aan de grootte van het hokje uit de m_1^e verdeling, immers $2^{(m_1 - m_2)n} 2^{-m_2 n} = 2^{-m_1 n}.$

Als symbool van een hokje kiezen we $\|x\|$; zijn grootte schrijven we $\Delta \|x\|$. De m^e verdeling schrijven we V_m . We definiëren nu de m^e bovensom $S_m^*(\varphi)$ van φ door van elk hokje de grootte te vermenigvuldigen met de bovenste grens van φ genomen voor de punten van dat hokje (deze bestaat op grond van voorwaarde 2^0) en op te tellen. Op grond van voorwaarde 1^0 bevat deze som slechts eindig veel termen die van nul verschillen. Analooq definiëren we de m^e benedensom $S_{*m}(\varphi)$ met de onderste grens van φ . In symbolen geschreven:

$$S_m^*(\varphi) = \sum_{\|x\| \in V_m} 2^{-mn} \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) \text{ en } S_{*m}(\varphi) = \sum_{\|x\| \in V_m} 2^{-mn} \inf_{y \in \|x\|} \varphi(y).$$

We moeten hierbij bedenken, dat we φ tot de gehele R_n hebben uitgebreid, zodat dus bij hokjes die punten buiten V bevatten de waarde 0 voor de vorming van sup en inf meegeteld moeten worden.

(34.1) Voor $m_1 < m_2$ geldt $S_{*m_1}(\varphi) \leq S_{*m_2}(\varphi) \leq S_{m_2}^*(\varphi) \leq S_{m_1}^*(\varphi).$

Bewijs: $S_{*m_1}(\varphi) \leq S_{m_2}^*(\varphi)$ is evident. Verder is evident dat, als L en M deelverzamelingen van R_n zijn en $L \subset M$, geldt $\sup_{x \in L} \varphi(x) \leq \sup_{x \in M} \varphi(x)$ en $\inf_{x \in L} \varphi(x) \geq \inf_{x \in M} \varphi(x)$. Voor $\|y\| \in V_{m_1}$ geldt dan

$$\sum_{\substack{\|x\| \in V_{m_2} \\ \|x\| \subset \|y\|}} \sup_{z \in \|x\|} \varphi(z) \Delta \|x\| \leq \sum_{\|x\| \in V_{m_2}} \sup_{z \in \|x\|} \varphi(z) \Delta \|x\| =$$

$$= \sup_{x \in \|y\|} \varphi(x) \sum_{\substack{\|x\| \in V_{m_2} \\ \|x\| \subset \|y\|}} \Delta \|x\| = \sup_{x \in \|y\|} \varphi(x) \Delta \|y\|.$$

Door dit over de hokjes van de m_1^e verdeling te sommeren vindt men $S_{m_2}^*(\varphi) \leq S_{m_1}^*(\varphi)$. De betrekking $S_{*m_1}(\varphi) \leq S_{*m_2}(\varphi)$ wordt op analoge wijze gevonden. Daarmee is (34.1) bewezen.

Hieruit volgt dat de rij $S_{*m}(\varphi)$ een begrensde isotone rij en $S_m^*(\varphi)$ een begrensde antitone rij is. Beide zijn dus convergent; noem hun limieten resp. de benedenintegraal en de bovenintegraal van φ .

In symbolen:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{*m}(\varphi) = \int_* \varphi(x) d\omega_x \text{ en } \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^*(\varphi) = \int^* \varphi(x) d\omega_x.$$

Verder volgt uit (34.1) nog:

$$(34.2) \quad \int \varphi(x) d\omega_x \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x.$$

Als $\int^* \varphi(x) d\omega_x = \int \varphi(x) d\omega_x$, noemen we de functie $\varphi(x)$ Riemann-integreerbaar of kortweg integreerbaar. In dat geval heet de beneden-integraal=bovenintegraal de integraal van φ , geschreven $\int \varphi(x) d\omega_x$. Men spreekt ook wel van de bepaalde integraal in tegenstelling tot de later te behandelen onbepaalde integralen. Als $n=1$, dan is R_1 de ruimte der reële getallen en $\varphi(\xi)$ een reële functie; men schrijft dan voor de integraal van φ eenvoudiger $\int \varphi(\xi) d\xi$ en analoog voor beneden- en bovenintegraal. In dat geval noemt men een integraal ook wel een enkelvoudige integraal. Voor willekeurige n spreekt men van een n-voudige integraal; als $n \geq 2$ in het algemeen ook van een meervoudige integraal.

Niet iedere functie is integreerbaar; neem b.v. in R_1 voor V het interval $[0, 1]$ en daar $\varphi(\xi)=0$ voor irrationale ξ en $\varphi(\xi)=1$ voor rationale ξ . Een hokje in R_1 is een interval. In ieder interval liggen zowel rationale als irrationale getallen (zie (8.37) en (8.44)), dus geldt voor alle hokjes die tussen 0 en 1 zijn gelegen, dat $\sup \varphi(\xi)=1$ en $\inf \varphi(\xi)=0$. Dus $S_{*m}(\varphi)=0$ en $S_m^*(\varphi) = \sum_{\|x\| \in V} \Delta \|x\| = 2^m 2^{-m} = 1$

voor alle m . Dus $\int^* \varphi(\xi) d\xi = 0$ en $\int \varphi(\xi) d\xi = 1$, dus φ is niet integreerbaar.

Een belangrijke functie in V is de z.g. karakteristieke functie $\chi_V(x)$ van V , dat is de functie die in V overal de waarde 1 aanneemt, dus $\chi_V(x)=1$ als $x \in V$ en $\chi_V(x)=0$ als $x \notin V$. De integraal (zo deze bestaat), resp. de boven- en benedenintegraal van deze karakteristieke functie heet de inhoud, resp. de buiteninhoud en de binneninhoud van V . Deze begrippen zijn dus gedefinieerd voor begrensde verzamelingen V (de inhoud natuurlijk alleen als deze bestaat).

Als $\varphi(x)$ een functie is, gedefinieerd in R_n , die voldoet aan de voorwaarden 1^0 en 2^0 en L is een deelverzameling van R_n , dan heet de integraal van de functie, die in L dezelfde is als $\varphi(x)$ en buiten L nul is, zo deze integraal bestaat, de integraal van $\varphi(x)$ over L . Dit is ook anders uit te drukken als volgt: de integraal van $\varphi(x)$ over L is de integraal van het product $\varphi(x) \chi_L(x)$, in symbolen

$\int_L \varphi(x) d\omega_x = \int \varphi(x) \chi_L(x) d\omega_x$. Analoog voor boven- en benedenintegralen. In R_1 wordt de integratie over het interval $[\alpha, \beta]$ ook als

volgt geschreven: $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi$.

We noemen $\sup_{x \in L} \varphi(x) - \inf_{x \in L} \varphi(x)$ de schommeling van φ in de verzameling L , geschreven $\tau_L(\varphi)$. We voeren nu de bij de m^e verdeling en de functie φ behorende τ -functie in als volgt: $\tau_\varphi^{(m)}(\varepsilon)$ is de som van de grootten van de hokjes in de m^e -verdeling, waarin φ een schommeling $\geq \varepsilon$ heeft, dus

$$\tau_\varphi^{(m)}(\varepsilon) = \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \sigma_{\|x\|}(\varphi) \geq \varepsilon}} \Delta \|x\|.$$

(34.3) Een in R_n gedefinieerde functie $\varphi(x)$, die aan de voorwaarden 1° en 2° voldoet, is dan en slechts dan integreerbaar als voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_\varphi^{(m)}(\varepsilon) = 0$.

Bewijs: Stel eerst dat φ integreerbaar is, dus $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m^*(\varphi) =$

$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{*m}(\varphi) = I$. Kies een $\varepsilon > 0$ en een $\eta > 0$, dan is daarbij een N

te vinden zodat voor $m > N$ geldt: $0 \leq I - S_{*m}(\varphi) < \frac{\eta \varepsilon}{2}$ en $0 \leq S_m^*(\varphi) - I < \frac{\eta \varepsilon}{2}$.

Dus $0 \leq S_m^*(\varphi) - S_{*m}(\varphi) < \eta \varepsilon$, dus $\sum_{\|x\| \in V_m} \tau_{\|x\|}(\varphi) \Delta \|x\| =$

$$= \sum_{\|x\| \in V_m} \left(\sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) - \inf_{y \in \|x\|} \varphi(y) \right) \Delta \|x\| < \eta \varepsilon.$$

De hierin optredende som bestaat uit termen, die allen ≥ 0 . Door nu alle termen weg te laten, waarin de schommeling $< \varepsilon$ is, vinden we

$$\varepsilon \tau_\varphi^{(m)}(\varepsilon) \leq \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \tau_{\|x\|}(\varphi) \geq \varepsilon}} \tau_{\|x\|}(\varphi) \Delta \|x\| \leq \sum_{\|x\| \in V_m} \tau_{\|x\|}(\varphi) \Delta \|x\| < \eta \varepsilon,$$

en omdat $\varepsilon > 0$, volgt hieruit $\tau_\varphi^{(m)}(\varepsilon) < \eta$, dus $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_\varphi^{(m)}(\varepsilon) = 0$.

We bewijzen nu de omkering en veronderstellen dus dat

$\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_\varphi^{(m)}(\varepsilon) = 0$ voor iedere $\varepsilon > 0$. We noemen weer W de verzameling der punten waar $\varphi(x) \neq 0$, dan is W begrensd en dus ook de som van de grootten der hokjes die iets met W gemeen hebben: $\sum_{\substack{\|x\| \in W \\ \text{niet leeg}}} \Delta \|x\| < \delta_3.$

Omdat verder φ begrensd is is ook de schommeling van φ begrensd, dus

$\sigma_W(\varphi) < \delta_4$. Kies nu een $\eta > 0$, dan is er een N zodat voor $m > N$ geldt $\tau_\varphi^{(m)}\left(\frac{\eta}{2\delta_3}\right) < \frac{\eta}{2\delta_4}$. Dan is

$$\begin{aligned} f_m^*(\varphi) - f_{*m}(\varphi) &= \sum_{\|x\| \in V_m} \tau_{\|x\|}(\varphi) \Delta \|x\| = \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \tau_{\|x\|}(\varphi) < \frac{\eta}{2\delta_3}}} \tau_{\|x\|}(\varphi) \Delta \|x\| + \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \tau_{\|x\|}(\varphi) \geq \frac{\eta}{2\delta_3}}} \tau_{\|x\|}(\varphi) \Delta \|x\| \leq \\ &\leq \frac{\eta}{2\delta_4} \sum_{\|x\| \in V_m} \Delta \|x\| + \delta_4 \sum_{\|x\| \in V_m} \Delta \|x\| \leq \frac{\eta \delta_3}{2\delta_4} + \delta_4 \tau_\varphi^{(m)}\left(\frac{\eta}{2\delta_3}\right) \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\delta_4 \eta}{2\delta_4} = \eta. \end{aligned}$$

Maar $0 \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x - \int_* \varphi(x) d\omega_x \leq S_m^*(\varphi) - S_{*m}(\varphi)$, dus voor iedere $\eta > 0$ is $0 \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x - \int_* \varphi(x) d\omega_x < \eta$ dus $\int^* \varphi(x) d\omega_x = \int_* \varphi(x) d\omega_x$, dus $\varphi(x)$ is integreerbaar.

Opgave 129. Definieer op het interval $[0,1]$ de functie $\varphi(\xi)$ door:

$\varphi(\xi) = 0$ als ξ irrationaal is, $\varphi(\xi) = \frac{1}{q}$ als ξ rationaal is en $\frac{p}{q}$ de standaardschrijfwijze is van ξ (zie blz. 16). Bewijs dat $\varphi(\xi)$ continu is in de irrationale en discontinu in de rationale punten van het interval. Bewijs dat $\varphi(\xi)$ integreerbaar is en bereken de integraal.

Opgave 130. Bewijs dat $\int_0^1 \xi d\xi$ bestaat en bereken de integraal.

(34.4) De som van twee integreerbare functies is integreerbaar en de integraal is de som van de integralen van de afzonderlijke functies.

Bewijs: We bewijzen eerst voor een verzameling L dat

$\sup_{x \in L} (\varphi(x) + \chi(x)) \leq \sup_{x \in L} \varphi(x) + \sup_{x \in L} \chi(x)$. Noem $\sup_{x \in L} (\varphi(x) + \chi(x)) = \alpha$, $\sup_{x \in L} \varphi(x) = \beta$ en $\sup_{x \in L} \chi(x) = \gamma$. Stel $\alpha > \beta + \gamma$ en noem $\alpha - \beta - \gamma = \delta$, dan is $\delta > 0$. Er is een $y \in L$ zodat $\varphi(y) + \chi(y) > \alpha - \delta$. Maar $\varphi(y) \leq \beta$ en $\chi(y) \leq \gamma$, dus $\beta + \gamma \geq \varphi(y) + \chi(y) > \alpha - \delta$. Dit geeft een tegenspraak, dus $\alpha \leq \beta + \gamma$. Dus $S_m^*(\varphi + \chi) = \sum_{\|x\| \in V_m} \sup_{x \in \|x\|} (\varphi(z) + \chi(z)) \Delta \|x\| \leq \sum_{\|x\| \in V_m} \sup_{x \in \|x\|} \varphi(z) \Delta \|x\| + \sum_{\|x\| \in V_m} \sup_{x \in \|x\|} \chi(z) \Delta \|x\| = S_m^*(\varphi) + S_m^*(\chi)$ voor alle m . Dus geldt ook $\int^* (\varphi(x) + \chi(x)) d\omega_x \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x + \int^* \chi(x) d\omega_x$. Op analoge wijze bewijst men $\inf_{x \in L} (\varphi(x) + \chi(x)) \geq \inf_{x \in L} \varphi(x) + \inf_{x \in L} \chi(x)$ en $\int_* (\varphi(x) + \chi(x)) d\omega_x \geq \int_* \varphi(x) d\omega_x + \int_* \chi(x) d\omega_x$.

Dus we hebben gevonden:

$$\int_* \varphi(x) d\omega_x + \int_* \chi(x) d\omega_x \leq \int_* (\varphi(x) + \chi(x)) d\omega_x \leq \int^* (\varphi(x) + \chi(x)) d\omega_x \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x + \int^* \chi(x) d\omega_x.$$

Als nu φ en χ integreerbaar zijn, zijn de uiterste leden van deze ongelijkheid aan elkaar gelijk, dus er staan overal gelijktokens. Dus is $\varphi + \chi$ ook integreerbaar en er geldt $\int (\varphi(x) + \chi(x)) d\omega_x = \int \varphi(x) d\omega_x + \int \chi(x) d\omega_x$.

(34.5) Als γ een reële constante is en $\varphi(x)$ een integreerbare functie, dan is $\gamma \varphi(x)$ integreerbaar en $\int \gamma \varphi(x) d\omega_x = \gamma \int \varphi(x) d\omega_x$.

Bewijs: Voor een verzameling L is, als $\gamma \geq 0$, $\sup_{x \in L} \gamma \varphi(x) = \gamma \sup_{x \in L} \varphi(x)$ en $\inf_{x \in L} \gamma \varphi(x) = \gamma \inf_{x \in L} \varphi(x)$ en, als $\gamma < 0$, $\sup_{x \in L} \gamma \varphi(x) = \gamma \inf_{x \in L} \varphi(x)$ en $\inf_{x \in L} \gamma \varphi(x) = \gamma \sup_{x \in L} \varphi(x)$. Noemt men $\sup_{x \in L} \varphi(x) = \alpha$ en $\sup_{x \in L} \gamma \varphi(x) = \beta$, dan is $\varphi(x) \leq \alpha$, dus.

als $\gamma \geq 0$, $\gamma \varphi(x) \leq \gamma \alpha$ voor alle $x \in L$, dus $\beta \leq \gamma \alpha$ en $\gamma \varphi(x) \leq \beta$ voor alle $x \in L$. Als $\gamma = 0$, is dus $0 \leq \beta$, dus $\gamma \alpha = 0 \leq \beta$; als $\gamma > 0$, dan is $\varphi(x) \leq \frac{\beta}{\gamma}$, dus $\alpha \leq \frac{\beta}{\gamma}$, dus $\gamma \alpha \leq \beta$. Dus $\gamma \alpha = \beta$. De andere gevallen gaan analoog.

Opgave 131. Bewijs dit.

Als $\gamma \geq 0$ is dus $S_m^*(\gamma \varphi) = \gamma S_m^*(\varphi)$ en $S_{*m}(\gamma \varphi) = \gamma S_{*m}(\varphi)$, dus $\int^* \gamma \varphi(x) d\omega_x = \gamma \int^* \varphi(x) d\omega_x$ en $\int_* \gamma \varphi(x) d\omega_x = \gamma \int_* \varphi(x) d\omega_x$. Als $\gamma < 0$, is $S_m^*(\gamma \varphi) = \gamma S_{*m}(\varphi)$ en $S_{*m}(\gamma \varphi) = \gamma S_m^*(\varphi)$, dus $\int^* \gamma \varphi(x) d\omega_x = \gamma \int_* \varphi(x) d\omega_x$ en $\int_* \gamma \varphi(x) d\omega_x = \gamma \int^* \varphi(x) d\omega_x$. In ieder geval is als $\varphi(x)$ integreerbaar is, $\gamma \varphi(x)$ ook integreerbaar en $\int \gamma \varphi(x) d\omega_x = \gamma \int \varphi(x) d\omega_x$.

Van de karakteristieke functie van een verzameling V is de schommeling zeer eenvoudig. De functie $\chi_V(x)$ neemt alleen de waarden 0 en 1 aan en de schommeling van deze functie in een of andere verzameling dus ook en wel is deze schommeling dan en slechts dan gelijk aan 1 als de verzameling punten bevat die wel tot V en punten bevat die niet tot V behoren. Voor $\varepsilon > 1$ is dus $\tau_{\chi_V}^{(m)}(\varepsilon) = 0$. Als we nu met $\kappa^{(m)}(V)$ de som van de grootten van de hokjes van de m^e verdeling, die punten in V en buiten V bevatten, aangeven, dan is voor $0 < \varepsilon \leq 1$ $\tau_{\chi_V}^{(m)}(\varepsilon) = \kappa^{(m)}(V)$ en dit hangt niet meer van ε af. Hieruit volgt:

(34.6) Een begrensde verzameling V heeft een inhoud dan en slechts dan als $\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa^{(m)}(V) = 0$.

Als k een natuurlijk getal is en L_k is de verzameling der punten $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, waarvoor geldt $-k \leq \xi_i < k$, dan heeft L_k een inhoud. Dit volgt direct uit (34.6), want er zijn geen hokjes die punten in L_k en buiten L_k bevatten.

Opgave 132. Bereken de inhoud van L_k .

(34.7) Het product van twee integreerbare functies is integreerbaar.

Bewijs: We bewijzen de stelling eerst voor twee functies $\varphi(x)$ en $\psi(x)$, waarvoor geldt $\varphi(x) \geq 0$ en $\psi(x) \geq 0$ voor alle x . Voor dergelijke functies en een verzameling L geldt $\sup_{x \in L} \varphi(x) \psi(x) \leq \sup_{x \in L} \varphi(x) \cdot \sup_{x \in L} \psi(x)$. Noem $\sup_{x \in L} \varphi(x) \psi(x) = \alpha$, $\sup_{x \in L} \varphi(x) = \beta$ en $\sup_{x \in L} \psi(x) = \gamma$. Stel $\alpha > \beta \gamma$ en noem $\alpha - \beta \gamma = \delta$, dan is $\delta > 0$. Er is een $y \in L$ zodat $\varphi(y) \psi(y) > \alpha - \delta$. Maar $\varphi(y) \leq \beta$ en $\psi(y) \leq \gamma$,

dus $\beta\gamma \geq \varphi(x)\psi(x) > \alpha - \delta$. Dit geeft een tegenspraak dus $\alpha \leq \beta\gamma$.

Op analoge wijze bewijst men $\inf_{x \in L} \varphi(x)\psi(x) \geq \inf_{x \in L} \varphi(x) \cdot \inf_{x \in L} \psi(x)$.

$$\text{Dan is } \sigma_L(\varphi\psi) \leq \sup_{x \in L} \varphi(x) \sup_{x \in L} \psi(x) - \inf_{x \in L} \varphi(x) \inf_{x \in L} \psi(x) = \\ = (\sup_{x \in L} \varphi(x) - \inf_{x \in L} \varphi(x)) \sup_{x \in L} \psi(x) + (\sup_{x \in L} \psi(x) - \inf_{x \in L} \psi(x)) \inf_{x \in L} \varphi(x)$$

Als $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ integreerbaar zijn, zijn ze begrensd, dus zijn er reële getallen γ_1 en γ_2 zodat $\varphi(x) < \gamma_1$ en $\psi(x) < \gamma_2$ voor alle x .

Dan is $\sigma_L(\varphi\psi) \leq \gamma_1 \sigma_L(\psi) + \gamma_2 \sigma_L(\varphi)$. Kies nu een $\varepsilon > 0$; als nu

$$\sigma_L(\psi) < \frac{\varepsilon}{2\gamma_1} \text{ en } \sigma_L(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2\gamma_2}, \text{ dan geldt } \gamma_1 \sigma_L(\psi) + \gamma_2 \sigma_L(\varphi) < \varepsilon,$$

dus $\sigma_L(\varphi\psi) < \varepsilon$. Neem nu voor L een hokje; als dan $\sigma_L(\varphi\psi) \geq \varepsilon$,

dan geldt minstens één van de beide relaties $\sigma_L(\psi) \geq \frac{\varepsilon}{2\gamma_1}$ en

$$\sigma_L(\varphi) \geq \frac{\varepsilon}{2\gamma_2}. \text{ Daaruit volgt } \tau_{\varphi\psi}^{(m)}(\varepsilon) \leq \tau_{\psi}^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2\gamma_1}\right) + \tau_{\varphi}^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2\gamma_2}\right).$$

Omdat φ en ψ integreerbaar zijn, geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{\psi}^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2\gamma_1}\right) = 0$ en

$\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{\varphi}^{(m)}\left(\frac{\varepsilon}{2\gamma_2}\right) = 0$. Dus $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{\varphi\psi}^{(m)}(\varepsilon) = 0$. Verder voldoet $\varphi(x)\psi(x)$ aan de voorwaarden 1° en 2° dus $\varphi(x)\psi(x)$ is integreerbaar.

Nu bewijzen we de stelling voor willekeurige integreerbare functies

$\varphi(x)$ en $\psi(x)$. Er is een $\gamma_3 > 0$ zodat voor $|x| \geq \gamma_3$ geldt $\varphi(x) = 0$

en $\psi(x) = 0$. Verder is er een γ_4 zodat $|\varphi(x)| < \gamma_4$ en $|\psi(x)| < \gamma_4$

Kiest men nu een natuurlijk getal $k > \gamma_3$ dan is voor $x \notin L_k$ (gedefinieerd

als boven) ook $\varphi(x) = 0$ en $\psi(x) = 0$. Nu zijn op grond van (34.4) en

(34.5) de functies $\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x)$ en $\psi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x)$ integreer-

baar. Voor $x \in L_k$ is dan $\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) \geq -\gamma_4 + \gamma_4 = 0$ en voor $x \notin L_k$

is $\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) = 0$ dus voor alle x is $\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) \geq 0$.

Evenzo is voor alle x ook $\psi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) \geq 0$. Van deze functies is

het product dus integreerbaar. Nu geldt $\varphi(x)\psi(x) = (\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) - \gamma_4 \chi_{L_k}(x))$

$$= (\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) - \gamma_4 \chi_{L_k}(x))(\psi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) - \gamma_4 \chi_{L_k}(x)) = \\ = (\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x) - \gamma_4 \chi_{L_k}(x))(\psi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x)) - \gamma_4 \chi_{L_k}(x)(\varphi(x) + \gamma_4 \chi_{L_k}(x)) + \gamma_4^2 \chi_{L_k}^2(x).$$

Hieruit volgt dat $\varphi(x)\psi(x)$ integreerbaar is.

(34.8) Een integreerbare functie $\psi(x)$ is ook integreerbaar over een willekeurige verzameling V met inhoud.

Bewijs: $\varphi(x)$ en $\chi_v(x)$ zijn integreerbaar, dus hun product ook.

$$\text{dus bestaat } \int_v \varphi(x) d\omega_x = \int \varphi(x) \chi_v(x) d\omega_x$$

Omgekeerd behoeft van een integreerbare functie $\varphi(x)$ de verzameling W der punten x waarvoor $\varphi(x) \neq 0$, geen inhoud te hebben (zie b.v. de functie van opgave 129).

We merken nog op, dat in (34.7) niets gezegd wordt over de grootte van de integraal van het product.

(34.9) Als $\varphi(x)$ integreerbaar is en er bestaat een reëel getal $\delta > 0$ zodat uit $\varphi(x) \neq 0$ volgt $|\varphi(x)| \geq \delta$, dan is de functie $\psi(x)$, die gedefinieerd is door: $\psi(x)=0$ als $\varphi(x)=0$ en $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ als $\varphi(x) \neq 0$, ook integreerbaar.

Bewijs: We bewijzen voor een willekeurige verzameling L dat

$\sigma_L(\psi) \leq \frac{\sigma_L(\varphi)}{\delta^2}$ Als voor alle $x \in L$ geldt $\varphi(x)=0$, dan is ook $\psi(x)=0$, dus $\sigma_L(\psi) = \sigma_L(\varphi) = 0$. Als voor alle $x \in L$ geldt $\varphi(x) \geq 0$ en er is een $y \in L$ waarvoor $\varphi(y)=0$, dan geldt $\sup_{x \in L} \varphi(x) \leq \frac{1}{\delta}$, $\inf_{x \in L} \varphi(x)=0$, $\sup_{x \in L} \varphi(x) \geq \delta$, $\inf_{x \in L} \varphi(x)=0$, dus $\sigma_L(\varphi) \geq \delta$ en $\sigma_L(\psi) \leq \frac{1}{\delta} = \frac{\delta}{\delta^2} \leq \frac{\sigma_L(\varphi)}{\delta^2}$. Als voor alle $x \in L$ geldt $\varphi(x) \leq 0$ en er is een $y \in L$ waarvoor $\varphi(y)=0$, dan geldt $\sup_{x \in L} \varphi(x)=0$, $\inf_{x \in L} \varphi(x) \leq -\frac{1}{\delta}$, $\sup_{x \in L} \varphi(x)=0$, $\inf_{x \in L} \varphi(x) \leq -\delta$, dus $\sigma_L(\varphi) \geq \delta$ en $\sigma_L(\psi) \leq \frac{1}{\delta} = \frac{\delta}{\delta^2} \leq \frac{\sigma_L(\varphi)}{\delta^2}$. Als voor alle $x \in L$ geldt $\varphi(x) > 0$ of voor alle $x \in L$ geldt $\varphi(x) < 0$ dan is $\sup_{x \in L} \varphi(x) = \frac{1}{\inf_{x \in L} \varphi(x)}$ en $\inf_{x \in L} \varphi(x) = \frac{1}{\sup_{x \in L} \varphi(x)}$, dus $\sigma_L(\psi) = \frac{\sigma_L(\varphi)}{\inf_{x \in L} \varphi(x) \sup_{x \in L} \varphi(x)}$. Verder is in beide gevallen $\inf_{x \in L} \varphi(x) \sup_{x \in L} \varphi(x) > 0$, $|\inf_{x \in L} \varphi(x)| \geq \delta$ en $|\sup_{x \in L} \varphi(x)| \geq \delta$, dus $\sigma_L(\psi) \leq \frac{\sigma_L(\varphi)}{\delta^2}$. Als er een $y_1 \in L$ is, waarvoor $\varphi(y_1) < 0$ en een $y_2 \in L$, waarvoor $\varphi(y_2) > 0$, dan geldt $\sup_{x \in L} \varphi(x) \leq \frac{1}{\delta}$, $\inf_{x \in L} \varphi(x) \geq -\frac{1}{\delta}$, $\sup_{x \in L} \varphi(x) \geq \delta$, $\inf_{x \in L} \varphi(x) \leq -\delta$, dus $\sigma_L(\varphi) \geq 2\delta$ en $\sigma_L(\psi) \leq \frac{2}{\delta} = \frac{2\delta}{\delta^2} \leq \frac{\sigma_L(\varphi)}{\delta^2}$. Hiermede zijn alle mogelijkheden behandeld en steeds is gevonden $\sigma_L(\psi) \leq \frac{\sigma_L(\varphi)}{\delta^2}$. Kies nu een $\varepsilon > 0$; uit $\sigma_L(\psi) \geq \varepsilon$ volgt dan $\sigma_L(\varphi) \geq \varepsilon \delta^2$. Past men dit toe op hokjes, dan vindt men $\tau_{\varphi}^{(m)}(\varepsilon) \leq \tau_{\psi}^{(m)}(\varepsilon \delta^2)$. Omdat $\varphi(x)$ integreerbaar is, geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{\varphi}^{(m)}(\varepsilon \delta^2) = 0$; dus geldt ook $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{\psi}^{(m)}(\varepsilon) = 0$. Verder voldoet $\psi(x)$ aan de voorwaarden 1° en 2°; dus $\psi(x)$ is integreerbaar.

(34.10) Als $\varphi(x)$ integreerbaar is, dan is ook $|\varphi(x)|$ integreerbaar.

Bewijs: We bewijzen voor een willekeurige verzameling L dat

$\sigma_L(|\varphi|) \leq \sigma_L(\varphi)$. Als voor alle $x \in L$ geldt $\varphi(x) \geq 0$, dan is $\sup_{x \in L} |\varphi(x)| = \sup_{x \in L} \varphi(x)$ en $\inf_{x \in L} |\varphi(x)| = \inf_{x \in L} \varphi(x)$, dus $\sigma_L(|\varphi|) = \sigma_L(\varphi)$. Als voor alle $x \in L$ geldt $\varphi(x) < 0$, dan is

$\sup_{x \in L} |\varphi(x)| = - \inf_{x \in L} \varphi(x)$ en $\inf_{x \in L} |\varphi(x)| =$
 $= - \sup_{x \in L} \varphi(x)$, dus $\sigma_L(|\varphi|) = \sigma_L(\varphi)$. Als er een
 $y_1 \in L$ bestaat, waarvoor $\varphi(y_1) \geq 0$ en een $y_2 \in L$, waarvoor
 $\varphi(y_2) < 0$, dan is $\sup_{x \in L} \varphi(x) \geq 0$ en $\inf_{x \in L} \varphi(x) < 0$. Ver-
der is $\sup_{x \in L} |\varphi(x)| \leq \max(\sup_{x \in L} \varphi(x), -\inf_{x \in L} \varphi(x))$,
 $\inf_{x \in L} |\varphi(x)| \geq 0$, dus $\sigma_L(|\varphi|) \leq \max(\sup_{x \in L} \varphi(x),$
 $-\inf_{x \in L} \varphi(x)) \leq \sup_{x \in L} \varphi(x) + (-\inf_{x \in L} \varphi(x)) = \sigma_L(\varphi)$.
Passen we dit toe op hokjes, dan volgt hieruit $\tau_{|\varphi|}^{(m)}(\varepsilon) \leq$
 $\leq \tau_{\varphi}^{(m)}(\varepsilon)$. Omdat $\varphi(x)$ integreerbaar is, geldt
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{\varphi}^{(m)}(\varepsilon) = 0$; dus geldt ook $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{|\varphi|}^{(m)}(\varepsilon) =$
 $= 0$. Verder voldoet $|\varphi(x)|$ aan de voorwaarden 1° en 2°,
dus is $|\varphi(x)|$ integreerbaar.

(34.11) Als $\varphi(x)$ integreerbaar is en $\psi(x) = \varphi(x)$ behal-
ve in eindig veel punten, dan is $\psi(x)$ ook integreerbaar en

$$\int \psi(x) d\omega_x = \int \varphi(x) d\omega_x.$$

Bewijs: Laat k het aantal punten zijn, waar $\varphi(x) \neq$
 $\neq \psi(x)$. De functie $\psi(x)$ voldoet aan de eisen 1° en 2°. Laat
verder γ zo gekozen zijn, dat $|\varphi(x)| < \gamma$ en
 $|\psi(x)| < \gamma$ voor alle x . Vormen we van $\varphi(x)$ en $\psi(x)$
de m^e bovensommen, dan zijn er ten hoogste k termen van deze
verschillend. Het verschil tussen de bovensommen is in absolu-
te waarde $\leq 2 \gamma k 2^{-m n}$ en nadert dus tot nul als
 $m \rightarrow \infty$. Dus $\int^* \psi(x) d\omega_x =$

$= \int \varphi(x) d\omega_x$. Analooog vindt men $\int_{\star} \psi(x) d\omega_x = \int \psi(x) d\omega_x$. Dus is $\psi(x)$ integreerbaar en $\int \psi(x) d\omega_x = \int \psi(x) d\omega_x$.

Hieruit volgen onmiddellijk de beide volgende stellingen:

(34.12) De verzameling, die uit een verzameling met inhoud ontstaat, door er eindig veel punten aan toe te voegen of uit weg te laten, heeft ook een inhoud en wel dezelfde als de oorspronkelijke verzameling.

(34.13) Een eindige verzameling heeft inhoud nul.

(34.14) In R_1 heeft het gesloten interval $[\alpha, \beta]$ ($\alpha \leq \beta$) de inhoud $\beta - \alpha$.

Bewijs: In iedere verdeling zijn er ten hoogste twee hokjes, die punten in en buiten $[\alpha, \beta]$ bevatten. Dus $\kappa^{(m)}(V) \leq 2 \cdot 2^{-m}$ en dit nadert tot nul als $m \rightarrow \infty$. Dus $[\alpha, \beta]$ heeft een inhoud. Verder is duidelijk, dat $S_{\star m}(\chi_{[\alpha, \beta]}) \leq \beta - \alpha \leq S_m^*(\chi_{[\alpha, \beta]})$ en hieruit volgt $\int \chi_{[\alpha, \beta]}(\xi) d\xi = \beta - \alpha$.

Ook de open en halfopen intervallen (α, β) , $(\alpha, \beta]$ en $[\alpha, \beta)$ hebben inhoud $\beta - \alpha$. Verder mag de integraal $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi$ ook over een aan één zijde of aan beide zijden open interval uitgestrekt worden.

(34.15) Als V_1 en V_2 een inhoud hebben, dan hebben $V_1 \cup V_2$ en $V_1 \cap V_2$ ook een inhoud en $\mathcal{J}(V_1) + \mathcal{J}(V_2) = \mathcal{J}(V_1 \cup V_2) + \mathcal{J}(V_1 \cap V_2)$. (Hierin stelt $\mathcal{J}(L)$ de inhoud van L voor).

Bewijs: We bewijzen eerst $\kappa^{(m)}(V_1 \cap V_2) \leq \kappa^{(m)}(V_1) + \kappa^{(m)}(V_2)$. Beschouw een hokje, dat punten in $V_1 \cap V_2$ en buiten $V_1 \cap V_2$ bevat. Een punt in $V_1 \cap V_2$ ligt in V_1 en in V_2 . Het hokje kan dus niet geheel uit punten buiten V_1 bestaan en evenmin geheel uit punten buiten V_2 . Als het geheel uit punten binnen V_1 en binnen V_2 bestond, zou het ook geheel uit punten binnen $V_1 \cap V_2$ bestaan, hetgeen niet het geval is. Dus voor V_1 of V_2 geldt, dat het hokje punten binnen en buiten de verzameling bevat. Dus $\kappa^{(m)}(V_1 \cap V_2) \leq \kappa^{(m)}(V_1) + \kappa^{(m)}(V_2)$. Uit deze betrekking en uit het feit, dat V_1 en V_2 een inhoud hebben, volgt, dat $V_1 \cap V_2$ een inhoud heeft. Op analoge wijze bewijst men $\kappa^{(m)}(V_1 \cup V_2) \leq \kappa^{(m)}(V_1) + \kappa^{(m)}(V_2)$.

Opgave 133. Bewijs, dat $\kappa^{(m)}(V_1 \cup V_2) \leq \kappa^{(m)}(V_1) + \kappa^{(m)}(V_2)$.

Hieruit volgt, dat als V_1 en V_2 een inhoud hebben, $V_1 \cup V_2$ een inhoud heeft. Voor de bepaling van de inhoud, behoeven de hokjes, die punten in en buiten V_1 of V_2 bevatten, niet meegeteld te worden, omdat de som van hun grootten tot nul nadert, als $m \rightarrow \infty$. Er blijven dan voor één hokje vier gevallen over, die we in het volgende schema weergeven (we schrijven + als het hokje meetelt, 0 als het niet meetelt):

	V_1	V_2	$V_1 \cup V_2$	$V_1 \cap V_2$
geheel buiten V_1 , geheel in V_2	0	+	+	0
geheel buiten V_1 , geheel buiten V_2	0	0	0	0
geheel in V_1 , geheel in V_2	+	+	+	+
geheel in V_1 , geheel buiten V_2	+	0	+	0

Uit dit schema blijkt, dat voor het linker- en het rechterlid van de te bewijzen betrekking evenveel hokjes meegeteld worden. Dus $\mathcal{I}(V_1) + \mathcal{I}(V_2) = \mathcal{I}(V_1 \cup V_2) + \mathcal{I}(V_1 \cap V_2)$.

Op geheel analoge wijze bewijzen we:

(34.16) Als $\varphi(x)$ integreerbaar is en V_1 en V_2 zijn verzamelingen met inhoud, dan is $\int_{V_1} \varphi(x) d\omega_x + \int_{V_2} \varphi(x) d\omega_x = \int_{V_1 \cup V_2} \varphi(x) d\omega_x + \int_{V_1 \cap V_2} \varphi(x) d\omega_x$.

Neemt men speciaal disjuncte verzamelingen (d.w.z. $V_1 \cap V_2$ leeg), dan is $\mathcal{I}(V_1 \cap V_2) = 0$, dus:

(34.17) Als V_1 en V_2 een inhoud hebben en $V_1 \cap V_2$ is leeg, dan is $\mathcal{I}(V_1 \cup V_2) = \mathcal{I}(V_1) + \mathcal{I}(V_2)$.

(34.18) Als $\varphi(x)$ integreerbaar is en V_1 en V_2 zijn verzamelingen met inhoud en $V_1 \cap V_2$ is leeg, dan is $\int_{V_1 \cup V_2} \varphi(x) d\omega_x = \int_{V_1} \varphi(x) d\omega_x + \int_{V_2} \varphi(x) d\omega_x$.

Hieruit volgt, dat als $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ en $\varphi(\xi)$ integreerbaar is, dat $\int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi + \int_{\beta}^{\gamma} \varphi(\xi) d\xi$, immers (α, γ) is de vereniging van de disjuncte intervallen $(\alpha, \beta]$ en (β, γ) . Voor $\alpha > \beta$ definiëren we $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi$ door $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi = -\int_{\beta}^{\alpha} \varphi(\xi) d\xi$. We kunnen in bovenstaande betrekking de voorwaarde $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ dan laten vervallen en krijgen dan

(34.19) Als α, β en γ reële getallen zijn en $\varphi(\xi)$ is integreerbaar, dan is $\int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi + \int_{\beta}^{\gamma} \varphi(\xi) d\xi$.

Opgave 134. Bewijs (34.19) in de nog niet behandelde gevallen.

(34.20) Laat $\varphi(x)$ een integreerbare functie zijn en L een verzameling met inhoud. Laat verder γ_1 en γ_2 reële getallen zijn, zodat

$$\gamma_1 \leq \varphi(x) \leq \gamma_2 \text{ voor alle } x \in L. \text{ Dan geldt } \gamma_1 \mathcal{I}(L) \leq \int_L \varphi(x) d\omega_x \leq \gamma_2 \mathcal{I}(L).$$

Bewijs: Stel eerst $\gamma_2 \geq 0$, dan is $S_m^*(\varphi \chi_L) =$

$$= \sum_{\|x\| \in V_m} \sup_{y \in \|x\|} (\varphi(y) \chi_L(y)) \Delta \|x\| \leq \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \|x\| \cap L \text{ niet leeg}}} \gamma_2 \Delta \|x\| =$$

$$= \gamma_2 S_m^*(\chi_L), \text{ dus } \int_L \varphi(x) d\omega_x \leq \gamma_2 \mathcal{I}(L). \text{ Stel nu } \gamma_2 < 0,$$

dan is $S_m^*(\varphi \chi_L) = \sum_{\|x\| \in V_m} \sup_{y \in \|x\|} (\varphi(y) \chi_L(y)) \Delta \|x\| \leq$

$$\leq \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \|x\| \cap L}} \gamma_2 \Delta \|x\| = \gamma_2 S_m^*(\chi_L), \text{ dus } \int_L \varphi(x) d\omega_x \leq \gamma_2 \mathcal{I}(L).$$

In beide gevallen komt er dus hetzelfde resultaat. Op analoge wijze bewijst men de andere helft.

In R_1 geeft dit, als we voor L een interval $[\alpha, \beta]$ kiezen:

(34.21) Als $\varphi(\xi)$ een integreerbare functie is, α, β, γ_1 en γ_2 reële getallen, zodat $\alpha \leq \beta$ en $\gamma_1 \leq \varphi(\xi) \leq \gamma_2$ voor alle ξ , waarvoor $\alpha < \xi < \beta$ dan is $\gamma_1(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi \leq \gamma_2(\beta - \alpha)$.

Het spreekt vanzelf, dat we in (34.20) $\gamma_1 = \inf_{x \in L} \varphi(x)$ en $\gamma_2 = \sup_{x \in L} \varphi(x)$ kunnen kiezen en analoog in (34.21). Verder merken we nog op, dat de betrekking in (34.21) niet geldt als $\alpha > \beta$.

De beide volgende stellingen zijn evident;

(34.22) Als $\varphi(x)$ integreerbaar is en $\varphi(x) \geq 0$ voor alle x , dan is $\int \varphi(x) d\omega_x \geq 0$; speciaal is een inhoud ≥ 0 .

(34.23) Als $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ integreerbaar zijn en $\varphi(x) \geq \psi(x)$ voor alle x , dan is $\int \varphi(x) d\omega_x \geq \int \psi(x) d\omega_x$.

De tot nu toe behandelde stellingen leiden, op een enkele uitzondering na, steeds integreerbaarheid van een functie af uit integreerbaarheid van andere functies. De nu volgende stelling zal ons direct de integreerbaarheid van een bepaalde klasse van functies leveren.

(34.24) Als $\varphi(x)$ een functie is, L een verzameling met inhoud is, voor $x \notin L$ $\varphi(x) = 0$ is en $\varphi(x)$ in L continu en begrensd is, dan is $\varphi(x)$ integreerbaar.

Opmerking. De functie $\varphi(x)$ behoeft niet continu te zijn als functie in R_n . Alleen als we x beperken tot L en $\varphi(x)$ als een op L gedefinieerde functie opvatten, moet $\varphi(x)$ continu zijn.

Bewijs: Het is duidelijk dat $\varphi(x)$ aan de eisen 1° en 2° voldoet. Omdat L een inhoud heeft is $\lim_{m \rightarrow \infty} \chi^{(m)}(L) = 0$. Kies een $\varepsilon > 0$ en een

$\eta > 0$. Er is een N_1 te vinden zodat voor $m > N_1$ geldt $\chi^{(m)}(L) < \frac{\eta}{2}$.

Alle niet in $\chi^{(m)}(L)$ meegetelde hokjes van de m^e verdeling liggen dus geheel binnen of geheel buiten L . De laatste tellen in het geheel niet mee in de boven- en benedensommen. We laten ze dus buiten beschouwing.

Kies een vast natuurlijk getal $M > N_1$ en laat de hokjes die meewerken aan $\chi^{(M)}(L)$ verder buiten beschouwing. De overige hokjes van de M^e verdeling liggen geheel in L . We noemen de afsluiting van een hokje bepaald door

$$\frac{k_i}{2^m} \leq \xi_i < \frac{k_i+1}{2^m}, \text{ de verzameling der punten } x, \text{ waarvoor } \frac{k_i}{2^m} \leq \xi_i < \frac{k_i+1}{2^m}$$

voor $i=1, \dots, n$. De som van de grootten van de hokjes van de m^e verdeling die geheel in L liggen, maar waarvan de afsluiting niet geheel in L ligt, geven we aan met $\lambda^{(m)}(L)$. Beschouw een hokje, dat tot $\lambda^{(M)}(L)$ meewerkt en laat dit bepaald zijn door $\frac{k_i}{2^M} \leq \xi_i < \frac{k_i+1}{2^M}$. We kunnen dit

ook schrijven $\frac{k_i 2^{m-M}}{2^m} \leq \xi_i < \frac{k_i 2^{m-M} + 2^{m-M}}{2^m}$. Voor $m > M$ beschouwen we nu de

onderverdeling van dit hokje in hokjes van de m^e verdeling. Van alle

hokjes van de m^e verdeling hierin, waarvoor $\xi_i < \frac{k_i 2^{m-M} + 2^{m-M-1}}{2^m}$, behoort

de afsluiting geheel tot L . Hun aantal is $(2^{m-M-1})^n$, de som van hun grootten is $(2^{m-M-1})^n 2^{-mn}$, dus de fractie die dit vormt van de totale grootte van het hokje uit de M^e verdeling is:

$$(2^{m-M-1})^n 2^{-mn} 2^{Mn} = \left(\frac{2^{m-M}-1}{2^{m-M}}\right)^n.$$

Alleen van de overblijvende hokjes kunnen eventueel de afsluitingen niet geheel tot L behoren. De som van de grootten van de hokjes uit de m^e verdeling, die ontstaan uit onderverdeling van hokjes uit de M^e verdeling die tot $\lambda^{(M)}(L)$ meewerken, en waarvan de afsluiting niet ge-

heel tot L behoort is $\leq (1 - (\frac{2^{m-M}-1}{2^{m-M}})^n) \lambda^{(M)}(L)$. Omdat $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - (\frac{2^{m-M}-1}{2^{m-M}})^n) = 0$,

is er een index $N_2 > M$ zodat voor $m > N_2$ geldt $(1 - (\frac{2^{m-M}-1}{2^{m-M}})^n) \lambda^{(M)}(L) < \frac{\eta}{2}$.

Van hokjes uit de m^e verdeling die ontstaan door onderverdeling van hokjes uit de M^e verdeling waarvan de afsluiting geheel tot L behoort, behoort de afsluiting ook geheel tot L . Kies een vaste index $M_1 > N_2$, dan is dus $\lambda^{(M_1)}(L) < \eta$. Laat deze hokjes buiten beschouwing. Van de overblijvende hokjes of hun onderverdelingen liggen voor $m > M_1$ de afsluitingen geheel in L . De vereniging van deze afsluitingen is een

gesloten begrensde verzameling in R_n , waarop $\varphi(x)$ continu en dus uniform continu is (zie (12.8) en (15.4)). Er is dus een $\delta > 0$ te vinden zodat daar uit $|x-y| < \delta$ volgt $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kies nu een index $N_3 \geq M_1$, zodat voor $m > N_3$ geldt $2^{-m} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, dan is voor twee punten x

en y uiteen zelfde hokje van de m^e verdeling $|x-y| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2} < \sqrt{n 2^{-2m}} < \delta$, dus in zo 'n hokje behorende tot de beschouwde verzameling is $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Voor $m > N_3$ werken deze hokjes dus niet mee aan $\tau_{\varphi}^{(m)}(\varepsilon)$. Dus voor $m > N_3$ is $\tau_{\varphi}^{(m)}(\varepsilon) < \eta$, dus $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_{\varphi}^{(m)}(\varepsilon) = 0$ voor alle $\varepsilon > 0$. Dus $\varphi(x)$ is integreerbaar.

Uit deze stelling volgt b.v. dat in R_1 een op een begrensd interval gedefinieerde begrensde continue functie integreerbaar is b.v. $\sin \frac{1}{x}$ op $(0,1)$.

De moeilijkheid om integreerbare functies te vinden is in stelling (34.24) slechts verschoven, daar we in R_n nog maar weinig soorten verzamelingen kennen, die een inhoud hebben. Op deze kwestie komen we later terug.

(34.25) Als $\varphi(x)$ een integreerbare functie in R_n is en $\varphi(x) \geq 0$ en L is de verzameling der punten $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ in R_{n+1} , waarvoor geldt $0 < \xi_{n+1} \leq \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$, dan heeft L een inhoud en $I(L) = \int \varphi(x) d\omega_x$.

Bewijs: Als $V_m^{(n)}$ de m^e hokjesverdeling in R_n voorstelt is $S_m^*(\varphi) = \sum_{\|x\| \in V_m^{(n)}} 2^{-mn} \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y)$. Voor ieder hokje $\|x\|$ uit

$V_m^{(n)}$ bepalen we een geheel getal k_{n+1} , zodat $\frac{k_{n+1}}{2^m} \leq \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) < \frac{k_{n+1}+1}{2^m}$, dan worden bij ieder hokje van $V_m^{(n)}$ voor de inhoud van L

in de bovensom k_{n+1} of $k_{n+1}+1$ hokjes meegeteld, maar $(k_{n+1}+1)2^{-m(n+1)} \leq 2^{-mn} \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) + 2^{-m(n+1)}$. Stel nu dat N een dusdanig natuurlijk getal is, dat $\varphi(x) = 0$ voor $|x| \geq N$. Dan is $S_m^*(\chi_1) \leq S_m^*(\varphi) + 2^{-m(n+1)} N 2^{mn}$,

dus $I^*(L) \leq \int \varphi(x) d\omega_x$. Evenzo gaat men te werk bij de binneninhoud door ℓ_{n+1} zo te bepalen, dat $\frac{\ell_{n+1}}{2^m} \leq \inf_{y \in \|x\|} \varphi(y) < \frac{\ell_{n+1}+1}{2^m}$, dan worden er in de benedensom voor de inhoud steeds ℓ_{n+1} hokjes meegeteld,

maar $\ell_{n+1} 2^{-m(n+1)} = (\ell_{n+1}+1) 2^{-m(n+1)} - 2^{-m(n+1)} > 2^{-mn} \inf_{y \in \|x\|} \varphi(y) - 2^{-m(n+1)}$.

Hieruit volgt weer $I_*(L) \geq \int \varphi(x) d\omega_x$, dus $I^*(L) = I_*(L) = \int \varphi(x) d\omega_x$.

De stelling is niet alleen in overeenstemming met de aanschouwelijke voorstelling van een integraal als een inhoud, maar kan ook dienst doen

Als voorbeeld behandelen we de hyperbol; dat is de verzameling der punten x waarvoor $|x| \leq \rho$, waarin ρ een vast reëel getal ≥ 0 is.

We bewijzen dit door volledige inductie naar de dimensie n . Voor $n=1$ is het interval $[-\rho, \rho]$, dat een inhoud heeft. Laat de stelling voor n gelden. In R_{n+1} zijn de punten van de hyperbol bepaald door $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^2 \leq \rho^2$. Voor deze punten geldt in ieder geval ook $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \rho^2$ en als $\xi_1, \dots, \xi_n$ gegeven zijn doorloopt ξ_{n+1} het interval

$$\left[-\sqrt{\rho^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2}, \sqrt{\rho^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2} \right].$$

Verdelen we de verzameling nu in drie stukken, naar gelang $\xi_{n+1} \geq 0$ is, dan passen we op de gedeelten waarvoor $\xi_{n+1} > 0$ en < 0 is (34.25) toe, hetgeen kan omdat $\sqrt{\rho^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2}$ continu is en zijn definitieverzameling juist een hyperbol in R_n is. Dat het gedeelte waarvoor $\xi_{n+1} = 0$, inhoud $= 0$ heeft, is ook makkelijk in te zien. De hyperbol is dus de vereniging van drie verzamelingen met inhoud en heeft dus ook een inhoud.

In de hokjesverdelingen, die bij de definitie van de integraal gebruikt worden, zit nog iets onbevredigends door de belangrijke rol die de machten van het getal 2 er in spelen. We willen daarom de benadering van een integraal nu algemener maken; b.v. willen we in R_1 ook met willekeurige kleine intervallletjes werken en niet uitsluitend met zulke waarvan de eindpunten een geheel veelvoud van een negatieve gehele macht van 2 zijn.

Een begreënsd stuk van de ruimte R_n denken we ons verdeeld in eindig veel verzamelingen met inhoud. Dit betekent dat deze verzamelingen disjunct zijn en hun vereniging het ruimtestuk is. We kiezen bij een functie $\varphi(x)$ die aan de voorwaarden 1° en 2° voldoet het ruimtestuk zodanig dat daarbuiten $\varphi(x)$ overal $= 0$ is. Onder de diameter $d(U)$ van een verzameling U verstaan we $d(U) = \sup_{\substack{x \in U \\ y \in U}} |x - y|$. We noemen nu de diameter (Engels: mesh) van een verdeling V het maximum der diameters van de verzamelingen uit de verdeling, dus $d(V) = \max_{U \in V} d(U)$. We zullen nu aantonen, dat, als we voor een verdeling V en een integreerbare functie $\varphi(x)$

vormen $\sum_{\substack{U \in V \\ y \in U}} \varphi(y) I(U)$, waarin y willekeurig in de bijbehorende ver-

zameling U ligt, deze som tot de integraal van $\varphi(x)$ nadert als de diameter van de verdeling tot nul nadert. Hiertoe bewijzen we eerst een hulpstelling.

(34.26) Als $\varphi(x)$ aan de voorwaarden 1° en 2° voldoet, is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden zodat voor iedere verdeling V van een ruimtestuk waarbuiten $\varphi(x)=0$, waarvoor $d(V) < \delta$, geldt

$$\sum_{U \in V} \sup_{y \in U} \varphi(y) I(U) \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x + \varepsilon \quad \text{en} \quad \sum_{U \in V} \inf_{y \in U} \varphi(y) I(U) \geq \int_* \varphi(x) d\omega_x - \varepsilon.$$

Bewijs: We bewijzen alleen de eerste van de beide formules. De andere gaat evenzo. Kies een natuurlijk getal m , zodat geldt

$S_m^*(\varphi) \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x + \frac{\varepsilon}{2}$. Laat q het aantal hokjes uit de m^e hokjesverdeling zijn waarbinnen punten y liggen waarvoor $\varphi(y) \neq 0$ (als $q=0$, is $\varphi(x)=0$ voor alle $x \in R_n$ en is de stelling evident). Verder zij γ een reëel getal dusdanig dat $|\varphi(x)| < \gamma$ voor alle $x \in R_n$. Het is mogelijk een reëel getal $\delta > 0$ te vinden, zodat $(2^{-m} + 2\delta)^n - (2^{-m} - 2\delta)^n < \frac{\varepsilon}{2\gamma q}$.

Het linkerlid van deze ongelijkheid is $\geq$ de som van de inhouden van verzamelingen U uit een verdeling met diameter $< \delta$ die met een bepaald hokje uit de m^e hokjesverdeling punten gemeen hebben, maar niet geheel binnen dat hokje liggen. Als een verzameling U geheel binnen een hokje $\|x\|$ ligt is $\sup_{y \in U} \varphi(y) \leq \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y)$, dus $\sup_{y \in U} \varphi(y) I(U) \leq \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) I(U)$,

$$\text{dus} \quad \sum_{U \in V} \sup_{y \in U} \varphi(y) I(U) \leq \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) \sum_{U \in V} I(U) \leq \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) \Delta \|x\|.$$

Als V een verdeling is met diameter $< \delta$, dan verdelen we $\sum_{U \in V} \sup_{y \in U} \varphi(y) I(U)$ in de termen die behoren bij verzamelingen U die geheel binnen een hokje van de m^e hokjesverdeling liggen en die waarbij dit niet het geval is.

Dan volgt uit het voorafgaande dat $\sum_{U \in V} \sup_{y \in U} \varphi(y) I(U) \leq S_m^*(\varphi) + q\gamma \frac{\varepsilon}{2q\gamma} = S_m^*(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x + \varepsilon$.

Als nu $\varphi(x)$ integreerbaar is dan geldt $\int \varphi(x) d\omega_x - \varepsilon \leq \sum_{U \in V} \inf_{z \in U} \varphi(z) I(U) \leq \sum_{U \in V} \varphi(y) I(U) \leq \sum_{U \in V} \sup_{z \in U} \varphi(z) I(U) \leq \int \varphi(x) d\omega_x + \varepsilon$. Hieruit volgt:

(34.27) Als $\varphi(x)$ integreerbaar is, is bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden, zodat voor iedere verdeling V van een ruimtestuk waarbuiten $\varphi(x)=0$, waarvoor $d(V) < \delta$, geldt $|\int \varphi(x) d\omega_x - \sum_{U \in V} \varphi(y) I(U)| < \varepsilon$, waarbij y in de bijbehorende U ligt, $|\int \varphi(x) d\omega_x - \sum_{U \in V} \sup_{z \in U} \varphi(z) I(U)| < \varepsilon$ en $|\int \varphi(x) d\omega_x - \sum_{U \in V} \inf_{z \in U} \varphi(z) I(U)| < \varepsilon$.

We kunnen de stelling nu ook omkeren.

(34.28) Als $\varphi(x)$ aan de voorwaarden 1° en 2° voldoet en er geldt voor iedere rij verdelingen $V^{(m)}$, waarvoor $\lim_{m \rightarrow \infty} d(V^{(m)}) = 0$, en iedere keuze van

in de bijbehorende U , dat $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{U \in V^{(m)}} \varphi(y) I(U)$ bestaat, dan is deze

niet voor iedere rij dezelfde (noem hem I) en $\varphi(x)$ is integreerbaar en $\int \varphi(x) d\omega_x = I$.

Bewijs: Neem twee rijen $V^{(m)}$ en $V'^{(m)}$, die aan de voorwaarden van de stelling voldoen en vorm de rij $V''^{(m)}$, die gedefinieerd is door $V''^{(2m-1)} = V^{(m)}$ en $V''^{(2m)} = V'^{(m)}$, dan voldoet $V''^{(m)}$ aan de gestelde voorwaarden en bevat $V^{(m)}$ en $V'^{(m)}$ als deelrijen. Hieruit volgt dat de limieten bij $V^{(m)}$ en $V'^{(m)}$ dezelfde zijn. Laat de kubus L_k (zie pg. 121) zo zijn dat voor $x \notin L_k$ geldt $\varphi(x) = 0$. Een hokjesverdeling is dan een verdeling van de gevraagde soort, als we de hokjes beperken tot die welke in L_k gelegen zijn, want een hokje heeft een inhoud (die gelijk is aan zijn grootte). Omdat in de boven- en benedensommen suprema en infima optreden zijn deze sommen nog geen sommen van de gevraagde soort. De diameter van een hokje uit de m^e hokjesverdeling is $\sqrt{n} 2^{-m}$, dus de rij van de m^e hokjesverdelingen heeft een rij van diameters die naar nul convergeert. Kies nu een $\varepsilon > 0$, dan is in ieder hokje $\|x\|$, gelegen in L_k , uit de m^e hokjesverdeling een y te vinden zodat geldt

$$\varphi(y) > \sup_{z \in \|x\|} \varphi(z) + \frac{\varepsilon}{(2k)^n}. \text{ Dan is}$$

$$\sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \|x\| \subset L_k}} \varphi(y) \Delta \|x\| \geq \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \|x\| \subset L_k}} \sup_{z \in \|x\|} \varphi(z) \Delta \|x\| + \frac{\varepsilon}{(2k)^n} \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \|x\| \subset L_k}} \Delta \|x\| =$$

$S_m^*(\varphi) + \varepsilon$. Het linkerlid convergeert voor $m \rightarrow \infty$ naar I , dus

$I \geq \int^* \varphi(x) d\omega_x + \varepsilon$ voor iedere $\varepsilon > 0$, dus $I \geq \int^* \varphi(x) d\omega_x$. Evenzo bewijst men $I \leq \int_* \varphi(x) d\omega_x$. Hieruit volgt $I = \int_* \varphi(x) d\omega_x = \int^* \varphi(x) d\omega_x = \int \varphi(x) d\omega_x$.

Het voordeel van stelling (34.27) is, dat men bij een functie, waarvan men weet dat hij integreerbaar is, voor de berekening van de integraal andere verdelingen dan hokjesverdelingen en willekeurige punten in de verzamelingen voor de functiewaarde kan gebruiken. Om b.v. $\int_{\alpha}^{\beta} \xi d\xi$ uit te rekenen, verdelen we het interval (α, β) in deelintervallen $\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_k = \beta$. We nemen in (ξ_{i-1}, ξ_i) als functiewaarde $\frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i)$, dan wordt de som

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_0^2) = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2). \text{ Dus}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \xi d\xi = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

Opgave 135. Bereken $\int_1^5 \xi^2 d\xi$.

(34.29) Als $\varphi_k(x)$ een rij integreerbare functies is en er bestaat een reëel getal γ_1 zodat voor $|x| > \gamma_1$ $\varphi_k(x) = 0$ voor alle k en een γ_2 zodat $|\varphi_k(x)| < \gamma_2$ voor alle x en k en de rij $\varphi_k(x)$ is uniform convergent met limiet $\varphi(x)$, dan is $\varphi(x)$ integreerbaar en $\int \varphi(x) d\omega_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) d\omega_x$.

Bewijs: Dat $\varphi(x)$ aan de eisen 1^o en 2^o voldoet is duidelijk. Laat K een natuurlijk getal $> \gamma_1$ zijn. Wegens de uniforme convergentie is bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vinden zodat voor $k > N$ en iedere y geldt

$$|\varphi(y) - \varphi_k(y)| < \frac{\varepsilon}{(2K)^n}. \text{ Dus } \varphi(y) < \varphi_k(y) + \frac{\varepsilon}{(2K)^n},$$

$$\begin{aligned} \text{dus } S_m^*(\varphi) &= \sum_{\|x\| \in V_m} \sup_{y \in \|x\|} \varphi(y) \Delta \|x\| \leq \sum_{\|x\| \in V_m} \sup_{y \in \|x\|} \varphi_k(y) \Delta \|x\| + \\ &+ \sum_{\substack{\|x\| \in V_m \\ \|x\| < L_k}} \frac{\varepsilon}{(2K)^n} \Delta \|x\| = \\ &= S_m^*(\varphi_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $\int^* \varphi(x) d\omega_x \leq \int \varphi_k(x) d\omega_x + \varepsilon$. Analooq voor de benedenintegraal dus

$$\int \varphi_k(x) d\omega_x - \varepsilon \leq \int \varphi(x) d\omega_x \leq \int^* \varphi(x) d\omega_x \leq \int \varphi_k(x) d\omega_x + \varepsilon.$$

Dus

$$\left| \int^* \varphi(x) d\omega_x - \int \varphi_k(x) d\omega_x \right| < \varepsilon \quad \text{voor } k > N. \text{ Dus}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) d\omega_x = \int^* \varphi(x) d\omega_x.$$

Evenzo vindt men $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) d\omega_x = \int_* \varphi(x) d\omega_x$. Dus

$$\int^* \varphi(x) d\omega_x = \int_* \varphi(x) d\omega_x \quad (\varphi(x) \text{ is integreerbaar}) \text{ en}$$

$$\int \varphi(x) d\omega_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) d\omega_x.$$

Uit (34.29) kunnen we stellingen afleiden over continuïteit en differentieerbaarheid van integralen als functies van parameters. Laat

$\varphi(x, \lambda)$ een functie zijn, waarin x een punt van een R_n en λ een reële parameter is. Stel dat $\varphi(x, \lambda)$ een integreerbare functie van x is voor iedere waarde van λ in het definitiegebied van φ als functie van λ . Dus $\int \varphi(x, \lambda) d\omega_x = \psi(\lambda)$. Laat nu $\varphi(x, \lambda)$ continu zijn t.o.v. λ in een punt λ_0 en wel uniform t.o.v. x , d.w.z. uit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_0 \text{ volgt } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x, \lambda_k) = \varphi(x, \lambda_0) \text{ uniform in } x; \text{ dan}$$

volgt uit (34.29) dat $\varphi(x, \lambda_0)$ integreerbaar is en

$$\int \varphi(x, \lambda_0) d\omega_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi(x, \lambda_k) d\omega_x, \text{ d.w.z.}$$

$$\psi(\lambda_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda_k), \text{ d.w.z. } \psi(\lambda) \text{ is ook continu in } \lambda_0. \text{ Een}$$

dergelijke stelling geldt ook voor differentieerbaarheid. We gaan er niet op in.

§ 35. Integreerbaarheid van functies van één veranderlijke. Verband met differentieerbaarheid.

We beperken ons in deze paragraaf tot functies van één reële veranderlijke. We zullen daarom de conventie laten varen, dat reële getallen alleen met Griekse letters worden voorgesteld en mogen reële functies en reële veranderlijken nu ook met Latijnse letters schrijven.

(35.1) Een op een begrensde interval gedefinieerde begrensde monotone functie is integreerbaar.

Opgave 136. Bewijs (35.1).

(35.2) (Middelwaardestelling der integraalrekening)

Als $a < b$ en $f(x)$ continu op $[a, b]$, $g(x) \geq 0$ op (a, b) en $\int_a^b g(x) dx$ bestaat, dan is er een $\xi \in [a, b]$, zodat $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$.

Bewijs: $f(x)$ heeft op $[a, b]$ een minimum m en een maximum M . Nu is $(M - f(x))g(x) \geq 0$ op (a, b) en dus $0 \leq \int_a^b (M - f(x))g(x) dx = M \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x)g(x) dx$. Analooq voor m , dus we vinden $m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$. Als $\int_a^b g(x) dx = 0$, volgt hieruit $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$,

dus de stelling is goed voor een willekeurige keuze van ξ . Als

$$\int_a^b g(x) dx > 0, \text{ dan is } m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M, \text{ dus er is een } \xi \in [a, b]$$

$$\text{zodat } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}, \text{ waaruit de stelling volgt.}$$

Als, voor $a < b$, $\int_a^b f(\xi) d\xi$ bestaat, dan bestaat ook $\int_a^x f(\xi) d\xi = F(x)$

voor $a \leq x \leq b$. Deze functie van x noemen we de integraalfunctie van $f(x)$ (eigenlijk een integraalfunctie, want hij hangt nog van de keuze van a af).

(35.3) Een integraalfunctie van een integreerbare functie $f(x)$ is continu.

Bewijs: Omdat $f(x)$ integreerbaar is, is $f(x)$ begrensd: $|f(x)| < C$.

Nu is $|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi \right| \leq |h| C$. Als we bij $\epsilon > 0$

nu $|h| < \frac{\epsilon}{C}$ kiezen, volgt daaruit de continuïteit.

We proberen nu in hoeverre $F(x)$ differentieerbaar is. Als $h > 0$, geldt $h \inf_{x \leq \xi \leq x+h} f(\xi) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \sup_{x \leq \xi \leq x+h} f(\xi)$ en als $h < 0$, geldt $-h \inf_{x+h \leq \xi \leq x} f(\xi) \leq F(x) - F(x+h) \leq -h \sup_{x+h \leq \xi \leq x} f(\xi)$.

In beide gevallen geldt dus $\inf_{|\xi-x| \leq |h|} f(\xi) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \sup_{|\xi-x| \leq |h|} f(\xi)$. Als nu $f(\xi)$

continu is in het punt x naderen linker-en rechterlid beide tot $f(x)$

als $h \rightarrow 0$. Dan is dus ook $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Hiermee is bewezen:

(35.4) In de punten waar een integreerbare functie $f(x)$ continu is, is zijn integraalfunctie differentieerbaar met afgeleide $f(x)$.

A priori zijn er voor de integraalfunctie $F(x)$ van een functie $f(x)$ in een bepaald punt x drie mogelijkheden:

- 1°. $F(x)$ is niet differentieerbaar.
- 2°. $F(x)$ is differentieerbaar, maar $F'(x) \neq f(x)$.
- 3°. $F(x)$ is differentieerbaar en $F'(x) = f(x)$.

Alle drie de gevallen doen zich werkelijk voor. Zo is de functie $f(x)$ gedefinieerd door $f(x) = 0$ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ en $f(x) = 1$ voor $\frac{1}{2} < x \leq 1$ integreerbaar, maar zijn integraalfunctie is in het punt $\frac{1}{2}$ niet differentieerbaar. Dit is een voorbeeld voor 1°. Een voorbeeld voor 2° is de functie $f(x)$ gedefinieerd door $f(x) = 0$ voor $x \neq 0$ en $f(x) = 1$ voor $x = 0$. Volgens (35.4) geven de continue functies voorbeelden van 3°.

We hebben het probleem beschouwd een integraal, als functie van de bovengrens opgevat, te differentiëren. Nu doen we het omgekeerd en gaan uit van een op een interval gedefinieerde differentieerbare functie $G(x)$ en proberen de afgeleide te integreren. We weten al dat een functie door zijn afgeleide slechts op een additieve constante na bepaald is en kunnen dus niets beters verwachten dan dat $G(x)$ en de integraalfunctie van $G'(x)$ een constant verschil hebben. Er zijn a priori weer drie mogelijkheden.

- 1°. $G'(x)$ is niet integreerbaar.
- 2°. $G'(x)$ is integreerbaar, maar $\int_a^x G'(\xi) d\xi - G(x)$ is niet constant.
- 3°. $G'(x)$ is integreerbaar en $\int_a^x G'(\xi) d\xi - G(x)$ is constant.

De waarde van de constante in geval 3° is te vinden door $x = a$ te stellen en wordt dan $-G(a)$, dus $\int_a^x G'(\xi) d\xi = G(x) - G(a)$.

We weten, dat de afgeleide van een op een gesloten interval gedefinieerde differentieerbare functie niet begrensd hoeft te zijn (zie opgave 88, blz 73) en dan dus ook niet integreerbaar is. Dit is dus een voorbeeld voor 1°. Het is zelfs mogelijk een voorbeeld te geven van een op een gesloten interval redefinieerde differentieerbare functie, waarvan de afgeleide begrensd en toch niet integreerbaar is; dit is echter vrij moeilijk en daarom laten we dat achterwege. Het geval 2° kan echter niet optreden. We bewijzen n.l. de volgende stelling:

(35.5) Als $G(x)$ een differentieerbare functie is, gedefinieerd op $[a, b]$

en als $\int_a^b G'(x) dx$ bestaat, dan is $\int_a^b G'(x) dx = G(b) - G(a)$.

Bewijs: Kies op $[a, b]$ een aantal punten: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ en beschouw deze punten als eindpunten van de intervallen van een verdeling van $[a, b]$ in intervallen. Volgens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening is er bij x_{i-1} en x_i een $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ te vinden zodat

$$\frac{G(x_i) - G(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = G'(\xi_i). \text{ Hieruit volgt:}$$

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^k (G(x_i) - G(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^k G'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \text{ Dit laatste is}$$

een approximatiesom van de integraal van $G'(x)$. Als we de diameter van de verdeling tot nul laten naderen, nadert het rechterlid tot die integraal. Dus

$$\int_a^b G'(x) dx = G(b) - G(a).$$

De reciprociteit tussen differentiaal en integraal is niet volkomen maar wel als de functie die geïntegreerd moet worden continu is. Samengevat:

Als $f(x)$ continu is, is $f(x)$ integreerbaar; de integraalfunctie is differentieerbaar en de afgeleide is $f(x)$.

Als $G(x)$ continu differentieerbaar is, is $G'(x)$ integreerbaar en de integraalfunctie is op een additieve constante na gelijk aan $G(x)$.

Als $F'(x) = f(x)$, zeggen we, dat $F(x)$ een stamfunctie, een primitieve functie of een onbepaalde integraal van $f(x)$ is, geschreven $F(x) = \int f(x) dx$. We beperken ons hierbij tot functies die op een interval gedefinieerd zijn. Deze schrijfwijze zou aanleiding kunnen geven tot verwarring met de bepaalde integralen; daarom spreken we af, dat we $\int f(x) dx$ voor onbepaalde integralen alleen mogen gebruiken als $f(x)$ continu is. We gebruiken dan de bepaalde integraal alleen voor integratie over een interval waarbij de grenzen bij het integraalteken worden geschreven. Als dan de onbepaalde integraal $\int f(x) dx = F(x)$ dan ontstaat hieruit de bepaalde integraal over het interval (a, b) als volgt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ of uitvoeriger geschreven } \int_a^b f(x) dx =$$

$$= \left(\int f(x) dx \right)_{x=b} - \left(\int f(x) dx \right)_{x=a}.$$

De onbepaalde integralen leveren ons nu een machtig hulpmiddel om integralen uit te rekenen.

Door toepassing van bekende stellingen uit de differentiaalrekening vinden we de volgende stellingen:

(35.6) Als $f(x)$ en $g(x)$ op hetzelfde interval gedefinieerde reële continue functies zijn geldt: $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ en $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

(35.7) Als $f(x)$ een op een interval gedefinieerde reële continue functie is, en c een reële constante, geldt: $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$.

(35.8) (Partiële integratie) Als $f(x)$ en $g(x)$ op hetzelfde interval gedefinieerde reële functies zijn, $f(x)$ differentieerbaar is en $g(x)$ continu is, geldt:

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \int g(x)dx dx.$$

(35.9) (Transformatie van veranderlijke) Als $\varphi(t)$ een continu differentieerbare, op een interval gedefinieerde reële functie is, en $f(x)$ een continue functie is, gedefinieerd op een interval, dat de functiewaarden van φ bevat, dan geldt:

$$\left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

In (35.9) moeten we bij de overgang op bepaalde integralen nog oppassen, omdat er twee variabelen in voorkomen. Als t het interval (a, b) doorloopt vinden we:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(b)} - \left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(a)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Dit geldt op grond van de gemaakte afspraken ook als $\varphi(b) < \varphi(a)$. In (35.9) kan men ook een mooie formele rechtvaardiging zien van de gekozen notatie

van een integraal: $\int f dx = \int f \frac{dx}{dt} dt.$

Uit (35.8) en (35.9) samen kunnen we een formule voor de integraal van een omkeersfunctie afleiden. Stel $f(x)$ op een interval gedefinieerd, eeneenduidig en continu differentieerbaar met afgeleide overal $\neq 0$, dan is de omkeersfunctie $\varphi(t)$ ook op een interval gedefinieerd, eeneenduidig en continu differentieerbaar met afgeleide overal $\neq 0$. Verder is $f(\varphi(t)) = t$.

Nu volgt uit (35.9): $(f(x)dx)_{x=\varphi(t)} = \int t \varphi'(t)dt$ en uit (35.8): $\int t \varphi'(t)dt = t\varphi(t) - \int \varphi(t)dt$. Dus $\int \varphi(t)dt = t\varphi(t) - \left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(t)}$. Let wel dat, hoewel in de laatste formule de afgeleide van φ niet meer voorkomt, bij de afleiding de differentieerbaarheid van φ gebruikt is. Zo vinden we:

(35.10) (Integraal van een omkeersfunctie) Als $f(x)$ een op een interval gedefinieerde, eeneenduidige, continu differentieerbare functie is en $\varphi(t)$ zijn omkeersfunctie, dan geldt: $\int \varphi(t)dt = t\varphi(t) - \left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(t)}$.

Een voorbeeld van toepassing van deze formule is het volgende: duidelijk is $\int e^x dx = e^x$, dus $\int \log t dt = t \log t - e^{\log t} = t \log t - t$. Dit resultaat hadden we ook direct met partiële integratie kunnen vinden:

$$\int \log t dt = \log t \int 1 dt - \int \frac{1}{t} \left(\int 1 dt\right) dt = t \log t - t.$$

§ 36. Onbepaalde integralen van enkele klassen van functies.

Door toepassing van de stellingen van §35 zijn vele onbepaalde integralen te vinden. We geven enige voorbeelden.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, als $n \neq -1$. $\int \frac{dx}{x} = \log x$ voor $x > 0$ en $= \log(-x)$ voor $x < 0$; dit wordt samen wel geschreven $\int \frac{dx}{x} = \log|x|$, maar we mogen dan bij

overgang op een bepaalde integraal geen interval kiezen, dat het punt a bevat.

$\int e^x dx = e^x$, $\int a^x dx = \int e^{x \log a} dx = \frac{a^x}{\log a}$. Dit laatste is een speciaal geval van het volgende: Een transformatie van veranderlijke $x = at$ geeft:

$(\int f(x) dx)_{x=at} = \int f(at)adt$, dus $\int f(at)dt = \frac{1}{a} (\int f(x) dx)_{x=at}$. Evenzo geeft de transformatie $x=t+b$:

$\int f(t+b)dt = (\int f(x) dx)_{x=t+b}$. Beide samen geven:
 $\int f(at+b)dt = \frac{1}{a} (\int f(x) dx)_{x=at+b}$. Zo vinden we b.v. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}$.

Een onbepaalde integraal van een polynoom $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ vinden we nu ook direct: $\int (\sum_{j=0}^n a_j x^j) dx = \sum_{j=0}^n \frac{a_j x^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1} x^j}{j}$.

Opgave 137. Bereken: $\int x^2 e^x dx$, $\int x e^{x^2} dx$, $\int \sin x dx$, $\int \operatorname{tg} x dx$, $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$, $\int \frac{dx}{1+x^2}$, $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$, $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$, $\int \operatorname{sh} x dx$, $\int \frac{dx}{x \log x}$.

We stellen ons nu ten doel een onbepaalde integraal te berekenen van een gebroken rationale functie $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ en $Q(x)$ polynomen met reële coëfficiënten. Hiertoe zijn eerst enkele algebraïsche voorbereidingen nodig.

Als $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ een polynoom is met complexe coëfficiënten van de graad $n \geq 1$ (dus $a_n \neq 0$), dan is er volgens de hoofdstelling van de algebra (zie §28) een complex getal α_1 , zodat $P(\alpha_1) = 0$. De a_k worden nu reëel verondersteld. Dan is $P(x) = (x - \alpha_1)P_1(x)$, waarin $P_1(x)$ een polynoom is met complexe coëfficiënten. Er is dus een α_2 waarvoor $P_1(\alpha_2) = 0$, dus $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)P_2(x)$; zo voortgaande vinden we tenslotte $P(x) = a_n \prod_{k=1}^n (x - \alpha_k)$, waarin de α_k complexe getallen zijn, die niet alle verschillend behoeven te zijn. Het feit dat de a_k alle reëel zijn, maakt dat

uit $P(\alpha) = 0$ volgt $P(\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{\alpha}^k = \overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} = 0$. Als nu α niet reëel is, dan

is $\alpha \neq \bar{\alpha}$, dus zijn $x - \alpha$ en $x - \bar{\alpha}$ verschillend en dus komen ze afzonderlijk in de ontbinding van $P(x)$ voor (Uit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \neq \bar{\alpha}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ en $P(\bar{\alpha}) = 0$ volgt $0 = (\bar{\alpha} - \alpha)Q(\bar{\alpha})$, dus $Q(\bar{\alpha}) = 0$). Nu is $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$. Laat $\alpha = r + is$ zijn, dan volgt uit α niet reëel $s \neq 0$; $\alpha + \bar{\alpha} = 2r$, $\alpha\bar{\alpha} = r^2 + s^2$, dus $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - 2rx + (r^2 + s^2)$ en nu is $(-2r)^2 - 4(r^2 + s^2) = -4s^2 < 0$, dus $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 + bx + c$, waarin b en c reëel zijn en $b^2 - 4c < 0$. Stel $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}$, dan is $P(x) = a_n (x^2 + bx + c) \prod_{k=3}^n (x - \alpha_k) = a_n (x^2 + bx + c)R(x)$. We bewijzen nu dat $R(x)$

een polynoom is met reële coëfficiënten. Stel dat minstens één der coëfficiënten van $R(x)$ niet reëel is. Door deling met rest vinden we $P(x) = (x^2 + bx + c)S(x) + T(x)$, waarin $S(x)$ en $T(x)$ reële coëfficiënten hebben en $T(x) \neq 0$ of de graad van $T(x)$ is < 2 . Door aftrekking vinden we $T(x) = (x^2 + bx + c)(a_n R(x) - S(x))$. Omdat de coëfficiënten van $R(x)$ niet allen reëel

zijn en van $S(x)$ wel, is van $a_n R(x) - S(x)$ minstens één coëfficiënt $\neq 0$, dus is de graad van $(x^2+bx+c)(a_n R(x)-S(x))$ zeker ≥ 2 , maar de graad van $T(x)$ is < 2 en dit geeft een tegenspraak. Dus heeft $R(x)$ reële coëfficiënten. Op $R(x)$ kunnen we dus dezelfde redenering toepassen als op $P(x)$. Zo voortgaande vinden we

(36.1) Een polynoom $P(x)$ met reële coëfficiënten is te schrijven in de vorm $P(x) = a \prod_{k=1}^n P_k(x)$, waarin a reëel is en iedere $P_k(x)$ hetzij de gedaante $x-d_k$ met d_k reëel, hetzij de gedaante $x^2+b_k x+c_k$ met b_k en c_k reëel en $b_k^2-4c_k < 0$ heeft.

Nu zijn twee factoren P_k hierin identiek (d.w.z. hebben dezelfde coëfficiënten) of hebben een grootste gemene deler 1. Om dit in te zien bedenken we dat uit $x^2+bx+c=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ met b en c reëel volgt dat α_1 en α_2 of beide reëel of geen van beide reëel (en dan toegevoegd complex) zijn. Als α_1 en α_2 beide reëel zijn is $b^2-4c=(-\alpha_1-\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2=(\alpha_1-\alpha_2)^2 \geq 0$. Als dus $b^2-4c < 0$ zijn α_1 en α_2 geen van beide reëel. Hieruit volgt gemakkelijk de bewering over de g.g.d. door de mogelijke graden te beschouwen die de g.g.d. kan hebben.

Uit de algebra is nu bekend (zie cursus moderne algebra (3.6), blz. 32) dat de g.g.d. $d(x)$ van twee polynomen $f_1(x)$ en $f_2(x)$ met reële coëfficiënten te schrijven is in de vorm $d(x) = \psi_1(x)f_1(x) + \psi_2(x)f_2(x)$, waarin $\psi_1(x)$ en $\psi_2(x)$ polynomen zijn met reële coëfficiënten. Hieruit volgt nu echter dat als $f_1(x)$ en $f_2(x)$ g.g.d. 1 hebben, bij een polynoom $h(x)$ twee polynomen $h_1(x)$ en $h_2(x)$ te vinden zijn zodat $\frac{h(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{h_1(x)}{f_1(x)} + \frac{h_2(x)}{f_2(x)}$ is en wel zo dat als de coëfficiënten van de gegeven polynomen reëel zijn, dit ook geldt voor die van de gezochte polynomen. We weten immers dat $1 = \psi_1(x)f_1(x) + \psi_2(x)f_2(x)$ en dus $h(x) = h(x)\psi_1(x)f_1(x) + h(x)\psi_2(x)f_2(x)$ dus $\frac{h(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{h(x)\psi_2(x)}{f_1(x)} + \frac{h(x)\psi_1(x)}{f_2(x)}$. Dit procédé noemen we splitsing in partiële breuken.

Nemen we een gebroken rationale functie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en ontbinden we $Q(x)$ volgens (36.1), dan volgt uit het vooraangaande dat $\frac{P(x)}{Q(x)}$ te schrijven is als een som van termen $\frac{P_k(x)}{Q_k(x)}$, waarin $Q_k(x)$ de gedaante $(x-d_k)^{m_k}$ of $(x^2+b_k x+c_k)^{m_k}$ heeft. Voor het zoeken van de onbepaalde integraal mogen we ons dus tot gebroken rationale functies van de volgende gedaante beperken: $\frac{P(x)}{(Q(x))^k}$ en $Q(x)=x+d$ of $Q(x)=x^2+bx+c$. We zetten de splitsing in partiële breuken nog verder voort. Deel n.l. $P(x)$ door $Q(x)$ met rest: $P(x)=T(x)Q(x)+R(x)$, dan is $\frac{P(x)}{(Q(x))^k} = \frac{T(x)}{(Q(x))^{k-1}} + \frac{R(x)}{(Q(x))^k}$. Met $\frac{T(x)}{(Q(x))^{k-1}}$

zetten we het procédé voort en vinden aldus $\frac{P(x)}{(Q(x))^k} = R_0(x) +$

$+\sum_{j=1}^k \frac{R_j(x)}{(Q(x))^j}$ waarin de $R_j(x)$, $j=0, \dots, k$, polynomen met reële coëfficiënten

zijn en de $R_j(x)$, $j=1, \dots, k$, graden hebben kleiner dan die van $Q(x)$. Er

blijft dan nog over te bepalen: $\int \frac{pdx}{(x-d)^k}$ en $\int \frac{(qx+r)dx}{(x^2+bx+c)^k}$. De eerste

integraal is $-\frac{p}{(k-1)(x-d)^{k-1}}$ voor $k > 1$ en $p \log(x-d)$ voor $k=1$. Het pro-

bleem de tweede integraal te vinden is opgelost als we $\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^k}$

en $\int \frac{x dx}{(x^2+bx+c)^k}$ gevonden hebben. Nu is $x^2+bx+c = (x+\frac{1}{2}b)^2 + (c-\frac{1}{4}b^2) =$

$= (x-\beta)^2 + \gamma^2$ met reële β en reële $\gamma > 0$ omdat $c-\frac{1}{4}b^2 > 0$. Stellen wij nu

$x = \gamma y + \beta$ dus $y = \frac{1}{\gamma}(x-\beta)$ dan is met transformatie van veranderlijke

$$\left(\int \frac{dy}{(y^2+1)^k} \right)_{y=\frac{1}{\gamma}(x-\beta)} = \int \frac{\frac{1}{\gamma} dx}{\left(\frac{1}{\gamma^2}(x-\beta)^2+1 \right)^k} =$$

$$= \gamma^{2k-1} \int \frac{dx}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k}. \text{ Om } \int \frac{dx}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k} \text{ te vinden is}$$

het dus voldoende $J_k = \int \frac{dx}{(x^2+1)^k}$ te bepalen. Deze construeren we nu met

volledige inductie naar k . We weten dat $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x$. Verder

is $J_{k+1} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^{k+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^k} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{k+1}}$. Maar $\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2+1)^k} =$

$= \frac{-2kx}{(x^2+1)^{k+1}}$, dus $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^{k+1}} = -\frac{1}{2k(x^2+1)^k}$. Hieruit volgt $J_{k+1} =$

$$= J_k - \int x \frac{x dx}{(x^2+1)^{k+1}} = J_k + \frac{x}{2k(x^2+1)^k} - \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{(x^2+1)^k} = \frac{2k-1}{2k} J_k + \frac{x}{2k(x^2+1)^k}.$$

Hiermee is door inductie J_k gevonden. Om tenslotte $\int \frac{x dx}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k}$ te

vinden stellen we $\int \frac{x dx}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k} = \int \frac{(x-\beta) dx}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k} + \beta \int \frac{dx}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k}$. De

laatste van deze twee integralen kunnen we al oplossen. Voor de eerste

stellen we $y = (x-\beta)^2$ en vinden $\left(\int \frac{dy}{(y+\gamma^2)^k} \right)_{y=(x-\beta)^2} = 2 \int \frac{(x-\beta) dx}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k}$,

waarmee hij dus teruggebracht is tot $\int \frac{dy}{(y+\gamma^2)^k}$, hetgeen er een is van

het bekende type $\int \frac{dx}{(x-d)^k}$. Hiermee is de volgende stelling gevonden:

(36.2) Een onbepaalde integraal van een gebroken rationale functie met reële coëfficiënten is te vinden als een functie die ontstaat door samenstelling van functies die rationale functies met reële coëfficiënten, log-functies en arctg-functies zijn.

We merken nog op, dat we, nu we weten dat de splitsing in partiële breuken mogelijk is, we deze splitsing eenvoudiger kunnen vinden dan uit het bewijs van de mogelijkheid van deze splitsing volgt. We stellen n.l. de te vinden splitsing met onbepaalde coëfficiënten op, maken de breuken

door vermenigvuldiging weg, en stellen de overeenkomstige coëfficiënten aan elkaar gelijk. De onbepaalde coëfficiënten zijn dan uit een stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen.

Opgave 138. Bereken $\int \frac{dx}{x^3 - x}, \int \frac{x+2}{x^4 + x^3} dx$.

Onder een rationale functie van twee veranderlijken x en y verstaan we een functie $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ waarin $P(x,y)$ en $Q(x,y)$ polynomen in twee veranderlijken zijn, d.w.z. functies van de gedaante $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{jk} x^j y^k$, met reële a_{jk} . Evenzo rationale functies van meer dan twee veranderlijken.

We willen nu integralen bepalen van functies van het type $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, waarin $R(x,y)$ een rationale functie van twee veranderlijken is, dus b.v. $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Als $a = 0$, dan kunnen we deze door een

eenvoudige transformatie op een integraal van een rationale functie

terugbrengen, want $\int R(x, \sqrt{bx+c}) dx = \frac{2}{b} \left(\int y R\left(\frac{y^2-c}{b}, y\right) dy \right)_{y=\sqrt{bx+c}}$

(als ook $b = 0$, is de oorspronkelijke functie al rationaal). We veronderstellen dus $a \neq 0$. Als $a > 0$, dan stellen we

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \sqrt{a} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}. \text{ Als } b^2 = 4ac,$$

dan is dit voor $x \geq -\frac{b}{2a}$: $\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ en voor $x < -\frac{b}{2a}$: $-\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. In

beide gevallen komt er een rationale functie. Als $b^2 \neq 4ac$ stellen we

$\frac{4ac - b^2}{4a^2} = +y^2$ of $-y^2$ naar gelang $4ac > b^2$ of $4ac < b^2$, dan kan y reëel en > 0 gekozen worden. In beide gevallen stellen we $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$

en vinden $\int R\left(x, \sqrt{a}\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm y^2}\right) dx =$

$$= \sqrt{a} \left(\int R\left(\sqrt{a}y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{y^2 \pm 1}\right) dy \right)_{y=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)}. \text{ Als } a < 0, \text{ dan stellen we}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a} \sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}} = \sqrt{-a} \sqrt{-\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac - b^2}{4a^2}}. \text{ Als}$$

$4ac > b^2$, is er geen reële x waarvoor dit reëel wordt; dus dit geval kunnen

we uitsluiten. Als $4ac = b^2$, is dit alleen reëel voor $x = -\frac{b}{2a}$; dit

geval kunnen we dus ook uitsluiten. Als $4ac < b^2$, stellen we $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = y^2$

met reële $y > 0$. Dan geeft de transformatie $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ weer

$$\int R(x, \sqrt{-a} \sqrt{-(x + \frac{b}{2a})^2 + y^2}) dx = y \left(\int R(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a} \sqrt{1-y^2}) dy \right)_{y=\frac{1}{y}, x+\frac{b}{2a}}.$$

Er blijven dus nog drie gevallen te onderzoeken:

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx, \int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx, \int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx.$$

1°. $R(x, \sqrt{x^2+1})$. Stel nu $t = x + \sqrt{x^2+1}$, dan is $t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 1$, dus $x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\sqrt{x^2+1} = t - x = \frac{t^2+1}{2t}$ en $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$. Nu verifieert

$$\text{men makkelijk dat } \int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx = \left(\int \frac{t^2+1}{2t^2} R\left(\frac{t^2-1}{2t}, \frac{t^2+1}{2t}\right) dt \right)_{t=x+\sqrt{x^2+1}}.$$

2°. $R(x, \sqrt{x^2-1})$. Stel nu $t = x + \sqrt{x^2-1}$, dan is $t^2 - 2tx + x^2 = x^2 - 1$, dus $x = \frac{t^2+1}{2t}$, $\sqrt{x^2-1} = t - x = \frac{t^2-1}{2t}$ en $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{2t^2}$. Nu verifieert men

$$\text{makkelijk dat } \int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx = \left(\int \frac{t^2-1}{2t^2} R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) dt \right)_{t=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

3°. $R(x, \sqrt{1-x^2})$. Stel nu $t = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, dan is $x^2 t^2 - 2xt + 1 = 1 - x^2$.

Als $x \neq 0$, dan vindt men hieruit $x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\sqrt{1-x^2} = 1 - xt = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

en $\frac{dx}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$. Nu verifieert men makkelijk dat $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx =$

$$= \left(\int \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt \right)_t = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}. \text{ In de uitgezonderde waarde}$$

$x=0$ vindt men met behulp van de regel van l'Hospital makkelijk dat de functie $t = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ daar continu uit te breiden is met waarde $t = 0$

en dat de zo uitgebreide functie daar ook continu differentieerbaar is

(ga dit na). We kunnen de beperking tot $x \neq 0$ dus laten vervallen.

(36.3) Een onbepaalde integraal van een functie $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

waarin a, b en c reële getallen zijn en $R(x, y)$ een gebroken rationale functie van twee veranderlijken voorstelt is te vinden als een functie die ontstaat door samenstelling van functies die rationale functies met reële coëfficiënten, log-functies, arctg-functies en de functie $\sqrt{ax^2+bx+c}$ zijn.

Opgave 139. Bereken $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $\int \sqrt{x^2-1} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (vergelijk bij de

laatste integraal ook nog de met de algemene methode gevonden uitkomst met een uitkomst die U al kent).

Om $\int R(\sin x, \cos x) dx$, waarin $R(x, y)$ een rationale functie is, te bepalen stellen we $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, dan is $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

$$= \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ en } \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+u^2), \text{ dus}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left(\int \frac{2}{1+u^2} R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) du \right)_{u=\tan \frac{x}{2}}$$

In speciale gevallen kan het wel eenvoudiger. Zo is b.v.

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \int \sin^{n-1} x \sin x dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx. \end{aligned}$$

Voor $n \geq 1$ kiezen we de formule

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx; \text{ voor } n \leq -2 \text{ de formule}$$

$$\int \sin^n x dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} \cos x + \frac{n+2}{n+1} \int \sin^{n+2} x dx. \text{ Hiermee zijn ze voor alle}$$

gehele n terug te brengen tot $\int dx = x$ en $\int \frac{dx}{\sin x}$. De laatste berekenen we nu met het algemene procédé en vinden

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left(\int \frac{2}{1+u^2} \frac{1+u^2}{2u} du \right)_{u=\tan \frac{x}{2}} =$$

$$\left(\int \frac{du}{u} \right)_{u=\tan \frac{x}{2}} = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

Opgave 140. Bewijs dat voor natuurlijke n geldt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx =$

$$\frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \text{ en } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

We zouden $\int \cos^n x dx$ analoog als boven kunnen behandelen, maar kunnen deze ook terugbrengen op $\int \sin^n x dx$ als volgt $\int \cos^n x dx =$

$$= -\left(\int \sin^n y dy \right)_y = \frac{\pi}{2} - x.$$

Opgave 141. Breng $\int R(e^x) dx$, waarin $R(x)$ een rationale functie is, terug op een integraal van een reeds bekend type.

Opgave 142. Breng $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$, waarin $R(x, y, z)$ een rationale functie is, terug op een integraal van een reeds bekend type.

Opgave 143. Bereken $\int x^\alpha \log x dx$ (α reëel), $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx$, $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^{2n}-1}}$.

Niet alle integralen van eenvoudige functies zijn weer in eenvoudige functies uit te drukken. Zo lukt dit b.v. niet bij $\int \frac{\sin x}{x} dx$ of

$$\int \frac{e^x dx}{x}.$$

Men kan echter wel een reeksontwikkeling vinden voor dergelijke integralen. Zo is $\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$, dus $\int \frac{\sin x}{x} dx =$

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \text{ want een machtreeks mag termsgewijs}$$

gedifferentieerd worden.

§37. Oneigenlijke integralen.

Tot nu toe hebben we aan integreerbare functies steeds de eisen

gesteld dat ze begrensd waren en slechts in een begrensde verzameling $\neq \emptyset$.

Voor enkelvoudige integralen zullen we nu proberen deze beperkingen op

te heffen. Stel een functie $f(x)$, gedefinieerd op (a, b) en zo dat deze

aan het einde van interval onbegrensd wordt, b.v. $\lg x$ voor $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Scherper uitgedrukt: voor ieder reëel getal $\beta \in (a, b)$ is $f(x)$ integreer-

baar (en dus begrensd) op het interval (a, β) . We definiëren nu

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) dx$, als de limiet in het rechterlid bestaat

anders zeggen we dat $\int_a^b f(x) dx$ niet bestaat). Een dergelijke integraal

heet een oneigenlijke integraal; de vroeger gedefinieerde integraal een

eigenlijke integraal. Ter rechtvaardiging^{van} de schrijfwijze moeten we nog

aantonen dat, als $f(x)$ op (a, b) eigenlijk integreerbaar (en dus begrensd)

is, $\int_a^b f(x) dx$ als eigenlijke en als oneigenlijke integraal hetzelfde zijn.

Dit volgt echter onmiddellijk uit de continuïteit van de integraalfunctie

(zie stelling (35.3)). Er behoeft hiervoor zelfs alleen verondersteld te wor-

en dat $f(x)$ op (a, b) begrensd en op (a, β) voor iedere $\beta \in (a, b)$ eigenlijk

integreerbaar is; de eigenlijke integreerbaarheid van $f(x)$ op (a, b)

volgt n.l. daaruit, zoals in de volgende stelling uitgedrukt wordt:

(37.1) Als $f(x)$ een begrensde functie is, gedefinieerd op (a, b) , en eigenlijk integreerbaar op (a, β) voor iedere $\beta \in (a, b)$, dan is $f(x)$ eigenlijk integreerbaar op (a, b) .

Bewijs. Bij $\varepsilon > 0$ en $\eta > 0$ kiezen we M_1 zo, dat $\frac{1}{2M_1} < \min(\frac{\eta}{2}, b-a)$.

Laat k het grootste gehele getal zijn met $\frac{k}{2M_1} < b$, dan is $\frac{k}{2M_1} > a$.

Definieer nu $g(x)$ door $g(x) = f(x)$ voor $a < x < \frac{k}{2M_1}$ en $g(x) = 0$ elders

dan is $g(x)$ eigenlijk integreerbaar. Dus is er een $M_2 > M_1$ te vinden,

zodat voor $m > M_2$ geldt $\tau_g^{(m)}(\varepsilon) < \frac{\eta}{2}$. Dan is $\tau_f^{(m)}(\varepsilon) \leq \tau_g^{(m)}(\varepsilon) +$

$+ 2^{-M_1} < \eta$. Dus $f(x)$ is eigenlijk integreerbaar.

Bij de ondergrens van een interval gaan we op geheel analoge wijze te werk: als $f(x)$ op (a, b) gedefinieerd is en eigenlijk integreerbaar op (α, b) voor iedere $\alpha \in (a, b)$, dan definiëren we de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x) dx$ door $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_{\alpha}^b f(x) dx$, als de limiet in het rechterlid bestaat. Hierover zijn analoge opmerkingen te maken als boven, en een analoge stelling als (37.1) te bewijzen.

Voorbeeld: gevraagd of $\int_0^1 x^{\mu} dx$ bestaat. Voor $\mu < 0$ is x^{μ} bij 0 onbegrensd. Nu is voor $\alpha > 0$: $\int_{\alpha}^1 x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1} - \frac{\alpha^{\mu+1}}{\mu+1}$ als $\mu \neq -1$ en $\int_{\alpha}^1 x^{-1} dx = -\log \alpha$. Dus $\int_0^1 x^{\mu} dx$ bestaat niet voor $\mu \leq -1$ en wel voor $\mu > -1$ en in het laatste geval is $\int_0^1 x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1}$. Dit levert alleen iets nieuws als $-1 < \mu < 0$.

We laten nu ook toe dat de functie in de buurt van eindig veel punten van het definitie-interval onbegrensd wordt: laat $f(x)$ gedefinieerd zijn op (a, b) behalve in de k punten $c_1, \dots, c_k$ ($c_1 < c_2 < \dots < c_k$). Noem $a = c_0$, $b = c_{k+1}$. Laat verder voor alle $s_i \in (c_{i-1}, c_i)$ en $t_i \in (c_{i-1}, c_i)$, $s_i < t_i$, $f(x)$ op (s_i, t_i) eigenlijk integreerbaar zijn, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{k+1} \lim_{s_i \downarrow c_{i-1}} \int_{s_i}^{\frac{c_{i-1}+c_i}{2}} f(x) dx + \sum_{i=1}^{k+1} \lim_{t_i \uparrow c_i} \int_{\frac{c_{i-1}+c_i}{2}}^{t_i} f(x) dx,$$

mits alle limieten in het rechterlid bestaan. Dit heet weer een oneigenlijke integraal. We bewijzen weer als boven, dat als $f(x)$ eigenlijk integreerbaar is op (a, b) de eigenlijke en de oneigenlijke integraal hetzelfde zijn.

N.B. Alle s_i en t_i moeten onafhankelijk van elkaar naar hun limiet gaan! We mogen dus niet schrijven $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{+1} \frac{dx}{x} \right) = 0$, maar $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta_1 \downarrow 0} \int_{-1}^{-\delta_1} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta_2 \downarrow 0} \int_{\delta_2}^{+1} \frac{dx}{x}$ en dit bestaat niet.

We kunnen door verknipping van het integratie-interval ons meestal beperken tot het geval dat de functie slechts in de buurt van één punt onbegrensd wordt.

Niet alle stellingen over eigenlijke integralen gelden ook voor oneigenlijke integralen. Een tegenvoorbeeld als waarschuwing: $f(x)$ en $g(x)$ kunnen oneigenlijk integreerbaar^{zijn} zonder dat hun product het is. Stel b.v. $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ op $(0,1)$, dan bestaan $\int_0^1 f(x)dx =$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2, \text{ maar } \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ bestaat niet.}$$

We gaan de stellingen over eigenlijke integralen niet systematisch op hun geldigheid voor oneigenlijke integralen onderzoeken. Het beste is het bij oneigenlijke integralen steeds op eigenlijke terug te gaan en limietovergangen toe te passen. Geldig blijven b.v. de stellingen (34.4) en (34.5) over de som van twee integreerbare functies en over het product van een constante en een integreerbare functie. Verder mag men

bij partiële integratie ook grenzen invullen waar de integralen oneigenlijk worden, mits men daar ook limietovergangen toepast: $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\beta \uparrow b} f(\beta) \int_a^\beta g(x)dx - \lim_{\alpha \downarrow a} f(\alpha) \int_a^\alpha g(x)dx + \int_a^b f'(x) \left(\int_a^x g(\xi) d\xi \right) dx.$

(37.2) Als $f(x)$ gedefinieerd is op (a,b) , als voor iedere $\beta \in (a,b)$ $f(x)$ eigenlijk integreerbaar is op (a,β) en als $\int_a^\beta |f(x)| dx$ bestaat, dan bestaat $\int_a^b f(x)dx.$

Bewijs: $0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$. Verder is als de integrand ≥ 0 is, de integraal een isotone functie van de bovengrens. Dus $\int_a^\beta (|f(x)| - f(x))dx \leq 2 \int_a^\beta |f(x)| dx \leq 2 \int_a^\beta |f(x)| dx$. Dus $\int_a^\beta (|f(x)| - f(x))dx$ is als functie van β isotoon en begrensd, dus $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta (|f(x)| - f(x))dx$ bestaat. Hieruit volgt dat $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta |f(x)| dx = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta (|f(x)| - f(x))dx = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)dx$ bestaat.

Een analoge stelling geldt voor een integraal die aan zijn ondergrens oneigenlijk wordt.

Het omgekeerde van (37.2) geldt niet: het is mogelijk een voorbeeld te geven van een functie $f(x)$ die eigenlijk integreerbaar is op (a,β) voor alle $\beta \in (a,b)$ en waarvoor $\int_a^b f(x)dx$ wel en $\int_a^b |f(x)| dx$ niet bestaat.

Zo'n voorbeeld (echter met de ondergrens als de grens, waar de functie oneigenlijk wordt) is $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, want $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ bestaat, maar $\int_0^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx$ niet. Immers $\int \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \int x \cdot \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int \cos \frac{1}{x} dx$, dus voor $\alpha > 0$ is $\int_\alpha^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \cos 1 - \alpha \cos \frac{1}{\alpha} - \int_\alpha^1 \cos \frac{1}{x} dx$. Nu is $\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha \cos \frac{1}{\alpha} = 0$ en $\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_\alpha^1 \cos \frac{1}{x} dx$ bestaat, omdat de integrand begrensd is. Dus $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ bestaat. Om het niet-bestaan van $\int_0^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx$ aan te tonen, bedenken we dat voor natuurlijke k en $y \in (2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ geldt

$$\sin y \geq \frac{1}{2} \sqrt{2}. \text{ Dus } \int_{\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}}^{\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}} \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}}^{\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{4}}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \log \left(1 + \frac{1}{8k+1} \right) \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} \log \left(1 + \frac{1}{9k} \right) \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{9k} - \frac{1}{2(9k)^2} \right) \geq \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{9k} - \frac{1}{18 \cdot 9k} \right) = \frac{17}{324} \frac{\sqrt{2}}{k} = \frac{c}{k},$$

waarin $c > 0$ en onafhankelijk van k . Omdat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k}$ divergent is, is bij iedere $R > 0$ een $\alpha > 0$ te vinden, zodat $\int_\alpha^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx > R$ is, dus $\int_0^1 \frac{1}{x} \left| \sin \frac{1}{x} \right| dx$ bestaat niet.

Men lette wel op het formele verschil tussen twee op elkaar lijkende stellingen over eigenlijke en oneigenlijke integralen. Voor eigenlijke integralen hadden we gevonden, dat uit het bestaan van $\int_a^b f(x) dx$ het bestaan van $\int_a^b |f(x)| dx$ volgt. Nu vinden we voor oneigenlijke integralen dat uit het bestaan van $\int_a^b |f(x)| dx$ het bestaan van $\int_a^b f(x) dx$ volgt, dit echter alleen als het bestaan van de eigenlijke integraal $\int_a^\beta f(x) dx$ voor alle $\beta \in (a, b)$ gegeven is.

(37.3) Als $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd zijn op (a, b) , als voor iedere $\beta \in (a, b)$ $f(x)$ en $g(x)$ eigenlijk integreerbaar zijn op (a, β) als er een reëel getal $C \geq 0$ bestaat, zodat $|f(x)| \leq C g(x)$ voor alle $x \in (a, b)$ en als $\int_a^\beta g(x) dx$ bestaat, dan bestaat $\int_a^\beta f(x) dx$.

Bewijs: Uit $|f(x)| \leq C g(x)$ volgt dat $g(x) \geq 0$, dus $\int_a^\beta g(x) dx$ is een isotone functie van β . Dus $\int_a^\beta |f(x)| dx \leq C \int_a^\beta g(x) dx \leq C \int_a^\beta g(x) dx$. Dus $\int_a^\beta |f(x)| dx$ is, als functie van β isotoon en begrensd, dus $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta |f(x)| dx =$

$= \int_a^b |f(x)| dx$ bestaat. Uit (37.2) volgt nu, dat ook $\int_a^b f(x) dx$ bestaat.

Opgave 144. Bewijs dat $\int_0^1 \frac{dx}{x + 3\sqrt{x}}$ en $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sin x}$ bestaan.

We merken nog op, dat het bestaan van een oneigenlijke integraal alleen afhangt van het gedrag van de integrand in de buurt van de punten, waar de integraal oneigenlijk wordt. Als n.l. $f(x)$ gedefinieerd is op (a, b) en voor iedere $\beta \in (a, b)$ eigenlijk integreerbaar is op (a, β) ,

en $a_1 \in (a, b)$ dan bestaat $\lim_{\beta \uparrow b} \int_{a_1}^{\beta} f(x) dx$ wel of niet naar gelang

$\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^{\beta} f(x) dx$ wel of niet bestaat; immers $\int_a^{\beta} f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{\beta} f(x) dx$.

Laat nu de beperking vervallen dat $f(x)$ buiten een begrensde verzameling $= 0$ is. Stel verder dat voor ieder reëel getal $R > a$ de functie $f(x)$ op (a, R) eigenlijk of oneigenlijk integreerbaar is. Dan definiëren

we $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$, mits de limiet in het rechterlid bestaat.

Op dezelfde wijze definiëren we, als voor ieder reëel getal $S < a$ de functie $f(x)$ op (S, a) eigenlijk of oneigenlijk integreerbaar is,

$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a f(x) dx$, mits de limiet in het rechterlid bestaat.

Deze integralen heten weer oneigenlijk. Het bestaan of niet-bestaan van deze integralen hangt niet van a af, d.w.z. als $\int_a^{\infty} f(x) dx$ bestaat resp.

niet bestaat, bestaat $\int_b^{\infty} f(x) dx$ wel resp. niet voor iedere $b > a$ en ana-

loog bij $\int_{-\infty}^a f(x) dx$. Tenslotte definiëren we $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx +$

$\int_a^{\infty} f(x) dx$, mits beide integralen in het rechterlid bestaan. De waarde van $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ is niet afhankelijk van de a , die bij zijn definitie gebruikt

is. Neem n.l. twee getallen a en b en laat $a < b$ zijn. Dan is, als

$S < a < b < R$, $\int_S^a + \int_a^R = \int_S^a + \int_a^b + \int_b^R = \int_S^b + \int_b^R$ (we laten $f(x) dx$, wat

steeds achter de integralen moet staan, weg). Dan is $\int_{-\infty}^a + \int_a^{\infty} =$

$= \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a + \int_a^R = \lim_{S \rightarrow -\infty} \left(\int_S^a + \int_a^R \right) = \lim_{S \rightarrow -\infty} \left(\int_S^b + \int_b^R \right) = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^b + \int_b^R =$

$= \int_{-\infty}^b + \int_b^{\infty}$. Dus $\int_{-\infty}^b + \int_b^{\infty} = \int_{-\infty}^b + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_b^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^b + \int_b^R \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-\infty}^a + \int_a^R \right) =$

$= \int_{-\infty}^a + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R = \int_{-\infty}^a + \int_a^{\infty}$.

Let wel dat men niet neemt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$, want het rechterlid kan bestaan, zonder dat het linkerlid bestaat. B.v. $\int_{-R}^R \frac{x dx}{x^2+1} = (\log \sqrt{x^2+1})_{x=R} - (\log \sqrt{x^2+1})_{x=-R} = 0$, maar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2+1}$ bestaat niet.

We kunnen deze typen oneigenlijke integralen op de vroeger behandelde typen terugbrengen als er een getal $a > 0$ bestaat, zodat $\int_a^R f(x) dx$ voor alle $R > a$ een eigenlijke integraal is. Er geldt dan n.l. $\int_a^R f(x) dx = \int_{\frac{1}{R}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$. Maken we n.l. een verdeling van het interval $(\frac{1}{R}, \frac{1}{a})$ als volgt $\frac{1}{R} = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \frac{1}{a}$ en stellen we $\frac{1}{t_i} = x_i$ dan is $a = x_k < x_{k-1} < \dots < x_0 = R$ een verdeling van het interval (a, R) . Als nu $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ en $\xi_i = \frac{1}{\tau_i}$, dan is $\sum_{i=1}^k \frac{1}{\tau_i^2} f\left(\frac{1}{\tau_i}\right) (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^k \xi_i^2 f(\xi_i) \frac{x_{i-1} - x_i}{x_i^2} = \sum_{i=1}^k f(\xi_i) (x_{i-1} - x_i) + \sum_{i=1}^k f(\xi_i) (x_{i-1} - x_i) \frac{\xi_i^2 - x_i^2}{x_i^2}$. Als de diameter van de verdeling van het interval $(\frac{1}{R}, \frac{1}{a})$ kleiner dan ε is, dan geldt $0 < x_{i-1} - x_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i-1} t_i} < \varepsilon R^2$. Als dus de diameter van het interval $(\frac{1}{R}, \frac{1}{a})$ naar nul convergeert, geldt hetzelfde voor de bijbehorende verdeling van het interval (a, R) . Omdat $f(x)$ eigenlijk integreerbaar is, is er een constante C , zodat $|f(x)| < C$. Dan is $\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) (x_{i-1} - x_i) \frac{\xi_i^2 - x_i^2}{x_i^2} \right| < C \frac{\varepsilon R^2}{a^2} \sum_{i=1}^k (x_{i-1}^2 - x_i^2) < C \frac{\varepsilon R^2}{a^2} 2R \sum_{i=1}^k (x_{i-1} - x_i) = \frac{2C R^3 (R-a)}{a^2} \varepsilon$ en dit $\rightarrow 0$ als $\varepsilon \rightarrow 0$. Verder nadert $\sum_{i=1}^k f(\xi_i) (x_{i-1} - x_i)$ tot $\int_a^R f(x) dx$ als $\varepsilon \rightarrow 0$. Dus $\int_{\frac{1}{R}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$ bestaat en $= \int_a^R f(x) dx$. We merken nog op dat de gevonden formule overeenkomt met de formule voor transformatie van integralen. Deze hadden we echter vroeger alleen bewezen als $f(x)$ continu is en dat is hier niet verondersteld. Als nu $R \rightarrow \infty$, dan $\frac{1}{R} \downarrow 0$. Dus het bestaan of niet-bestaan van $\int_a^\infty f(x) dx$ komt overeen met het bestaan of niet-bestaan van $\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$, en in geval van bestaan is $\int_a^\infty f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$. Op analoge wijze kunnen we $\int_{-\infty}^a$ behandelen.

Om b.v. het bestaan van $\int_0^{\infty} x^{\mu} dx$ te onderzoeken, nemen we in plaats daarvan $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^{\mu}} dx = \int_0^1 x^{-\mu-2} dx$. We weten dat deze bestaat voor $-\mu-2 > -1$ dus voor $\mu < -1$ en niet bestaat voor $-\mu-2 \leq -1$, dus voor $\mu \geq -1$. Evenzo kunnen we $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ behandelen, door $\int_0^1 \frac{1}{x^2} x \sin \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ te beschouwen. Dus $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ bestaat, maar $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ niet. We weten verder dat $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ bestaat omdat de integrand begrensd is. Dus $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ bestaat ook.

Voor het overbrengen van stellingen als (37.2) en (37.3) op integralen met onbegrensd integratie-interval kunnen we het bovenvermelde transformatieprincipe niet toepassen omdat we toestaan dat de integralen met begrensd integratie-interval oneigenlijk zijn. Als we een $f(x)$ nemen die op $(a, +\infty)$ gedefinieerd is behalve in zekere punten, in de buurt waarvan $f(x)$ onbegrensd wordt, dan kunnen we in die uitgezonderde punten $f(x)$ zonder bezwaar $= 0$ stellen, in overeenstemming met het vroeger gebruikte procédé.

(37.4) Als $f(x)$ gedefinieerd is op $(a, +\infty)$, als voor iedere $R \in (a, +\infty)$ $f(x)$ en $|f(x)|$ eigenlijk of oneigenlijk integreerbaar zijn op (a, R) en als $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ bestaat, dan bestaat $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Opgave 145. Bewijs (37.4) (Bedenk dat $\int_a^R f(x) dx$ oneigenlijk mag zijn).

(37.5) Als $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd zijn op $(a, +\infty)$, als voor iedere $R \in (a, +\infty)$ $f(x)$ en $g(x)$ eigenlijk of oneigenlijk integreerbaar zijn op (a, R) , als er een reëel getal $c \geq 0$ bestaat, zodat $|f(x)| \leq c g(x)$ voor alle $x \in (a, +\infty)$ en als $\int_a^{\infty} g(x) dx$ bestaat, dan bestaat $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Opgave 146. Bewijs (37.5). (Analoge opmerking als bij opgave 145).

Als $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ bestaat, zeggen we dat de integraal $\int_a^{\infty} f(x) dx$ absoluut convergeert. Als $|f(x)| \leq c g(x)$ zeggen we dat $\int_a^{\infty} g(x) dx$ een majorant is van $\int_a^{\infty} f(x) dx$. Deze uitdrukkingen zijn analoog met gebruikelijke uitdrukkingen in de theorie van de oneindige reeksen. De overeenkomstige uitdrukkingen worden ook gebruikt bij oneigenlijke integralen met begrensd integratie-interval (dus de gevallen van (37.2) en (37.3)).

Opgave 147. Bewijs dat $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ en $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}$ bestaan, maar dat

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$ niet bestaat.

(37.6) Als $f(x)$ een op $[a, +\infty)$ gedefinieerde antitone functie is met

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, dan bestaat $\int_a^{\infty} f(x) \sin x \, dx$.

Bewijs: Dat $\int_a^R f(x) \sin x \, dx$ bestaat voor iedere $R \geq a$ volgt uit (35.1), (34.24) en (34.7). Noem k het kleinste gehele getal $\geq \frac{a}{\pi}$; noem $F(R) = \int_a^R f(x) \sin x \, dx$ en $\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} f(x) \sin x \, dx = a_j$. Uit het gegeven volgt dat $f(x) \geq 0$. Voor $j\pi \leq x \leq (j+1)\pi$ is $\sin x \geq 0$ als j even is en $\sin x \leq 0$ als j oneven is. Dus is $a_j \geq 0$ als j even is en $a_j \leq 0$ als j oneven is. Omdat $f(x+\pi) \leq f(x)$ en $\sin(x+\pi) = -\sin x$ is

$$\left| \int_{(j+1)\pi}^{(j+2)\pi} f(x) \sin x \, dx \right| \leq \left| \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} f(x) \sin x \, dx \right| \text{ dus } |a_{j+1}| \leq |a_j|.$$

Bij $\varepsilon > 0$ is een S te vinden zodat voor $x \geq S$ geldt $f(x) < \frac{\varepsilon}{4}$ en een N zodat voor $j > N$ geldt $j\pi > S$. Dan is

$$|a_j| = \left| \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} f(x) \sin x \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x| \, dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \text{ Dus}$$

$\lim_{j \rightarrow \infty} |a_j| = 0$. Volgens de stelling van Leibniz is nu $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ convergent. Maar $F(n\pi) = \int_a^{n\pi} f(x) \sin x \, dx = \int_a^{k\pi} f(x) \sin x \, dx + \sum_{j=k}^{n-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} f(x) \sin x \, dx$

$$= \int_a^{k\pi} f(x) \sin x \, dx + \sum_{j=k}^{n-1} a_j. \text{ Dus } \lim_{n \rightarrow \infty} F(n\pi) \text{ bestaat. Noem deze } J. \text{ Kies}$$

nu een $N_1 > N$, zodat voor $n > N_1$ geldt $|J - F(n\pi)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Laat nu $R > N_1\pi$ zijn dan is $R > S$. Kies nu het kleinste gehele getal $m > \frac{R}{\pi}$ dan is $|J - F(R)| \leq$

$$\leq |J - F(m\pi)| + |F(m\pi) - F(R)| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_R^{m\pi} f(x) \sin x \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} |\sin x| \, dx =$$

$$= \varepsilon. \text{ Dus } \lim_{R \rightarrow +\infty} F(R) = J, \text{ waarmee de stelling bewezen is.}$$

Hieruit volgt dus b.v. dat $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$ bestaat.

Als $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ bestaat hoeft $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ niet te bestaan, laat staan $= 0$ te zijn. Voorbeeld $\int_1^{\infty} \sin x^2 \, dx$ bestaat, want $\int \sin x^2 \, dx = \left(\int \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} \, dy \right)_{y=x^2}$.

Het is hierbij ook niet nodig dat de integrand van teken verandert; we kunnen dit ook bereiken met een integrand die overal > 0 is. Een dergelijk

voorbeeld is $\int_0^{\infty} ((\sin^2 x)^2)^{\frac{1}{2n}} e^{-x} \, dx$. De integrand hiervan is > 0 .

Verder weten we dat $\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx$ bestaat. Omdat $\int_0^{\infty} ((\sin^2 x)^2)^{\frac{1}{2n}} e^{-x} \, dx =$

$$\left(\int_0^{\infty} (\sin^2 y)^2^{\frac{1}{2n}} \, dy \right)_{y=e^x}, \text{ is het voldoende te bewijzen, dat } \int_0^{\infty} (\sin^2 y)^2^{\frac{1}{2n}} \, dy$$

bestaat. Omdat $0 \leq \sin^2 y \leq 1$, is $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (\sin^2 y)^2^{\frac{1}{2n}} \, dy < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} 1 \, dy =$

$$\int_0^{\pi} (\sin y)^{2 \cdot 2^n} \, dy = J_n. \text{ Dan is (zie opgave 140) } J_n = \pi \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \text{ dus}$$

$$\frac{J_n}{J_{n+1}} = \prod_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}} \frac{2k}{2k-1} > \left(\frac{2^{n+2}}{2^{n+2}-1}\right)^{2^n} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+2}-1}\right)^{2^{n+2}-1} \frac{2^n}{2^{n+2}-1}. \text{ Daar}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+2}-1}\right)^{2^{n+2}-1} = e \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-1} = \frac{1}{4}, \text{ is } \left(1 + \frac{1}{2^{n+2}-1}\right)^{2^{n+2}-1} \frac{2^n}{2^{n+2}-1} > \frac{1}{2}$$

voor voldoende grote n en dus $\frac{J_{n+1}}{J_n} < 2^{-\frac{1}{5}} < 1$ voor voldoende grote n , dus

$\sum J_n$ convergeert. Omdat $\int_1^R (\sin^2 y) 2^{\frac{1}{\pi} y}$ een isotone functie van R is,

die begreësd is, want $\leq \sum_{n=0}^{\infty} J_n$, is deze functie convergent voor

$R \rightarrow +\infty$. Tenslotte is in de oorspronkelijke integraal de integrand voor $x = \log(2n + \frac{1}{2})\pi$ groter dan $(2n + \frac{1}{2})\pi$, dus onbegreësd.

● Dat $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$ bestaat, betekent volgens het convergentiecri-
terium van Cauchy hetzelfde als dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een ω te vinden
is, zodat voor $R_1 > \omega$ en $R_2 > \omega$ geldt $\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$, dus
 $\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

(37.7) Als $f(x)$ voor iedere $R > a$ integreerbaar is op (a, R) , dan bestaat
 $\int_a^{\infty} f(x) dx$ dan en slechts dan als bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\omega > a$ te vinden is,
zodat voor alle R_1 en R_2 met $R_1 > \omega$, $R_2 > \omega$ geldt $\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Speciaal is in het in (37.7) vermelde geval ook $\left| \int_{R_1}^{\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon$,

dus $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx = 0$.

(37.8) Als $\int_a^{\infty} f(x) dx$ bestaat, geldt $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^{\infty} f(x) dx = 0$.

§ 38. Het integraalcriterium voor reeksen.

Met behulp van oneigenlijke integralen kunnen we nog een convergen-
tiecriterium voor reeksen opstellen. Hiertoe bewijzen we de volgende
hulpstelling.

(38.1) Laat $f(x)$ gedefinieerd zijn voor $x \geq 1$, antitoon en ≥ 0 . Noem

$f(n) = a_n$ voor natuurlijke n en $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$, dan bestaat

$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - \int_1^n f(x) dx) = I$ en $0 \leq I \leq a_1$.

Bewijs: Omdat $f(x)$ antitoon en begreësd is, is $f(x)$ eigenlijk inte-
greerbaar op ieder begreësd interval. Verder is $a_k = f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq$

$\geq f(k+1) = a_{k+1}$. Dus $A_{n-1} \geq \int_1^n f(x) dx \geq A_n - a_1$, dus $0 \leq a_n \leq A_n + \int_1^n f(x) dx \leq a_1$. Verder vormen de $A_n - \int_1^n f(x) dx$ een antitone rij, want $A_n - \int_1^n f(x) dx - (A_{n+1} - \int_1^{n+1} f(x) dx) = \int_n^{n+1} f(x) dx - a_{n+1} \geq 0$. Hieruit volgen de beweringen van de stelling.

Uit (38.1) volgt nu onmiddellijk:

(38.2) (Integraalcriterium voor reeksen). Als $f(x)$ voor $x \geq 1$ gedefinieerd, antitoon en ≥ 0 is, als $f(n) = a_n$ voor alle natuurlijke n , dan convergeren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\int_1^{\infty} f(x) dx$ beide of geen van beide.

Hiermee kunnen we b.v. direct de reeksen $\sum n^a$ en $\sum \frac{1}{n \log n}$, die in § 32 onderzocht werden, opnieuw afhandelen. $\int_1^{\infty} x^a dx$ bestaat dan en slechts dan als $a < -1$ en $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$ bestaat niet.

Opgave 148. Onderzoek de convergentie van $\sum \frac{1}{n(\log n)^a}$, $\sum \frac{1}{n^a (n+1)^{a^2}}$.

Opgave 149. Bewijs dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ bestaat en ≥ 0 is.

De limiet uit opgave 149 heet de constante van Euler. Van deze constante is niet bekend of zij rationaal of irrationaal is.

§ 39. Herhaalde integralen.

We beschouwen in R_2 een functie $\varphi(x) = \varphi(\xi_1, \xi_2)$, die begrensd is en waarvan de verzameling der punten x , waarvoor $\varphi(x) \neq 0$, begrensd is. Voor zo'n functie hebben we een tweevoudige integraal $\int \varphi(x) d\omega_x$ gedefinieerd, mits zij integreerbaar was. We kunnen echter ook een waarde van ξ_2 fixeren en φ als functie van ξ_1 beschouwen en trachten de enkelvoudige integraal $\int \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1$ te bepalen. De uitkomst zal een functie van ξ_2 zijn, die we weer naar ξ_2 kunnen trachten te integreren, dus $\int \left(\int \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right) d\xi_2$. We schrijven dit meestal

$\iint \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$. Dit heet een herhaalde integraal. Hetzelfde kunnen we met verwisseling van de rollen van ξ_1 en ξ_2 doen. We gaan nu $A = \int \varphi(\xi_1, \xi_2) d\omega_x$, $B = \iint \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$ en $C = \iint \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1$ vergelijken. Wat betreft het bestaan van A, B en C zijn alle acht a priori denkbare gevallen van combinaties van bestaan en niet-bestaan ook werkelijk mogelijk. Hiervan enkele voorbeelden.
1e. $\varphi(\xi_1, 0) = 1$ als ξ_1 rationaal is en $0 \leq \xi_1 \leq 1$ en $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$

in alle andere gevallen. A bestaat en = 0, C bestaat en = 0;

$\int \varphi(\xi_1, 0) d\xi_1$ bestaat niet, dus B bestaat niet.

2e. $\varphi(\frac{r_1}{s}, \frac{r_2}{s}) = 1$ als r_1, r_2 en s natuurlijk, $0 \leq r_1 < s$, $0 \leq r_2 < s$ en $\frac{r_1}{s}$ en $\frac{r_2}{s}$ onvereenvoudigbare breuken zijn; $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$ in alle andere gevallen. Nu bestaat $\int \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1$ en = 0. Als n.l. ξ_2 irrationaal is of $\xi_2 \geq 1$, of $\xi_2 < 0$, is $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$ voor alle ξ_1 ; als ξ_2 rationaal is en $0 \leq \xi_2 < 1$ en $\xi_2 = \frac{r_2}{s}$ is de schrijfwijze van ξ_2 als onvereenvoudigbare breuk, dan zijn er hoogstens $s-1$ waarden van ξ_1 , waarvoor $\varphi(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ is, dus ook dan is $\int \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = 0$. Dus B bestaat en = 0. Evenzo bestaat C en = 0. A bestaat niet. Neem de m^u hokjesverdeling $v^{(m)}$ in R_2 . Kies een priemgetal $p > 2^m$. (Dit kan, omdat er willekeurig grote priemgetallen zijn). Stel n.l. dat er slechts eindig veel priemgetallen $p_1, \dots, p_n$ bestonden, dan was $\prod_{k=1}^n p_k + 1$ geen priemgetal. Dit geeft echter een tegenspraak, omdat dit getal door geen der getallen $p_1, \dots, p_n$ deelbaar is). Dan is er zeker een geheel getal r te vinden, zodat $\frac{k}{2^m} \leq \frac{r}{p} < \frac{k+1}{2^m}$, als $k \geq 0$, $k < 2^m$. Omdat p priem is, is $\frac{r}{p}$ onvereenvoudigbaar. Er is dus in ieder hokje binnen de verzameling $0 \leq \xi_1 < 1$, $0 \leq \xi_2 < 1$ een punt $(\frac{r_1}{p}, \frac{r_2}{p})$ waar $\varphi = 1$ is, maar ook punten waar $\varphi = 0$ is, dus $z_{\varphi}^{(m)}(\xi) = 1$ voor $\xi \leq 1$ en voor alle m . Dus A bestaat niet.

(39.1) Als van een functie $\varphi(\xi_1, \xi_2)$, die begrensd is en = 0 buiten een begrensde verzameling, de integralen $\int \varphi(\xi_1, \xi_2) d\omega_x$ en

$\iint \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$ bestaan, dan zijn deze aan elkaar gelijk.

Bewijs: Noem $\int \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = \psi(\xi_2)$. Bij $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden, zodat voor alle verdelingen van R_2 met diameter $< \delta$ geldt

$|\int \varphi(x) d\omega_x - \sum \varphi(y) I(U)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Kies nu een vaste verdeling van het ξ_2 -interval met diameter $< \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, zodat $|\int \psi(\xi_2) d\xi_2 - \sum \psi(\eta) I(\bar{U})| < \frac{\varepsilon}{3}$. Laat deze uit k verzamelingen bestaan. Daarbij behoren k waarden

η . Het is dus mogelijk een verdeling van het ξ_1 -interval te vinden met diameter $< \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, zodat $|\psi(\eta) - \sum \varphi(\xi, \eta) I(\bar{U})| < \frac{\varepsilon}{3\gamma}$ voor al de k waarden van η . Hierin stelt γ de lengte van een interval voor, waarbui-

ten $\varphi(\xi_2) = 0$ is. Nu is $\left| \sum_{\bar{U}} \varphi(\eta) I(\bar{U}) - \sum_{\bar{U}} \sum_{\bar{\bar{U}}} \varphi(\xi, \eta) I(\bar{\bar{U}}) I(\bar{U}) \right| \leq \sum_{\bar{U}} I(\bar{U}) \left| \varphi(\eta) - \sum_{\bar{\bar{U}}} \varphi(\xi, \eta) I(\bar{\bar{U}}) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{\bar{U}} I(\bar{U}) < \frac{\varepsilon}{3}$. De combinaties

van alle verzamelingen $\bar{U}$ en $\bar{\bar{U}}$ geven een verdeling in R_2 van diameter $\leq \sqrt{d(\bar{U})^2 + d(\bar{\bar{U}})^2} < \delta$. Dus er geldt $\left| \int \varphi(x) d\omega_x - \sum_{\bar{U}} \sum_{\bar{\bar{U}}} \varphi(\xi, \eta) I(\bar{\bar{U}}) I(\bar{U}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dus $\left| \int \varphi(x) d\omega_x - \int \varphi(\xi_2) d\xi_2 \right| < \varepsilon$. Daar dit voor iedere waarde van $\varepsilon > 0$ geldt, is $\int \varphi(x) d\omega_x = \int \varphi(\xi_2) d\xi_2$, waarmee de stelling bewezen is.

Als dus A, B en C alle drie bestaan, zijn ze aan elkaar gelijk. Overgang van B op C of omgekeerd heet verwisseling van de integratievolgorde.

Analoge stellingen gelden ook voor n-voudige integralen.

Voor de praktische berekening van meervoudige integralen zijn herhaalde integralen zeer waardevol.

Opgave 150. Bereken $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi_1^2}} \xi_2^2 d\xi_2 d\xi_1$ eerst rechtstreeks en daarna

met verwisseling van integratievolgorde. Is deze verwisseling geoorloofd?

Opgave 151. Bereken $\int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} \xi_1 e^{\xi_1 \xi_2} d\xi_1 d\xi_2$.

§ 40. Lineaire operatoren.

Een afbeelding $z = Ax$ die de punten x van een n-dimensionale Euclidische ruimte R_n in punten z van een m-dimensionale Euclidische ruimte R_m afbeeldt, heet een lineaire operator of lineaire transformatie als voldaan is aan

$$A(x+y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

voor alle x en y in R_n en alle reële getallen λ .

Een deelverzameling V van een R_n heet een lineaire ruimte als uit $x \in V$, $y \in V$ volgt $x + y \in V$ en uit $x \in V$ en λ een reëel getal volgt $\lambda x \in V$. Het is duidelijk, dat de beeldpunten van een lineaire operator een lineaire ruimte vormen. Verder vormt de verzameling der elementen x van R_n waarvoor $Ax = \bar{0}$ een lineaire ruimte in R_n , die de nulruimte van de lineaire operator heet.

We noemen e_i ($i = 1, \dots, n$) het punt van R_n , waarvan de i^e component = 1 is en de overige componenten = 0; dan is $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ te schrijven in de vorm $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$. Kiezen we op overeenkomstige wijze in R_m de punten d_j ($j = 1, \dots, m$) dan is Ae_i als punt van R_m te schrij-

ven in de vorm $Ae_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} d_j$. Dan is $Ax = A(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i) = \sum_{i=1}^n \xi_i (Ae_i) =$
 $= \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} d_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i) d_j$. Dus $z = Ax$ komt in componen-
 ten uitgeschreven neer op $\zeta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i$ ($j = 1, \dots, m$).

(40.1) Een lineaire operator is uniform continu.

Bewijs: Kies een reëel getal γ zodat $\sum_{i=1}^n |Ae_i| < \gamma$. Als nu, voor
 $\varepsilon > 0$, $|x - y| < \frac{\varepsilon}{\gamma}$, dan geldt $|Ax - Ay| = |A(x-y)| = |A(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) e_i)| =$
 $|\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) Ae_i| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i| |Ae_i| \leq |x - y| \sum_{i=1}^n |Ae_i| < \frac{\varepsilon}{\gamma} \gamma = \varepsilon$. Dus A
 is uniform continu.

(40.2) Een lineaire operator is dan en slechts dan eeneenduidig als de
 nulruimte alleen uit het punt $\bar{0}$ van R_n bestaat.

Bewijs: Voor iedere lineaire operator A geldt $A\bar{0} = A(0 \bar{0}) = 0A\bar{0} =$
 $= \bar{0}$. Als A dus eeneenduidig is kan de nulruimte alleen uit $\bar{0}$ bestaan. Als
 omgekeerd voor A de nulruimte alleen uit $\bar{0}$ bestaat, d.w.z. uit $Ax = \bar{0}$
 volgt $x = \bar{0}$, dan volgt uit $Ax = Ay$, dat $A(x-y) = Ax + A((-1)y) = Ax - Ay =$
 $= \bar{0}$, dus $x - y = \bar{0}$, dus $x = y$.

Een stelsel elementen $u_1, \dots, u_k$ van een lineaire ruimte V heet
 een basis van V als ieder element x van V op één en slechts één wijze
 te schrijven is in de vorm $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$. Verder is, voor iedere keuze
 van reële getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$ een element van V , omdat V
 een lineaire ruimte is.

(40.3) Twee bases van een lineaire ruimte bevatten evenveel elementen.

Bewijs: Laat $u_1, \dots, u_k$ en $v_1, \dots, v_l$ bases zijn. Dan is voor
 x in V : $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^l \mu_j v_j$. Verder is $u_i = \sum_{j=1}^l \rho_{ji} v_j$ ($i = 1, \dots, k$),
 dus $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\sum_{j=1}^l \rho_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^l (\sum_{i=1}^k \rho_{ji} \lambda_i) v_j$. Uit de eenduidigheid
 volgt $\mu_j = \sum_{i=1}^k \rho_{ji} \lambda_i$ ($j = 1, \dots, l$). Voor iedere keuze van $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
 heeft dit stelsel lineaire vergelijkingen, dus een oplossing in
 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Uit de theorie der lineaire vergelijkingen volgt, dat
 dit alleen kan als $1 \leq k$ is. Op analoge wijze bewijst men, dat $k \leq l$ is.
 Dus $k = l$.

(40.4) Een lineaire ruimte V in R_n , die niet alleen uit $\bar{0}$ bestaat, heeft
 een basis, bestaande uit een aantal elementen, dat $\leq n$ is.

Bewijs: Kies een $u_1 \neq \bar{0}$ in V . Als er elementen in V zijn, die niet

in de vorm $\lambda_1 u_1$ te schrijven zijn, kiezen we u_2 als zo'n element. Als er dan nog elementen in V zijn, die niet in de vorm $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ te schrijven zijn, kiezen we u_3 als zo'n element. Dit proces moet na k stappen ($k \leq n$) afbreken. Stel n.l. dat er zo $u_1, \dots, u_{n+1}$ te vinden waren, dan was $u_j = \sum_{i=1}^n \rho_{ij} e_i$ ($j=1, \dots, n+1$) en $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \rho_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} \rho_{ij} \lambda_j \right) e_i$. Uit de theorie van de lineaire vergelijkingen volgt, dat er $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ te vinden zijn, die niet alle $= 0$ zijn, zodat $\sum_{j=1}^{n+1} \rho_{ij} \lambda_j = 0$ voor $i = 1, \dots, n$. Dus $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j u_j = 0$. Als r het grootste getal $\leq n+1$ is, waarvoor $\lambda_r \neq 0$, dan is $\sum_{j=1}^r \lambda_j u_j = 0$ en $\lambda_r \neq 0$, dus $u_r = \sum_{j=1}^{r-1} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_r} \right) u_j$ in strijd met de definitie van u_r . We vinden dus $u_1, \dots, u_k$ zodat ieder element van V in de vorm $\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j$ te schrijven is. Als $\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^k \mu_j u_j$ en niet voor alle j is $\lambda_j = \mu_j$, dan is er een grootste getal $s \leq k$, zodat $\lambda_s \neq \mu_s$ en $u_s = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\mu_s - \lambda_s} u_j$ in strijd met de definitie van u_s . De schrijfwijze is dus eenduidig.

Het aantal elementen van een basis van een lineaire ruimte heet de dimensie van die ruimte. Als de ruimte alleen uit $\bar{0}$ bestaat, noemen we zijn dimensie 0. Als V in R_n ligt en een echte deelverzameling van R_n is, is zijn dimensie $< n$, want een basis van V is volgens het procédé van het bewijs van (40.4) tot een basis van R_n uit te breiden.

In een lineaire ruimte van dimensie k en basis $u_1, \dots, u_k$ is ieder element op één en slechts één wijze te schrijven als $\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$; aan dit element is dus het punt $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ van R_k toegevoegd. Bij deze toevoeging zijn aan sommen van elementen sommen van overeenkomstige elementen en aan scalaire veelvouden van elementen overeenkomstige scalaire veelvouden van overeenkomstige elementen toegevoegd. We kunnen dus de ruimte als een R_k beschouwen, als we afzien van het feit dat de absolute waarde eventueel anders gedefinieerd is. Als n.l. $u_j = \sum_{i=1}^n \rho_{ij} e_i$ en $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \rho_{ij} \lambda_j \right) e_i$, dan is $|x|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \rho_{ij} \lambda_j \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \rho_{ij} \rho_{il} \lambda_j \lambda_l = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \rho_{ij} \rho_{il} \right) \lambda_j \lambda_l$. Het is mogelijk te bewijzen, dat het basisstelsel zo kan worden gekozen, dat dit $\sum_{j=1}^k \lambda_j^2$ wordt. We gaan daar niet op in.

Als A een eeneenduidige lineaire operator is, die in componen-

ten uitgeschreven $\zeta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i$ ($j=1, \dots, m$) luidt, volgt uit (40.2) dat $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i$ alleen de nuloplossing bezit, wat alleen kan als $m \geq n$

is. Als de beeldruimte van A de lineaire ruimte V van dimensie k is, en A is eeneenduidig, dan is ook $k \geq n$, zoals op dezelfde wijze bewezen wordt. De omkering van A, die we A^{-1} noemen, is ook een lineaire operator, want als $Ax = z$, $Ay = w$, dan is $A^{-1}(z+w) = A^{-1}(Ax+Ay) = A^{-1}A(x+y) = x+y = A^{-1}z + A^{-1}w$ en $A^{-1}(\lambda z) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A\lambda x = \lambda x = \lambda A^{-1}z$. Omdat A^{-1} ook eeneenduidig is, is ook $n \leq k$, dus $n = k$, dus

(40.5) Een eeneenduidige lineaire operator gedefinieerd op R_n beeldt deze op een ruimte van dimensie n af.

Als men een basis $u_1, \dots, u_n$ in V kiest, en $Ae_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} u_j$ en $z = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = Ax$, dan is $\lambda_j = \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \xi_i$ en dit stelsel is oplosbaar naar ξ_i , wat algebraïsch betekent, dat de determinant van $\beta_{ji} \neq 0$ is.

Als A een eeneenduidige lineaire operator is, die R_n in R_n afbeeldt, dan is de beeldruimte V van de operator de hele ruimte R_n .

§ 41. Differentieerbare functies van meer dan één veranderlijke.

We beschouwen een functie $y = f(x)$ gedefinieerd op een verzameling S in een R_n en met een beeldverzameling T in R_m . We kunnen deze functie opvatten als een stelsel van m reële functies in n reële veranderlijken (zie opgave 66, blz. 52). We hebben in § 13 gedefinieerd, wat we onder continuïteit van een dergelijke functie verstaan (zie ook opgave 66 voor een formulering uitgedrukt in de afzonderlijke reële functies). We zullen nu differentieerbaarheid definiëren naar analogie van de karakterisering in (17.1) (blz. 65).

De functie $f(x)$ heet in het punt a totaal differentieerbaar, als $f(x)$ in een omgeving van a gedefinieerd is en er een lineaire operator A bestaat, zodat geldt $f(x) = f(a) + A(x-a) + |x-a| e(x \rightarrow a)$, waarin $e(x \rightarrow a)$ een functie voorstelt, die $\rightarrow 0$ als $x \rightarrow a$. Als nu $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ de componenten van f zijn en $\xi_1, \dots, \xi_m$ die van e, dan luidt dit in componen-

ten geschreven als volgt: $\varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} (\xi_i - \alpha_i) + \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \alpha_i)^2} \xi_j(x \rightarrow a)$.

Kiest men nu speciaal $\xi_i = \alpha_i$ voor $i \neq k$ en ξ_k willekeurig, dan wordt dit $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \xi_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \alpha_{jk}(\xi_k - \alpha_k) + |\xi_k - \alpha_k| \xi_j(x \rightarrow a)$ en dit is juist de voorwaarde voor differentieerbaarheid van een functie van één reële veranderlijke

ξ_k , dus α_{jk} is de afgeleide van de functie φ_j naar de veranderlijke ξ_k bij constant gehouden overige veranderlijken, genaamd een partiële afgeleide en geschreven $\alpha_{jk} = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k} \right) (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\partial \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_k}$.

Hieruit volgt, dat de operator A eenduidig bepaald is. Als $f(x)$ dus totaal differentieerbaar is, bestaan alle partiële afgeleiden.

De operator A heet de functionaaloperator of operator van Jacobi, de matrix (α_{jk}) heet de functionaalmatrix of matrix van Jacobi; als $m = n$, heet de determinant van α_{jk} de functionaaldeterminant of determinant van Jacobi of Jacobiana, ook geschreven $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}$. Als de

functie in meer dan één punt totaal differentieerbaar is, kan de lineaire operator van het beschouwde punt afhangen.

Opgave 152. Bewijs dat $f(x)$ in a totaal differentieerbaar is dan en slechts dan als hetzelfde geldt voor alle componenten $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ van f.

(41.1) De functie $f(x)$ is dan en slechts dan totaal differentieerbaar in het punt a, als $f(x)$ in een omgeving van a gedefinieerd is en als

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \sum_{i=1}^n (\xi_i - \alpha_i) e_i(x \rightarrow a), \text{ waarin } A \text{ een lineaire}$$

operator is en $e_i(x \rightarrow a)$ ($i = 1, \dots, n$) functies zijn, die $\rightarrow 0$ als $x \rightarrow a$. A is de functionaaloperator van f in a.

$$\text{Bewijs: } |x-a| e(x \rightarrow a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \alpha_i)^2} e(x \rightarrow a) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (\xi_i - \alpha_i) \left(\frac{\xi_i - \alpha_i}{|x-a|} e(x \rightarrow a) \right) \text{ en } \frac{\xi_i - \alpha_i}{|x-a|} e(x \rightarrow a) \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow a. \text{ Om-}$$

$$\text{gekeerd: } \sum_{i=1}^n (\xi_i - \alpha_i) e_i(x \rightarrow a) = |x-a| \left(\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - \alpha_i}{|x-a|} e_i(x \rightarrow a) \right) \text{ en}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i - \alpha_i}{|x-a|} e_i(x \rightarrow a) \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow a.$$

(41.2) Als $f(x)$ totaal differentieerbaar is in a, dan is $f(x)$ ook continu in a.

Bewijs: Laat A de functionaaloperator in a van f zijn. Omdat A continu is, is er bij $\varepsilon > 0$ een $\delta_1 > 0$ te vinden, zodat uit $|x-a| < \delta_1$ volgt $|A(x-a)| = |Ax - Aa| < \frac{\varepsilon}{2}$. Verder is er een $\delta_2 > 0$, zodat uit $|x-a| < \delta_2$ volgt $|e(x \rightarrow a)| < 1$. Neemt men nu $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{2})$, dan volgt uit $|x-a| < \delta$, dat $|f(x) - f(a)| = |A(x-a) + |x-a| e(x \rightarrow a)| \leq |A(x-a)| + |x-a| |e(x \rightarrow a)| < \varepsilon$. Dus $f(x)$ is continu in a.

Hierboven is aangetoond, dat uit totale differentieerbaarheid in a het bestaan van alle partiële afgeleiden aldaar volgt. Het omgekeerde geldt niet. Neem de functie $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 1$ als

$$\xi_1 = 0 \text{ of } \xi_2 = 0 \text{ en } = 0 \text{ el-}$$

ders, dan zijn $\frac{\partial \varphi(0,0)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi(0,0)}{\partial \xi_2} = 0$, maar φ is niet continu in $(0,0)$ en dus zeker ook niet totaal differentieerbaar.

(41.3) Als van $f(x)$ de partiële afgeleiden bestaan in een omgeving van a en continu zijn in a , dan is $f(x)$ totaal differentieerbaar in a .

Bewijs: Uit de middelwaardestelling van de differentiaalrekening en de continuïteit van de partiële afgeleiden in a volgt voor $j = 1, \dots, m$ en $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) - \varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = \\ &= (\xi_i - \alpha_i) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_i}(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \alpha_i + \tau_{ij}(\xi_i - \alpha_i), \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \\ &= (\xi_i - \alpha_i) \frac{\partial \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_i} + (\xi_i - \alpha_i) \varepsilon_{ij}(x \rightarrow a), \text{ met } 0 < \tau_{ij} < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Door optelling vindt men hieruit } \varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_n) - \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_i} (\xi_i - \alpha_i) + \sum_{i=1}^n (\xi_i - \alpha_i) \varepsilon_{ij}(x \rightarrow a). \text{ Nu volgt} \end{aligned}$$

uit (41.1), dat φ_j totaal differentieerbaar is in a en dan uit opgave 152, dat f totaal differentieerbaar is in a .

Opgave 153. Als $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1 \xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$ voor $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ en

$$\varphi(0,0) = 0, \text{ dan bestaan de partiële afgeleiden } \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \text{ en } \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \text{ overal,}$$

maar φ is niet totaal differentieerbaar in $(0,0)$. Bewijs dit.

(41.4) De som van twee in a totaal differentieerbare functies is in a totaal differentieerbaar.

(41.5) Als $f(x)$ totaal differentieerbaar is in a , is $\chi f(x)$ totaal differentieerbaar in a (χ is een reële constante).

Opgave 154. Bewijs (41.4) en (41.5).

(41.6) (Kettingregel) Als $g(x)$ zijn definitieverzameling in R_n heeft en zijn beeldverzameling in R_m en totaal differentieerbaar is in $a \in R_n$ met operator A , als $f(y)$ gedefinieerd is op de beeldverzameling van $g(x)$ en zijn beeldverzameling in R_1 heeft en totaal differentieerbaar is in $b = g(a)$ met operator B , dan is $f(g(x))$ totaal differentieerbaar in a met operator BA .

Bewijs: $g(x) = b + A(x-a) + |x-a|e_1(x \rightarrow a)$ en $f(y) = f(b) + B(y-b) + |y-b|e_2(y \rightarrow b)$. Voor $x \neq a$ geldt dan $f(g(x)) = f(g(a)) + B(A(x-a)) + |x-a|e_1(x \rightarrow a) + |A(x-a) + |x-a|e_1(x \rightarrow a)||e_2(g(x) \rightarrow b) = f(g(a)) + BA(x-a) + |x-a|(Be_1(x \rightarrow a) + \left| \frac{1}{|x-a|} A(x-a) + e_1(x \rightarrow a) \right| e_2(g(x) \rightarrow b))$. Omdat $g(x)$ continu is in a , volgt uit $x \rightarrow a$, dat $g(x) \rightarrow b$. Omdat B continu is en $B\bar{0} = \bar{0}$, is $Be_1(x \rightarrow a) = e_3(x \rightarrow a)$. Uit het bewijs van de continuïteit van een lineaire operator volgt, dat $\frac{1}{|x-a|} A(x-a)$ begrensd is. Dus

$f(g(x)) = f(g(a)) + BA(x-a) + |x-a|e_4(x \rightarrow a)$. Dit geldt ook voor $x = a$.

Laat $\chi_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($j = 1, \dots, m$) de componenten van $g(x)$ zijn en $\varphi_k(\eta_1, \dots, \eta_m)$ ($k = 1, \dots, l$) de componenten van $f(y)$, dan zijn van $f(g(x))$ de componenten $\psi_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_k(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_m(\xi_1, \dots, \xi_n))$ en er geldt $\frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial \chi_j}{\partial \xi_i}$ op grond van het feit, dat voor de matrix (χ_{ki}) van BA geldt $\chi_{ki} = \sum_{j=1}^m \beta_{kj} \alpha_{ji}$ (matrixvermenigvuldiging!). Verder is, als $n = m = 1$ is, $\det \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_i} = (\det \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta_j}) (\det \frac{\partial \chi_j}{\partial \xi_i})$, dus $\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\eta_1, \dots, \eta_n)} \frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}$ of, anders geschreven, als we $\eta_j = \chi_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ en $\xi_k = \varphi_k(\eta_1, \dots, \eta_n)$ stellen:

$$\frac{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \frac{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial(\eta_1, \dots, \eta_n)} \frac{\partial(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}.$$

Stel nu in (41.6) dat $g(x)$ eeneenduidig is en $f(x)$ zijn omkeersfunctie en dat verder de voorwaarden van (41.6) vervuld zijn. Dan is $f(g(x)) = x$, dus $x = a + BA(x-a) + |x-a|e_4(x \rightarrow a)$. Echter is ook $x = a + I(x-a) + |x-a|\bar{0}$, waarin I de identieke operator $Ix = x$ is. Dus moet $BA = I$ zijn. Dan volgt uit $Ax = \bar{0}$, dat $x = BAx = B\bar{0} = \bar{0}$, dus A is eeneenduidig. Omdat g ook de omkeersfunctie van f is, is evenzo ook B eeneenduidig. Dit kan alleen als $n = m$ is. Dus:

(41.7) Als $g(x)$ zijn definitieverzameling in R_n heeft en zijn beeldverzameling in R_m en totaal differentieerbaar is in a en als de omkeersfunctie $f(y)$ totaal differentieerbaar is in $g(a)$, dan is $m = n$ en de operator van f in $g(a)$ is de inverse operator van de operator van g in a .

Als $m \neq n$ is, kan $g(x)$ wel eeneenduidig en totaal differentieerbaar zijn, maar zijn omkeersfunctie is dan niet totaal differentieerbaar. Zo b.v. het stelsel van drie reële functies in twee reële veranderlijken, gegeven door $\chi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1, \chi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2, \chi_3(\xi_1, \xi_2) = 0$. Op de kwestie, onder welke omstandigheden voor $m = n$ de functie $g(x)$ eeneenduidig is en een totaal differentieerbare omkeersfunctie bezit, komen we nog terug.

Van een functie $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ kunnen ook hogere partiële afgeleiden bestaan. We schrijven korthedshalve wel $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \varphi_i$,

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}) = \varphi_{ki}$ enz. In het algemeen hoeft φ_{ik} niet gelijk aan φ_{ki} te zijn. Hiervan geven we een voorbeeld en wel een functie $\varphi(\xi_1, \xi_2)$, waarvan φ, φ_1 en φ_2 bestaan en continu zijn,

$\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}$ en φ_{22} overall bestaan. We nemen

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2 \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \text{ als } (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0) \Big\}.$$

$$\varphi(0,0) = 0$$

Voor $|\xi_1| < \sqrt{\varepsilon}, |\xi_2| < \sqrt{\varepsilon}, (\xi_1, \xi_2) \neq 0$ geldt $|\varphi(\xi_1, \xi_2) + \varphi(0,0)| \leq |\xi_1| |\xi_2| \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} < \varepsilon$, dus φ is continu in $(0,0)$.

Voor $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ geldt $\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_2 \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + \xi_1 \xi_2 \frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \xi_1 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 \xi_1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} = \xi_2 \frac{\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_2^4}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}$.

Voor $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ geldt $\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + \xi_1 \xi_2 \frac{-(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \xi_2 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} = \xi_1 \frac{\xi_1^4 - 4\xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_2^4}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}$.

Voor $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ geldt natuurlijk, dat $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}$ en φ_{22} bestaan. Verder is voor $\xi_1 \neq 0$: $\frac{\varphi(\xi_1, 0) - \varphi(0,0)}{\xi_1} = 0$, dus $\varphi_1(0,0) = 0$ en voor $\xi_2 \neq 0$ is $\varphi_1(0, \xi_2) = -\xi_2$, dus geldt steeds $\varphi_1(0, \xi_2) = -\xi_2$, dus $\varphi_{12}(0,0) = -1$.

Voor $\xi_2 \neq 0$ is $\frac{\varphi(0, \xi_2) - \varphi(0,0)}{\xi_2} = 0$, dus $\varphi_2(0,0) = 0$ en voor $\xi_1 \neq 0$ is $\varphi_2(\xi_1, 0) = \xi_1$, dus geldt steeds $\varphi_2(\xi_1, 0) = \xi_1$, dus $\varphi_{21}(0,0) = 1$. Dus $\varphi_{12}(0,0) \neq \varphi_{21}(0,0)$.

Voor $\xi_1 \neq 0$ is $\varphi_1(\xi_1, 0) = 0$, dus steeds is $\varphi_1(\xi_1, 0) = 0$, dus $\varphi_1(0,0)$ bestaat en $= 0$. Voor $\xi_2 \neq 0$ is $\varphi_2(0, \xi_2) = 0$, dus steeds is $\varphi_2(0, \xi_2) = 0$, dus $\varphi_{22}(0,0)$ bestaat en $= 0$.

Nu bewijzen we nog de continuïteit van φ_1 en φ_2 in $(0,0)$. We weten al, dat $\varphi_1(0,0) = \varphi_2(0,0) = 0$. Voor $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ geldt

$$\frac{|\xi_1^4 \pm 4\xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_2^4|}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \leq \frac{2\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + 2\xi_2^4}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} = 2, \text{ dus voor } |\xi_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$|\xi_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ en $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ geldt $|\varphi_1(\xi_1, \xi_2) - \varphi_1(0,0)| \leq 2|\xi_2| < \varepsilon$ en $|\varphi_2(\xi_1, \xi_2) - \varphi_2(0,0)| \leq 2|\xi_1| < \varepsilon$, dus φ_1 en φ_2 zijn continu in $(0,0)$.

Buiten $(0,0)$ zijn alle beschouwde functies continu.

We bewijzen nu een stelling, die ons onder zekere voorwaarden geeft, dat wel $\varphi_{12} = \varphi_{21}$.

een omgeving van (α_1, α_2) bestaat en in (α_1, α_2) continu is en $\varphi_2(\xi_1, \xi_2)$ bestaat in een omgeving van (α_1, α_2) , dan bestaat $\varphi_{21}(\alpha_1, \alpha_2)$ en $\varphi_{12}(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_{21}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Bewijs: Er is een omgeving van (α_1, α_2) , waarin φ_2 en φ_{12} beide bestaan. Kies daarin een voorlopig vastgehouden punt (η_1, η_2) . Dan is $\varphi(\xi_1, \eta_2) - \varphi(\xi_1, \alpha_2)$ gedefinieerd voor ξ_1 tussen α_1 en η_1 en differentieerbaar naar ξ_1 met afgeleide $\varphi_1(\xi_1, \eta_2) - \varphi_1(\xi_1, \alpha_2)$. Volgens de middelwaardestelling der differentiaalrekening is er dus een η_1^* te vinden, waarvoor $\varphi(\eta_1, \eta_2) - \varphi(\eta_1, \alpha_2) - \varphi(\alpha_1, \eta_2) + \varphi(\alpha_1, \alpha_2) = (\eta_1 - \alpha_1)(\varphi_1(\eta_1^*, \eta_2) - \varphi_1(\eta_1^*, \alpha_2))$. Nu is $\varphi_1(\eta_1^*, \xi_2)$ als functie van ξ_2 differentieerbaar tussen α_2 en η_2 met afgeleide $\varphi_{12}(\eta_1^*, \xi_2)$. Volgens de middelwaardestelling der differentiaalrekening is er dus een η_2^* tussen α_2 en η_2 , waarvoor $\varphi_1(\eta_1^*, \eta_2) - \varphi_1(\eta_1^*, \alpha_2) = (\eta_2 - \alpha_2) \varphi_{12}(\eta_1^*, \eta_2^*)$, dus $\varphi(\eta_1, \eta_2) - \varphi(\eta_1, \alpha_2) - \varphi(\alpha_1, \eta_2) + \varphi(\alpha_1, \alpha_2) = (\eta_1 - \alpha_1)(\eta_2 - \alpha_2) \varphi_{12}(\eta_1^*, \eta_2^*)$. Als we nu η_1 en η_2 variabel maken, dan variëren η_1^* en η_2^* in afhankelijkheid van η_1 en η_2 mee. Dan is $\lim_{\eta_2 \rightarrow \alpha_2} \frac{\varphi(\eta_1, \eta_2) - \varphi(\eta_1, \alpha_2)}{\eta_2 - \alpha_2} = \varphi_2(\eta_1, \alpha_2)$ en

$\lim_{\eta_2 \rightarrow \alpha_2} \frac{\varphi(\alpha_1, \eta_2) - \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\eta_2 - \alpha_2} = \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)$, dus $\lim_{\eta_2 \rightarrow \alpha_2} (\eta_1 - \alpha_1) \varphi_{12}(\eta_1^*, \eta_2^*) = \varphi_2(\eta_1, \alpha_2) - \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)$. Voor $\eta_1 \neq \alpha_1$ geldt dus

$\lim_{\eta_2 \rightarrow \alpha_2} (\varphi_{12}(\eta_1^*, \eta_2^*) - \varphi_{12}(\alpha_1, \alpha_2)) = \frac{\varphi_2(\eta_1, \alpha_2) - \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\eta_1 - \alpha_1} + \varphi_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$. Omdat φ_{12} continu is in (α_1, α_2) is bij iedere $\varepsilon > 0$

een $\delta > 0$ te vinden, zodat uit $\sqrt{(\xi_1 - \alpha_1)^2 + (\xi_2 - \alpha_2)^2} < \delta$ volgt

$|\varphi_{12}(\xi_1, \xi_2) - \varphi_{12}(\alpha_1, \alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kiest men nu (η_1, η_2) dusdanig, dat

$\sqrt{(\eta_1 - \alpha_1)^2 + (\eta_2 - \alpha_2)^2} < \delta$, dan geldt, omdat η_1^* tussen α_1 en η_1 en η_2^* tussen α_2 en η_2 ligt, ook $\sqrt{(\eta_1^* - \alpha_1)^2 + (\eta_2^* - \alpha_2)^2} < \delta$ en dus ook $|\varphi_{12}(\eta_1^*, \eta_2^*) - \varphi_{12}(\alpha_1, \alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dan is voor $|\eta_1 - \alpha_1| < \delta$ ook

$\left| \frac{\varphi_2(\eta_1, \alpha_2) - \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\eta_1 - \alpha_1} - \varphi_{12}(\alpha_1, \alpha_2) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Dus $\varphi_{21}(\alpha_1, \alpha_2)$

bestaat en $= \varphi_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$.

In (41.8) kan φ ook nog van meer veranderlijken afhangen. Dit doet voor partiële differentiatie naar ξ_1 en ξ_2 toch niets ter zake.

(41.9) Als van $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ alle partiële afgeleiden van de k^e orde bestaan in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en continu zijn in $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dan is $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\nu_1 \dots \nu_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ als $\mu_1, \dots, \mu_k$ en $\nu_1, \dots, \nu_k$ door permutatie uit elkaar ontstaan en natuurlijke getallen zijn $\leq n$.

Bewijs: Voor de partiële afgeleiden van lagere dan de k^e orde gelden eveneens de gegevens van de stelling, want ze bestaan en zijn wegens (41.3) totaal differentieerbaar, dus continu in $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. We leveren het bewijs door volledige inductie naar k . Voor $k = 1$ is er niets te bewijzen. Stel dat het van k bewezen is en laat $\mu_1, \dots, \mu_{k+1}$ en $\nu_1, \dots, \nu_{k+1}$ door permutatie uit elkaar ontstaan zijn. Noem $\mu_{k+1} = i$ en $\nu_{k+1} = j$. Als $i = j$, dan ontstaan $\mu_1, \dots, \mu_k$ en $\nu_1, \dots, \nu_k$ ook uit elkaar door permutatie, dus volgens inductie is $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\nu_1 \dots \nu_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dus $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\nu_1 \dots \nu_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Stel nu $i \neq j$, dan komt in $\mu_1, \dots, \mu_k$ ergens j voor. Voer een permutatie uit, zodat deze achteraan komt te staan: $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, j$. In $\nu_1, \dots, \nu_k$ komt ergens i voor, dan is $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, i$ een permutatie van $\nu_1, \dots, \nu_k$. Dan is volgens inductieveronderstelling $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} j}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en $\varphi_{\nu_1 \dots \nu_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} i}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. We passen nu (41.8) toe op de functie $\varphi_{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, opgevat als functie van ξ_i en ξ_j , dan volgt daaruit $\varphi_{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} j i}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} i j}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dus $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{\nu_1 \dots \nu_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Een punt $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in een R_n noemen we ook wel een vector en $|a|$ de lengte van de vector a ; in dat geval vatten we a op als een gericht lijnstuk tussen $\bar{0}$ en het punt a . Een vector met lengte 1 noemen we een eenheidsvector. Het inwendig product of inproduct $a \cdot b$ van twee vectoren a en b wordt gedefinieerd door $a \cdot b = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$. Volgens de ongelijkheid van Schwarz (zie stelling (10.5), blz. 39) is $(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n \alpha_i^2) (\sum_{i=1}^n \beta_i^2)$, dus $(a \cdot b)^2 \leq |a|^2 |b|^2$ dus $|a \cdot b| \leq |a| |b|$. Verder

geldt $a \cdot b = |a| |b|$ dan en slechts dan als $a = \bar{0}$ of $b = \bar{0}$ of $b = \lambda a$ met

$\lambda > 0$. Als $a \neq \bar{0}$ en $b \neq \bar{0}$, dan geldt $-1 \leq \frac{a \cdot b}{|a| |b|} \leq 1$, dus er is een reëel getal ψ te vinden, zodat $0 \leq \psi \leq \pi$ en $\cos \psi = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$ (zie voor het driedimensionale geval de cursus analytische meetkunde, blz 103 e.v.,

speciaal opgave 26, blz. 105). We noemen ψ de hoek tussen de vectoren a en b . Blijkbaar is $\psi = 0$ dan en slechts dan als $b = \lambda a$ met $\lambda > 0$; we zeggen dan dat a en b dezelfde richting hebben. Als $b = \lambda a$ met $\lambda < 0$, is $\cos \psi = -1$, dus $\psi = \pi$; we zeggen dan, dat a en b tegengestelde richting hebben. Verder geeft $a \cdot b = 0$, dat $\psi = \frac{\pi}{2}$; we zeggen dan dat a en b orthogonaal (of loodrecht) zijn. We noemen $\frac{a \cdot b}{|a|} = |b| \cos \psi$ de projectie van b op de richting van a . De projectievector van b op de richting van a is een vector in dezelfde of tegengestelde richting van a , die de absolute waarde van de projectie van b op de richting van a als lengte heeft en in de richting van a ligt als de projectie > 0 is en in de tegengestelde richting van a als de projectie < 0 is. Dat is dus

$$\frac{|b| \cos \psi}{|a|} a = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a.$$

Laat $\varphi(x)$ een reële functie van n veranderlijken zijn, die totaal differentieerbaar is in a , dan is $\varphi(x) = \varphi(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(a)}{\partial \varepsilon_i} (\varepsilon_i - \alpha_i) + |x - a| e(x \rightarrow a)$. Noemen we nu de vector $(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_n})$ de gradiënt van φ , geschreven $\text{grad } \varphi$, dan is dus $\varphi(x) = \varphi(a) + (\text{grad } \varphi(a)) \cdot (x - a) + |x - a| e(x \rightarrow a)$.

Onder een straal door a in de richting van s verstaan we de punten x , waarvoor de vector $x - a$ in de richting van s ligt, dus $x = a + \lambda s$ met $\lambda > 0$. Nu is de functie $g(\lambda) = a + \lambda s$ een in 0 totaal differentieerbare functie van λ , want $g(\lambda) = g(0) + \lambda s + |\lambda| \bar{0}$ en λs is lineair in λ . Op $\chi(\lambda) = \varphi(g(\lambda))$ passen we nu de kettingregel toe en vinden $\chi(\lambda) = \varphi(a) + (\text{grad } \varphi(a)) \cdot (\lambda s) + |\lambda| \varepsilon_1(\lambda \rightarrow 0)$, maar $\text{grad } \varphi(a) \cdot (\lambda s) = \lambda ((\text{grad } \varphi(a)) \cdot s)$, dus $\frac{d\chi(0)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(a)}{\partial \varepsilon_i} \sigma_i$, als

$s = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Als we voor s een eenheidsvector kiezen, heet dit de richtingsafgeleide van de functie φ in de richting van s . Kiest men voor s een der e_j , dan wordt de richtingsafgeleide $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial \varepsilon_j}$, dat is juist de partiële afgeleide naar ε_j . Verder is $\frac{d\chi(0)}{d\lambda} = (\text{grad } \varphi) \cdot s = |\text{grad } \varphi| \cos \psi$, als ψ de hoek tussen $\text{grad } \varphi$ en s is. Dus de richtingsafgeleide is de projectie van de gradiënt op de richting, waarin de richtingsafgeleide genomen is. Deze is dus maximaal in de richting van de gradiënt en nul in de richting, die daar loodrecht op staat.

Onder het lijnstuk ab verstaan we de verzameling der punten x , waarvoor geldt $x = a + \lambda(b - a) = \lambda b + (1 - \lambda)a$ met $0 \leq \lambda \leq 1$. Van deze x zeggen we, dat ze tussen a en b liggen. Neem nu een y , zodat $\varphi(x)$ gedefinieerd en totaal differentieerbaar is voor x tussen a en y . Noem $g(\lambda) = a + \lambda(y - a)$ met $0 \leq \lambda \leq 1$. We passen nu op $\chi(\lambda) = \varphi(g(\lambda))$ de middelwaardestelling van de differentiaalrekening toe: $\chi(1) - \chi(0) = \frac{d\chi(\bar{\lambda})}{d\lambda}$

voor een $\mathcal{V}$ met $0 < \mathcal{V} < 1$. Nu is $\chi(1) = \varphi(y)$ en $\chi(0) = \varphi(a)$, dus

$$\varphi(y) - \varphi(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(a + \mathcal{V}(y-a))}{\partial \xi_i} (\eta_i - \alpha_i). \text{ Dus}$$

(41.10) (Middelwaardestelling der differentiaalrekening met meer veranderlijken) Als $\varphi(x)$ totaal differentieerbaar is in alle punten tussen a en b , dan is er een reëel getal $\mathcal{V}$ met $0 < \mathcal{V} < 1$ zodat $\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(a + \mathcal{V}(b-a))}{\partial \xi_i} (\beta_i - \alpha_i)$.

Let wel dat deze stelling geldt voor één reële functie van n veranderlijken. Als $f(x)$ een afbeelding van een deelverzameling van R_n in R_m is en dus m reële functies van n reële veranderlijken voorstelt, kan de stelling natuurlijk op elk der componenten van $f(x)$ worden toegepast, maar de daarbij gebruikte waarden van $\mathcal{V}$ kunnen voor de componenten verschillend zijn.

Als voorbeeld beschouwen we de volgende functie $f(x)$, die R_2 in R_2 afbeeldt en die we later ook nog zullen gebruiken. $\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} \cos \xi_2$, $\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} \sin \xi_2$. De functionaaldeterminant is

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \begin{vmatrix} e^{\xi_1} \cos \xi_2 & -e^{\xi_1} \sin \xi_2 \\ e^{\xi_1} \sin \xi_2 & e^{\xi_1} \cos \xi_2 \end{vmatrix} = e^{2\xi_1} \text{ en dit is steeds } \neq 0. \text{ Kies}$$

$a = (0, 0)$ en $b = (0, 2\pi)$, dan is $f(a) = (1, 0)$ en $f(b) = (1, 0)$ dus $f(b) - f(a) = \bar{0}$. Zou nu gelden $\bar{0} = f(b) - f(a) = A_{\mathcal{V}}(b-a)$, waarin $A_{\mathcal{V}}$ de functionaaloperator in $a + \mathcal{V}(b-a)$ is, dan zou de functionaaloperator daar niet eeneenduidig zijn, dus de functionaaldeterminant daar $= 0$, hetgeen onmogelijk is.

Met dezelfde methode als zoëven voor de middelwaardestelling is toegepast, kunnen we nu ook een formule van Taylor afleiden voor functies van meer veranderlijken. We beperken ons daarbij tot twee veranderlijken.

(41.11) (Formule van Taylor voor functies van twee veranderlijken) Als van $\varphi(x) = \varphi(\xi_1, \xi_2)$ voor alle punten tussen a en y alle partiële afgeleiden van de $(k+1)^e$ orde bestaan en continu zijn, geldt voor een $\mathcal{V}$ met $0 < \mathcal{V} < 1$:

$$\begin{aligned} \varphi(\eta_1, \eta_2) &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial^i \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{i-j} + \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \frac{\partial^{k+1} \varphi(\alpha_1 + \mathcal{V}(\xi_1 - \alpha_1), \alpha_2 + \mathcal{V}(\xi_2 - \alpha_2))}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{k+1-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{k+1-j}. \end{aligned}$$

Bewijs: We stellen weer $g(\lambda) = a + \lambda(y-a)$ en $\chi(\lambda) = \varphi(g(\lambda))$.

We zullen bewijzen: $\frac{d^i \chi(\lambda)}{d\lambda^i} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial^i \varphi(a+\lambda(y-a))}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{i-j}$

voor $0 \leq i \leq k+1$. Door dit te substitueren in de formule van Taylor voor de functie $\chi(\lambda)$ in de volgende vorm: $\chi(1) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \frac{d^i \chi(0)}{d\lambda^i} +$

$+ \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} \chi(\lambda)}{d\lambda^{k+1}}$ vindt men dan direct de gevraagde formule. We passen volledige inductie naar i toe. Voor $i = 0$ is het duidelijk. Stel dat

het voor i bewezen is, dan is $\frac{d^{i+1} \chi(\lambda)}{d\lambda^{i+1}} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^i \chi(\lambda)}{d\lambda^i} \right) =$

$$= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial^{i+1} \varphi(a+\lambda(y-a))}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i+1-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^{j+1} (\eta_2 - \alpha_2)^{i-j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial^{i+1} \varphi(a+\lambda(y-a))}{\partial \xi_2 \partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{i+1-j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \frac{\partial^{i+1} \varphi(a+\lambda(y-a))}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i+1-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{i+1-j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial^{i+1} \varphi(a+\lambda(y-a))}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i+1-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{i+1-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \frac{\partial^{i+1} \varphi(a+\lambda(y-a))}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i+1-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{i+1-j}, \text{ omdat } \binom{i}{j} +$$

$$+ \binom{i}{j-1} = \binom{i+1}{j} \text{ voor } 1 \leq j \leq i \text{ en } \binom{i}{0} = \binom{i+1}{0} \text{ en } \binom{i}{i} = \binom{i+1}{i+1}.$$

We merken op, dat in het rechterlid van de formule van Taylor de i^e term formeel geschreven kan worden als

$$\left((\eta_1 - \alpha_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + (\eta_2 - \alpha_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^i \varphi(\alpha_1, \alpha_2). \text{ Door dit volgens de}$$

binomiaalformule van Newton te ontwikkelen en voor $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} \right)^{i-j}$

te schrijven $\frac{\partial^i}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i-j}}$, vinden we de juiste uitdrukking.

Opgave 155. Ontwikkel $e^{\xi_1 + \xi_2}$ en $e^{\xi_1 \xi_2}$ in reeksen van Taylor in $(0,0)$.

Onder een sector S (met top O) verstaan we een verzameling in R_n dusdanig, dat als $x \in S$ dan $\lambda x \in S$ voor alle $\lambda > 0$. Een functie $\varphi(x)$ die gedefinieerd is in een sector heet homogeen van de graad γ als voor alle x in de definitieverzameling en alle $\lambda > 0$ geldt $\varphi(\lambda x) = \lambda^\gamma \varphi(x)$. Hierin kan γ een willekeurig reëel getal zijn. Zo is b.v.

$$\xi_1^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\xi_2}{\xi_1} - \xi_1^{\frac{1}{2}} \xi_2^{-1} \log(1 + \frac{\xi_1}{\xi_2}) \text{ homogeen van de graad } -\frac{1}{2}.$$

(41.12) (Stelling van Euler) Als $\varphi(x)$ homogeen van de graad γ en totaal differentieerbaar is, geldt $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} x_i = \gamma \varphi(x)$.

Bewijs: Neem $g(\lambda) = \lambda x$ voor $\lambda > 0$, dan is x λ de functionaaloperator van $g(\lambda)$. Pas nu de kettingregel toe op $\chi(\lambda) = \varphi(\lambda x)$, dan komt er $\frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(\lambda x)}{\partial x_i} x_i$. Aan de andere kant is $\chi(\lambda) = \varphi(\lambda x) = \lambda^\gamma \varphi(x)$, dus $\frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda} = \gamma \lambda^{\gamma-1} \varphi(x)$. Door dit gelijk te stellen en $\lambda = 1$ te kiezen vinden we de gezochte formule.

(41.13) (Omkering van de stelling van Euler) Als $\varphi(x)$ gedefinieerd is in een sector, totaal differentieerbaar is, en als $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} x_i = \gamma \varphi(x)$, dan is $\varphi(x)$ homogeen van de graad γ .

Bewijs: Evenals in het vorige bewijs vinden we $\frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(\lambda x)}{\partial x_i} x_i$. Verder is $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(\lambda x)}{\partial x_i} \lambda x_i = \gamma \varphi(\lambda x)$, dus $\lambda \frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda} = \gamma \chi(\lambda)$. Stel nu $\psi(\lambda) = \chi(\lambda) \lambda^{-\gamma}$ voor $\lambda > 0$, dan is $\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda} \lambda^{-\gamma} - \gamma \chi(\lambda) \lambda^{-\gamma-1} = 0$, dus $\psi(\lambda)$ is constant, maar $\psi(1) = \chi(1) = \varphi(x)$, dus $\psi(\lambda) = \varphi(x)$, dus $\chi(\lambda) = \lambda^\gamma \varphi(x)$, dus $\varphi(\lambda x) = \lambda^\gamma \varphi(x)$.

§ 42. Omkeerstelling. Afhankelijkheid. Impliciete functies.

Als van een op een interval gedefinieerde differentieerbare functie $\varphi(\xi)$ van één reële veranderlijke de afgeleide overal $\neq 0$ is, is de functie eeneenduidig en monotoon en de omkeersfunctie is ook differentieerbaar met afgeleide $\frac{1}{\varphi'(\xi)}$ (zie stellingen (18.9), blz. 73 en (17.9), blz. 66). De bij de functie behorende functionaaloperator is dan ook eeneenduidig. We kunnen echter niet verwachten dat voor functies van meer veranderlijken uit de eeneenduidigheid van de operator de eeneenduidigheid van de functie volgt. Als voorbeeld nemen we de reeds eerder beschouwde afbeelding $f(x)$ van R_2 in R_2 , gedefinieerd door $\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} \cos \xi_2$, $\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} \sin \xi_2$. Daar de functionaaldeterminant overal $\neq 0$ is, is de functionaaloperator overal eeneenduidig. De functie is echter niet eeneenduidig daar $f(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2 + 2k\pi)$ voor alle natuurlijke k . We zullen ons voor de eeneenduidigheid tot de omgeving van een punt moeten beperken. Verder weten we al, dat we alleen afbeeldingen tussen twee verzamelingen in ruimten van dezelfde dimensie behoeven te beschouwen.

(42.1) Laat $f(x)$ een afbeelding zijn van een deelverzameling van R_n in R_n , die in een omgeving van het punt a gedefinieerd en totaal differentieerbaar is met eeneenduidige functionaaloperator. Als $f(a) = b$, dan is er een omgeving van b die geheel door de afbeelding overdekt

wordt (d.w.z. bij iedere y in die omgeving is er een x te vinden zodat $f(x)=y$). Verder kan er in die omgeving van b een functie $g(y)$ gedefinieerd worden die totaal differentieerbaar is in b en zodat $f(g(y))=y$.

Bewijs: We beschouwen eerst het speciale geval, dat $a=b=\bar{0}$ en dat de functionaaloperator van $f(x)$ in $\bar{0}$ de identieke operator is. Dan is $f(x)=x+|x|e(x\rightarrow\bar{0})$. Er is een $\alpha > 0$ te kiezen zodat voor $|x| \leq \alpha$ geldt $|e(x\rightarrow\bar{0})| < \frac{1}{2}$. Noem B de verzameling der punten x waarvoor geldt $|x| = \alpha$. Er is een $\beta > 0$ te vinden zodat voor $|y| \leq \beta$ en $f(x)=y$ geldt $|x| \neq \alpha$. Als dit n.l. niet zo is, is er een rij y_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{0}$ en $f(x_n)=y_n$ en $|x_n| = \alpha$; omdat B compact is kan uit de rij x_n dan een convergente deelrij genomen worden met limiet x' , waarvoor ook $|x'| = \alpha$ geldt; uit de continuïteit van f volgt dan dat $f(x')=\bar{0}$ dus $0 = |f(x')| \geq |x'| + -|x'| |e(x')| \geq \frac{1}{2} \alpha$, hetgeen onmogelijk is. Beschouw nu $\gamma = \frac{1}{2} \beta$, dan is bij iedere y met $|y| < \gamma$ een x met $|x| < \alpha$ te vinden zodat $f(x)=y$. Kies een vaste y met $|y| < \gamma$ en beschouw de functie $|f(x)-y|$ als functie van x . Deze is reëel, continu en gedefinieerd op de compacte verzameling D der punten x , waarvoor $|x| \leq \alpha$ en heeft dus een minimum (zie stelling (13.3), blz. 48). Dit minimum kan evenwel niet voor een punt x met $|x| = \alpha$ aangenomen worden, want daarvoor is $|f(x)-y| \geq |f(x)| + -|y| > \beta - \gamma = \gamma$ en $|f(\bar{0})-y| = |y| < \gamma$. Laat c een minimum zijn, dan is $|c| < \alpha$ en een hele omgeving van c ligt binnen D . Stel nu dat $|f(c)-y| = \mu > 0$. In c is $f(x)$ totaal differentieerbaar met eeneenduidige operator C , dus $f(x)=f(c)+C(x-c)+|x-c|e_1(x\rightarrow c)$, dus $f(x)-y=f(c)-y+C(x-c)+|x-c|e_1(x\rightarrow c)$. Omdat C eeneenduidig is is er een z te vinden zodat $C(z-c)=y-f(c)$, dan is $z \neq c$ en voor $\lambda > 0$, $\lambda < 1$ en λ in een voldoende kleine omgeving van 0 valt $x=c+\lambda(z-c)$ binnen D . Voor zo'n x is dan $f(x)-y=(f(c)-y)(1-\lambda)+\lambda|z-c|e_1(x\rightarrow c)$, dus $\mu \leq |f(x)-y| \leq \mu(1-\lambda)+\lambda|z-c||e_1(x\rightarrow c)|$, dus $0 < \mu \leq |z-c||e_1(x\rightarrow c)|$. Dit is echter onmogelijk want voor $\lambda \rightarrow 0$ geldt $x \rightarrow c$ dus $|z-c||e_1(x\rightarrow c)| \rightarrow 0$. Dus is $\mu=0$ en $f(c)=y$. Nemen we nu bij iedere y met $|y| < \gamma$ de zo gevonden c als functie van y , dus $c=g(y)$, dan is $f(g(y))=y$ en $|g(y)| < \alpha$. Verder is $y=f(g(y))=g(y)+|g(y)|e(g(y)\rightarrow\bar{0})$, maar $|e(g(y)\rightarrow\bar{0})| < \frac{1}{2}$, dus $|y| \geq |g(y)| - \frac{1}{2}|g(y)| = \frac{1}{2}|g(y)|$, dus als $y \rightarrow \bar{0}$, dan $g(y) \rightarrow \bar{0}$, dus $g(y)$ is continu in $\bar{0}$. Dus $e(g(y)\rightarrow\bar{0})=e_2(y\rightarrow\bar{0})$ en $g(y)=y-|g(y)|e_2(y\rightarrow\bar{0})=y+|y|(-\frac{|g(y)|}{|y|}e_2(y\rightarrow\bar{0}))=y+|y|e_3(y\rightarrow\bar{0})$, want $\frac{|g(y)|}{|y|} \leq 2$. Dus is $g(y)$ totaal differentieerbaar in $\bar{0}$ met als functionaaloperator de identieke operator. Nu bewijzen we de stelling in het algemene geval. Noem dan $h(x)=f(A^{-1}x+a)-b$, dan is $h(\bar{0})=\bar{0}$. Verder is $h(x)$ in een omgeving van $\bar{0}$ gedefinieerd want bij een $\varepsilon > 0$ is wegens de continuïteit van A^{-1} een $\delta > 0$ te vinden zodat uit $|x| < \delta$ volgt $|A^{-1}x| < \varepsilon$ dus $|(A^{-1}x+a)-a| < \varepsilon$ is. Verder is volgens de kettingregel $h(x)$ totaal differentieerbaar met eeneenduidige operator. In $\bar{0}$ is de operator $AA^{-1}=I$. Op $h(x)$ kunnen we dus het reeds bewezen deel

van de stelling toepassen en een functie $k(y)$ vinden, gedefinieerd in een omgeving van $\bar{0}$ zodat $k(\bar{0})=\bar{0}$, $h(k(y))=y$ en $k(y)$ totaal differentieerbaar is in $\bar{0}$ met als operator de identieke operator. Dus $y=h(k(y))=f(A^{-1}k(y)+a)-b$. Definieer nu $g(y)=A^{-1}k(y-b)+a$, dan is $g(b)=a$ en $g(y)$ gedefinieerd in een omgeving van b en totaal differentieerbaar met operator A^{-1} . Verder is $f(g(y))=f(A^{-1}k(y-b)+a)=y-b+b=y$. Daarmee is de stelling volledig bewezen.

(42.2) Laat $f(x)$ een afbeelding zijn van een deelverzameling van R_n in R_n , die in een omgeving van het punt a totaal differentieerbaar is en waarvan de partiële afgeleiden van de eerste orde in a continu zijn. Als in a de functionaaldeterminant $\neq 0$ is, is er een omgeving van a te vinden, waarbinnen $f(x)$ eeneenduidig is.

Bewijs: Laat $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de componenten van f zijn. Vorm voor een n -tal punten $x^1, \dots, x^n$ in de gegeven omgeving van a de volgende determinant (de componenten van x^i noemen we $\xi_1^i, \dots, \xi_n^i$):

$$\Delta(x^1, \dots, x^n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x^1)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_1(x^1)}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(x^1)}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(x^2)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2(x^2)}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(x^2)}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(x^n)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_n(x^n)}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(x^n)}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.$$

Er is nu een omgeving van a te vinden, zodat als alle $x^1, \dots, x^n$ in die omgeving liggen, $\Delta(x^1, \dots, x^n) \neq 0$ is. Als dat n.l. niet zo is, kunnen we $x^1, \dots, x^n$ tot a laten naderen, dusdanig dat daarbij steeds

$\Delta(x^1, \dots, x^n) = 0$. Bij limietovergang gaat dit wegens de continuïteit van de partiële afgeleiden over in de functionaaldeterminant van f in a , hetgeen onmogelijk is, daar deze laatste $\neq 0$ is. Als er in de laatstgevonden omgeving van a twee punten x en y zijn, waarvoor $f(x)=f(y)$, dus $\varphi_i(x)=\varphi_i(y)$ voor $i=1, \dots, n$, dan is volgens de middelwaardestelling, toegepast op φ_i een punt x^1 tussen x en y te vinden zodat $0 = \varphi_i(x) - \varphi_i(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(x^1)}{\partial \xi_j} (\xi_j - \eta_j)$ voor $i=1, \dots, n$. Omdat $\Delta(x^1, \dots, x^n) \neq 0$, is dit alleen mogelijk als $\xi_j - \eta_j = 0$ voor $j=1, \dots, n$, dus $x=y$. Dus $f(x)$ is eeneenduidig.

Uit (42.1) en (42.2) samen volgt:

(42.3) (Omkeerstelling) Laat $f(x)$ een afbeelding zijn van een deelverzameling van R_n in R_n , die in een omgeving van het punt a gedefinieerd en totaal differentieerbaar is met eeneenduidige functionaaloperator en waarvan alle partiële afgeleiden van de eerste orde in a continu zijn.

Errata bij blz. 164 van de syllabus analyse:

1^o. De stelling (41.9) en het bewijs ervan gelieve men als volgt te wijzigen:

(41.9) Als van $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ alle partiële afgeleiden van de k^e orde bestaan en continu zijn in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dan is in die omgeving $\varphi_{\mu_1, \dots, \mu_k}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_{\nu_1, \dots, \nu_k}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, als $\mu_1, \dots, \mu_k$ en $\nu_1, \dots, \nu_k$ door permutatie uit elkaar ontstaan en natuurlijke getallen zijn $\leq n$.

Bewijs: De partiële afgeleiden van lagere dan de k^e orde zijn ook continu in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; voor orde $n < k$ bewijzen we dit door inductie naar $n-k$, immers een dergelijke partiële afgeleide is dan wegens (41.3) totaal differentieerbaar, dus continu. We bewijzen de stelling nu door volledige inductie naar k . Voor $k=1$ is er niets te bewijzen. Stel dat het voor k bewezen is en laat $\mu_1, \dots, \mu_{k+1}$ en

$\nu_1, \dots, \nu_{k+1}$ door permutatie uit elkaar ontstaan zijn. Noem $\mu_{k+1} = i$ en $\nu_{k+1} = j$. Als $i=j$, dan ontstaan $\mu_1, \dots, \mu_k$ en $\nu_1, \dots, \nu_k$ ook uit elkaar door permutatie, dus volgens inductie is

$\varphi_{\mu_1, \dots, \mu_k}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_{\nu_1, \dots, \nu_k}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dus $\varphi_{\mu_1, \dots, \mu_{k+1}}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_{\nu_1, \dots, \nu_{k+1}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Stel nu $i \neq j$, dan komt in $\mu_1, \dots, \mu_k$ ergens j voor. Voer een permutatie uit, zodat deze achteraan komt te staan: $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, j$. In $\nu_1, \dots, \nu_k$ komt ergens i voor, dus is $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, i$ een permutatie van

$\nu_1, \dots, \nu_k$. Dan is volgens inductieveronderstelling

$\varphi_{\mu_1, \dots, \mu_k}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, j}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en $\varphi_{\nu_1, \dots, \nu_k}(\xi_1, \dots, \xi_n) =$

$\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, i}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

We passen nu (41.8) toe op de functie $\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, opgevat als functie van ξ_i en ξ_j , dan volgt daaruit

$\varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, ji}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, ij}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dus $\varphi_{\mu_1, \dots, \mu_{k+1}}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_{\nu_1, \dots, \nu_{k+1}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

2^o. De formulering van stelling (41.11) gelieve men als volgt te wijzigen:

(41.11) (Formule van Taylor voor functies van twee veranderlijken) Als

van $\varphi(x) = \varphi(\xi_1, \xi_2)$ in een omgeving van a alle partiële afgeleiden van de $(k+1)^e$ orde bestaan en continu zijn en als y in die omgeving van a ligt, geldt voor een ϑ met $0 < \vartheta < 1$:

Vervolg errata bij blz. 164 van de syllabus analyse.

$$\begin{aligned} \varphi(\eta_1, \eta_2) &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\partial^i \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{i-j}} (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{i-j} + \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \frac{\partial^{k+1} \varphi(\alpha_1 + \mathcal{D}(\eta_1 - \alpha_1), \alpha_2 + \mathcal{D}(\eta_2 - \alpha_2))}{\partial \xi_1^j \partial \xi_2^{k+1-j}} \cdot (\eta_1 - \alpha_1)^j (\eta_2 - \alpha_2)^{k+1-j}. \end{aligned}$$

Als $f(a)=b$, dan is er een omgeving van a , waar f eeneenduidig is en de bijbehorende omkeersfunctie $g(y)$ van f in een hele omgeving van b gedefinieerd en totaal differentieerbaar is met een functionaaloperator, die de inverse is van die van f in het overeenkomstige punt. Verder zijn alle partiële afgeleiden van de eerste orde van g continu in die punten, die overeenkomen met punten waar alle partiële afgeleiden van de eerste orde van f continu zijn.

Bewijs: We beperken de definitieverzameling van f tot een (volgens (42.2) bestaande) omgeving van a , waar $f(x)$ eeneenduidig is. Volgens (42.1) overdekt het beeld van f een hele omgeving van b . Bij ieder punt van die omgeving van b kunnen we volgens de methode van (42.1) een functie $g(y)$ maken, die in dat punt totaal differentieerbaar is. Wegens de eeneenduidigheid van $f(x)$ moet dit echter steeds dezelfde functie $g(y)$ zijn. Deze functie $g(y)$ is dus de omkeersfunctie van $f(x)$ en in een hele omgeving van b totaal differentieerbaar. De eventuele continuïteit van partiële afgeleiden van g volgt uit het feit dat de functionaalmatrix van g in een punt ontstaat door inverteren van de functionaalmatrix van f in het overeenkomstige punt, zodat de partiële afgeleiden van g gebroken rationale functies van de partiële afgeleiden van f zijn.

Als dus $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ voldoen aan de voorwaarden van (42.3) in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta_j$ ($j=1, \dots, n$) dan zijn er in de omgeving van $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ functies $\psi_1(\eta_1, \dots, \eta_n), \dots, \psi_n(\eta_1, \dots, \eta_n)$ gedefinieerd, zodat $\varphi_j(\psi_1(\eta_1, \dots, \eta_n), \dots, \psi_n(\eta_1, \dots, \eta_n)) = \eta_j$ ($j=1, \dots, n$) en $\psi_i(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \xi_i$ ($i=1, \dots, n$). De partiële afgeleiden van de functies ψ_j zijn te vinden door inverteren van de functionaalmatrix der φ_j of door op de betrekkingen $\eta_j = \varphi_j(\psi_1(\eta_1, \dots, \eta_n), \dots, \psi_n(\eta_1, \dots, \eta_n))$ de kettingregel toe te passen en de partiële afgeleiden der ψ_j er uit op te lossen.

Opgave 156. In de omgeving van welke punten (ρ, ψ) is $\eta_1 = \rho \cos \psi$, $\eta_2 = \rho \sin \psi$ omkeerbaar? Bepaal de partiële afgeleiden van ρ en ψ naar η_1 en η_2 .

We beschouwen nu m reële functies van n reële veranderlijken $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ die totaal differentieerbaar zijn. In een bepaald punt a heeft de functionaalmatrix een rang k . Nu behoeft, zelfs als de partiële afgeleiden continu zijn, de rang in de omgeving van a niet k te zijn, want weliswaar blijft een determinant die in a ongelijk aan nul is, dat dan ook in een omgeving van a , maar een determinant van orde $> k$, die in a gelijk aan nul is, kan in een omgeving van a verder ongelijk aan nul zijn: de rang kan hoger dan k zijn. We noemen een punt a regulier, als de partiële afgeleiden van de eerste orde in een omgeving van a gedefinieerd en in a continu zijn en er een omgeving van a bestaat, waar de rang van de functionaalmatrix constant is (deze rang noemen we de rang van het reguliere punt);

andere punten heten singuliere punten. We beperken ons tot de beschouwing van omgevingen van reguliere punten. Stel dat a een regulier punt van rang k is, en stel dat

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k)} \neq 0. \text{ Noem } \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta_j \quad (j=1, \dots, m). \text{ We voeren}$$

nu een stelsel van n functies $\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in gedefinieerd door $\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_n), \psi_{k+1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_{k+1}, \dots, \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_n$.

Van dit stelsel is de functionaaldeterminant =

$$= \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k)} \neq 0. \text{ Volgens (42.3) is er een stelsel functies}$$

$\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ te vinden, gedefinieerd in een omgeving van $(\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ zodat $\psi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \xi_j \quad (j=1, \dots, n)$ en

$\chi_i(\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \xi_i \quad (i=1, \dots, n)$, dus

$\varphi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \xi_j \quad (j=1, \dots, k)$ en

$\chi_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_j \quad (j=k+1, \dots, n)$, dus

$\varphi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_k(\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_{k+1}, \dots, \xi_n) = \xi_j \quad (j=1, \dots, k)$.

Dus als $j=k+1, \dots, n$ geldt $\frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_j} = 1$ als $i=j$ en $=0$ als $i \neq j$. Vorm nu

de functies $\omega_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \omega_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$, gedefinieerd in een

omgeving van $(\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ door $\omega_j(\xi_1, \dots, \xi_n) =$

$= \varphi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) \quad (j=1, \dots, m)$. Dan is dus

$\omega_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_j \quad (j=1, \dots, k)$ en $\omega_j(\xi_1, \dots, \xi_n) =$

$= \varphi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_k(\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_{k+1}, \dots, \xi_n) \quad (j=k+1, \dots, m)$.

Hieruit volgt dat voor $j=1, \dots, k$ geldt $\frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_j} = 1$ als $i=j$ en $=0$ als $i \neq j$.

Dus voor $r=k+1, \dots, m$ en $s=k+1, \dots, n$ geldt $\frac{\partial(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_r)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_s)} = \frac{\partial \omega_r}{\partial \xi_s}$.

Op grond van de kettingregel geldt $\frac{\partial \omega_j}{\partial \xi_i} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \chi_m}{\partial \xi_i}$. Voor

$i=1, \dots, k$ wordt dit $\sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \chi_m}{\partial \xi_i} + \sum_{m=k+1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \chi_m}{\partial \xi_i}$ en voor $i=k+1, \dots, n$ wordt dit

$\sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \chi_m}{\partial \xi_i} + \sum_{m=k+1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \chi_m}{\partial \xi_i}$. Op grond hiervan geldt $\frac{\partial(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_r)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_s)} =$

$= \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi_r)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_s)} \cdot \frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_k, \chi_s)}{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi_r)}$. Omdat de functionaalmatrix der

φ_j rang k heeft, is $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi_r)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_s)} = 0$. Dus $\frac{\partial \omega_r}{\partial \xi_s} = 0$ voor

$r=k+1, \dots, m$ en $s=k+1, \dots, n$. Dus voor $j=k+1, \dots, m$ kunnen we schrijven

$\omega_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sigma_j(\xi_1, \dots, \xi_k)$. Vullen we nu $\xi_i =$

$= \psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \xi_n = \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in, dan komt er

$\sigma_j(\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_k(\xi_1, \dots, \xi_n)) =$

$= \omega_j(\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) =$

$= \varphi_j(\chi_1(\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_k(\xi_1, \dots, \xi_n)), \dots, \chi_n(\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n))) = \varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$. In een omgeving van

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en voor $j=k+1, \dots, n$ geldt dus $\varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_n) =$

$= \sigma_j(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_n))$.

We zeggen dat een functie $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ afhankelijk is van de functies $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$, als er een functie $\sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ bestaat, zodat geldt $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sigma(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_n))$. We hebben dus de volgende stelling gevonden:

(42.4) Als voor het stelsel functies $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ het punt $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ een regulier punt van rang k is en

$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k)} \neq 0$, dan is er een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, waar

voor $j=k+1, \dots, m$ geldt dat $\varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ afhankelijk zijn van $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Het omgekeerde van (42.4) is triviaal want als $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sigma(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_n))$, dan is $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_{j,m}} \frac{\partial \varphi_{j,m}}{\partial \xi_i}$, dus de functionaalmatrix van $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$ heeft een rang $< k+1$.

Opgave 157. Onderzoek de afhankelijkheid van $\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \cos^2(\xi_1 + \xi_2) + \cos^2 \xi_1 + \cos^2 \xi_2$ en $\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \cos \xi_1 \cos \xi_2 \cos(\xi_1 + \xi_2)$.

Men bedenke wel dat (42.4) in een singulier punt niet behoeft te gelden. Zo heeft van het stelsel $\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1, \varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^2$ de functionaalmatrix in $(0,0)$ rang 1, maar φ_2 is ten duidelijkste onafhankelijk van φ_1 .

We nemen weer $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ en veronderstellen nu dat a een regulier punt van rang m is, d.w.z. de partiële afgeleiden van de eerste orde zijn in een omgeving van a gedefinieerd en in a continu en in a heeft de functionaalmatrix rang m . Stel verder

$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_m)} \neq 0$. Noem weer $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta_j$ ($j=1, \dots, m$). We

kunnen de $\xi_{m+1}, \dots, \xi_n$ als bijkomstige parameters opvatten en voor iedere waarde van dit stelsel parameters de omkeerstelling toepassen op de functies opgevat als functies van $\xi_1, \dots, \xi_m$. De gevonden omkeersfuncties hangen dan ook van de parameters af. Het nadeel van deze methode is, dat we er dan niets over kunnen zeggen, hoe ze van deze parameters afhangen. We passen daarom liever de boven beschreven kunstgreep toe, nu voor $k=m$ en vinden functies

$\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$, gedefinieerd in een omgeving van $(\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, zodat $\varphi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \beta_j$ ($j=1, \dots, m$) en $\chi_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_j$ ($j=m+1, \dots, n$), dus $\varphi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_m(\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = \xi_j$ ($j=1, \dots, m$). Verder is $\chi_j(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = \xi_j$ ($j=1, \dots, m$). Dus

(42.5) Als voor het stelsel functies $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n)$ het punt $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ een regulier punt van rang m is,

$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_m)} \neq 0$ en $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta_j$ ($j=1, \dots, m$), dan zijn er

m functies $\chi_1(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \chi_m(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$,
 gedefinieerd en totaal differentieerbaar in een omgeving van
 $(\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, zodat $\varphi_j(\chi_1(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n),$
 $\dots, \chi_m(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = \zeta_j$ ($j=1, \dots, m$)
 en $\chi_j(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_n), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = \xi_j$
 ($j=1, \dots, m$). De functionaalmatrix der χ_j wordt gevonden door de matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_m} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_m} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

te invertieren en hiervan de eerste m rijen te nemen.

Om de partiële afgeleiden der χ_j te vinden kunnen we ook de be-
 trekkingen $\zeta_j = \varphi_j(\chi_1(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \chi_m(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n),$
 $\xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$ met de kettingregel differentiëren en de partiële afge-
 leiden der χ_j uit een stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen.

Als voorbeeld beschouwen we één functie $\varphi(\xi_1, \xi_2)$, gedefinieerd
 en totaal differentieerbaar in een omgeving van (α_1, α_2) , zodat $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}$
 en $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}$ in (α_1, α_2) continu zijn en $\frac{\partial \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1} \neq 0$. Verder zij

$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \rho$. Dan is er in een omgeving van (ρ, α_2) een functie
 $\chi(\zeta, \xi_2)$ te vinden, zodat $\varphi(\chi(\zeta, \xi_2), \xi_2) = \zeta$ en $\chi(\varphi(\xi_1, \xi_2), \xi_2) = \xi_1$.

De matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ heeft als inverse } \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}} & -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dus } \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}} \quad (\text{hetgeen een reeds bekend resultaat is, want als } \xi_2 \text{ constant}$$

is, hebben we het geval van één functie van één veranderlijke) en $\frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} =$

$$= -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}}. \text{ Door de kettingregel toe te passen vinden we}$$

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \text{ en } 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}.$$

Opgave 158. Laat $\eta_1 = \xi_1 \cos \xi_2 \cos \xi_3$ en $\eta_2 = \xi_1 \sin \xi_2 \cos \xi_3$ zijn. Onderzoek welke punten regulier en welke singulier zijn. Als in de omgeving van een punt ξ_1 en ξ_2 opgelost kunnen worden als functies van η_1 , η_2 , ξ_3 , bereken dan de partiële afgeleiden van ξ_1 en ξ_2 naar η_1 , η_2 en ξ_3 .

Opgave 159. Laat een functie $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ gegeven zijn, waarvan de partiële afgeleiden van de tweede orde bestaan en continu zijn en stel verder $\eta_1 = \rho \cos \psi$ en $\eta_2 = \rho \sin \psi$. Druk $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_2^2}$ uit in de partiële afgeleiden van $\varphi(\rho \cos \psi, \rho \sin \psi)$ naar ρ en ψ .

Opgave 160. Laat een functie $\varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ gegeven zijn, waarvan de partiële afgeleiden van de tweede orde bestaan en continu zijn en stel verder $\eta_1 = \rho \cos \vartheta \cos \psi$, $\eta_2 = \rho \cos \vartheta \sin \psi$, $\eta_3 = \rho \sin \vartheta$. Druk $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_3^2}$ uit in de partiële afgeleiden van $\varphi(\rho \cos \vartheta \cos \psi, \rho \cos \vartheta \sin \psi, \rho \sin \vartheta)$ naar ρ , ϑ en ψ .

(Aanwijzing: probeer van het resultaat van opgave 159 gebruik te maken.)

Laat $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$ totaal differentieerbaar zijn en $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ een regulier punt van rang m zijn, zodat $\varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0, \dots, \varphi_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$ en laat $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_m)} \neq 0$ zijn. Volgens (42.5) zijn er dan m functies

$\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \chi_m(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$, gedefinieerd en totaal differentieerbaar in een omgeving van

$(0, \dots, 0, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$ zodat

$\varphi_j(\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \chi_m(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = \xi_j$ ($j=1, \dots, m$) en

$\chi_j(\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_m), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = \xi_j$ ($j=1, \dots, m$).

Stellen we nu $\psi_j(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = \chi_j(0, \dots, 0, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$, dan geldt blijkbaar $\varphi_j(\psi_1(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \psi_m(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = 0$ ($j=1, \dots, m$) en voor een punt $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ in een omgeving van

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, waarvoor geldt $\varphi_j(\eta_1, \dots, \eta_n) = 0$ ($j=1, \dots, m$), geldt ook

$\psi_j(\eta_{m+1}, \dots, \eta_n) = \eta_j$ ($j=1, \dots, m$). De functies $\psi_1, \dots, \psi_m$ geven dus voor de punten in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ juist een beeld van

de punten waar $\varphi_1 = \dots = \varphi_m = 0$. We zeggen, dat door $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0, \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0$ de $\xi_1, \dots, \xi_m$ impliciet bepaald zijn als functies van $\xi_{m+1}, \dots, \xi_n$ en dat de expliciete functies

$\xi_1 = \psi_1(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \xi_m = \psi_m(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$ gevonden zijn door uit de vergelijkingen $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0, \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0$ de $\xi_1, \dots, \xi_m$ op te lossen. De partiële afgeleiden der functies ψ_j worden gevonden als in (42.5). Dit geeft ons de volgende stelling.

(42.6) (Hoofdstelling over impliciete functies.) Als voor het stelsel functies $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, \varphi_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$ het punt $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ een regulier punt van rang m is, $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_m)} \neq 0$ en

$\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$ ($j=1, \dots, m$) dan zijn er m functies

$\psi_1(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \psi_m(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$, gedefinieerd en totaal

differentieerbaar in een omgeving van $(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$, zodat

$$\varphi_j(\psi_1(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \dots, \psi_m(\xi_{m+1}, \dots, \xi_n), \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) = 0 \quad (j=1, \dots, m)$$

en zodat er een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ bestaat waarbinnen voor ieder punt $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ met $\varphi_j(\eta_1, \dots, \eta_m) = 0$ ($j=1, \dots, m$) geldt

$\psi_j(\eta_{m+1}, \dots, \eta_n) = \eta_j$ ($j=1, \dots, m$). De functionaalmatrix van ψ_j wordt gevonden door dezelfde matrix als vermeld in (42.5) te invertieren en van de geïnverteerde matrix de eerste m rijen en de laatste $n-m$ kolommen te nemen.

Het eenvoudigste voorbeeld betreft één functie $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ van twee veranderlijken die totaal differentieerbaar is. Laat (α_1, α_2) een punt zijn, waar $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ en waar $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}$ continu en $\neq 0$ is. Dan is er een functie $\psi(\xi_2)$ gedefinieerd en totaal differentieerbaar in een omgeving van α_2 zodat $\varphi(\psi(\xi_2), \xi_2) = 0$ en zodat er een omgeving van (α_1, α_2) bestaat waarbinnen voor ieder punt (η_1, η_2) met $\varphi(\eta_1, \eta_2) = 0$ geldt $\psi(\eta_2) = \eta_1$. Verder is

$$\frac{d\psi}{d\xi_2} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}}.$$

Opgave 161. Als $\xi_1 \log(\sin \xi_1, \xi_2) = \operatorname{tg} e^{\xi_1, \xi_2^2}$, bepaal dan $\frac{d\xi_2}{d\xi_1}$, als hierin ξ_2 als functie van ξ_1 beschouwd wordt.

§ 43. Maxima en minima van functies van meer veranderlijken.

We zeggen dat $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ een relatief maximum (resp. relatief minimum) in $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ heeft, als er een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ bestaat, waarin $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (resp.

$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). Uit de overeenkomstige stelling voor functies van één veranderlijke (zie (18.4)) volgt direct:

(43.1) Als $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ in $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ totaal differentieerbaar is en daar een relatief maximum of een relatief minimum heeft, geldt

$$\frac{\partial \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_1} = \dots = \frac{\partial \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_n} = 0.$$

Evenals bij functies van één veranderlijke (zie § 24), kunnen we nadere bepalingen voor relatieve maxima en minima vinden door afgeleiden van hogere dan de eerste orde in de beschouwing te betrekken. Wij behandelen hiervan slechts één geval:

(43.2) Als van $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ alle partiële afgeleiden van de tweede orde in een omgeving van (α_1, α_2) bestaan en continu zijn en $\frac{\partial \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_2} = 0$, $(\frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2})^2 - \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_2^2} < 0$ en $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1^2} > 0$ (resp. < 0) dan heeft $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ een relatief minimum (resp. relatief maximum) in (α_1, α_2) .

Bewijs: Volgens de stelling van Taylor (41.11) geldt

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1 + \vartheta(\xi_1 - \alpha_1), \alpha_2 + \vartheta(\xi_2 - \alpha_2))}{\partial \xi_1^2} (\xi_1 - \alpha_1)^2 + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1 + \vartheta(\xi_1 - \alpha_1), \alpha_2 + \vartheta(\xi_2 - \alpha_2))}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} (\xi_1 - \alpha_1)(\xi_2 - \alpha_2) + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1 + \vartheta(\xi_1 - \alpha_1), \alpha_2 + \vartheta(\xi_2 - \alpha_2))}{\partial \xi_2^2} (\xi_2 - \alpha_2)^2 \right). \end{aligned}$$

Wegens de continuïteit van de partiële afgeleiden van de tweede orde zijn de gegeven ongelijkheden, die voor deze partiële afgeleiden gelden ook in een omgeving van (α_1, α_2) geldig. Uit $\rho \neq 0$ en $\sigma^2 - \rho\tau < 0$ volgt

$$\rho \eta^2 + 2\sigma\eta\xi + \tau\xi^2 = \rho \left(\left(\eta + \frac{\sigma}{\rho} \xi \right)^2 + \frac{\rho\tau - \sigma^2}{\rho^2} \xi^2 \right) \geq 0 \text{ dan wel } \leq 0$$

naar gelang $\rho > 0$ dan wel < 0 is. Daaruit volgt onmiddellijk dat

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\alpha_1, \alpha_2) \geq 0 \text{ dan wel } \leq 0 \text{ is naar gelang } \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1^2} > 0 \text{ dan wel } < 0 \text{ is. Daarmee is het gevraagde bewezen.}$$

$$\text{Als } \left(\frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial^2 \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \xi_2^2} > 0 \text{ is, kan}$$

men makkelijk bewijzen dat er in (α_1, α_2) geen maximum of minimum is.

Als het $= 0$ is kan nog niets geconcludeerd worden.

Opgave 162. Bepaal de relatieve maxima en minima van $e^{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

We vragen nu naar relatieve maxima en minima van een functie

$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$, waarbij we ons beperken tot die punten $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ die voldoen aan de bijvoorwaarden $\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \dots, \chi_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$.

Bijvoorbeeld kan gevraagd zijn het minimum te zoeken van de functie

$\varphi(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - 1)^2 + \xi_2^2$ onder de bijvoorwaarde $\chi(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^2 - 4\xi_1 = 0$ (meetkundig: de kortste afstand van het punt $(1, 0)$ tot de parabool $\xi_2^2 = 4\xi_1$). Men zou dit kunnen oplossen door uit de bijvoorwaarde b.v. ξ_1

op te lossen en deze in de functie te substitueren en zo een probleem zonder bijvoorwaarden te krijgen. Dit kan echter in het algemeen alleen als $\frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \neq 0$ is. Lost men zo in het voorbeeld ξ_2 op, dan krijgt men na

substitutie $(\xi_1 - 1)^2 + 4\xi_1 = (\xi_1 + 1)^2$ en dit heeft een minimum bij $\xi_1 = -1$;

daar is echter geen ξ_2 bij te vinden zodat aan de bijvoorwaarde voldaan

is. Hadden we evenwel ξ_1 opgelost, dan was er na substitutie

$(\frac{1}{4}\xi_2^2 - 1)^2 + \xi_2^2 = (\frac{1}{4}\xi_2^2 + 1)^2$ gekomen en dit heeft een minimum bij $\xi_2 = 0$,

dat het punt $(0, 0)$ geeft, dat we in eerste aanleg niet gevonden hadden.

Nu is in $(0, 0)$ inderdaad $\frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} = 0$.

Met de methode der multiplacatoren van Lagrange kan de moeilijkheid verschillende oplossingen te moeten proberen, omzeild worden.

(43.3) Als $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ een regulier punt van rang k is van de totaal differentieerbare functies $\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \chi_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ en

$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ totaal differentieerbaar is in $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en daar,

als de punten $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ beperkt worden tot de punten die voldoen

aan $\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \dots = \chi_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$, een relatief minimum of

maximum heeft, dan zijn er k reële getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ te vinden, zodat

$$\text{geldt } \frac{\partial \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \chi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j} = 0 \quad (j=1, \dots, n).$$

Bewijs: Laat de nummering der veranderlijken zo gekozen zijn dat

in $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ geldt $\frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_k)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k)} \neq 0$. Volgens (42.6) zijn er dan k functies $\psi_1(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n), \dots, \psi_k(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ zodat in een omgeving van $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de punten

$(\psi_1(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n), \dots, \psi_k(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n), \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ juist de punten zijn die voldoen aan $\chi_1 = \dots = \chi_k = 0$. Dan heeft de functie

$\varphi(\psi_1(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n), \dots, \psi_k(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n), \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ een relatief maximum of minimum in $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$, dus geldt daar $\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} = 0$ ($j=k+1, \dots, n$). Verder geldt volgens de kettingregel

$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_j} = 0$ ($i=1, \dots, k; j=k+1, \dots, n$). Omdat

$\frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_k)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k)} \neq 0$, zijn er reële getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ te vinden zodat

$\sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \chi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j} = - \frac{\partial \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j}$ ($j=1, \dots, k$). Voor

$j=k+1, \dots, n$ geldt dan $\sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \chi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j} =$

$= \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(- \sum_{n=1}^k \frac{\partial \chi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_n} \frac{\partial \psi_n(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j} \right) =$

$= \sum_{n=1}^k \frac{\partial \psi_n(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j} \left(- \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \chi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_n} \right) =$

$= \sum_{n=1}^k \frac{\partial \psi_n(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_n} = - \frac{\partial \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \xi_j}$.

Daarmee zijn de gevraagde betrekkingen bewezen.

Als men van een functie de relatieve maxima en minima onder een stel bijvoorwaarden wil vinden, kan men proberen uit de in (43.3) vermelde n betrekkingen en de k bijvoorwaarden de $n+k$ onbekenden $\xi_1, \dots, \xi_n$,

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ op te lossen. Eventuele relatieve maxima en minima in reguliere punten zullen dan onder de gevonden oplossingen voorkomen.

Past men dit toe op het hierboven behandelde voorbeeld, dan vindt men $2(\xi_1 - 1) - 4\lambda = 0$, $2\xi_2 + 2\lambda\xi_2 = 0$, $\xi_2^2 - 4\xi_1 = 0$. De enige oplossing hiervan is $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Of dit werkelijk een relatief maximum of relatief minimum is valt hieruit nog niet te concluderen.

We moeten wel bedenken, dat (4.3.3) alleen geldt voor reguliere punten en dat het gebeuren kan, dat een relatief minimum of relatief maximum, dat in een singulier punt van de bijvoorwaarden valt, zo niet gevonden wordt. Hiervan geven we een voorbeeld. Gevraagd het minimum van de functie $(\xi_1 + 1)^2 + \xi_2^2$ onder de bijvoorwaarde $\xi_1^3 - \xi_2^2 = 0$. Dit minimum is als volgt eenvoudig te vinden. Uit $\xi_1^3 = \xi_2^2$ volgt dat $\xi_1 \geq 0$ moet zijn. Dan is $\xi_1 + 1 \geq 1$ en $(\xi_1 + 1)^2 + \xi_2^2 \geq 1$, maar $\xi_1 = \xi_2 = 0$ voldoet aan de bijvoorwaarde en geeft de functie de waarde 1. Dit is dus een minimum. Past men de methode van Lagrange toe, dan vindt men in het geheel geen oplossing (ga dit zelf na). Inderdaad is $(0, 0)$ een singulier punt van de bijvoorwaarde.

Om na te gaan of een gevonden punt werkelijk een maximum of een minimum van de functie oplevert, kunnen we dikwijls met voordeel gebruik maken van de stelling dat een continue functie, gedefinieerd op een nietlege compacte verzameling, een maximum en een minimum heeft (zie (12.12) blz. 46 en (13.2) blz. 47). Nu is een deelverzameling van een R_n dan en slechts dan compact, als zij begrensd en gesloten is (zie (12.8) blz. 45). Verder vormen de punten, die voldoen aan de bijvoorwaarden $\chi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \dots = \chi_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$, zeker een gesloten verzameling, als de definitieverzameling in R_n gesloten is, omdat $\chi_1, \dots, \chi_k$ continu zijn (zie opgave 63, blz. 52). Begrensd behoeft deze verzameling echter niet te zijn. Soms kunnen we, als de verzameling onbegrensd is, dit nog onder-
vangen, als we kunnen aantonen dat de punten met grote absolute waarde zeker niet in aanmerking komen voor een maximum of een minimum.

We zullen dit toelichten aan een voorbeeld. Dit ontstaat uit de meetkundige vraag naar het rechthoekige parallellepipedum, dat bij gegeven totale oppervlakte K van de zijvlakken de grootste inhoud heeft. Noemen we de lengte van drie onderlinge loodrechte ribben ξ_1, ξ_2, ξ_3 dan is de som der oppervlakken der zes zijvlakken $2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2\xi_3$ en de inhoud $\xi_1\xi_2\xi_3$. We krijgen dus de vraag naar het maximum der functie $\xi_1\xi_2\xi_3$ onder de bijvoorwaarde $2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2\xi_3 - K = 0$ (hierin is $K > 0$), waarbij ξ_1, ξ_2 en ξ_3 beperkt worden tot positieve reële getallen. We mogen er gerust $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ en $\xi_3 = 0$ aan toevoegen, want dan is $\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$; de definitieverzameling is dan gesloten. Uit de bijvoorwaarde volgt $2(\xi_1 + \xi_2)\xi_3 \leq K$, dus $\xi_1 \leq \frac{K}{2\xi_3}$ en $\xi_2 \leq \frac{K}{2\xi_3}$ (als $\xi_3 \neq 0$), dus $\xi_1\xi_2\xi_3 \leq \frac{K^2}{4\xi_3}$. Als dus $\xi_3 > M$, dan is $\xi_1\xi_2\xi_3 < \frac{K^2}{M}$. Door M voldoende groot te kiezen, kunnen we dit willekeurig dicht bij nul krijgen. Hetzelfde wat we hier voor ξ_3 gedaan hebben, kunnen we ook voor ξ_1 en ξ_2 doen. Als we M voldoende groot kiezen, mogen we ons voor de bepaling van een maximum dus beperken tot $0 \leq \xi_1 \leq M, 0 \leq \xi_2 \leq M, 0 \leq \xi_3 \leq M$. Dit is echter een gesloten begrensde verzameling. Hieruit volgt, dat er zeker een maximum van de functie bestaat. Dit maximum kunnen we nu met de methode van Lagrange vinden.

Opgave 163. Voer dit laatste uit.

Opgave 164. Welke punten van de verzameling, die bepaald is door $\xi_1^4 + \xi_2^4 = 1$, hebben de kleinste en welke de grootste afstand tot $(0,0)$?

Opgave 165. Bepaal de lengte der ribben van het rechthoekige parallellepipedum, dat bij gegeven inhoud de kleinste som der oppervlakten van de zijvlakken heeft.

§44. Transformatie van meervoudige integralen.

We noemen een lineaire operator A een draaiing, als geldt $|Ax| = |x|$ voor alle x . Een draaiing is eeneenduidig, want uit $Ax = \bar{0}$ volgt $|x| = |Ax| = 0$, dus $x = \bar{0}$; uit (40.2) volgt nu dat A eeneenduidig is. Verder is $|Ax - Ay| = |A(x - y)| = |x - y|$: afstanden tussen punten blijven bij draaiing behouden. Ook inproducten blijven behouden, want $|x|^2 + 2xy + |y|^2 = |x + y|^2 = |A(x + y)|^2 = |Ax + Ay|^2 = |Ax|^2 + 2Ax \cdot Ay + |Ay|^2 = |x|^2 + 2Ax \cdot Ay + |y|^2$, dus $Ax \cdot Ay = x \cdot y$. Daar de cosinus van de hoek tussen twee vectoren met behulp van het inproduct en de absolute waarde gedefinieerd is, blijven hoeken tussen vectoren bij draaiing ook behouden.

Een afbeelding T van R_n in zichzelf, die gedefinieerd is door $Tx = x + c$ (c een constante vector) heet een translatie. Uiteraard is een translatie een eeneenduidige afbeelding van R_n op zich zelf. De inverse transformatie van een translatie is ook een translatie.

Een afbeelding W van R_n in zichzelf, die gedefinieerd is door $Wx = a + \lambda(x - a)$ (a een constante vector, λ een constant reëel getal) heet een vermenigvuldigingstransformatie met centrum a en factor λ . Als $\lambda \neq 0$, is dit een eeneenduidige afbeelding van R_n op zichzelf; de inverse transformatie is een vermenigvuldigingstransformatie met centrum a en factor $\frac{1}{\lambda}$.

(44.1) Als TV de beeldverzameling is van een begrensde verzameling V in R_n bij een translatie T , dan is de binneninhoud van TV gelijk aan de binneninhoud van V en de buiteninhoud van TV gelijk aan de buiteninhoud van V .

Bewijs: TV is ook begrensd, want uit $Tx = x + c$ en $|x| < \gamma$ volgt

$$|Tx| \leq |x| + |c| < \gamma + |c|. \text{ Een hokje bepaald door } \frac{\kappa_i}{2^m} \leq \xi_i < \frac{\kappa_i + 1}{2^m}$$

($i = 1, \dots, n$) gaat over in een verzameling bepaald door $\frac{\kappa_i}{2^m} + \gamma_i \leq \xi_i < \frac{\kappa_i + 1}{2^m} + \gamma_i$ ($i = 1, \dots, n$), als $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de componenten van c zijn.

Met behulp van (34.25) valt gemakkelijk te bewijzen, dat een verzameling, bepaald door $\alpha_i \leq \xi_i < \beta_i$ ($i = 1, \dots, n$) een inhoud heeft, die gelijk is aan $\prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$.

Opgave 166. Ga dit na.

Hieruit volgt dat het hokje overgaat in een verzameling, die een inhoud heeft, die gelijk is aan de inhoud van het hokje. Voor hokjes is de stelling daarmee bewezen. Een hokje dat geheel binnen V ligt gaat bij de translatie T over in een verzameling met dezelfde inhoud, die geheel binnen TV ligt. Hieruit volgt direct, dat $S_{\text{in}}(\gamma_V) \leq I_*(TV)$ (het symbool I_* staat voor bineninhoud, het symbool I^* voor buiteninhoud). Omdat

$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{*m}(\chi_V) = I_*(V)$, geldt ook $I_*(V) \leq I_*(TV)$. Omdat V omgekeerd ook uit TV door een translatie ontstaat, geldt ook $I_*(TV) \leq I_*(V)$, dus $I_*(TV) = I_*(V)$. Op analoge wijze bewijzen wij dat $I^*(TV) = I^*(V)$.
 (44.2) Als WV het beeld is van een begrensde verzameling V in R_n bij de vermenigvuldigingstransformatie W met factor λ , dan is de binneninhoud van WV $|\lambda|^n$ maal de binneninhoud van V en de buiteninhoud van WV $|\lambda|^n$ maal de buiteninhoud van V .

Bewijs: WV is begrensd, want uit $|x| < \gamma$ en $y = a + \lambda(x-a)$ volgt $|y| \leq |a| + |\lambda||x| + |\lambda||a| \leq |a| + |\lambda|\gamma + |\lambda||a|$. Als $\lambda = 0$, bestaat WV alleen uit het punt a en heeft dus inhoud nul, waaruit de stelling volgt. Stel nu $\lambda > 0$. Dan gaat het hokje bepaald door $\frac{\kappa_1}{2^m} \leq \xi_1 < \frac{\kappa_1+1}{2^m}$ over in een verzameling bepaald door $\alpha_1 + \lambda(\frac{\kappa_1}{2^m} - \alpha_1) \leq \xi_1 < \alpha_1 + \lambda(\frac{\kappa_1+1}{2^m} - \alpha_1)$, die dus de inhoud $\lambda 2^{-mn}$ heeft. Als $\lambda < 0$, krijgen wij op analoge wijze $\alpha_1 + \lambda(\frac{\kappa_1+1}{2^m} - \alpha_1) < \xi_1 \leq \alpha_1 + \lambda(\frac{\kappa_1}{2^m} - \alpha_1)$ en een inhoud

$(-\lambda) 2^{-mn}$. De inhoud van een hokje wordt dus met $|\lambda|^n$ vermenigvuldigd. Een hokje dat geheel binnen V ligt, gaat bij de vermenigvuldigingstransformatie W over in een verzameling met $|\lambda|^n$ maal zo grote inhoud die geheel binnen WV ligt. Hieruit volgt direct dat $|\lambda|^n S_{*m}(\chi_V) \leq I_*(WV)$. Omdat $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{*m}(\chi_V) = I_*(V)$, geldt dan ook $|\lambda|^n I_*(V) \leq I_*(WV)$. Omdat V omgekeerd uit WV door een vermenigvuldigingstransformatie met factor λ^{-1} ontstaat, geldt ook $|\lambda|^{-n} I_*(WV) \leq I_*(V)$, dus $I_*(WV) \leq |\lambda|^n I_*(V)$, dus $I_*(WV) = |\lambda|^n I_*(V)$. Op analoge wijze bewijzen wij dat $I^*(WV) = |\lambda|^n I^*(V)$.

(44.3) Als AV het beeld is van een begrensde verzameling V in R_n bij de draaiing A , dan is de binneninhoud van AV gelijk aan de binneninhoud van V en de buiteninhoud van AV gelijk aan de buiteninhoud van V .

Bewijs: Omdat $|Ax| = |x|$, is AV begrensd. Wij bewijzen de stelling eerst in het geval dat V een hokje is. Laat een hokje H met inhoud I overgaan in een verzameling met een binneninhoud λI en een buiteninhoud μI . Dan is in ieder geval $\lambda \leq \mu$. We bewijzen nu eerst dat de factoren λ en μ voor alle hokjes dezelfde zijn. Twee hokjes uit dezelfde hokjesverdeling ontstaan uit elkaar door translatie. Laat n.l. de hokjes bepaald zijn door $\frac{\kappa_1}{2^m} \leq \xi_1 < \frac{\kappa_1+1}{2^m}$ en $\frac{\nu_1}{2^m} \leq \xi_1 < \frac{\nu_1+1}{2^m}$ dan ontstaat het tweede uit het eerste door de translatie $Tx = x+c$ met $c = (\frac{\nu_1 - \kappa_1}{2^m}, \dots, \frac{\nu_n - \kappa_n}{2^m})$. Omdat $A(x+c) = Ax + Ac$ ontstaan de door

draaiing uit deze hokjes verkregen verzamelingen ook door translatie uit elkaar. Uit (44.1) volgt dan direct, dat de factoren λ en μ voor beide hokjes dezelfde zijn. Nu vergelijken wij een hokje uit de $(m+1)^e$ verdeling met een uit de m^e verdeling. Neem voor het hokje uit de

$(m+1)^e$ verdeling het hokje dat bepaald is door $0 \leq \xi_1 < \frac{1}{2^{m+1}}$ en van het hokje uit de m^e verdeling het hokje dat bepaald is door $0 \leq \xi_1 < \frac{1}{2^m}$, dan ontstaat het laatste uit het eerste door een vermenigvuldigingstransformatie met factor 2 t.o.v. $\bar{O}$. Omdat $A(2x) = 2Ax$ geldt hetzelfde ook voor de door draaiing uit deze hokjes verkregen verzamelingen. Omdat de inhoud van het eerste hokje $2^{-(m+1)n}$ is en van het tweede $2^{-mn} = 2^{n-(m+1)n}$, zijn volgens (44.2) de factoren λ en μ voor beide hokjes dezelfde. We beschouwen nu de eenheidshyperbol B , d.i. de verzameling, bepaald door $|x| \leq 1$. Van deze hebben wij op blz. 130 bewezen dat hij een inhoud heeft. Verder gaat hij bij draaiing in zichzelf over: $AB = B$. Beschouw nu $S_{*m}(\mathcal{A}_B)$. De hokjes die hieraan medewerken, gaan bij draaiing over in een stel verzamelingen die samen een buiteninhoud $\mu S_{*m}(\mathcal{A}_B)$ hebben en die geheel binnen B liggen, dus $\mu S_{*m}(\mathcal{A}_B) \leq I(B)$. Omdat $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{*m}(\mathcal{A}_B) = I(B)$, geldt ook $\mu I(B) \leq I(B)$ en omdat $I(B) > 0$ is, volgt hieruit $\mu \leq 1$. Door $S_m^*(\mathcal{A}_B)$ te beschouwen, vinden wij op analoge wijze $\lambda \leq 1$. Uit $\lambda \leq \mu$, $\mu \leq 1$ en $\lambda \geq 1$ volgt $\lambda = \mu = 1$. Dus heeft een verzameling die door draaiing uit een hokje ontstaat een inhoud, die gelijk is aan de inhoud van het hokje. Voor een willekeurige begrensde verzameling V geldt dat een hokje dat geheel binnen V ligt bij draaiing overgaat in een verzameling die geheel binnen AV ligt. Daaruit volgt $S_{*m}(\mathcal{A}_V) \leq I_*(AV)$. Omdat $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{*m}(\mathcal{A}_V) = I_*(V)$, geldt ook $I_*(V) \leq I_*(AV)$. Omdat omgekeerd V uit AV door een draaiing ontstaat, geldt ook $I_*(AV) \leq I_*(V)$, dus $I_*(AV) = I_*(V)$. Op analoge wijze bewijst men, dat $I^*(AV) = I^*(V)$.

We willen nu nagaan wat er met de inhoud van een verzameling gebeurt bij toepassing van een willekeurige lineaire operator A . De verzameling bepaald door $0 \leq \xi_1 < 1$, waarvan de punten ook te schrijven zijn in de vorm $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ met $0 \leq \xi_1 < 1$, gaat over in de verzameling der punten $Ax = \sum_{i=1}^n \xi_i Ae_i$. Noem $Ae_i = b_i$. Wij bewijzen, dat er bij ieder stelsel vectoren $b_1, \dots, b_n$ een stelsel vectoren $d_1, \dots, d_n$ te vinden is, zodat $b_j = \sum_{i=1}^j \lambda_{ij} d_i$ ($j = 1, \dots, n$) en $d_i \cdot d_j = 0$ als $i \neq j$ en $d_i \cdot d_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$). In ieder geval kan altijd bij $d_1, \dots, d_k$ ($k < n$) een d_{k+1} gevonden worden, zodat $d_i \cdot d_{k+1} = 0$ ($i = 1, \dots, k$) en $|d_{k+1}| = 1$. Immers als $d_i = (\delta_1^i, \dots, \delta_n^i)$ (hierin is i een index, geen exponent), dan is uit $\sum_{j=1}^n \delta_j^i \xi_j = 0$ ($i = 1, \dots, n$) altijd een oplossing $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ te vinden, die van $\bar{O}$ verschilt. Door $d_{k+1} = \frac{1}{|x|} x$ te kiezen, is aan de voorwaarden voldaan. Verder is bij iedere a een d met $|d| = 1$ te vinden zodat $a = \lambda d$ voor een of andere λ , want als $a = \bar{O}$ kunnen wij voor d een willekeurige vector met $|d| =$

en $\lambda = 0$ kiezen; als $a \neq \bar{0}$, kiezen wij $d = \frac{1}{|a|}a$, dan is $|d| = 1$ en $a = |a|d$. Kies nu d_1 zodat $|d_1| = 1$ en $b_1 = \lambda_{11}d_1$. Als $b_2 - (b_2 \cdot d_1)d_1 = \bar{0}$, kiezen wij d_2 zodat $|d_2| = 1$ en $d_1 \cdot d_2 = 0$; als $b_2 - (b_2 \cdot d_1)d_1 \neq \bar{0}$ kiezen wij d_2 zo, dat $|d_2| = 1$ en $b_2 - (b_2 \cdot d_1)d_1 = \lambda_{22}d_2$. In beide gevallen kunnen wij $b_2 - (b_2 \cdot d_1)d_1 = \lambda_{22}d_2$ stellen; in beide gevallen is ook $d_1 \cdot d_2 = 0$. In het eerste geval is het laatste al aangetoond; in het tweede geval volgt dit uit $\lambda_{22} \neq 0$ en $\lambda_{22}(d_2 \cdot d_1) = (b_2 - (b_2 \cdot d_1)d_1) \cdot d_1 = 0$. Stel dat $d_1, \dots, d_k$ gevonden zijn, zodat $d_i \cdot d_j = 0$ voor $i \neq j$, $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, k$; $k < n$. $|d_i| = 1$ voor $i = 1, \dots, k$ en $b_j = \sum_{i=1}^j \lambda_{ij}d_i$, dan kiezen wij, als $b_{k+1} - \sum_{i=1}^k (b_{k+1} \cdot d_i)d_i = \bar{0}$, d_{k+1} zo, dat $|d_{k+1}| = 1$ en $d_i \cdot d_{k+1} = 0$ voor $i = 1, \dots, k$ en als $b_{k+1} - \sum_{i=1}^k (b_{k+1} \cdot d_i)d_i \neq \bar{0}$, d_{k+1} zo, dat $|d_{k+1}| = 1$ en $b_{k+1} - \sum_{i=1}^k (b_{k+1} \cdot d_i)d_i = \lambda_{k+1,k+1}d_{k+1}$. In beide gevallen kunnen wij $b_{k+1} - \sum_{i=1}^k (b_{k+1} \cdot d_i)d_i = \lambda_{k+1,k+1}d_{k+1}$ stellen; in beide gevallen is ook $d_i \cdot d_{k+1} = 0$ voor $i = 1, \dots, k$. In het eerste geval is het laatste al aangetoond; in het tweede geval volgt dit uit

$$\lambda_{k+1,k+1} \neq 0 \text{ en } \lambda_{k+1,k+1}(d_{k+1} \cdot d_i) = b_{k+1} \cdot d_i - \sum_{j=1}^k (b_{k+1} \cdot d_j)(d_j \cdot d_i) = 0.$$

Hiermee zijn door inductie de gevraagde $d_1, \dots, d_n$ gevonden. Als $d_i = (\delta_1^i, \dots, \delta_n^i)$, dan is de lineaire operator D met matrix δ_j^i een draaiing. Daarvoor geldt n.l. $De_i = d_i$ en dus $D(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i) = \sum_{i=1}^n \xi_i d_i$ en

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i d_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j d_i \cdot d_j = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \left| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right|^2. \text{ De inverse}$$

transformatie C van D is ook een draaiing, waarvoor geldt $Cd_i = e_i$ en dan $Cb_j = \sum_{i=1}^j \lambda_{ij}e_i$ en $C(\sum_{j=1}^n \xi_j b_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j Cb_j$. Nu bewijzen wij dat

de verzameling van deze punten een inhoud heeft die gelijk is aan

$\prod_{i=1}^n |\lambda_{ii}|$. We bewijzen dit door volledige inductie naar n . De punten der verzameling zijn $\sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^j \lambda_{ij}e_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=i}^n \lambda_{ij} \xi_j) e_i$. Nemen wij nu

die punten waarvoor de n^e component $= \eta$ is, d.w.z. $\lambda_{nn} \xi_n = \eta$, dan is als $\lambda_{nn} \neq 0$, $\xi_n = \frac{\eta}{\lambda_{nn}}$ (als $\lambda_{nn} = 0$, dan is van alle punten der verzameling de n^e component $= 0$, dus de inhoud $= 0 = \prod_{i=1}^n |\lambda_{ii}|$), dus de

punten zijn $\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j Cb_j + \frac{\eta}{\lambda_{nn}} Cb_n$. We passen nu de volgende hulpstelling toe:

(44.4) Als V een verzameling met inhoud in R_n is en als voor iedere

reële η geldt dat van die punten $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ van R_n , waarvoor $\xi_n = \eta$ en die in V liggen, de eerste $n-1$ componenten als punten van een R_{n-1} opgevat een verzameling $V(\eta)$ vormen die een inhoud heeft en als $I(V(\eta))$ als functie van η integreerbaar is dan geldt $I(V) = \int I(V(\eta)) d\eta$.

Bewijs: We beschouwen de hokjes die meewerken aan $S_{*m}(\chi_V)$, dat zijn de hokjes die geheel binnen V liggen. Beschouw daarvan de hokjes, die bepaald zijn door $\frac{\kappa_i}{2^m} \leq \xi_i < \frac{\kappa_i+1}{2^m}$ met een vaste κ_n . Voor de η met $\kappa_n \leq \eta < \kappa_n+1$ bepalen die hokjes in R_{n-1} die geheel binnen $V(\eta)$ liggen en de som van hun grootten is voor deze η dus $\leq \frac{1}{2^m} I(V(\eta))$ en dus ook $\leq \frac{1}{2^m} \sup_{\kappa_n \leq \eta < \kappa_n+1} I(V(\eta))$. Hieruit volgt dat $S_{*m}(\chi_V) \leq S_m^*(I(V(\eta)))$, dus $I(V) \leq \int I(V(\eta)) d\eta$. Door $S_m^*(\chi_V)$ te beschouwen vinden we op analoge wijze $I(V) \geq \int I(V(\eta)) d\eta$. Dus $I(V) = \int I(V(\eta)) d\eta$.

Nu is in ons geval de verzameling $V(\eta)$ bepaald door de punten $\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j C_{b_j} + \frac{\eta}{\lambda_{nn}} (C_{b_n} \cdot \lambda_{nn} e_n)$, die na translatie een verzameling geeft bepaald door de punten $\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j C_{b_j}$. Volgens inductieveronderstelling is dan $I(V(\eta)) = \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_{ii}|$. Dit is alleen zo voor die waarden van η waarvoor $0 \leq \frac{\eta}{\lambda_{nn}} < 1$. Voor $\lambda_{nn} > 0$ komt er dus $\int_0^{\lambda_{nn}} \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_{ii}| d\eta = \lambda_{nn} \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_{ii}|$ en voor $\lambda_{nn} < 0$ komt er $\int_{\lambda_{nn}}^0 \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_{ii}| d\eta = -\lambda_{nn} \prod_{i=1}^{n-1} |\lambda_{ii}|$.

dus in beide gevallen $\prod_{i=1}^n |\lambda_{ii}|$. Om (44.4) te kunnen toepassen, moeten we echter weten dat de verzameling een inhoud bezit. We beginnen met het geval, dat $\lambda_{ii} \neq 0$, $i=1, \dots, n$. Stel dat we een hokje hebben, dat een punt $p = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ bevat, dat wel, en een punt $r = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ bevat, dat niet tot de verzameling behoort. Omdat een hokje blijkbaar convex is, d.w.z. met ieder tweetal punten x en y ook de punten $\mu x + (1-\mu)y$ met $0 \leq \mu \leq 1$ bevat, bevat het hokje ook de punten $\mu r + (1-\mu)p$ met $0 \leq \mu \leq 1$. Daar de verzameling bestaat uit de punten $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \xi_j) e_i$ met $0 \leq \xi_j < 1$, behoort dit punt tot de verzameling als $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \xi_j = \mu \rho_i + (1-\mu) \pi_i$ voor $i=1, \dots, n$ en zekere ξ_j met $0 \leq \xi_j < 1$. Vatten wij dit op als vergelijkingen voor ξ_j , dan is, omdat de determinant van het

vergelijkingsstelsel $\prod_{i=1}^n \lambda_{1i} \neq 0$ is, hieruit $\xi_1, \dots, \xi_n$ op te lossen

in de vorm $\xi_j = \omega_{1j}\mu + \omega_{2j}$. Omdat p tot de verzameling behoort, geeft substitutie hierin van $\mu = 0$ waarden van ξ_j waarvoor $0 \leq \xi_j < 1$; omdat r niet tot de verzameling behoort, moet bij substitutie hierin van $\mu = 1$ minstens één der $\xi_j < 0$ of ≥ 1 worden. Hieruit volgt dat er een μ met $0 \leq \mu \leq 1$ bestaat, waarvoor minstens één der $\xi_j = 0$ of $= 1$ wordt en de overige ξ_j voldoen aan $0 \leq \xi_j \leq 1$. Noemen we nu de punten

$\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \xi_j) e_i$ met $0 \leq \xi_j \leq 1$ en minstens één der $\xi_j = 0$ of $= 1$ de rand van de verzameling, dan bevat dus ieder hokje, dat punten binnen en

buiten de verzameling bevat, een punt van de rand van de verzameling. We bewijzen nu door volledige inductie naar n , dat de verzameling een inhoud bezit en zijn rand een inhoud nul. Voor $n=1$ is dat duidelijk, want de verzameling is een interval en zijn rand bestaat uit twee punten. We stellen nu $\lambda_{nn} > 0$ (het geval $\lambda_{nn} < 0$ gaat analoog). De n^e component van een punt dat tot de verzameling behoort is $\lambda_{nn} \xi_n$ en dus ≥ 0 en $< \lambda_{nn}$. We beschouwen hokjes uit de m^e verdeling die aan $\kappa^{(m)}(V)$ meewerken (zie blz. 121; de verzameling noemen we V). Voor een dergelijk hokje, dat de punten $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ bevat die voldoen aan $\frac{\kappa_1}{2^m} \leq \eta_1 < \frac{\kappa_1+1}{2^m}$, geldt dus zeker $\kappa_n < \lambda_{nn} 2^m$ en $\kappa_{n+1} > 0$. Als nu $\kappa_{n+1} \geq \lambda_{nn} 2^m$, dan is

$\kappa_n < \lambda_{nn} 2^m \leq \kappa_{n+1}$, waardoor κ_n als geheel getal volkomen vastgelegd is. Daar V begrensd is, is er een L_k (zie blz. 121), waar V geheel binnen ligt. De hokjes met deze κ_n die aan $\kappa^{(m)}(V)$ meewerken hebben een totale grootte die $\leq 2^{-m}(2k)^{n-1}$ is. We kiezen een $\eta > 0$. Er is dan een M_1 te vinden, zodat voor $m > M_1$ geldt $2^{-m}(2k)^{n-1} < \frac{\eta}{3}$. Als $\kappa_n \leq 0$, dan is $\kappa_n \leq 0 < \kappa_{n+1}$, waardoor κ_n als geheel getal volkomen vastgelegd is. Evenals zoëven volgt hieruit, dat voor $m > M_1$ de totale grootte van de hokjes met deze κ_n die aan $\kappa^{(m)}(V)$ meewerken $< \frac{\eta}{3}$ is. Er blijven nu nog slechts hokjes over, waarvoor $0 < \kappa_n < \kappa_{n+1} < \lambda_{nn} 2^m$. Een van deze hokjes, dat tot $\kappa^{(m)}(V)$ meewerkt, bevat een punt van de rand van V ; daar echter $\xi_n = 0$ of $= 1$ onmogelijk is, omdat dan $\eta_n = 0$ of $= \lambda_{nn}$ zou zijn, moet voor één der ξ_j met $j=1, \dots, n-1$ gelden $\xi_j = 0$ of $= 1$. We houden nu

even κ_n vast en bepalen gehele getallen $\nu_1, \dots, \nu_n$ door de voorwaarde $\frac{\lambda_{in} \kappa_n}{\lambda_{nn}} \leq \nu_1 < \frac{\lambda_{in} \kappa_n}{\lambda_{nn}} + 1$, dan is blijkbaar $\nu_n = \kappa_n$. Passen we nu op de

hokjes met deze κ_n een translatie over $(-\frac{\nu_1}{2^m}, \dots, -\frac{\nu_n}{2^m})$ toe, dan gaan

deze over in hokjes met $0 \leq \eta_n < \frac{1}{2^m}$, waarmee dus ook hokjes corresponderen van de m^e hokjesverdeling der R_{n-1} bestaande uit de punten waarvan de n^e component nul is. Lat nu $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \xi_j) e_i$ een punt van de rand

van V zijn, gelegen in zo'n hokje (dus $\frac{\kappa_n}{2^m} \leq \lambda_{nn} \xi_n < \frac{\kappa_n}{2^m} + \frac{1}{2^m}$), dan is
 blijkbaar $\sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{ij} \xi_j) e_i$ een punt van de rand R van $V(0)$, de doorsnij-
 ding van V met de R_{n-1} der punten, waarvan de n^e component nul is. Past
 men nu op het punt de hierboven gegeven translatie toe en vergelijkt het
 zo verkregen punt met het punt van R dan krijgt men voor de 1^e component
 $\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} \xi_j - \frac{\nu_1}{2^m} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{1j} \xi_j = \lambda_{1n} \xi_n - \frac{\nu_1}{2^m} \leq \lambda_{1n} \xi_n - \frac{\lambda_{1n} \kappa_n}{2^m \lambda_{nn}}$. Voor
 $\lambda_{1n} \geq 0$ is dat $\leq \frac{|\lambda_{1n}|}{2^m \lambda_{nn}}$ en voor $\lambda_{1n} < 0$ is het ≤ 0 . Verder is
 $\lambda_{1n} \xi_n - \frac{\nu_1}{2^m} \geq \lambda_{1n} \xi_n - \frac{\lambda_{1n} \kappa_n}{2^m \lambda_{nn}} - \frac{1}{2^m}$. Voor $\lambda_{1n} \geq 0$ is dat $\geq -\frac{1}{2^m}$ en
 voor $\lambda_{1n} < 0$ is het $\geq -\frac{|\lambda_{1n}|}{2^m \lambda_{nn}} - \frac{1}{2^m}$. Noemen we N het kleinste natuurlijke
 getal $\geq \max(\frac{|\lambda_{1n}|}{\lambda_{nn}}, \dots, \frac{|\lambda_{n-1,n}|}{\lambda_{nn}})$, dan behoort het hokje dat door

translatie verkregen is tot een stelsel van ten hoogste $(N+2)^{n-1}$ hokjes
 behorende bij een hokje dat een punt met R gemeen heeft. Daaruit volgt
 dat de totale grootte der hokjes met de gegeven κ_n , die meewerken aan
 $\kappa^{(m)}(V) \leq 2^{-m} (N+2)^{n-1} S_m^*(\chi_R)$ is. Het aantal waarden van κ_n dat in
 aanmerking komt is echter $< \lambda_{nn} 2^m$ en dit geeft dus dat de bijdrage aan
 $\kappa^{(m)}(V)$ daarvan $\leq \lambda_{nn} (N+2)^{n-1} S_m^*(\chi_R)$ is. Op R mogen we nu de inductie-
 veronderstelling toepassen en concluderen dat de inhoud van R in R_{n-1}
 nul is. Er is dus een M_2 zodat voor $m > M_2$ geldt $S_m^*(\chi_R) < \frac{2}{3 \lambda_{nn} (N+2)^{n-1}}$.

Voor $m > \max(M_1, M_2)$ is dan $\kappa^{(m)}(V) < \eta$, dus $\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa^{(m)}(V) = 0$, dus V heeft
 een inhoud. Verder is het duidelijk dat de rand $\bar{R}$ van V een inhoud nul
 heeft, want hetgeen we zoëven bewezen hebben is juist dat $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m^*(\chi_{\bar{R}}) = 0$,
 dus $I^*(\bar{R}) = 0$, dus $I(\bar{R}) = 0$. Als niet alle $\lambda_{ii} \neq 0$ zijn, mogen we veronder-
 stellen dat $\lambda_{nn} \neq 0$, omdat $\lambda_{nn} = 0$ al afgehandeld is. We bewijzen dan
 dat de inhoud van V nul is door volledige inductie naar n . Dit bewijs
 verloopt volgens precies hetzelfde schema als het bovenstaande bewijs,
 want we kunnen nu $S_m^*(V)$ en $S_m^*(V(0))$ op precies dezelfde wijze met elkaar
 vergelijken als hierboven $\kappa^{(m)}(V)$ en $S_m^*(\chi_R)$. Omdat volgens de inductie-
 veronderstelling $I(V(0)) = 0$ is, kunnen we dan concluderen dat $I(V) = 0$.

We hebben hiermee aangetoond dat de inhoud van V gelijk is aan

$\prod_{i=1}^n |\lambda_{ii}|$. Nu is V de verzameling der punten $\sum_{j=1}^n \xi_j C b_j$ met $0 \leq \xi_j < 1$ en

$Cb_j = \sum_{i=1}^j \lambda_{ij} e_i$. Als $Cb_j = (\gamma_1^j, \dots, \gamma_n^j)$, dan is $\gamma_1^j = 0$ als $i > j$ en $\gamma_i^j = \lambda_{ij}$ als $i \leq j$. Verder is $\prod_{i=1}^n |\lambda_{ii}| = |\det \gamma_{i,j}^j|$. Als $c_j = (\gamma_1^j, \dots, \gamma_n^j)$, dan is $(\det \gamma_{i,j}^j)^2 = (\det \gamma_{i,j}^1)(\det \gamma_{i,j}^j) = \det(\sum_{k=1}^n \gamma_k^1 \gamma_k^j) = \det(c_1 \cdot c_j)$, dus $|\det \gamma_{i,j}^j| = \sqrt{\det(c_1 \cdot c_j)}$. Omdat inproducten bij draaiing invariant zijn en $c_j = Cb_j$ en C een draaiing is, is de inhoud van de verzameling der punten $\sum_{i=1}^n \xi_i b_i$ ook $\sqrt{\det(b_1 \cdot b_j)}$. Als (α_{ij}) de matrix der lineaire operator A is, is dus $|\det \alpha_{ij}| = \sqrt{\det(b_1 \cdot b_j)}$. Daar de inhoud van de verzameling, bepaald door $0 \leq \xi_i < 1$, gelijk aan 1 is, is de inhoud van de verzameling, die hieruit door toepassing van A ontstaat, $|\det \alpha_{ij}|$ maal de inhoud van de oorspronkelijke verzameling. Een willekeurig hokje, bepaald door $\frac{K_1}{2^m} \leq \xi_i < \frac{K_1+1}{2^m}$ ontstaat uit de verzameling bepaald door $0 \leq \xi_i < 1$ door de vermenigvuldigingstransformatie $a + \lambda(x-a)$ met $a = (\frac{K_1}{2^{m-1}}, \dots, \frac{K_n}{2^{m-1}})$ en $\lambda = \frac{1}{2^m}$ (ga dat na). Verder is $A(a + \lambda(x-a)) = Aa + \lambda(Ax - Aa)$ en dus ontstaat de door toepassing van A op het hokje verkregen verzameling ook uit de door toepassing van A op de verzameling $0 \leq \xi_i < 1$ verkregen verzameling door toepassing van een vermenigvuldigingstransformatie met factor $\frac{1}{2^m}$. Hieruit volgt, dat ook een willekeurig hokje door toepassing van A overgaat in een verzameling, waarvan de inhoud $|\det \alpha_{ij}|$ maal de inhoud van het hokje is. Neem nu een willekeurige verzameling V en laat AV de verzameling zijn die door toepassing van A uit V ontstaat. Een hokje dat binnen V ligt, gaat over in een verzameling die binnen AV ligt. Hieruit volgt $|\det \alpha_{ij}| S_m(\chi_V) \leq I_*(AV)$, dus $|\det \alpha_{ij}| I_*(V) \leq I_*(AV)$. Evenzo vinden we $|\det \alpha_{ij}| I^*(V) \geq I^*(AV)$. Als $\det \alpha_{ij} = 0$, dan volgt hieruit $0 \geq I^*(AV)$, dus $I^*(AV) = 0 = |\det \alpha_{ij}| I^*(V)$ en $I_*(AV) = 0 = |\det \alpha_{ij}| I_*(V)$. Als $\det \alpha_{ij} \neq 0$, dan is A eeneenduidig en heeft een inverse, waarvan de determinant $\frac{1}{\det \alpha_{ij}}$ is. Dus $\frac{1}{|\det \alpha_{ij}|} I_*(AV) \leq I_*(V)$ en $\frac{1}{|\det \alpha_{ij}|} I^*(AV) \geq I^*(V)$, dus $I^*(AV) = |\det \alpha_{ij}| I^*(V)$ en $I_*(AV) = |\det \alpha_{ij}| I_*(V)$. Hiermee is de volgende stelling bewezen.

(44.5) Als AV het beeld is van een begrensde verzameling V in R_n bij een lineaire operator A en α is de determinant van A , dan is de binneninhoud van AV gelijk aan $|\alpha|$ maal de binneninhoud van V en de buiteninhoud van AV gelijk aan $|\alpha|$ maal de buiteninhoud van V .

Als $f(x)$ een totaal differentieerbare functie is met definitieverzameling in R_n en beeldverzameling in R_m , dan is $f(x) = f(a) + A(x-a) + |x-a|e(x \rightarrow a)$, waarin A de bij het punt a behorende functionaaloperator is. Als nu geldt dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, die niet van de keuze van a afhangt, zodat uit $|x-a| < \delta$ volgt $|e(x \rightarrow a)| < \varepsilon$ dan heet $f(x)$ uniform totaal differentieerbaar (zie voor het overeenkomstige begrip bij functies van één veranderlijke § 19, blz. 74).

(44.6) Als $f(x)$ uniform totaal differentieerbaar is, zijn de partiële afgeleiden van de eerste orde van $f(x)$ uniform continu.

Bewijs: $f(b) = f(a) + A(b-a) + |b-a|e(b \rightarrow a)$ en $f(a) = f(b) + B(a-b) + |a-b|e_1(a \rightarrow b) = f(b) - B(b-a) + |b-a|e_1(a \rightarrow b)$, dus $\bar{O} = A(b-a) - B(b-a) + |b-a|(e(b \rightarrow a) + e_1(a \rightarrow b))$. Bij $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zodat uit $|b-a| < \delta$ volgt $|e(b \rightarrow a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ en $|e_1(a \rightarrow b)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dan is dus ook $|A(b-a) - B(b-a)| < \varepsilon |b-a|$ dus voor x met $|x| < \delta$ is $|Ax - Bx| < \varepsilon |x|$. Voor λx geldt dan echter $|A\lambda x - B\lambda x| = |\lambda| |Ax - Bx| < \varepsilon |\lambda| |x| = \varepsilon |\lambda x|$, dus $|Ax - Bx| < \varepsilon |x|$ geldt voor alle x . Neem nu $x = e_j$ dan is $|\sum_{j=1}^m (\alpha_{1j} - \beta_{1j}) d_j| = |Ae_j - Be_j| < \varepsilon$, als d_j

het punt met j^{de} component 1 en overige componenten 0 in R_m voorstelt. Dan is echter ook $|\alpha_{1j} - \beta_{1j}| < \varepsilon$, dus de partiële afgeleiden van de eerste orde zijn uniform continu.

(44.7) Als $f(x)$ gedefinieerd is op een convexe verzameling en totaal differentieerbaar met uniform continue partiële afgeleiden van de eerste orde, dan is $f(x)$ uniform totaal differentieerbaar.

Bewijs: Laat $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ de componenten van f zijn, dan is volgens

$$(41.10) \quad \varphi_j(z) - \varphi_j(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j(w_j)}{\partial \xi_i} (\xi_i - \eta_i) \text{ voor een } w_j \text{ tussen } y \text{ en}$$

z . Verder is er bij $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden zodat voor $|u-v| < \delta$ en $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$ geldt $\left| \frac{\partial \varphi_j(u)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \varphi_j(v)}{\partial \xi_i} \right| < \frac{\varepsilon}{n\sqrt{m}}$. Als dan

$$|z-y| < \delta \text{ is, is ook } |w_j-y| < \delta \text{ en } \varphi_j(z) - \varphi_j(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial \xi_i} (\xi_i - \eta_i) + |z-y| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_j(w_j)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial \xi_i} \right) \frac{\xi_i - \eta_i}{|z-y|}. \text{ Verder is } \left| \frac{\xi_i - \eta_i}{|z-y|} \right| \leq 1 \text{ dus}$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_j(w_j)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial \xi_i} \right) \frac{\xi_i - \eta_i}{|z-y|} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_j(w_j)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial \xi_i} \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Als we dus $f(z) - f(y) = A(z-y) + |z-y|e(z \rightarrow y)$ met A de functionaaloperator in het punt y stellen, geldt $|e(z \rightarrow y)| < \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$. Daarmee is aangetoond, dat $f(x)$ uniform totaal differentieerbaar is.

Erratum: Op blz. 188 komt stelling (44.6) en zijn bewijs te vervallen.

Stelling (44.7) wordt (44.6) genummerd.

(44.7) (Transformatiestelling voor meervoudige integralen.) Laat $f(x)$

een eeneenduidige functie zijn, die een verzameling V met inhoud in R_n in een verzameling W in R_n afbeeldt en laat $f(x)$ uniform totaal

differentieerbaar zijn met eeneenduidige functionaaloperator, dusdanig dat de elementen van de functionaalmatrix en van de inverse matrix van de functionaalmatrix begrensd zijn. Laat verder $\varphi(y)$ een begrensde functie zijn, die aan de punten van W reële getallen toevoegt. Als dan

$$J_1 = \int_V \varphi(f(x)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x \text{ en } \int_V \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x \text{ be-}$$

staan (hierin stelt $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}$ de functionaaldeterminant van $f(x)$ voor), dan bestaat $J_2 = \int_W \varphi(y) d\omega_y$ en $J_1 = J_2$.

Bewijs: Als $a \in V$, dan volgt uit de totale differentieerbaarheid van $f(x)$ in a , dat $f(x) = f(a) + A(x-a) + |x-a|e(x)$, waarin A de functionaaloperator van $f(x)$ in a is en $e(x)$ een functie die $\rightarrow 0$ als $x \rightarrow a$. Omdat A eeneenduidig is, kan $e(x) = Ad(x)$ worden geschreven, waarin $d(x)$ bepaald is uit $d(x) = A^{-1}e(x)$ (hierin is A^{-1} de inverse operator van A). Dus $f(x) = f(a) + A(x-a) + |x-a|d(x)$. Omdat de elementen van de matrix van A^{-1} begrensd zijn, is er een van a onafhankelijk reëel getal $\gamma_1 > 0$ te vinden, zodat $|A^{-1}y| < \gamma_1|y|$ voor alle $y \in R_n$ (immers $|A_y| \leq |y| \sum_{i=1}^n |A^{-1}e_i|$). Omdat $f(x)$ uniform totaal differentieerbaar is, is bij een $\eta > 0$ een van a onafhankelijke $\delta > 0$ te vinden zodat uit $|x-a| < \delta$ volgt $|e(x)| < \frac{\eta}{\gamma_1}$, dus $|d(x)| = |A^{-1}e(x)| < \gamma_1|e(x)| < \eta$. Laat nu een hokje bepaald door $\frac{\kappa_1}{2^m} \leq \xi_1 \leq \frac{\kappa_1+1}{2^m}$ geheel binnen V liggen en het punt a bevatten. Dan is

een punt x in dat hokje te schrijven in de vorm $x = b + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ met $b = (\frac{\kappa_1}{2^m}, \dots, \frac{\kappa_n}{2^m})$ en $0 \leq \lambda_i < \frac{1}{2^m}$. Dus $a = b + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ met $0 \leq \mu_i < \frac{1}{2^m}$ en $x-a = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) e_i$. Verder schrijven we $d(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i(x) e_i$, dan is

$$f(x) = f(a) + A \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) + \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j)^2} \delta_1(x) \right) e_1. \text{ Voor } x \neq a \text{ is } d(x) = A^{-1} \frac{1}{|x-a|} (f(x) - f(a) + A(x-a)) \text{ en dit is een continue functie van } x \text{ voor}$$

$x \neq a$ omdat $f(x)$ continu is; voor $x=a$ is $d(x) = A^{-1}e(x)$ continu omdat $e(x)$

het is. Hieruit volgt dat $\delta_1(x)$ continue functies van $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zijn, dus ook $\lambda_1 - \mu_1 + \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j)^2} \delta_1(x)$. Als verder $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ dan is voor x binnen het hokje $|x-a| < \delta$, dus geldt $|d(x)| < \eta$ dus

$$|\delta_1(x)| < \eta. \text{ Houd nu } \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ vast en beschouw } \lambda_1 - \mu_1 + |x-a| \delta_1(x).$$

Voor $\lambda_1=0$ is dit $-\mu_1+|x-a| \delta_1(x) < -\mu_1 + \frac{\sqrt{n}}{2^m} \eta$ en voor $\lambda_1 = \frac{1}{2^m}$ is dit $\frac{1}{2^m} - \mu_1 + |x-a| \delta_1(x) > \frac{1}{2^m} - \mu_1 - \frac{\sqrt{n}}{2^m} \eta$. Wegens de continuïteit neemt het dus in ieder geval alle waarden van het interval

$\left[-\mu_1 + \frac{\sqrt{n}}{2^m} \eta, \frac{1}{2^m} - \mu_1 - \frac{\sqrt{n}}{2^m} \eta\right]$, dat de lengte $\frac{1-2\sqrt{n}\eta}{2^m}$ heeft. Wat we

hier voor de eerste component gedaan hebben, kunnen we voor de andere componenten evenzo doen. Het beeld van het hokje bij $f(x)$ bevat dus in ieder geval een verzameling waarvan de inhoud $|\det A| \left(\frac{1-2\sqrt{n}\eta}{2^m}\right)^n$ is, dat is $|\det A| (1-2\sqrt{n}\eta)^n$ maal de grootte van het hokje. Doen we dit voor alle hokjes van de m^e verdeling, die binnen V liggen, dan vinden we, omdat $f(x)$ eeneenduidig is en de beelden van de afzonderlijke hokjes dus disjunct zijn dat $(1-2\sqrt{n}\eta)^n \sum_{\substack{\|x\| \in V \\ \|x\| \subset V^m}} |\det A| \Delta \|x\| \leq I_*(W)$. Laten we nu

$\eta \downarrow 0$ en dus $m \rightarrow +\infty$ dan wordt dit $\int_V \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x \leq I_*(W)$.

Nemen we nu een hokje, dat iets met V gemeen heeft en daarin een punt $a \in V$, dan is weer voor die punten x , die in de doorsnede van V en het hokje liggen $f(x) = f(a) + A \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i + |x-a| \delta_i(x)) e_i \right)$. Nu geldt in ieder

geval voor deze punten $-\mu_i - \frac{\sqrt{n}}{2^m} \eta < \lambda_i - \mu_i + |x-a| \delta_i(x) < \frac{1}{2^m} - \mu_i + \frac{\sqrt{n}}{2^m} \eta$

en het beeld van deze punten ligt geheel binnen een verzameling die

$|\det A| (1+2\sqrt{n}\eta)^n$ maal de grootte van dit hokje is. Dus geldt

$(1+2\sqrt{n}\eta)^n \sum_{\substack{\|x\| \in V \\ \|x\| \cap V^m \\ \text{niet leeg}}} |\det A| \Delta \|x\| \geq I^*(W)$. Laten we nu $\eta \downarrow 0$, dan vinden

we $\int_V \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x \geq I^*(W)$. Dus heeft W een inhoud en

$I(W) = \int_V \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x$. Op een deelverzameling V' van V die een inhoud

heeft kunnen we dit ook toepassen en vinden, dat zijn beeld W' een inhoud

heeft, en dat $I(W') = \int_{V'} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x$. Omgekeerd geldt

echter voor een deelverzameling W'' van W , die een inhoud heeft, dat de verzameling V'' , waar W'' een beeld van is, ook een inhoud heeft. Maken

we immers een hokjesverdeling, dan correspondeert voor een hokje, dat

iets met V gemeen heeft, met de doorsnede met V een verzameling met inhoud

binnen W . Met een hokjesverdeling correspondeert dus een verdeling

van W in verzamelingen met inhoud. Nu is $f(x)$ uniform continu, want

$f(x) - f(a) = A(x-a) + |x-a| e(x)$ en er bestaat een $\gamma_2 > 0$ die onafhankelijk

van a is zodat $|Az| < \gamma_2 |z|$ en er bestaat een $\delta_1 > 0$, die onafhanke-

lijk van a is, zodat voor $|x-a| < \delta$ geldt $|e(x)| < 1$; kiest men bij

$\varepsilon > 0$ nu $\delta = \min(\delta_1, \frac{\varepsilon}{2\gamma_2}, \frac{\varepsilon}{2})$ dan is $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Met de rij hokjesverdelingen correspondeert dus een rij verdelingen van W waarvan de diameter tot nul nadert. Vormen we nu steeds over de hokjes

$$\int \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x \text{ dan nadert dat zowel voor de hokjes die geheel}$$

binnen V'' liggen als voor de hokjes die iets met V'' gemeen hebben tot $I(W'')$ en dus voor de hokjes die punten binnen V'' en buiten V'' bevatten tot nul. Nu is als A de functionaaloperator in a van $f(x)$ is, een van a onafhankelijk reëel getal $\gamma_3 > 0$ te vinden zodat $|\det A^{-1}| < \gamma_3$ is, dus $\left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| > \frac{1}{\gamma_3}$. Hieruit volgt dat de totale grootte van de

hokjes, die punten binnen V'' en buiten V'' bevatten, tot nul nadert en dus dat V'' een inhoud heeft. Kies nu een getal $\varepsilon_1 > 0$, zodat $|\delta_1(x)| < \frac{1}{2\sqrt{n}}$,

dan kiezen we voor een $\varepsilon > 0$ $|x-a| < \varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon)$. Dit omvat de punten met $\alpha_1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}} \leq \xi_1 \leq \alpha_1 + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}}$. Dan is $f(x) - f(a) = A \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \alpha_i + |x-a| \delta_i(x)) e_i \right)$.

Voor $\xi_1 = \alpha_1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}}$ geldt nu weer $\xi_1 - \alpha_1 + |x-a| \delta_1(x) < -\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{n}}$, en

voor $\xi_1 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}}$ geldt $\xi_1 - \alpha_1 + |x-a| \delta_1(x) > \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}} - \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{n}}$ zodat in

ieder geval het interval $(-\frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{n}}, \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{n}})$ overdekt wordt. Evenzo de an-

dere componenten. In ieder geval wordt de verzameling der punten y waarvoor $|y| < \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{n}}$ geldt overdekt. Nu is er een $\gamma_4 > 0$ zodat $|A^{-1}z| < \gamma_4 |z|$,

dus $|z| < \gamma_4 |Az|$, dus $|Az| > \frac{1}{\gamma_4} |z|$. Als dus $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon_2}{2\gamma_4 \sqrt{n}}$,

Dan is $|x-a| < \varepsilon$. Dit geldt alleen voor die punten a waarvoor de hele ε_2 -omgeving tot V behoort. Stel nu dat $\varphi(y) \geq 0$ is. Dan is een hokje H dat binnen W ligt beeld van een verzameling H' met inhoud in V . Hokjes die punten binnen en buiten W bevatten kunnen buiten beschouwing worden gelaten, omdat W een inhoud heeft en hun bijdrage dus tot nul nadert.

Nu is $\sup_{y \in H} \varphi(y) I(H) = \sup_{x \in H'} \varphi(f(x)) \int_{H'} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x \leq$

$\leq \sup_{x \in H'} \varphi(f(x)) \sup_{x \in H'} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| I(H')$. De diameters van de H'

naderen tot nul als $m \rightarrow +\infty$ omdat bij $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is zodat uit $|f(x) - f(y)| < \delta$ volgt $|x-y| < \varepsilon$. Het rechterlid gesommeerd

over de hokjes nadert dus tot J_1 als $m \rightarrow +\infty$, dus $\int_W^* \varphi(y) d\omega_y \leq J_1$.

Evenzo vindt men $\int_W^* \varphi(y) d\omega_y \geq J_1$, dus $\int_W \varphi(y) d\omega_y = J_1$. Als $\varphi(y)$

niet overal ≥ 0 is, is er wegens de begrensdsheid van $\varphi(y)$ in ieder

geval een reëel getal $\gamma_5 > 0$ te vinden, zodat $\varphi(y) > -\gamma_5$. Op de functie $\varphi(y) + \gamma_5$ kunnen we de stelling dan toepassen. We vinden dan

$$\int_V \varphi(f(x)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x + \gamma_5 I(W) = \int_V (\varphi(f(x)) + \gamma_5) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x$$

$$= \int_W (\varphi(y) + \gamma_5) d\omega_y = \int_W \varphi(y) d\omega_y + \gamma_5 I(W). \text{ Dus } J_1 = J_2 \text{ ook in dit geval. Daarmee is het bewijs voltooid.}$$

Opmerking: Dat een functie $f(x)$ totaal differentieerbaar is in een punt a , houdt in dat er een omgeving van a is, waar de functie gedefinieerd is. De verzameling V in stelling (44.7) is dus open. We behoeven ons echter niet tot open verzamelingen te beperken. Als n.l. V een verzameling met inhoud is en V^* een open verzameling, dusdanig dat $V \subset V^*$ en $f(x)$ gedefinieerd op V^* en totaal differentieerbaar is, dan kan stelling (44.7) op V worden toegepast, als in de verzameling V aan de verdere voorwaarden van de stelling voldaan is.

(44.8) Laat $f(x)$ gedefinieerd zijn op een open convexe verzameling V^* in R_n , met beeld in R_n , dusdanig dat de partiële afgeleiden van $f(x)$ in V^* bestaan en uniform continu zijn. Laat V een deelverzameling met inhoud van V^* zijn en $f(x)$ op V eeneenduidig met eeneenduidige functionaal-operator, dusdanig dat de elementen van de functionaalmatrix begrensd zijn en de functionaaldeterminant in absolute waarde een positieve constante is. Laat W het beeld van V zijn bij de afbeelding f . Laat verder $\varphi(y)$ een begrensde functie zijn, die aan de punten van W reële getallen toevoegt. Als dan $J_1 = \int_V \varphi(f(x)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x$ bestaat, dan bestaat $J_2 = \int_W \varphi(y) d\omega_y$ en $J_1 = J_2$.

Bewijs: Het volgt direct uit (44.6), (44.7) en (34.24).

Als voorbeeld beschouwen we $\xi_1 = \rho \cos \varphi \cos \vartheta$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$, $\xi_3 = \rho \sin \vartheta$. Dit geeft een afbeelding van de ruimte der $(\rho, \varphi, \vartheta)$ in de ruimte der (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , waarvan de partiële afgeleiden overal continu zijn en dus in iedere begrensde verzameling uniform continu en begrensd. Nu is $\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\rho, \varphi, \vartheta)} = \rho^2 \cos \vartheta$ en dit is $\neq 0$ voor $\rho \neq 0$ en $\vartheta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$,

waarmee correspondeert $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Beperken we nu ρ tot $\varepsilon < \rho \leq P$, φ tot $0 \leq \varphi < 2\pi$ en ϑ tot $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \vartheta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, dan is de afbeelding eeneenduidig, immers $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \rho^2$, waardoor ρ bepaald is; vervolgens is ϑ door $\xi_3 = \rho \sin \vartheta$ bepaald en, wegens $\rho \cos \vartheta \neq 0$, φ door $\xi_1 = \rho \cos \varphi \cos \vartheta$ en $\xi_2 = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$. Verder is $|\rho^2 \cos \vartheta| > \varepsilon^2 \sin \varepsilon$. De beeldverzameling W bestaat uit de punten x waarvoor $\varepsilon < |x| < P$ en waarvoor $\frac{|\xi_3|}{|x|} < \cos \varepsilon$. Volgens (44.8) geldt dan:

$$I(W) = \int_{-\frac{\pi}{2} + \varepsilon}^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^P \rho^2 \cos \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta = \frac{1}{3}(P^3 - \varepsilon^3)2\pi \cdot 2 \cos \varepsilon. \text{ Laten we nu } \varepsilon \text{ tot nul naderen, dan nadert dit tot } \frac{4}{3}\pi P^3. \text{ De verzameling } W \text{ is bevat}$$

in de bol B bestaande uit de punten x met $|x| \leq P$. Voor de punten van $B \setminus W$ geldt $|x| \leq \varepsilon$ of $\frac{|\xi_3|}{|x|} \geq \cos \varepsilon$. Uit $|x| \leq \varepsilon$ volgt $-\varepsilon \leq \xi_1 \leq \varepsilon$ en $-\varepsilon \leq \xi_2 \leq \varepsilon$. Uit $\frac{|\xi_3|}{|x|} \geq \cos \varepsilon$ en $|x| \leq P$ volgt $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq \xi_3^2 \tan^2 \varepsilon \leq P^2 \tan^2 \varepsilon$, dus $-P \tan \varepsilon \leq \xi_1 \leq P \tan \varepsilon$ en $-P \tan \varepsilon \leq \xi_2 \leq P \tan \varepsilon$. Noemen we $\varepsilon_1 = \max(\varepsilon, P \tan \varepsilon)$, dan geldt voor de punten van $B \setminus W$: $-\varepsilon_1 \leq \xi_1 \leq \varepsilon_1$,

$-\varepsilon_1 \leq \xi_2 \leq \varepsilon_1$, $-P \leq \xi_3 \leq P$. De verzameling, die bepaald is door de laatste ongelijkheden, heeft een inhoud $8 \varepsilon_1^2 P$; dus $I^*(B) \leq \frac{4}{3}\pi P^3 + 8 \varepsilon_1^2 P$. Als

$\varepsilon \rightarrow 0$ dan $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, dus $I^*(B) \leq \frac{4}{3}\pi P^3$. Verder geldt $W \subset B$, dus $\frac{4}{3}\pi P^3 \leq I_*(B)$.

$$\text{Dus } I(B) = \frac{4}{3}\pi P^3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^P \rho^2 \cos \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta.$$

Opgave 167. Bereken $\int_B (\xi_1^2 + \xi_2^2) d\omega_x$, waarin B de bol $|x| \leq P$ in R_3 is (dit wordt het traagheidsmoment van de bol t.o.v. de ξ_3 -as genoemd).

Opgave 168. Bereken de inhoud (oppervlakte) in R_2 van de verzameling, bepaald door $\frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\alpha_2^2} = 1$ (ellips). (Pas hiertoe de transformatie $\xi_1 = \alpha_1 \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \alpha_2 \rho \sin \varphi$ toe.)

We merken nog op, dat de transformatiestelling natuurlijk ook geldt voor enkelvoudige integralen ($n=1$).

We passen de transformatiestelling nu nog toe op de berekening van de

$$\text{integraal van Poisson } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \text{ Natuurlijk is } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2 \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2 \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-\xi^2} d\xi. \text{ Noem } I(R) = \int_0^R e^{-\xi^2} d\xi, \text{ dan is}$$

$$(I(R))^2 = \int_0^R e^{-\xi_1^2} d\xi_1 \int_0^R e^{-\xi_2^2} d\xi_2 = \int_0^R \int_0^R e^{-(\xi_1^2 + \xi_2^2)} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{K_R} e^{-(\xi_1^2 + \xi_2^2)} d\omega_x, \text{ waarin } K_R \text{ de verzameling in } R_2 \text{ is, bepaald door}$$

$$0 \leq \xi_1 \leq R, 0 \leq \xi_2 \leq R. \text{ Als nu } L_R \text{ de verzameling in } R_2 \text{ is bepaald door } |x| \leq R, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \text{ dan is } K_{\frac{1}{2}R\sqrt{2}} \subset L_R \subset K_R. \text{ Noemen we nu } J(R) =$$

$$\int_{L_R} e^{-(\xi_1^2 + \xi_2^2)} d\omega_x, \text{ dan is, omdat de integrand } > 0 \text{ is:}$$

$$(I(\frac{1}{2}R\sqrt{2}))^2 \leq J(R) \leq (I(R))^2 \text{ en dus } \lim_{R \rightarrow +\infty} J(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} (I(R))^2. \text{ We passen nu}$$

de transformatie $\xi_1 = \rho \cos \varphi$, $\xi_2 = \rho \sin \varphi$ toe, waarvoor geldt

$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho$. Deze is voor $\xi < \rho \leq R$, $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ eeneenduidig en geeft als beeld de verzameling $L_R(\xi)$ der punten waarvoor $\xi < |x| \leq R$,

$$\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0. \text{ Dan is } \int_{L_R(\xi)} e^{-(\xi_1^2 + \xi_2^2)} d\omega_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\xi}^R e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^{-\xi^2} - e^{-R^2}). \text{ Evenals hierboven bij het voorbeeld van de bol con-}$$

$$\text{cluderen we hieruit dat } J(R) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}). \text{ Dus } \frac{\pi}{4} = \lim_{R \rightarrow +\infty} J(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} (I(R))^2$$

$$\text{dus } \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R). \text{ Dus } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

(44.9) Laat $f(x)$ een eeneenduidige functie zijn die een verzameling V met inhoud in R_k afbeeldt in een verzameling W in R_n ($k < n$), en die uniform totaal differentieerbaar is. Laat $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_k), \dots, \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_k)$ de componenten van $f(x)$ zijn en stel dat er een reële constante $\gamma > 0$ is zodat $\left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k)} \right| > \gamma$; stel verder alle partiële afgeleiden van de eerste orde begrensd. Dan is $I(W) = 0$.

Bewijs: Vorm de functies $\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$, gedefinieerd door $\psi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_k), \dots, \psi_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\psi_{k+1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_{k+1}(\xi_1, \dots, \xi_k) + \xi_{k+1}, \dots$, $\dots, \psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_k) + \xi_n$, gedefinieerd op de verzameling V^* die ontstaat door $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in V$ te kiezen en $-1 \leq \xi_i \leq 1$ voor $i = k+1, \dots, n$. Dan heeft V^* blijkbaar ook een inhoud en $\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_k)}$; de partiële afgeleiden van $\psi_1, \dots, \psi_n$ zijn $= 1$ of gelijk aan partiële afgeleiden van $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Op de deelverzameling van V^* die ontstaat door $\xi_{k+1} = \dots = \xi_n = 0$ te stellen is $\psi_1 = \varphi_1, \dots, \psi_n = \varphi_n$; deze kunnen we als de V in R_k interpreteren. Op $\psi_1, \dots, \psi_n$ kunnen we nu (44.8) toepassen. We vinden dan dat $I(W) = \int_V \left| \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\omega_x$, maar de inhoud van V in R_n is blijkbaar $= 0$; dus $I(W) = 0$.

Als $(n-k)$ functies $\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_{n-k}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ gegeven zijn, die zo zijn, dat daarop de hoofdstelling (42.6) over impliciete functies kan worden toegepast, dan levert de oplossing tot expliciete functies een afhankelijkheid van k parameters, waarop stelling (44.9) kan worden toegepast. Echter is de oplossing tot expliciete functies in het algemeen slechts in de omgeving van een bepaald punt mogelijk. Als

echter de definitieverzameling in een eindig aantal stukken te splitsen is, waarin oplossing mogelijk is (dit is het geval als de definitieverzameling begrensd en gesloten is, hetgeen we hier niet zullen bewijzen) dan kan op elk van deze stukken (44.9) worden toegepast, waaruit dan geconcludeerd kan worden, dat van de verzameling in R_n , bepaald door

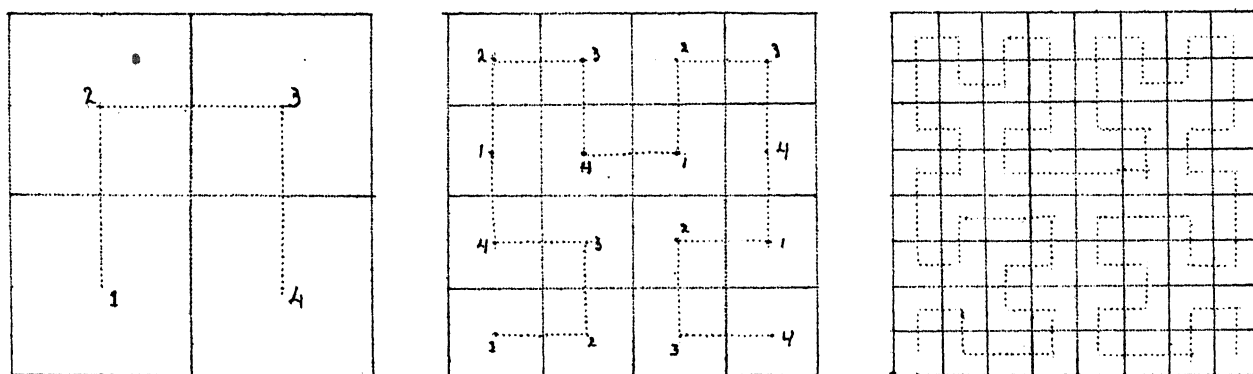
$\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \dots = \varphi_{n-k}(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$, de inhoud nul is. Als dit het geval is voor $k=n-1$, dan heeft de verzameling U , bepaald door

$\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq 0$, mits hij begrensd is, een inhoud. Een hokje nl.

dat een punt binnen U en een punt buiten U bevat, kan een hokje zijn dat een punt binnen en buiten de definitieverzameling van φ_1 bevat of een hokje dat een punt binnen U en een punt waarin $\varphi_1 < 0$ is bevat. In het laatste geval bevat het hokje, wegens de continuïteit van φ_1 , ook een punt waar $\varphi_1 = 0$ is. De totale grootte van deze hokjes nadert tot nul bij verfijning der verdeling. Dus heeft U een inhoud.

§ 45. Lijn- en oppervlakte-integralen.

Het geven van een goede definitie van het begrip "kromme" is niet eenvoudig. Laten we uitgaan van de verzameling der punten (ξ_1, ξ_2) in R_2 die voldoen aan $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$, waarbij we nog even in het midden laten, aan welke eisen de functie φ heeft te voldoen. Onder zekere voorwaarden kunnen we hier in de omgeving van een zeker punt ξ_1 als functie van ξ_2 oplossen (42.6). Nemen we b.v. een "cirkel" $\xi_1^2 + \xi_2^2 - 1 = 0$ dan behoren bij iedere ξ_2 met $-1 < \xi_2 < 1$ twee waarden van ξ_1 . Toch kunnen we de cirkel met één parameter voorstellen $\xi_1 = \cos \lambda$, $\xi_2 = \sin \lambda$ ($0 \leq \lambda < 2\pi$). Dit brengt ons op de gedachte een kromme in R_n te definiëren als het beeld van een functie $f(\lambda)$, waarbij λ een interval doorloopt. Nemen we nu f continu, dan kunnen hieruit verzamelingen ontstaan, die we zeker niet als krommen zullen accepteren. Een voorbeeld hiervan schetsen we in het kort (zonder de bijbehorende bewijzen).



Neem een interval (lijnstuk) en een vierkant (hiermee is bedoeld het gedeelte van het platte vlak, dat door de zijden van het vierkant ingesloten wordt). Verdeel het lijnstuk in vier gelijke intervallen en het vierkant ook in vieren als in de eerste tekening. Voeg aan de vier opeenvolgende intervallen de vier vierkanten toe als in de eerste tekening. Verdeel elk der intervallen en elk der vierkanten weer in vieren en voeg

toe als in de tweede tekening enz. Elk punt van het interval is door een intervalschakeling van dergelijke intervallen te krijgen en op grond van deze constructie is aan elk der punten van het interval een punt van het vierkant toegevoegd. Men kan bewijzen dat deze toevoeging continu is en dat ieder punt van het vierkant als beeld optreedt. Dergelijke pathologische voorbeelden van "krommen" zijn het eerst door Peano gegeven. De afbeelding is niet eeneenduidig. Stellen we de eis dat de afbeelding $f(\lambda)$ eeneenduidig en continu is, dan wordt een meer aanvaardbaar begrip kromme verkregen; echter vallen daar weer verzamelingen niet onder, die we wel krommen zouden wensen te noemen, b.v. een 8-vormige kromme.

Een verzameling in R_n , die bestaat uit de beeldpunten van een eeneenduidige continue functie $f(\lambda)$ gedefinieerd op een gesloten interval, heet een Jordanboog. Een kromme is een verzameling, die de vereniging is van een eindig aantal Jordanbogen, dusdanig dat het beginpunt van de volgende boog met het eindpunt van de vorige samenvalt. (Let wel, dat dit niet het meest algemene begrip kromme is, dat wel in de wiskunde gebruikt wordt.) Bij een kromme kunnen we de definitie-intervallen van de opeen volgende Jordanbogen aan elkaar laten sluiten en aldus de hele kromme als beeld van één continue functie verkrijgen.

We proberen nu de "lengte" van een kromme te meten door de kromme met lijnstukken te approximeren. Laat $f(\lambda)$ op $[\alpha, \beta]$ gedefinieerd zijn. Verdeel $[\alpha, \beta]$ in deelintervallen door $\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k = \beta$ en vorm $\sum_{j=1}^k |f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})|$. Als de bovengrens van deze uitdrukking voor alle mogelijke dergelijke verdelingen bestaat, noemen we deze de booglengte van de kromme. De kromme heet dan rectificeerbaar. Niet iedere kromme is rectificeerbaar. Als de functie die de kromme bepaalt differentieerbaar is met continue partiële afgeleiden van de eerste orde, dan is voor de booglengte een voorstelling te geven in de vorm van een integraal.

Laat de kromme door de functie $f(\lambda)$ gedefinieerd op het interval $[\alpha, \beta]$ gegeven zijn en laat $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de componenten van f zijn. De partiële afgeleiden $\frac{d\varphi_i}{d\lambda}$ zijn dan uniform continu. Bij $\varepsilon > 0$ is dan een $\delta_1 > 0$ te vinden, zodat uit $|\sigma - \tau| < \delta_1$ volgt $\left| \frac{d\varphi_i(\sigma)}{d\lambda} - \frac{d\varphi_i(\tau)}{d\lambda} \right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)\sqrt{n}}$ voor $i=1, \dots, n$. Neem nu een verdeling $\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k = \beta$ van het interval met een diameter $< \delta_1$. Verder kiezen we (voor $j=1, \dots, k$) μ_{0j} , zodat $\lambda_{j-1} < \mu_{0j} < \lambda_j$. Uit de middelwaardestelling van de differentiaalrekening volgt, dat er (voor $i=1, \dots, n$ en $j=1, \dots, k$) μ_{1j} met $\lambda_{j-1} < \mu_{1j} < \lambda_j$ te vinden zijn, zodat

$$\frac{\varphi_i(\lambda_j) - \varphi_i(\lambda_{j-1})}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} = \frac{d\varphi_i(\mu_{1j})}{d\lambda} \quad \text{Dan is } |\mu_{1j} - \mu_{0j}| < \lambda_j - \lambda_{j-1} < \delta_1,$$

$$\text{dus } \left| \frac{\varphi_i(\lambda_j) - \varphi_i(\lambda_{j-1})}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} - \frac{d\varphi_i(\mu_{0j})}{d\lambda} \right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)\sqrt{n}}. \quad \text{Dus geldt ook}$$

$$\left| \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} - \frac{df(\mu_{oj})}{d\lambda} \right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}, \text{ als } \frac{df}{d\lambda} = \left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda}, \dots, \frac{d\varphi_n}{d\lambda} \right).$$

Wegens $||x| - |y|| \leq |x - y|$ is dan

$$\left| \sum_{j=1}^k |f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})| - \sum_{j=1}^k \left| \frac{df(\mu_{oj})}{d\lambda} \right| (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^k \left| \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} - \frac{df(\mu_{oj})}{d\lambda} \right| (\lambda_j - \lambda_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \lambda_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Er is een $\delta_2 > 0$, zodat, als de diameter van de intervalverdeling $< \delta_2$

$$\text{is, geldt } \left| \sum_{j=1}^k \left| \frac{df(\mu_{oj})}{d\lambda} \right| (\lambda_j - \lambda_{j-1}) - \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Als dus de diameter van de verdeling $< \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ is, geldt

$$\left| \sum_{j=1}^k |f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})| - \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Als we een verdeling $\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k = \beta$ "verfijnen" tot een verdeling

$\alpha = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_l = \beta$, d.w.z. als onder de μ 's alle λ 's voorkomen, dan volgt uit de driehoeksongelijkheid, dat

$$\sum_{j=1}^k |f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})| \leq \sum_{r=1}^l |f(\mu_r) - f(\mu_{r-1})|.$$

Verder is iedere verdeling te verfijnen tot een verdeling met diameter $< \delta$. Hieruit volgt voor

$$\text{iedere verdeling } \alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k = \beta, \text{ dat } \sum_{j=1}^k |f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^l |f(\mu_r) - f(\mu_{r-1})| < \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda + \varepsilon \text{ en dus ook dat}$$

$$\sum_{j=1}^k |f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda.$$

Hieruit volgt dat de booglengte L bestaat en dat $L \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda$. Verder is bij iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling te vinden zodat $\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda < \sum_{j=1}^k |f(\lambda_j) - f(\lambda_{j-1})| + \varepsilon \leq L + \varepsilon$,

dus $\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda \leq L$. Dus geldt $L = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda$. Dit geeft ons de volgende stelling.

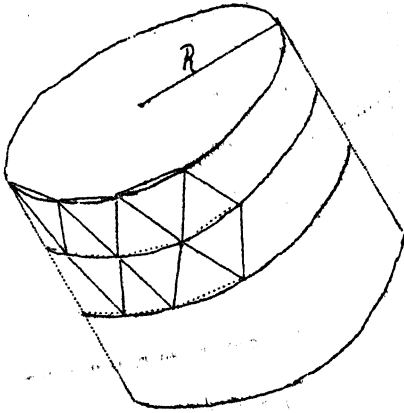
(45.1) Als een kromme in R_n gegeven is door een functie $f(\lambda)$ gedefinieerd op $[\alpha, \beta]$ en met continue partiële afgeleiden van de eerste orde, dan

heeft de kromme een booglengte, die gelijk is aan $\int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda$.

Opgave 169. Bepaal de booglengte van de cirkel, gegeven door $\xi_1 = \rho \cos \lambda$, $\xi_2 = \rho \sin \lambda$ ($\rho > 0$ constant, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$).

Na hetgeen hier over krommen is opgemerkt, ligt het voor de hand een oppervlak te definiëren met behulp van een functie die van twee parameters afhangt en de oppervlakte van dit oppervlak te definiëren door approximatatie met driehoeken, waarvan de hoekpunten op het oppervlak liggen. Hierbij doen zich evenwel nieuwe moeilijkheden voor, die we aan een eenvoudig voorbeeld zullen demonstreren. Dit voorbeeld behandelen

we meetkundig, hierbij vooruitlopend op nog niet bewezen stellingen, b.v. dat de oppervlakte (tweedimensionale inhoud) van een driehoek gelijk is aan het halve product van basis en hoogte.



We nemen de mantel van een rechte cirkelcylinder met hoogte h en straal R van het grondvlak. We verdelen de hoogte in m gelijke stukken en de omtrek van de zo verkregen cirkeldoorsneden in n gelijke stukken (regelmatige n -hoeken) op de wijze als in de tekening aangegeven. Hier tussen leggen we $2mn$ driehoeken. Men rekent dan makkelijk na dat de som van

de oppervlakten van deze $2mn$ congruente driehoeken gelijk is aan

$$2\pi R \left(\frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right) \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2 \frac{m^2}{n^4} \left(\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^4}.$$

Verfijnt men nu de verdeling, d.w.z. laat men m en $n \rightarrow \infty$ gaan, dan zou dit tot de oppervlakte van de cylindermantel moeten naderen. Doet men dit zo, dat daarbij $m=n$ is, dan nadert het tot $2\pi Rh$; neemt men $m=n^2$, dan nadert het tot $2\pi R \sqrt{h^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2}$; neemt men $m=n^3$, dan nadert het tot $+\infty$. Men noemt dit de paradox van Schwarz.

We zullen deze moeilijkheid omzeilen, door te eisen dat de driehoeken niet te "spits" mogen worden, d.w.z. dat de verhouding van het kwadraat van de langste zijde tot de oppervlakte bij verfijning begrensd blijft. Analoge kwesties treden op bij meer dan twee dimensies; daarvoor zal trouwens nog een generalisatie van het begrip driehoek moeten worden gegeven. Met het laatste zullen we beginnen.

Lijnstuk, driehoek en viervlak kunnen bepaald worden als de kleinste convexe verzameling, die resp. twee, drie en vier gegeven punten bevat.

Aangezien de doorsnede van willekeurig veel convexe verzamelingen in R_n weer convex is, bestaat er bij iedere verzameling S in R_n een kleinste convexe verzameling C in R_n , zodat $S \subset C$; C is n.l. de doorsnede van alle convexe verzamelingen in R_n die S als deelverzameling bevatten. We noemen C het convexe omhulsel van S . Het convexe omhulsel van een verzameling die uit $k+1$ punten bestaat, heet een k -simplex. De $k+1$ gegeven punten heten de hoekpunten. We noemen een 1-simplex een lijnstuk, een 2-simplex een driehoek, een 3-simplex een viervlak.

(45.2) Het k -simplex met hoekpunten $a^0, a^1, \dots, a^k$ is de verzameling der punten $\sum_{j=0}^k \lambda_j a^j$ met $\lambda_j \geq 0$ en $\sum_{j=0}^k \lambda_j = 1$.

Bewijs: Noem K het k -simplex en V de verzameling der punten

$\sum_{j=0}^k \lambda_j a^j$ met $\lambda_j \geq 0$ en $\sum_{j=0}^k \lambda_j = 1$. Nu bevat V de punten $a^0, \dots, a^k$ (kies n.l. één der $\lambda_j = 1$ en de overige $= 0$). Verder is V convex: laat $x = \sum_{j=0}^k \lambda_j a^j \in V$, $y = \sum_{j=0}^k \mu_j a^j \in V$ zijn en $0 \leq \nu \leq 1$. Dan is $\nu x + (1-\nu)y =$

$$= \sum_{j=0}^k (\nu \lambda_j + (1-\nu) \mu_j) a^j \text{ en } \nu \lambda_j + (1-\nu) \mu_j \geq 0 \text{ en } \sum_{j=0}^k (\nu \lambda_j + (1-\nu) \mu_j) = 1,$$

dus $\nu x + (1-\nu)y \in V$, dus $K \subset V$. Dat $V \subset K$, bewijzen we door volledige inductie naar k . Voor $k=1$ bestaat V uit de punten $\lambda_0 a^0 + \lambda_1 a^1$ met $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$ en $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, dus uit de punten $\lambda_0 a^0 + (1-\lambda_0) a^1$ met $0 \leq \lambda_0 \leq 1$, die elementen van K zijn. Laat het nu voor $k-1$ bewezen zijn. De K , die bij $a^0, \dots, a^k$ behoort, is een convexe verzameling, die $a^0, \dots, a^k$ bevat en dus ook $a^0, \dots, a^{k-1}$ en volgens inductieveronderstelling dus ook

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mu_j a^j \text{ met } \mu_j \geq 0 \text{ en } \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j = 1. \text{ Neem nu een punt } x = \sum_{j=0}^k \lambda_j a^j = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j a^j + \lambda_k a^k \text{ met } \lambda_j \geq 0 \text{ en } \sum_{j=0}^k \lambda_j = 1. \text{ Als } \lambda_k = 1, \text{ dan zijn}$$

alle andere $\lambda_j = 0$ en $x = a^k \in K$. Als $\lambda_k \neq 1$, stellen we $x =$

$$= (1 - \lambda_k) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_k} a^j + \lambda_k a^k. \text{ Nu is } \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_k} \geq 0 \text{ en } \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_k} = 1. \text{ Dus}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_k} a^j \in K \text{ en } a^k \in K; \text{ omdat } K \text{ convex is, geldt ook } x \in K. \text{ Daarmee}$$

is het bewijs voltooid.

We moeten nu een inhoud definiëren voor een k -simplex. Dit is een nieuw begrip, wat het moet een k -dimensionale inhoud worden van een verzameling in een n -dimensionale ruimte. We zullen aan dit begrip inhoud in ieder geval de eis stellen, dat het invariant is bij draaiing en translatie en dat het voor $k = n$ overeenkomt met de inhoud volgens de integraaldefinitie. We beginnen daarom met een n -simplex in R_n en gaan daarvan de inhoud volgens de integraaldefinitie bepalen. Laat de hoekpunten $a^0, a^1, \dots, a^n$ zijn (schrijf het simplex dan $[a^0, a^1, \dots, a^n]$). We passen een translatie over $-a^0$ toe, dan komt er $\sum_{j=0}^n \lambda_j a^j - a^0 =$

$$= \sum_{j=0}^n \lambda_j (a^j - a^0); \text{ dus } [a^0, a^1, \dots, a^n] \text{ gaat over in } [\bar{0}, a^1 - a^0, \dots, a^n - a^0].$$

Noem $a^j - a^0 = b^j$ ($j=1, \dots, n$). De lineaire operator A , bepaald door $Ae_j = b^j$ transformeert het simplex $[\bar{0}, e_1, \dots, e_n]$ in het simplex $[\bar{0}, b^1, \dots, b^n]$. We bepalen nu de inhoud van $[\bar{0}, e_1, \dots, e_n]$, dat is van de verzameling der punten $\sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ met $\xi_i \geq 0$ en $\sum_{i=1}^n \xi_i \leq 1$. We berij-

zen eerst dat deze verzameling een inhoud heeft door volledige inductie naar n . De verzameling der punten waarvoor $\xi_n = 0$ vormen juist het $(n-1)$ -simplex $[\bar{0}, e_1, \dots, e_{n-1}]$ in R_{n-1} , waarvan we volgens inductie veronderstellen, dat het een inhoud heeft. Bij gegeven $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ doorloopt ξ_n het interval $[0, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i]$. Omdat $1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i$ een

continue functie is, heeft het simplex wegens (34.25) een inhoud. De basis der inductie is eenvoudig, want voor $n=1$ is het simplex een interval. De inhoud van het simplex vinden we nu als een herhaalde integraal.

Bij gegeven $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ krijgen we $\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} d\lambda_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$; bij gegeven $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ dan $\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i} (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i) d\lambda_{n-1} = \frac{1}{2} (1 - \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i)^2$; bij gegeven $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-3}$ dan $\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-3} \lambda_i} \frac{1}{2} (1 - \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i)^2 d\lambda_{n-2} = \frac{1}{6} (1 - \sum_{i=1}^{n-3} \lambda_i)^3$ enz.; bij gegeven λ_1 dan $\int_0^{1-\lambda_1} \frac{1}{(n-2)!} (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^{n-2} d\lambda_2 = \frac{1}{(n-1)!} (1 - \lambda_1)^{n-1}$;

tenslotte $\int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} (1 - \lambda_1)^{n-1} d\lambda_1 = \frac{1}{n!}$. Dit is dus de inhoud van het simplex $[\bar{0}, e_1, \dots, e_n]$. De inhoud van het simplex $[\bar{0}, b^1, \dots, b^n]$ ontstaat hieruit door vermenigvuldiging met de determinant van de lineaire operator A, dat is $\sqrt{\det_{i,j} (b^i \cdot b^j)}$. De inhoud van het simplex $[a^0, \dots, a^n]$ is dus $\frac{1}{n!} \sqrt{\det_{i,j} (a^i - a^0) \cdot (a^j - a^0)}$. Deze laatste grootte, die wegens de draaiingsinvariantie van het inproduct blijkbaar ook draaiingsinvariant is, ge-

bruiken we nu voor de definitie van de k-dimensionale inhoud van een k-simplex $[a^0, \dots, a^k]$ in een R_n , door deze inhoud te definiëren als $\frac{1}{k!} \sqrt{\det_{i,j} (a^i - a^0) \cdot (a^j - a^0)}$. De determinant hierin is er nu dus een met k rijen en kolommen. Deze grootte is inderdaad zinvol, want de determinant is ≥ 0 . Dit zien we in door het simplex door een translatie en een draaiing te transformeren in een simplex in de R_k van de punten waarvan de laatste (n-k) componenten = 0 zijn. Stel $b^i = a^i - a^0$ ($i=1, \dots, k$). Analooz als in het bewijs van (44.5), blz. 182, vinden we punten $d_1, \dots, d_k$, zodat $b^i = \sum_{j=1}^k \lambda_{ji} d_j$ voor $i=1, \dots, k$, $d_i \cdot d_j = 0$ voor $i \neq j$ en $=1$ voor $i=j$. We vullen $d_1, \dots, d_k$ aan tot $d_1, \dots, d_n$ zodat $d_i \cdot d_j = 0$ voor $i \neq j$ en $=1$ voor $i=j$ blijft gelden voor $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n$. Er bestaat nu een draaiing D waarvoor geldt $Dd_i = e_i$ voor $i=1, \dots, n$. Dan is $Db^i = \sum_{j=1}^k \lambda_{ji} e_j = c^i$ voor $i=1, \dots, k$. Het simplex $[\bar{0}, b^1, \dots, b^k]$ gaat bij de draaiing D over in het simplex $[\bar{0}, c^1, \dots, c^k]$, dat echter geheel in de bovenvermelde R_k ligt en waarvan de inhoud, zoals reeds bewezen is, gelijk is aan

$\frac{1}{k!} \sqrt{\det_{i,j} (c^i \cdot c^j)}$, waaruit volgt, dat $\det_{i,j} (c^i \cdot c^j) \geq 0$. Omdat D een draaiing is, is echter $\det_{i,j} (b^i \cdot b^j) = \det_{i,j} (c^i \cdot c^j)$, waaruit volgt, dat $\det_{i,j} (a^i - a^0) \cdot (a^j - a^0) \geq 0$.

Bij de definitie van het begrip oppervlak stuiten we op analoge moeilijkheden als bij de definitie van het begrip kromme. We gaan daar niet op in, doch veronderstellen direct dat de bepalende functies differentieerbaar zijn.

Als $f(u)$ een uniform totaal differentieerbare functie is, die een verzameling V met inhoud in R_k afbeeldt op een verzameling W in R_n en als de partiële afgeleiden van $f(u)$ begrensd zijn en de functionaalmatrix rang k heeft, dan heet W een k -dimensionale variëteit in R_n . Een tweedimensionale variëteit noemen we een oppervlak. De eis betreffende de rang van de functionaalmatrix impliceert dat $k \leq n$ is. We noemen de R_k de parameterruimte van de variëteit. (Eigenlijk behoort bij de definitie slechts geeist te worden, dat de variëteit bij gedeelten aan bovenstaande voorwaarden voldoet; we gaan daar evenwel niet op in.)

Bij een k -dimensionale variëteit W en een begrensde continue functie $\varphi(x)$ gedefinieerd op W definiëren we nu een variëteit-integraal van $\varphi(x)$ over W . Hiertoe verdelen we de parameterruimte in k -simplices, dusdanig dat slechts eindig veel simplices iets met V gemeen hebben. Van een simplex dat geheel binnen V ligt nemen we de beeldpunten van de hoekpunten bij de afbeelding $f(u)$ (die dus in W liggen) en vormen het k -simplex met deze punten als hoekpunten (dit simplex hoeft niet binnen W te liggen). Van dit simplex vermenigvuldigen we de k -dimensionale inhoud met de waarde van $\varphi(x)$ in een beeldpunt van een punt van het simplex in de parameterruimte en vormen hiervan de som over de verdeling. Dit beschouwen we als een approximatiesom van de gezochte variëteit-integraal. We nemen nu een rij verdelingen, waarvan de diameter naar nul nadert; hierbij stellen we echter, om de paradox van Schwarz te vermijden, de eis, dat de verhouding van de k^e macht van de diameter van een simplex in de parameterruimte tot zijn k -dimensionale inhoud begrensd blijft (anti-spitsheidseis). Als nu voor iedere dergelijke rij verdelingen de approximatiesommen tot dezelfde waarde convergeren, dan noemen we deze waarde de variëteit-integraal van $\varphi(x)$ over de variëteit W . In de nu volgende stelling brengen we een variëteit-integraal terug tot een gewone k -dimensionale integraal over de verzameling V in de parameterruimte.

(45.3) Als de k -dimensionale variëteit W in R_n bepaald is door de functie $f(u)$ gedefinieerd op de verzameling V in R_k en als $\varphi(x)$ een begrensde continue functie is, gedefinieerd op W , dan bestaat de variëteit-integraal van $\varphi(x)$ over W en deze is, als we $u = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ en $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \lambda_i})$ stellen, gelijk aan

$$\int_V \varphi(f(u)) \sqrt{\det \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right)} d\omega_u.$$

Bewijs: Neem een simplex $[u^0, \dots, u^k]$ binnen V in de parameterruimte. Laat $u^i = (\lambda_1^i, \dots, \lambda_k^i)$ zijn. Het bijbehorende simplex in R_n is

$[f(u^0), \dots, f(u^k)]$. Dit heeft een k -dimensionale inhoud $A =$

$$= \frac{1}{k!} \sqrt{\det((f(u^1) - f(u^0)) \dots (f(u^j) - f(u^0)))}. \text{ Neem verder een punt } u =$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ binnen het simplex $[u^0, \dots, u^k]$. In u is f totaal differentieerbaar; laat de functionaaloperator daar U zijn:

$$f(u^1) = f(u) + U(u^1 - u) + |u^1 - u| e(u^1),$$

$$f(u^0) = f(u) + U(u^0 - u) + |u^0 - u| e(u^0), \text{ dus}$$

$$f(u^1) - f(u^0) = U(u^1 - u^0) + |u^1 - u| e(u^1) - |u^0 - u| e(u^0).$$

$$\text{We vervangen nu eerst } A \text{ door } B = \frac{1}{k!} \sqrt{\det((U(u^1 - u^0)) \dots (U(u^j - u^0)))} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sqrt{\det_{i,j} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^k \frac{\partial \varphi_r}{\partial \lambda_s} (\lambda_s^1 - \lambda_s^0) \frac{\partial \varphi_r}{\partial \lambda_t} (\lambda_t^j - \lambda_t^0)} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sqrt{\det_{i,j} \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^k (\lambda_s^1 - \lambda_s^0) \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi_r}{\partial \lambda_s} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \lambda_t} \right) (\lambda_t^j - \lambda_t^0)} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sqrt{\det_{i,s} (\lambda_s^1 - \lambda_s^0) \det_{s,t} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_s} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_t} \right) \det_{t,j} (\lambda_t^j - \lambda_t^0)} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sqrt{\det_{i,j} ((u^1 - u^0) \dots (u^j - u^0))} \sqrt{\det_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right)}. \text{ Dit moet nog vermenigvuldigd worden met } \varphi(f(u)) \text{ en gesommeerd over de simplices van een verdeling. Omdat } \frac{1}{k!} \sqrt{\det_{i,j} ((u^1 - u^0) \dots (u^j - u^0))} \text{ juist de inhoud van } [u^0, \dots, u^k] \text{ is}$$

geeft dit een approximatiesom van de integraal $\int_V \varphi(f(u)) \sqrt{\det_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right)} d\omega_u$, die bij verfijning der verdeling tot deze integraal nadert. We moeten nu alleen nog aantonen, dat de fout die we maken bij vervanging van A door B tot nul nadert bij verfijning der verdeling. Nu geldt, als α en β reële getallen zijn en $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, dat $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}$; immers er geldt zeker $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq |\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}|$, dus

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|^2 \leq |\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}| |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = |\alpha - \beta|, \text{ dus } |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}$$

Nemen we voor α en β de determinanten die in A en B optreden, dan moeten we dus het verschil van deze determinanten beschouwen. Nu is

$$(f(u^1) - f(u^0)) \dots (f(u^j) - f(u^0)) = (U(u^1 - u^0)) \dots (U(u^j - u^0)) + (U(u^1 - u^0)) \dots (|u^j - u| e(u^j) - |u^0 - u| e(u^0)) + (|u^1 - u| e(u^1) - |u^0 - u| e(u^0)) \dots (U(u^j - u^0)) + (|u^1 - u| e(u^1) - |u^0 - u| e(u^0)) \dots (|u^j - u| e(u^j) - |u^0 - u| e(u^0)).$$

Zo is ieder element van de determinant in vier termen gesplitst; de determinant kan zo in 4^k determinanten gesplitst worden, waarvan één juist de determinant is, die in B optreedt. Laat nu $\gamma_1 > 2$ zo gekozen zijn, dat $|U(u)| < \gamma_1 |u|$ (uniform in u) en bij $\delta > 0, \delta < 1$ een $\lambda > 0$ zodat als de diameter $< \lambda$ is, $|e| < \delta$ is (uniform in u). Dan is

$|\alpha - \beta| < (\gamma_1^2 \lambda^2)^{k-1} \gamma_1^2 \delta \lambda^{2k} (4^k - 1) = 2k! (4^k - 1) \gamma_1^{2k-1} \delta \lambda^{2k}$. Noem $\gamma_2^{2k} = 2k! (4^k - 1) \gamma_1^{2k-1}$, dan is $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| < \gamma_2 \sqrt{\delta} \lambda^k$. Laat verder $\gamma_3 > 0$ zo gekozen zijn, dat $|\varphi(x)| < \gamma_3$, dan is de fout, gemaakt bij één simplex, in absolute waarde $< \frac{1}{k!} \gamma_3 \gamma_2 \sqrt{\delta} \lambda^k$. De anti-spitsheidseis geeft ons het bestaan van een $\gamma_4 > 0$, zodat, als S de inhoud van het simplex is, geldt $\lambda^k < \gamma_4 S$, dus $|\text{fout}| < \frac{1}{k!} \gamma_3 \gamma_2 \sqrt{\delta} \gamma_4 S$. Bij sommatie over de simplices geldt $\sum S \leq I(V)$, dus voor de approximatiesom geldt $|\text{fout}| < \frac{1}{k!} \gamma_3 \gamma_2 \sqrt{\delta} \gamma_4 I(V)$. Bij een $\varepsilon > 0$ kiezen we nu $\delta \leq$

$$\leq \frac{\varepsilon^2 (k!)^2}{\gamma_3^2 \gamma_2^2 \gamma_4^2 (I(V))^2}, \text{ dan is } |\text{fout}| < \varepsilon. \text{ Daarmee is het bewijs voltooid.}$$

We merken op, dat bij het bewijs van (45.3) niet gebruikt is, dat de rang van de functionaalmatrix $=k$ is. De stelling geldt dus ook, als aan deze eis niet voldaan is.

De variëteit-integraal van de functie die constant $=1$ is (eigenlijk dus van de karakteristieke functie van W), heet de k-dimensionale inhoud

van de variëteit. Deze is dus gelijk aan $\int_V \sqrt{\det \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right)} d\omega_u$. De

tweedimensionale inhoud van een oppervlak noemen we de oppervlakte van dat oppervlak; een variëteit-integraal over een oppervlak noemen we een oppervlakte-integraal en over een kromme een lijnintegraal.

Opgave 170. Op blz. 200 hadden we voor een k -simplex in R_n al een k -dimensionale inhoud gedefinieerd. Interpreteer zo'n k -simplex als een k -dimensionale variëteit en bewijs dat daarvoor het oude en het nieuwe begrip k -dimensionale inhoud overeenstemmen.

Als voorbeeld behandelen we het boloppervlak $|x|=P$ in R_3 , dat als volgt voor te stellen is in parametervorm: $\xi_1 = P \cos \lambda_1 \cos \lambda_2$, $\xi_2 = P \sin \lambda_1 \cos \lambda_2$, $\xi_3 = P \sin \lambda_2$ met $0 \leq \lambda_1 < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Nu is

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = (-P \sin \lambda_1 \cos \lambda_2, P \cos \lambda_1 \cos \lambda_2, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = (-P \cos \lambda_1 \sin \lambda_2, -P \sin \lambda_1 \sin \lambda_2, P \cos \lambda_2).$$

$$\text{Verder is } \det \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} P^2 \cos^2 \lambda_2 & 0 \\ 0 & P^2 \end{vmatrix} = P^4 \cos^2 \lambda_2. \text{ De oppervlakte is dus}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} P^2 \cos \lambda_2 d\lambda_1 d\lambda_2 = 2\pi P^2 \cdot 2 = 4\pi P^2.$$

Onbevredigend is, dat bij de definitie van variëteit-integraal het parameterstelsel een rol speelt. Dit is het geval bij de eis, dat de simplices in de parameterruimte een verdeling moeten vormen en elkaar dus niet mogen overlappen; verder is de anti-spitsheidseis ook voor de simplices in de parameterruimte gesteld. Nu is een variëteit wel meer

dan alleen maar een puntenverzameling. Bij een oppervlak, waarvan een doorsnede in de tekening is geschetst, liggen de punten a en b in de ruimte dicht bij elkaar, maar niet op het oppervlak en dit feit wordt in het parameterstelsel wel tot uitdrukking gebracht. Het is echter ook niet zo, dat slechts één parameterstelsel het ware zou zijn. We moeten dus een geoorloofde parametertransformatie definiëren.

Laat W een k -dimensionale variëteit zijn, bepaald door $f(u)$, gedefinieerd op de verzameling U in R_k . Laat verder $h(v)$ een eeneenduidige functie zijn, die een verzameling V met inhoud in R_k op de verzameling U afbeeldt, zodat $h(v)$ uniform totaal differentieerbaar is met eeneenduidige functionaaloperator, zodat de elementen van de functionaalmatrix en van de inverse van de functionaalmatrix begrensd zijn en zodat, als $\chi_1, \dots, \chi_k$ de componenten van $h(v)$ en $\mu_1, \dots, \mu_k$ die van v zijn,

$\int_V \left| \frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_k)}{\partial(\mu_1, \dots, \mu_k)} \right| d\omega_v$ bestaat. Dan zeggen we dat W , bepaald door

$g(v) = f(h(v))$, dezelfde variëteit is als de oorspronkelijke en we noemen de overgang van u op v een geoorloofde parametertransformatie.

We bewijzen nu, dat het begrip variëteit-integraal niet van het parameterstelsel afhangt. Met v als parameter wordt de variëteit-integraal

$$\int_V \varphi(g(v)) \sqrt{\det \left(\frac{\partial g}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mu_j} \right)} d\omega_v. \text{ Maar } \frac{\partial g}{\partial \mu_i} = \sum_{r=1}^k \frac{\partial f}{\partial \lambda_r} \frac{\partial \chi_r}{\partial \mu_i}, \text{ dus}$$

$$\sqrt{\det \left(\frac{\partial g}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mu_j} \right)} = \sqrt{\det_{i,j} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{\partial \chi_r}{\partial \mu_i} \frac{\partial \chi_s}{\partial \mu_j} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_s} \right)} =$$

$$= \sqrt{\det_{i,r} \frac{\partial \chi_r}{\partial \mu_i} \det_{r,s} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_s} \right) \det_{s,j} \frac{\partial \chi_s}{\partial \mu_j}} =$$

$$= \sqrt{\det_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right)} \left| \frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_k)}{\partial(\mu_1, \dots, \mu_k)} \right|. \text{ Met } u \text{ als parameter wordt de}$$

variëteit-integraal $\int_U \varphi(f(u)) \sqrt{\det \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right)} d\omega_u$, maar hierop kunnen

we de transformatiestelling (44.7) toepassen. We vinden dan, dat dit ge-

lijk wordt aan $\int_V \varphi(f(h(v))) \sqrt{\det \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right)} \left| \frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_k)}{\partial(\mu_1, \dots, \mu_k)} \right| d\omega_v$. Bei-

de parameterstelsels leiden dus tot dezelfde variëteit-integraal.

Opgave 171. Als een oppervlak in R_3 gegeven is door $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$, dan is de oppervlakte-integraal van een functie $\varphi(x)$ te schrijven in

de vorm $\iint \varphi(\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right)^2} d\xi_1 d\xi_2$. Bewijs dit.

§ 46. De formule van Stirling.

(46.1) $n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$ met $0 < \vartheta \leq 1$ (formule van Stirling).

Bewijs: Noem $a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$, dan is $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e(\frac{n}{n+1})^{n+\frac{1}{2}}$, dus $\log \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - (n+\frac{1}{2}) \log \frac{n+1}{n}$. Voor $|x| < 1$ geldt $\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ (zie blz. 98)

dus voor $0 < x < 1$ geldt $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x$. Kiezen we hierin $x = \frac{1}{2n+1}$, dan is $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ en we vinden $\log \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$, dus $\log \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$, dus $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$,

dus $a_{n+1} < a_n$. De rij a_n is dus antitoon en begrensd (immers $a_n > 0$), en

dus convergent: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. We bewijzen nu dat $\alpha > 0$ is. Voor $0 < x < 1$

geldt $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{3} = 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)} = 2x + \frac{x^2}{3} (\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x})$. Hierin

kiezen we weer $x = \frac{1}{2n+1}$, dan is $\frac{1}{1-x} = \frac{2n+1}{2n}$ en $\frac{1}{1+x} = \frac{2n+1}{2n+2}$, dus

$\log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12(n+\frac{1}{2})} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, dus $\log \frac{a_{n+1}}{a_n} > -\frac{1}{12} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$. Door op-

telling volgt hieruit $\log \frac{a_{n+k}}{a_n} > -\frac{1}{12} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k})$. Laat men nu $k \rightarrow \infty$, dan

geeft $\alpha = 0$ direct een tegenspraak, omdat het linkerlid dan naar $-\infty$ zou gaan en het rechterlid naar $-\frac{1}{12n}$. Dus $\alpha > 0$ en $\log \frac{\alpha}{a_n} \geq -\frac{1}{12n}$. Dit

geeft $e^{-\frac{1}{12n}} \leq \frac{\alpha}{a_n} < 1$, dus $\alpha = a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ met $0 < \vartheta \leq 1$. Als we nog aantonen,

dat $\alpha = \sqrt{2\pi}$ is, is (46.1) bewezen. Hiertoe gebruiken we het resultaat

van opgave 140, blz. 143: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$ en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx =$

$= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{2k+1}$. Noemen we $\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} = B_m$, dan geldt $\frac{\pi}{2} =$

$= B_m \prod_{k=1}^m \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$. Uit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx$

volgt direct $1 \leq B_m \leq \frac{2m+1}{2m}$, dus $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = 1$. Dus geldt:

(46.2) $\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$ (Product van Wallis).

Nu is $\prod_{k=1}^m \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \prod_{k=1}^m \frac{(2k)^4}{(2k-1)2k \cdot 2k(2k+1)} = \frac{2^{4m} (m!)^4}{2^{4m} a_m^4 m^{4m+2} e^{-4m}}$.

Omdat $n! = a_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, geldt $\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{4m} a_m^4 m^{4m+2} e^{-4m}}{2^{4m+1} n^{4m+1} e^{-4m} (2m+1)} =$

$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{2(2m+1)} \cdot \frac{a_m^4}{a_{2m}^2} = \frac{1}{4} \alpha^2$, dus $\alpha^2 = 2\pi$, dus $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Hiermee is

het bewijs voltooid.

Uit (46.1) volgt direct $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$. We kunnen dus voor

grote waarden van n de grootheid $\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ in zekere zin als "benadering" van $n!$ gebruiken. Dit is geen benadering in die zin, dat het verschil tussen ware en benaderde waarde tot nul zou naderen als $n \rightarrow \infty$, maar wel dat de verhouding van de afwijking tot de waarde zelf (welke laatste uiteraard zeer snel stijgt met stijgende n) tot nul nadert. De grootheid $1 - e^{-\frac{1}{12n}}$ geeft een schatting hoe snel dit gaat. Voor berekeningen is $\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ dikwijls veel handelbaarder dan $n!$

Einde van de cursus analyse.