

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 13e

Avondcursus wiskunde 1950-1952;

Hogere algebra,1;Numerieke analyse.

H.J.A.Duparc.



1951

Hogere Algebra.

Deel I. Numerieke analyse.

Hfdst. I. Elementair oplosbare vergelijkingen.

§1. Complexe getallen.

We veronderstellen de definitie van de bestaansbare getallen bekend. We beschouwen getallenparen (a, b) , waarin a en b bestaansbare getallen voorstellen. Daarbij spreken we af, dat het paar $(a, 0)$ een andere schrijfwijze voor het bestaansbare getal a is.

Wij noemen twee paren (a, b) en (c, d) dan en alleen dan aan elkaar gelijk, als $a = c$ en $b = d$ is. Om deze afspraak te rechtvaardigen moeten we laten zien, dat, als een van deze twee getallen paren van te voren reeds is vastgelegd, ook het andere vastgelegd is en wel met dezelfde betekenis. Stel (a, b) is van te voren reeds vastgelegd, d.w.z. $b = 0$ terwijl (a, b) een andere schrijfwijze is voor het reële getal a . Is het paar (c, d) volgens bovenstaande definitie gelijk aan het paar (a, b) , dan is $d = b = 0$ en $c = a$, zodat het paar (c, d) vastgelegd is en wel een andere schrijfwijze betekent voor het bestaansbare getal a . Is omgekeerd gegeven, dat (c, d) een andere schrijfwijze is voor het reële getal a , dan is $d = 0$ en $c = a$, dus inderdaad $a = c$ en $b = d$. Uit deze toelichting blijkt, dat de gelijkheidsdefinitie geoorloofd is.

Onder de som van twee getallenparen (a, b) en (c, d) verstaan we per definitie het paar $(a+c, b+d)$, dus bv. $(3, 5) + (5, 7) = (8, 12)$. Om er ons van te overtuigen dat deze definitie geoorloofd is, moeten we vooreerst het speciale geval nagaan, waarin elk der getallenparen (a, b) en (c, d) gelijk is aan een bestaansbaar getal; immers in dat geval is de som van (a, b) en (c, d) reeds gedefinieerd en moeten we laten zien, dat het resultaat van de nieuwe definitie overeenstemt met de som, zoals die vroeger gedefinieerd is. Dit is inderdaad zo, want in het beschouwde speciale geval zijn b en d en dus ook $b+d$ gelijk aan nul, zodat het paar $(a+c, b+d)$ inderdaad gelijk is aan $a+c$.

Uit bovenstaande afspraak volgt, dat een paar (a, b) , waarbij $b \neq 0$ is, nooit gelijk is aan een bestaansbaar getal c , want was dat wel zo, dan zou (a, b) gelijk zijn aan $(c, 0)$, waaruit zou volgen $b = 0$.

Het gelijkheidsbegrip, zoals het hiervan gedefinieerd is, voldoet aan 3 voorwaarden, de zg. equivalentie-voorwaarden:

- 1° Het begrip is reflexief, d.w.z. het paar (a, b) is gelijk aan zichzelf.
- 2° Het begrip is symmetrisch, d.w.z. is $(a, b) = (c, d)$, dan is $(c, d) = (a, b)$.
- 3° Het begrip is transitief, d.w.z. is $(a, b) = (c, d)$ en $(c, d) = (e, f)$ dan is $(a, b) = (e, f)$.

Elk begrip, dat aan deze drie voorwaarden voldoet heet een equivalentie begrip, zodat we kortweg kunnen zeggen: Het bovengenoemde gelijkheidsbegrip is een equivalentiebegrip.

Hiermede is echter de definitie van de som nog niet gerechtvaardigd. We moeten laten zien: Is $(a,b)=(a',b')$ en $(c,d)=(c',d')$, dan is volgens bovenstaande definitie de som van (a,b) en (c,d) gelijk aan de som van (a',b') en (c',d') . Dit nu is evident, want uit het gegeven volgt: $a = a', b = b', c = c',$ en $d = d'$, zodat de uitkomsten $(a+c, b+d)$ en $(a'+c', b'+d')$ inderdaad overeenstemmen.

Nu gaan we van de hierboven gedefinieerde optelling enkele eigenschappen bewijzen:

Commutatieve eigenschap. $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$.

Deze eigenschap is evident, omdat in het gebied van de bestaانبare getallen de optelling ook commutatief is.

Associatieve eigenschap. $\{(a,b)+(c,d)\}+(e,f)=(a,b)+\{(c,d)+(e,f)\}$.

Dit is eveneens duidelijk omdat in het gebied van de bestaانبare getallen de optelling ook associatief is. De gemeenschappelijke waarden van beide leden wordt kortweg aangeduid met $(a,b)+(c,d)+(e,f)$.

Door toepassing van het principe van volledige inductie definiëren we een gedurige som $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)+\dots+(a_n,b_n)$, waarin $n \geq 1$. Is $n=1$ dan is deze som per definitie het getallenpaar (a_1,b_1) . Is $n \geq 2$, dan veronderstellen we $(a_1,b_1)+\dots+(a_{n-1},b_{n-1})$ reeds gedefinieerd. Als bij deze uitkomst (a_n,b_n) wordt opgeteld, krijgen we een resultaat, dat we de som der paren $(a_1,b_1), \dots, (a_n,b_n)$ noemen.

De mogelijkheid van aftrekking.

Zijn (a,b) en (c,d) willekaurig gegeven, dan bestaat er 1 en slechts 1 paar (x,y) met de eigenschap $(c,d)+(x,y)=(a,b)$. Immers het paar (x,y) met $x = a-c$ en $y = b-d$ voldoet en voldoet alleen. Dit paar (x,y) heet het verschil $(a,b)-(c,d)$ der getallenparen (a,b) en (c,d) .

Een getallenpaar (a,b) verandert niet, als het met 0 vermeerderd wordt, want de som is gelijk aan $(a,b)+(0,0)=(a,b)$. Bij elk paar (c,d) is 1 en slechts 1 paar te vinden, dat met (c,d) vermeerderd, het getal 0 oplevert. Dat is nl. het paar (c,d) . Een paar met (c,d) verminderen komt op hetzelfde neer als dat paar met het tegengestelde van (c,d) vermeerderen.

Onder een uitdrukking van de gedaante

$$(a,b)+(c,d)-(e,f)-(g,h)+(j,k)$$

verstaan we de gedurige som der paren

$$(a,b), (c,d), (-e,-f), (-g,-h) \text{ en } (j,k);$$

dus deze som is gelijk aan

$$(a+c-e-g+j, b+d-f-h+k),$$

Uit deze redenering blijkt, dat in uitdrukkingen van deze gedaante de volgorde der termen kan worden veranderd, zonder dat daardoor de waarde van de uitdrukking verandert.

Nu gaan we over tot de definitie van een product.

Onder het product van (a,b) en (c,d) verstaan we het paar $(ac-bd, ad+bc)$, dus bv.

$$(3,5) \cdot (5,7) = (-20,46).$$

Om er ons van te overtuigen, dat deze definitie geoorloofd is, moeten we weer eerst het speciale geval nagaan, waarin elk der getallenparen (a,b) en (c,d) gelijk is aan een bestaand getal. In dat geval zijn b en d en dus ook $ad+bc$ gelijk aan nul, en verder is $ac-bd = ac$, zodat dan inderdaad de genoemde uitkomst $(ac-bd, ad+bc)$ gelijk is aan het product der bestaانبare getallen a en c .

Verder merken we op: Is $(a,b) = (a',b')$ en $(c,d) = (c',d')$, dan is volgens bovenstaande definitie het product van (a,b) en (c,d) gelijk aan het product van (a',b') en (c',d') . Hiermede is de definitie van het product gerechtvaardigd.

Een natuurlijk getal n is te schrijven als een getallenpaar $(n,0)$, zodat volgens bovenstaande definitie het product $n \cdot (a,b)$ vastgelegd is. Dit product is gelijk aan de som van n termen, elk gelijk aan het paar (a,b) . Immers beide uitkomsten zijn volgens de som-en-productdefinitie gelijk aan het paar (na,nb) .

Thans gaan we over tot het bewijs van enkele eigenschappen van de hierboven gedefinieerde vermenigvuldiging.

Comm.eig.: $(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b)$.

Ass.eig.: $\{(a,b)(c,d)\} \cdot (e,f) = (a,b) \{(c,d)(e,f)\}$

De gemeensch. waarde van beide leden wordt kortweg aangeduid met $(a,b)(c,d)(e,f)$.

Door toepassing van het principe van volledige inductie definieren we een gedurig product.

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_n, b_n).$$

waarin $n \geq 1$. Is $n=1$, dan is dit product per definitie het getallenpaar (a_1, b_1) . Is $n \geq 2$, dan veronderstellen we $(a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_{n-1}, b_{n-1})$ reeds gedefinieerd. Als deze uitkomst met (a_n, b_n) wordt vermenigvuldigd, krijgen we een resultaat, dat we het product der paren $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ noemen.

Een product van twee factoren is dan en alleen dan nul, als minstens een der factoren nul is. Immers is $(c,d)=0$, dan is $c=0$ en $d=0$, dus $(a,b)(c,d)=(0,0)=0$. En omgekeerd, is $(a,b)(c,d)=0$, dan is $ac-bd=0$ en $ad+bd=0$. Door kwadratering en optelling volgt hieruit: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0$, zodat minstens een dezer twee factoren nul is, waaruit volgt $a=b=0$ of $c=d=0$.

Een gedurig product is dan en alleen dan nul, als minstens een der factoren nul is. Om dit te bewijzen, duiden we het aantal factoren aan met n . De bewering is evident voor $n=1$, zodat we $n > 1$ mogen veronderstellen

en mogen aannemen, dat de bewering met $n-1$ in plaats van n reeds bewezen is. Het beschouwde gedurige product kunnen we dan schrijven in de gedaante $(a,b)(c,d)$ waarin (a,b) voorstelt het product der eerste $n-1$ factoren, terwijl (c,d) de laatste factor aangeeft. Is nu gegeven, dat het gedurige product nul is, dan is volgens bovenstaande stelling $(c,d)=0$ of $(a,b)=0$ en in het laatste geval is volgens onze inductie veronderstelling minstens 1 der $n-1$ factoren waaruit (a,b) is opgebouwd, gelijk aan nul. Is omgekeerd gegeven, dat minstens een der in het gedurige product optredende factoren nul is, dan is $(c,d)=0$ of minstens een der factoren van (a,b) is nul. In het laatste geval is volgens onze inductie veronderstelling (a,b) zelf gelijk aan nul. In beide gevallen is $(a,b)(c,d) = 0$.

Bij elk paar (c,d) , dat niet nul is, is een en slechts een paar te vinden met de eig. $(c,d)(x,y)=1$. Immers deze laatste betrekking geldt dan en alleen dan als $ax-by=1$, $ay+bx=0$; de enige waarden, die hieraan voldoen, zijn

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Men merke daarbij op, dat de gemeenschappelijke noemer niet nul is, omdat $(a,b)=0$ verondersteld is. Dit paar (x,y) heet het omgekeerde van (a,b) , zodat we gevonden hebben: Elk paar, dat niet nul is, bezit een en slechts een omgekeerde.

Tenslotte tonen we nog aan de distributiefwetten:

$$\{(a,b)+(c,d)\}(e,f) = (a,b)(e,f) + (c,d)(e,f)$$

en natuurlijk ook

$$(e,f)\{(a,b)+(c,d)\} = (e,f)(a,b) + (e,f)(c,d).$$

Men verifieert deze wetten door beide leden uit te cijferen.

De getallenparen (a,b) , zoals ze hierboven gedefinieerd zijn, vormen een verzameling, waarin een commutatieve en associatieve optelling en ook een associatieve vermenigvuldiging steeds uitvoerbaar zijn en wel zo, dat de aftrekking steeds mogelijk is en de twee distributiefwetten gelden.

Een verzameling met deze eigenschappen heet een ring. De ring heet commutatief, als de vermenigvuldiging commutatief is. We kunnen dus kortweg zeggen: de getallenparen met de hierboven gedefinieerde optelling en vermenigvuldiging vormen een commutatieve ring.

Opg. 1. De gehele getallen vormen een commutatieve ring. Eveneens de rationale getallen. Eveneens de getallen $a+b\sqrt{2}$, waarin a en b rationaal zijn. Eveneens alle bestaansbare getallen.

Opg. 2. De natuurlijke getallen vormen geen ring. Evenmin de positieve getallen. Om te bewijzen, dat de getallen $a+b\sqrt[3]{2}$, waarin a en b rationaal zijn, geen ring vormen, is het voldoende aan te tonen, dat $\sqrt[3]{4}$ niet in die verzameling voorkomt. Stel $\sqrt[3]{4}$ was te schrijven in de

gedaante $a + b\sqrt[3]{2}$. Door vermenigvuldiging met $\sqrt[3]{2}$ en door eliminatie van $\sqrt[3]{4}$ vinden we $(a+b^2)\sqrt[3]{2} = 2 - ab$. Omdat $\sqrt[3]{2}$ niet rationaal is (waarom?) volgt hieruit $a + b^2 = 0$ en $2 - ab = 0$. Dit zou leveren $b^3 = -2$, hetgeen buitengesloten is.

Keren we nuar terug tot de ring, waarvan de hierboven genoemde getallenparen de elementen zijn. Zoals we reeds opgemerkt hebben, verandert een element van die ring niet van waarde, als dat element met 0 wordt vermeerderd. Wij drukken dit uit door te zeggen, dat het getal 0 het nulelement van de ring is. Verder hebben we opgemerkt, dat elk element (c,d) van de ring, dat niet met het nulelement samenvalt één en slechts één omgekeerde bezit. Laten we nu twee elementen (a,b) en (c,d) beschouwen, waarbij (c,d) niet het nulelement is. Dan bevat de ring een en slechts een element (x,y) met de eigenschap: $(a,b) = (x,y)(c,d)$. Immers is (c',d') het omgekeerde van (c,d) , dan is $(a,b)(c',d')$ het enige element dat voldoet. Dit element (x,y) heet het quotient $(a,b):(c,d)$ van (a,b) en (c,d) . We komen dan tot het besluit:

In de ring gevormd door de beschouwde getallenparen, is de deling steeds uitvoerbaar, behalve deling door het nulelement. Een ring met deze eigenschap heet een lichaam, zodat we ook kunnen zeggen: de beschouwde getallenparen vormen een lichaam.

Opg. 3. De rationale getallen vormen een lichaam; eveneens de getallen $a+b\sqrt{2}$, waarin a en b rationaal zijn. De gehele getallen vormen geen lichaam. Elk getallenpaar (a,b) kan worden geschreven in de gedaante $(a,0) + (0,1)(b,0)$. Het getallenpaar $(0,1)$ wordt ter afkorting met i aangeduid, zodat het getallenpaar (a,b) geschreven kan worden in de gedaante $a+ib$. Daarbij is $ii = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Als we ii bij wijze van afkorting door i^2 vervangen, krijgen we dus $i^2 = -1$. Uit deze afspraak blijkt:

i is een getallenpaar, waarvan een bepaalde optelling en een bepaalde vermenigvuldiging gedefinieerd is, en wel zo, dat het kwadraat van het getallenpaar i gelijk is aan -1 .

We zullen nu voortaan het getallenpaar $(a,b) = a + ib$ een complex getal noemen. In het speciale geval, dat $b = 0$ is, krijgen we een bestaanbaar getal, zodat een bestaanbaar getal een bijzonder geval van een complex getal is. De getallen $a + ib$ met $a = 0$ heten imaginair. Van het complexe getal $a + ib$ heet a het reële deel en b het imaginaire deel. Men merke op, dat deze laatste naam niet gelukkig gekozen is, want b is zelf bestaanbaar.

Onder de macht $(a+ib)^n$, waarin de exponent n een natuurlijk getal voorstelt, verstaan we het product van n factoren elk gelijk aan $a+ib$.

Opg. 4. Bereken i^n , waarin n een willekeurig getal voorstelt.

Opg. 5. Bereken $(\frac{1+i}{2})^n$ waarin n een willekeurig getal voorstelt.

Opg. 6. Theorema van De Moivre.

en $(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$.
 en $(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$.

voor elk natuurlijk getal n .

§2. Meetkundige voorstelling van de complexe getallen.

Van groot belang is, zoals reeds door Gauss is opgemerkt, dat elk complex getal $a + ib$ correspondeert met een punt in het platte vlak, dat de coördinaten a en b bezitten opzichte van een gegeven rechthoekig assenstelsel.

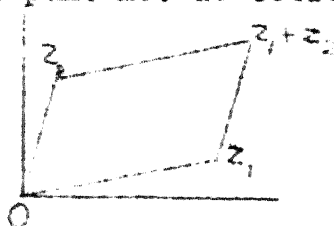
Zij gegeven een x -as en een daarop loodrecht staande y -as. De bestaande getallen corresponderen met de punten van de x -as; de imaginaire getallen met de punten van de y -as. Deze assen heten daarom de bestaande en de imaginaire as. De getallen waarvan het bestaande deel positief is, corresponderen met de punten rechts van de imaginaire as enz.

Het punt met de coörd. (a, b) noemen we kortweg het complexe getal $a + ib$ en omgekeerd noemen wij het complexe getal $a + ib$ kortweg het punt met de coörd. (a, b) . Het vlak gevormd door de punten met coörd. (a, b) heet dan het complexe vlak.

Volgens deze afspraak zijn dus de complexe getallen punten van het complexe vlak, en wel punten voor welke een bepaalde optelling en een bepaalde vermenigvuldiging gedefinieerd is.

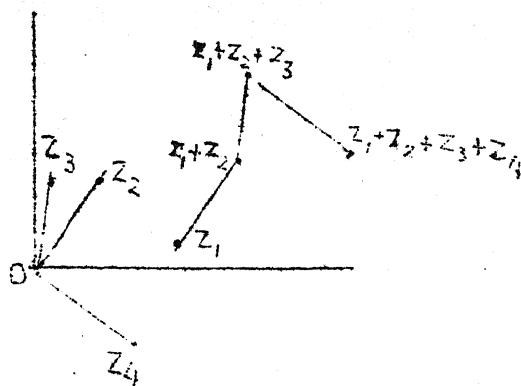
Hoe construeren we nu de som van twee punten z_1 en z_2 gelegen in het complexe vlak?

Noemen we z_1 en z_2 respectievelijk $a+ib$ en $c+id$, dan is $z_1 + z_2$ per definitie het punt met de coord. $a + c$ en $b + d$.



Wij vinden dus $z_1 + z_2$ als hoekpunt van een parallelogram, waarvan z_1 en z_2 twee overstaande hoekpunten zijn en de oorsprong het 4de hoekpunt is. Bij deze constructie is het niet nodig het volledige parallelogram te tekenen. Het is voldoende vanuit z_1 de vector te tekenen, die gelijk en evenwijdig is aan de vector, welke de oorsprong met z_2 verbindt.

Deze laatste opmerking stelt ons in staat om op gemakkelijke wijze de som te construeren van n punten $z_1, z_2, \dots, z_n$ gelegen in het z -vlak. Men tekent eerst vanuit z_1 de vector, die gelijk en evenwijdig is aan de vector, die de oorsprong met z_2 verbindt; aldus vindt men $z_1 + z_2$. Vanuit dit punt tekent men de vector, die gelijk en evenwijdig is aan de vector, die de oorsprong met z_3 verbindt; aldus vindt men $z_1 + z_2 + z_3$, enz.

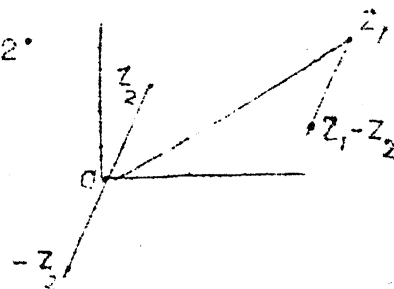


Hoe construeren we het verschil $z_1 - z_2$ van twee in het complexe vlak gelegen punten? Verminderen met z_2 komt, zoals we gezien hebben, op hetzelfde neer als vermeerderen met het tegengestelde. D.w.z. vanuit z_1 de vector, die gelijk en evenwijdig is aan de vector welke z_2 met de oorsprong verbindt, dan krijgen we $z_1 - z_2$.

Onder de modulus $|z|$ van een complex getal z verstaan we de afstand van dat punt tot de oorsprong, dus

$$|a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De modulus heet ook wel de volstrekte waarde.



Opg.1. De modulus van een product van twee factoren is gelijk aan het product der moduli der factoren.

Opg.2. De modulus van een product v.e. willekeurig aantal factoren is gelijk aan het product der moduli der factoren.

Opg.3. De modulus van een som van 2 termen is hoogstens gelijk aan de som der moduli der termen.

Gevraagd wordt deze eig. meetkundig te bewijzen.

Te bewijzen valt

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid is ≥ 0 , zodat het voldoende is aan te tonen, dat het kwadraat van het linkerlid hoogstens gelijk is aan het kwadraat van het rechterlid. Dus te bewijzen:

$$ac + bd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}.$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid is weer ≥ 0 , zodat het voldoende is aan te tonen, dat het kwadraat van het linkerlid hoogstens gelijk is aan het kwadraat van het rechterlid, dus te bewijzen:

$$2abcd \leq a^2 d^2 + b^2 c^2$$

hetgeen evident is.

Opg.4. De modulus van een som van twee termen is minstens gelijk aan het verschil van de moduli der termen.

Opg.5. De modulus van de som van een eindig aantal termen is hoogstens gelijk aan de som der moduli der termen.

Opg.6. De modulus van het verschil van 2 complexe getallen is de afstand van de complexe getallen.

Opg.7. De modulus van een verschil van twee complexe getallen is hoogstens gelijk aan de som en minstens gelijk aan het verschil der moduli dier getallen.

Beschouw nu een willekeurig complex getal $z \neq 0$, zodat z een punt in het complexe vlak is, dat niet met de oorsprong samenvalt. De voerstraal, die de oorsprong met z verbindt, heeft dan een lengte gelijk aan $|z|$. Deze lengte noem ik r . De voerstraal maakt met de positieve reële as een hoek φ , die op een veelvoud van 360° dus op een veelvoud van 2π radialen na, ondubbelzinnig bepaald is. Deze hoek φ heet het argument van z en wordt met $\arg z$ aangeduid. Dus elk punt z , dat niet met de oorsprong samenvalt, bezit een argument, dat op een veelvoud van 2π na, ondubbelzinnig is vastgelegd. Het punt z zelf kan dan worden geschreven in de gedaante $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Stelling: Het product van twee factoren, die beide ongelijk nul zijn, heeft een argument, dat, op een veelvoud van 2π na, gelijk is aan de som van de argumenten der factoren. Want zijn

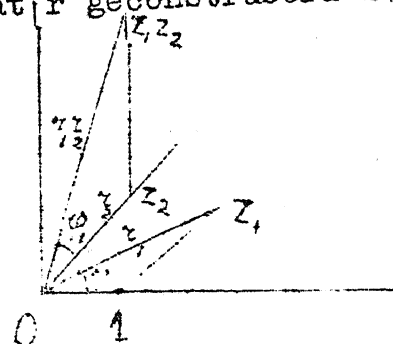
$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ en } r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

de twee factoren, dan is volgens het theorema van de Moivre het product gelijk aan $r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Hieruit blijkt niet alleen, zoals we reeds wisten, dat de modulus van het product gelijk is aan het product der moduli van de factoren, doch tevens dat het argument van het product, op een veelvoud van 2π na, gelijk is aan de som $\varphi_1 + \varphi_2$ der argumenten.

Bovenstaande beschouwingen stellen ons in staat om op eenvoudige wijze het product van twee complexe getallen z_1 en z_2 te construeren. Is minstens een van deze twee complexe getallen nul, dan valt het product met de oorsprong samen. Zijn beide factoren z_1 en z_2 ongelijk aan 0, dan zijn van het product $z_1 z_2$ de modulus bekend en ook, op een veelvoud van 2π na, het argument. De modulus r van het product is gelijk aan het product $r_1 r_2$ der moduli, dus $1:r_1=r_2:r$, zodat r geconstrueerd kan worden als 4e evenredige.

De constructie komt daarop neer, dat men een driehoek construeert, die gelijkvormig is met de driehoek met de hoekpunten 0, z_1 en z_2 en die 0 en $z_1 z_2$ tot hoekpunt heeft.



Opg. 8. Vermenigvuldiging met i
betekent een draaiing om de oorsprong over een rechte hoek.

Beschouw vooreerst de transformatie $w = z + p$, waarin p een gegeven bestaanbaar of onbestaanbaar getal voorstelt. Deze transformatie voegt aan elk punt z een punt w toe, dat verkregen wordt door vanuit z de vector te trekken, die gelijk en evenwijdig is aan de vector welke 0 met p verbindt. Kortweg gezegd: deze transformatie komt neer op de translatie die de oorsprong in het punt p overvoert. Deze transformatie voert rechte lijnen in rechte lijnen over, cirkels in cirkels, enz.

Beschouw verder de transformatie $w = qz$, waarin q een gegeven bestaanbaar of onbestaanbaar getal $\neq 0$ voorstelt. In het geval dat q bestaanbaar is vindt men bij gegeven z het corresponderende punt w door vanuit de oorsprong te vermenigvuldigen met de factor q .

Indien de modulus van q gelijk 1 is, kunnen we stellen $q = \cos K + i \sin K$, waarin K het argument van q voorstelt; in dat geval vindt men bij gegeven z het corresponderende punt w door een draaiing om de oorsprong over een hoek K .

In het algemene geval kunnen we stellen $q = Q (\cos K + i \sin K)$, waarin $Q = |q|$ en $K = \arg q$; in dat geval moet men eerst draaien om de oorsprong over een hoek K en vervolgens vanuit die oorsprong vermenigvuldigen met de factor Q . Bij deze transformatie gaan rechte lijnen over in rechte lijnen en cirkels in cirkels.

Beschouw vervolgens de transformatie $w = \frac{1}{z}$. Bij elk punt $z \neq 0$ vindt men een ondubbelzinnig bepaald punt w . Hoe construeert men dit punt w ? Is $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, dan is

$$w = \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Het punt $w = \frac{1}{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ heeft hetzelfde argument als z , maar zijn modulus is het omgekeerde van de modulus van z .

Men verkrijgt dus w door het punt z te spiegelen t.o.v. de eenheidscirkel. (de eenheidscirkel is de cirkel met de oorsprong tot middelpunt en de eenheid tot straal). Het gevraagde punt w vindt men door w te spiegelen t.o.v. de bestaanbare as. Men construeert dus het punt $w = \frac{1}{z}$ door spiegeling t.o.v. de eenheidscirkel, gevolgd door een omklappen om de bestaanbare as. Bij deze transformatie gaan cirkels weer in cirkels over, als rechte lijnen beschouwd worden als speciale gevallen van cirkels.

Tenslotte zullen we een willekeurige lineaire transformatie beschouwen, dat wil zeggen een transformatie van de gedaante

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Deze transformatie wordt niet singulier verondersteld, d.w.z. wij nemen aan dat $ad - bc \neq 0$ is.

Bij elk punt z met hoogstens één uitzondering behoort dan een ondubbelzinnig bepaalde w en omgekeerd bij elke w met hoogstens één uitzondering behoort een ondubbelzinnig bepaalde z . Elke niet singuliere lineaire transformatie kan worden opgebouwd uit elementaire transformaties van de gedaante $w = z + p$, $w = qz$ en $w = \frac{1}{z}$. Immers is $c = 0$, dus $d \neq 0$, dan is

$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = w_1 + \frac{b}{d}, \text{ waar } w_1 = \frac{a}{d} z.$$

is $c \neq 0$, dan is

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + w_2.$$

waarin $w_2 = \frac{bc - ad}{c} w_3$ en $w_3 = \frac{1}{w_4}$ en $w_4 = z + \frac{d}{c}$.

Elk van deze lineaire transformaties voert cirkels in cirkels over,

zodat iedere lineaire niet singuliere transformatie cirkels in cirkels overvoert.

§3. Binomium van Newton.

Voor de optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen gelden dezelfde rekenregels als voor de overeenkomstige bewerkingen bij bestaande getallen. Zo vinden we, als a en b willekeurige complexe getallen voorstellen

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ a + b &= a + b \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \end{aligned}$$

Enz. De hierbij optredende getallenfactoren vormen een driehoekig schema, genaamd de driehoek van Pascal, n.l.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

In iedere rij is zowel het eerste als het laatste getal gelijk aan 1. Elk der overige getallen is, volgens definitie gelijk aan de som van de twee onmiddellijk daarboven staande getallen.

$a+b$ is een binomium (dat betekent: twee-term). De getallen voorkomende in de driehoek van Pascal heten daarom binomiaal coëfficiënten en worden in de regel met $\binom{n}{h}$ aangeduid, en wel zo, dat de driehoek van Pascal ook geschreven kan worden in de gedaante

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\ & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{array}$$

De binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{h}$ zijn dus gedefinieerd voor elk paar gehele getallen n en h met $n \geq h \geq 0$. Daarbij is

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1$$

terwijl $\binom{n}{h}$ voor $0 < h < n$ per definitie gelijk is aan

$$\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h}$$

Wij bewijzen thans, dat het getal $\binom{n}{h}$ gelijk is aan $\frac{n!}{h!(n-h)!}$. Hierbij wordt onder $n!$ verstaan het product der getallen $1, 2, \dots, n-1$ en n . Dus $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; ...

Onder $0!$ is men gewoon te verstaan het getal 1. Men heeft $n! = n(n-1)!$

Om de formule $\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!}$ te bewijzen passen we volledige indu toe ten aanzien van n . Voor $n = 0$ is de enige binomiaalcoefficient, die wij behoeven te beschouwen $\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}$, zodat de formule voor $n = 0$ juist is.

Voor $n > 0$ en $h = 0$ is de formule eveneens juist want men heeft $\binom{n}{0} = 1$ en $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.

Ook voor $n > 0$ en $h = n$ is de formule juist (bewijs dit !)

Wij onderstellen thans dat de formule voor $n-1$ in plaats van n is bewezen en mogen daarbij aannemen dat het natuurlijke getal h voldoet aan $0 < h < n$.

Derhalve kunnen we formule (1) toepassen en vinden

$$\binom{n}{h} = \binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} = \frac{(n-1)!(h-n+h)!}{(h-1)!(n-h)!} + \frac{(n-1)!}{h!(n-h-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!(h-n+h)!}{h!(n-h)!} = \frac{n!}{h!(n-h)!}$$

waarmee de gezochte formule bewezen is.

Opg. 1. Bewijs $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$.

Wij hebben thans gevonden voor ieder natuurlijk getal n

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n-h} = \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} a^h b^{n-h}$$

Wij kunnen deze formule ook schrijven in de gedaante $(a+b)^n =$

$$= \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!n!} a^h b^n$$

Opg. 2. Bewijs dat voor willekeurige gehele a en b de uitdrukking $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ deelbaar is door 7.

Met behulp van de gevonden formule is het ook mogelijk om een ontwikkeling van $(a+b+c)^n$ neer te schrijven.

Immers

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)^n &= [a + (b+c)]^n \\
 &= \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} a^h (b+c)^{n-h} \\
 &= \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!(n-h)!} a^h \sum_{k=0}^{n-h} \frac{(n-h)!}{k!(n-h-k)!} b^k c^{n-h-k} \\
 &= \sum_{h=0}^n \frac{n!}{h!} a^h \sum_{k=0}^{n-h} \frac{1}{k!(n-h-k)!} b^k c^{n-h-k} \\
 &= \sum_{\substack{h,k,m=0 \\ h+k+m=n}}^n \frac{n!}{h!k!m!} a^h b^k c^m
 \end{aligned}$$

De bedoeling is hierbij, dat de niet negatieve gehele getallen h, k en m alle gehele waarden van 0 tot en met n doorlopen, zodanig dat hun som gelijk aan n .

Voorbeeld.

$$(a+b+c)^3 = \sum_{\substack{h,k,m=0 \\ h+k+m=3}} \frac{3!}{h!k!m!} a^h b^k c^m.$$

Hierbij zijn voor (h,k,m) slechts mogelijk $(0,0,3)$, $(0,3,0)$, $(3,0,0)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$, $(2,0,1)$, $(1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(1,1,1)$. Elk der 10 gevonden stellen levert een term in het rechterlid. De coëfficiënt van b.v. de term abc is daarbij

$$\frac{3!}{1!1!1!} = 6.$$

Wij merken nog op, dat de termen met $(h,k,m) = (0,0,3)$, $(0,3,0)$ en $(3,0,0)$ analoog gebouwd zijn. Zij luiden c^3 , b^3 en a^3 . Zo zijn de volgende termen ook analoog. Men schrijft vaak kortweg

$$(a+b+c)^3 = \sum a^3 + 3 \sum a^2 b + 6 abc,$$

waarbij met $\sum a^3$ de som $a^3 + b^3 + c^3$ en met $\sum a^2 b$ de som $a^2 b + ab^2 + a^2 c + ac^2 + b^2 c + bc^2$ bedoeld wordt.

Opmerking. Op analoge wijze vindt men formules voor machten van veeltermen bestaande uit vier of meer termen. In het algemeen, een resultaat dat door volledige inductie te bewijzen is, komt men tot de formule

$$\left(\sum_{p=1}^r a_p \right)^n = \sum_{\substack{h_1, h_2, \dots, h_r=0 \\ h_1 + h_2 + \dots + h_r = n}} \frac{n!}{h_1! h_2! \dots h_r!} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_r^{h_r}$$

Opg. 2. Bepaal de coëfficiënt van x^n in de ontwikkeling van $(1+x+x^2)^3$.

Opg. 3. Bewijs $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Bereken $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

4. De reststelling.

De reststelling luidt als volgt:

Indien men een veelterm $f(x)$ deelt door $x - a$, ontstaat een rest, die gelijk is aan $f(a)$.

Voor het bewijs beschouwen we een willekeurige veelterm

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Dus

$$f(a) = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} a + a_n,$$

derhalve

$$f(x) - f(a) = a_0 (x^n - a^n) + a_1 (x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_{n-1} (x - a).$$

Elk der termen in het rechterlid is deelbaar door $x - a$; immers men heeft voor ieder natuurlijk getal p

$$x^p - a^p = (x-a)(x^{p-1} + a x^{p-2} + \dots + a^{p-1}).$$

Het rechterlid is dus zelfs deelbaar door $x - a$; men vindt dan

$$f(x) - f(a) = (x-a) V(x),$$

waarin $V(x)$ een in verband met het bovenstaande gemakkelijk te bepalen veelterm in x voorstelt. De laatste betrekking geschreven in de gedaante

$$f(x) = (x-a) V(x) + f(a)$$

brengt juist tot uitdrukking, dat de rest bij deling van $f(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $f(a)$.

Opmerking. Op de bovenaangegeven wijze is een zodanige veelterm $V(z)$ geconstrueerd, dat $f(z) - (x-a) V(x)$ gelijk is aan een constante.

Gevolg. Als voor een veelterm $f(x)$ geldt $f(a) = 0$, is de rest, bij deling door $x - a$, gelijk aan $f(a) = 0$, zodat de beschouwde veelterm dan deelbaar is door $x - a$.

Voorbeelden. De veelterm $f(x) = x^3 - 3x - 2$ neemt voor $x = 1$ de waarde -4 aan, dus de rest bij deling door $x - 1$ is gelijk aan -4 .

Opg. 1. Bepaal ook het quotiënt bij de laatstbeschouwde deling op de bovenaangegeven wijze.

Dezelfde veelterm is deelbaar door $x - 2$, want $f(2) = 0$.

Opg. 2. Bepaal de rest bij deling van

$$x^{10} - 4x^4 + 5x^7 - 6x^{11} + 2$$

door $x^2 - 1$

Opg. 3. Voor welke $\dots$ -waarde van het natuurlijke getal n is $(x+1)^n - x^n - 1$ deelbaar door $x + 1$?

Zij thans gevraagd de rest bij deling van $f(x)$ door $(x-a)(x-b)$, waarin we $a \neq b$ onderstellen.

Wij weten reeds dat er een veelterm $g(x)$ bestaat, zodanig dat

$$(1) \quad f(x) = (x-a) g(x) + c$$

Dezelfde overweging leert ons, dat er een veelterm $h(x)$ bestaat, zodanig dat $g(x) = (x-b) h(x) + d$.

Derhalve is

$$f(x) = (x-a)(x-b) h(x) + d(x-a) + c.$$

De gezochte rest is dus $r = d(x-a) + c$. Deze bepalen we nu verder uit de betrekkingen, die men door substitutie direct vindt

$$f(a) = c$$

$$f(b) = db - da + c, \text{ dus } d = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

$$\text{Hieruit volgt } r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + c - da$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}.$$

We hadden dit laatste resultaat iets vlugger gevonden door op te merken dat blijkens (1) de rest van $f(x)$ na deling door $(x-a)(x-b)$ van de gedaante $mx + n$ is, dus

$$f(x) = (x-a)(x-b) g(x) + mx + n.$$

Derhalve

$$f(a) = am + n$$

$$f(b) = bm + n,$$

$$\text{dus } m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}; \quad n = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}.$$

De gevonden rest bleek te zijn die functie in x van de eerste graad, die voor $x = a$ een gegeven waarde $f(a)$ en voor $x = b$ een gegeven waarde $f(b)$ aanneemt. Zij thans gevraagd een veelterm van de graad $n-1$ te bepalen, die voor $x = a_1$ een waarde A_1 , voor $x = a_2$ een waarde A_2 , ... en ten slotte voor $x = a_n$ een waarde A_n aanneemt.

Dit vraagstuk is op twee verschillende wijzen opgelost, nl. Newton en Lagrange.

Eerst behandelen wij twee methoden die voeren tot een formule, die de interpolatieformule van Lagrange wordt genoemd.

Zij de gezochte veelterm

$$f(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-1}$$

Dan heeft men

$$A_1 = c_0 a_1^{n-1} + c_1 a_1^{n-2} + \dots + c_{n-1}$$

$$A_2 = c_0 a_2^{n-1} + c_1 a_2^{n-2} + \dots + c_{n-1}$$

$$A_n = c_0 a_n^{n-1} + c_1 a_n^{n-2} + \dots + c_{n-1}$$

Met behulp van determinanten volgt uit $n+1$ betrekkingen door eliminatie van de getallen $1, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, die niet allen nul zijn,

$$\begin{vmatrix} f(x) & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \\ A_1 & a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & 1 \\ A_2 & a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ontwikkeling naar de eerste kolom levert

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} f(x) = \begin{vmatrix} x^{n-1} & \dots & 1 \\ a_2^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} A_1 + \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & \dots & 1 \\ x^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} A_2 + \dots + \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} A_n$$

derhalve wegens de stelling van van der Monde ter berekening der determinanten in de laatste betrekking

$$f(x) = \frac{(x-a_2) \dots (x-a_n)}{(a_1-a_2) \dots (a_1-a_n)} A_1 + \frac{(x-a_1)(x-a_3) \dots (x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1) \dots (a_n-a_1)} A_2 + \dots$$

De gevonden formule is ook op andere wijze te vinden. Laten we dit demonstreren aan het geval, waarin gevraagd wordt een veelterm $f(x)$ van de derde graad te bepalen, waarvoor geldt $f(a) = A, f(b) = B$

$$f(c) = C, f(d) = D.$$

Het blijkt dat men de veelterm van de volgende gedaante kan onder-
len:

$$f(x) = x(x-a)(x-b)(x-c) + \frac{A}{(x-a)(x-b)(x-c)} + \frac{B}{(x-a)(x-b)(x-c)} + \frac{C}{(x-a)(x-b)(x-c)} + \frac{D}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Substitutie van $x = a$ levert

$$A = f(a) = x(a-b)(a-c)(a-d)$$

waaruit volgt

$$x = \frac{A}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

en op analoge manier vindt men B , C en D .

Opg. 3.1. Bepaal de quadratische veelterm, die in de punten $x=3, 4$ en $x=5$ resp. de waarden $6, 4$ en 0 aanneemt.

Opg. 4. Bepaal de veelterm van de derde graad, die voor $x=1, 2, 3, 4$ resp. gelijk is aan $1, 2, 4, 8$. Antwoord $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x$.

De gezochte veelterm van de derde graad, die voor $x=a, b, c, d$ resp. de waarden A, B, C, D aanneemt, kan ook op andere wijze worden gevonden, een methode, die van Newton afkomstig is. We proberen de gezochte veelterm in de gedaante te vinden

$$(2) \quad f(x) = x + \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)(x-b)} + \frac{C}{(x-a)(x-b)(x-c)};$$

we bepalen eerst de onbekende coëfficiënt A door de substitutie $x=a$.

Men vindt $x = f(a) = A$. Is x eenmaal bepaald, dan vindt men B door de substitutie $x=b$, die ons leert

$$A + \frac{B}{(b-a)} = f(b) = B,$$

dus $B = \frac{B-A}{b-a}$, enz. Deze methode heeft het voordeel, dat de gevonden cubische veelterm gebruikt kan worden in alle gevallen, waarin een veelterm wordt gevraagd, die voor $x = a, b, c, d, e, \dots$ resp. de waarde $A, B, C, D, E, \dots$ aanneemt.

Het "beginstuk" van zo'n veelterm is juist het zoëven bepaalde gedeelte (2).

Opmerking: De beide methoden om de gezochte veelterm te vinden zijn reeds toegepast bij het zoeken naar de rest bij deling van $f(x)$ door $(x-a)(x-b)$.

Opg. 5. Bepaal de veelterm van de derde graad, die in de punten $x = 1, 2, 3$ gelijk is aan nul.

Opg. 6. Hoe vindt men volgens de methode van Newton de meest algemene veelterm van de vierde graad, die voor $x = 1, 2, 3$ gelijk is aan nul?

Hoe de meest algemene veelterm van de vijfde graad?

5. Nulpunten van veeltermen.

Een getal a heet een nulpunt van een veelterm $f(x)$ als geldt $f(a) = 0$.

Neemt man aan, dat elke veelterm $f(z)$ ten minste één nulpunt heeft, *) dan levert de reststelling ons een belangrijk resultaat. Noem dit nulpunt z_1 . Dan is $f(z)$ volgens de reststelling deelbaar door $z - z_1$, dus er bestaat een veelterm $g(z)$, zodanig dat

$$f(z) = (z - z_1) g(z).$$

De graad van $g(z)$ is één lager dan die van $f(z)$. Is de graad van $f(z)$ groter dan 1, dan is van $g(z)$ de graad ≥ 1 , zodat er, alweer volgens bovengenoemde stelling, een getal z_2 bestaat met $g(z_2) = 0$, dus wegens de reststelling bestaat er een veelterm $h(z)$ met $g(z) = (z - z_2) h(z)$, derhalve

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) h(z).$$

Zo voortgaande vindt men

$$(1) \quad f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) k,$$

waarin n de graad van $f(z)$ aangeeft en k een constante voorstelt.

Is $f(z)$ van de gedaante

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

dan vindt men, door in de beide leden der betrekking (1) de coëfficiënt van z^n te vergelijken, het resultaat $k = a_0$, zodat we uiteindelijk vinden

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Indien men het rechterlid van de laatstgevonden betrekking uitwerkt, levert vergelijking der coëfficiënten van z^{n-1} links en rechts

$$a_1 = -a_0 (z_1 + z_2 + \dots + z_n).$$

Zo voortgaande kunnen we elk der coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n$ uitdrukken in a_0 en de getallen $z_1, \dots, z_n$. Hierop komen we later terug.

Opg. 2. Bewijs: $a_n = a_0 (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n$.

Opg. 3. Beschouw de vergelijking $x^4 - 33x^2 + 20x + 12 = 0$.

Toon aan dat iedere gehele wortel dezer vergelijking een deler is van het getal 12 en bepaal daarna alle gehele wortels van deze vergelijking. Zij gegeven een vergelijking

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

*) Van deze stelling, de hoofdstelling der algebra genoemd, bestaan verschillende bewijzen. Een zeer eenvoudig bewijs wordt later gegeven in het College Functietheorie I.

Dan vindt men een vergelijking waarvan alle wortels k groter zijn dan de resp. wortels der gegeven vergelijking door z in de gegeven vergelijking te vervangen door $z - k$.

Dan ontstaat de vergelijking

$$f(z-k) = a_0 (z-k)^n + a_1 (z-k)^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Bewijs: Zij z_1 een wortel van de oorspronkelijke vergelijking. Dan heeft men dus de betrekking $f(z_1) = 0$. Dus $f(z_1 + k - k) = 0$ en dit houdt in dat het getal $z_1 + k$ een wortel is van de nieuwe vergelijking $f(z-k) = 0$.

Opg. 4. De wortels der vergelijking $f(\frac{z}{a}) = 0$ zijn a keer zo groot als die van de vergelijking $f(z) = 0$.

Opg. 5. Bepaal de vergelijking waarvan de wortels de reciproken zijn van die van de vergelijking $f(z) = 0$.

Opg. 6. Bewijs dat voor de vergelijking

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

waarin $a_n \neq 0$, geldt

$$\frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} = - \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Opg. 7. Bepaal de verg., waarvan de wortels gelijk zijn aan de derdemachtswortels van die van de vergelijking

$$z^2 - 7z - 8 = 0.$$

Opg. 8. Bepaal de vergelijking waarvan de wortels de derdemachten zijn van die van de vergelijking $z^2 - 7z - 8 = 0$.

Opg. 9. Zijn de wortels van de vergelijking $z^3 + 3z^2 + 5z + 7 = 0$ gelijk aan z_1, z_2, z_3 , bepaal dan een vergelijking met wortels $4z_1 + 3, 4z_2 + 3, 4z_3 + 3$.

Definitie. Een getal a is een tweevoudig of dubbel nulpunt van de veelterm $f(z)$, als er een veelterm $g(z)$ bestaat, zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^2 g(z),$$

maar geen veelterm $h(z)$, zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^3 h(z).$$

In het algemeen heet een getal a een k -voudig nulpunt van de veelterm $f(z)$, als er een veelterm $g(z)$ bestaat zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

maar geen veelterm $h(z)$, zodanig dat

$$f(z) = (z-a)^{k+1} h(z).$$

Opg. 10. Bewijs dat een veelterm van de n^e graad geen $(n+1)$ -voudig nulpunt kan bezitten. Schrijf een vergelijking van de n^e graad op, die een n -voudig nulpunt bezit.

Om uit te maken of een vergelijking meervoudige wortels bezit, hebben wij een proces nodig dat men differentiëren noemt. Wij behandelen dit proces onafhankelijk van de analyse.

Def. Als $f(z) = z^n$, dan noemt men de afgeleide functie van f de vorm

$$f'(z) = n \cdot z^{n-1}.$$

Hierin stelt n een willekeurig natuurlijk getal voor. Verder definiëren we: De afgeleide van het getal 1 is nul, zodat de bovenbeschouwde formule ook voor $n = 1$ geldt.

Def. De afgeleide functie van $af(z)$ is gelijk aan $af'(z)$. Hierin stelt a een willekeurige constante voor.

Opg. 11. De afgeleide van de functie $f(z) = a$ is gelijk aan nul.

Def. De afgeleide van de functie $f(z) + g(z)$ is gelijk aan $f'(z) + g'(z)$.

Opmerking. De laatste definities kunnen beide worden toegepast om de afgeleide van $pf(z)$, waarin p een natuurlijk getal voorstelt, te bepalen.

Opg. 12. Toon aan dat zij hetzelfde resultaat opleveren.

Op grond van deze definities heeft men:

$$\text{Is } f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

dan is de afgeleide functie $f'(z)$ gelijk aan

$$f'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Opg. 13. Bepaal de afgeleide van de functie

$$f(z) = (z-1)^2.$$

Stelling. De afgeleide van een product $f(z) g(z)$ is gelijk aan

$$f'(z) g(z) + f(z) g'(z).$$

Hierin stellen $f(z)$ en $g(z)$ veeltermen voor.

Om deze eigenschap te bewijzen merken we op, dat als $g(z) = h(z) + k(z)$, het voldoende is de formule voor de producten $f(z) h(z)$ en $f(z) k(z)$ te bewijzen, want als dit geschiedt is heeft men

$$\begin{aligned} (f(z) g(z))' &= (f(z) (h(z) + k(z)))' \\ &= (f(z) h(z) + f(z) k(z))' = (f(z) h(z))' + (f(z) k(z))' \\ &= f(z) h'(z) + f'(z) h(z) + f(z) k'(z) + f'(z) k(z) \\ &= f(z) (h'(z) + k'(z)) + f'(z) (h(z) + k(z)) \\ &= f(z) (h(z) + k(z))' + f'(z) (h(z) + k(z)) \\ &= f(z) g'(z) + f'(z) g(z). \end{aligned}$$

Evenzo is het bij $f(z) = p(z) + q(z)$ voldoende de formule voor elk der producten $p(z) g(z)$ en $q(z) g(z)$ te bewijzen.

Beschouw nu de veeltermen $f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$
en $g(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$.

Wij kunnen voor het bewijs van onze stelling volstaan met het bewijs ervan voor een product van de gedaante $a z^r \cdot b z^s$, waarin r en s niet negatieve gehele getallen zijn.

Opg. 14. Toon aan dat het voldoende is de eigenschap voor het product $z^r \cdot z^s$ te bewijzen.

Wij hebben nu nog slechts het bewijs van onze eigenschap voor het product $z^r z^s$ te leveren. Men heeft $(z^r z^s)' = (z^{r+s})' = (r+s)z^{r+s-1} =$

$$= r z^{r-1} z^s + s z^r z^{s-1} = (z^r)' z^s + (z^s)' z^r,$$

waarmee de beschouwde eigenschap bewezen is.

Stelling. De afgeleide van de functie $(z-a)^n$ is gelijk aan $n(z-a)^{n-1}$.

Bewijs door volledige inductie. Voor $n = 1$ (of nul; ga dit na!) is de eigenschap reeds bekend.

Zij de eigenschap voor $n-1$ in plaats van n reeds bewezen. Dan heeft men

$$\begin{aligned} ((z-a)^n)' &= ((z-a)^{n-1} (z-a))' = ((z-a)^{n-1})' (z-a) + (z-a)^{n-1} (z-a)' \\ &= (n-1)(z-a)^{n-2} (z-a) + (z-a)^{n-1} \cdot 1 = n(z-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Stelling. Is $f(z) = (z-a)^k g(z)$, dan bestaat er een veelterm $h(z)$ zodanig dat $f'(z) = (z-a)^{k-1} h(z)$.

Bewijs: Men heeft

$$\begin{aligned} f'(z) &= ((z-a)^k g(z))' = ((z-a)^k)' g(z) + (z-a)^k g'(z) \\ &= k(z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k g'(z), \end{aligned}$$

dus

$$(2) \quad f'(z) = (z-a)^{k-1} \left\{ k g(z) + (z-a) g'(z) \right\}.$$

Stelling. Is a een k -voudig nulpunt van $f(z)$, dan is a een $(k-1)$ -voudig nulpunt van $f'(z)$.

Bewijs: Dat $f'(z)$ in dit geval deelbaar is door $(z-a)^{k-1}$, is in de voorgaande stelling bewezen. Ons rest dus nog aan te tonen, dat $f'(z)$ niet deelbaar is door $(z-a)^k$.

Nu heeft men $f(z) = (z-a)^k g(z)$, maar er bestaat geen veelterm $h(z)$ met $f(z) = (z-a)^{k+1} g(z)$, dus er is geen veelterm $h(z)$ met $g(z) = (z-a) h(z)$, dus $g(z)$ is niet deelbaar door $z-a$. In formule (2) is dus de laatste factor in het rechteklid niet deelbaar door $z-a$, dus $f'(z)$ is niet deelbaar door $(z-a)^k$, waarmee de verlangde eigenschap

bewezen is.

Is a een k -voudig nulpunt van $f(z)$, dan is a een $(k-1)$ -voudig nulpunt van $f'(z)$, dus, als we deze eigenschap nog eens toepassen op wel op $f'(z)$ in plaats van $f(z)$: het getal a is een $(k-2)$ -voudig nulpunt van $f''(z)$. Zo voortgaande vindt men uiteindelijk dat a een enkelvoudig nulpunt is van $f^{(k-1)}(z)$, maar geen nulpunt is van $f^{(k)}(z)$.

Opg. 15. Zij a een k -voudig nulpunt van $f(z)$. Kan a dan een nulpunt zijn van $f^{(k+1)}(z)$? Geef een voorbeeld van het gevonden resultaat.

Opg. 16. Toon aan, dat als de vergelijking

$$z^2 + p z + q = 0$$

een dubbele wortel bezit, de relatie $\frac{1}{4}p^2 - q = 0$ geldt.

Opg. 17. Bepaal de meervoudige wortels van de vergelijking

$$z^4 - z^3 - 5 z^2 + 12 = 0.$$

Wenst men bij een vergelijking $f(z) = 0$ alle meervoudige wortels a te vinden, dan zoekt men dus wortels zowel van $f(z) = 0$ als van $f'(z) = 0$, zodat beide veeltermen $f(z)$ en $f'(z)$ deelbaar zijn door $z-a$. Men kan het getal a dan vinden door de G.G.D. $g(z)$ te bepalen van de veeltermen $f(z)$ en $f'(z)$, welke veelterm $g(z)$ dan eveneens door $z-a$ deelbaar is. Iedere wortel van $g(z) = 0$ is voorts een meervoudige wortel van $f(z)$.

Opg. 18. De vergelijking $z^4 - 4 z + a = 0$ heeft een reële meervoudige wortel. Bepaal deze en los de vergelijking daarna op.

Opg. 19. Bepaal de dubbele wortels van $(z+1)^7 - z^7 - 1 = 0$ en los de vergelijking daarna op.

Een getal heet algebraïsch, als het een nulpunt is van een veelterm met rationale (dus ook van een veelterm met reële) coëfficiënten.

Opg. 20. De getallen i , $\sqrt[3]{2+i}$, $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\sqrt[n]{n}$ zijn algebraïsch.

Opmerking. Met behulp van niet-algebraïsche hulpmiddelen is in 1882 door Lindemann bewezen dat de getallen e en π niet algebraïsch zijn.

§ 6. De binomiaalvergelijking.

Een binomiaalvergelijking is een vergelijking van de gedaante $az^m + bz^n = 0$.

Hierin stellen a en b gegeven complexe getallen voor; n en m zijn natuurlijke getallen.

Wij mogen veronderstellen $a \neq 0$, $b \neq 0$ en verder kunnen we, zonder de algemeenheid te schaden, aannemen $n > m$.

De vergelijking neemt dan de gedaante aan

$$a z^m (z^{n-m} + \frac{b}{a}) = 0.$$

Behalve m wortels $z = 0$ vinden we nog wortels, die voldoen aan $z^{n-m} + \frac{b}{a} = 0$.
 Stel $n - m = p$; $-\frac{b}{a} = A(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Dan is

$$z^p = -A(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

waarvan de wortels zijn

$$z = \sqrt[p]{A} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{p} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{p} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

Toepassing. Gevraagd wordt de wortels te vinden van

$$z^{10} = 1 + i.$$

Men heeft $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, dus

$$z = \sqrt[20]{2} \left(\cos \frac{5+4k}{20} \pi + i \sin \frac{5+4k}{20} \pi \right) \quad (k = 0, 1, \dots, 9).$$

Opg. 1. Bereken de wortels uit i , d.w.z. los op de vergelijking $z^2 = i$.

Opg. 2. Als de vergelijking $z^n = a$ een dubbele wortel heeft, heeft zij zelfs een n -voudige wortel.

Speciale aandacht verdient de vergelijking

$$z^n = 1$$

met de n wortels

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Deze getallen z_k liggen allen op de eenheidscirkel en vormen de hoekpunten van een regelmatige n -hoek.

De niet-reële wortels dezer vergelijking zijn paarsgewijze toegevoegd complex.

Men heeft dus $z_k = \overline{z_{n-k}}$ $(k = 1, \dots, n-1)$.

Opg. 3. Bewijs dit.

Het oplossen der vergelijking $z^3 = 1$ levert ons dus de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Men vindt uit $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$ direct de wortels

$$z_1 = 1; \quad z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}.$$

Hieruit vindt men dus de bekende formules uit de goniometrie terug $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Gewoonlijk geeft men het getal $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}$ aan door de letter ρ .

Opg. 4. Bewijs: $z_3 = z_2^2$; $z_2 = z_3^2$; $z_2 + z_3 = -1$; $z_2 z_3 = 0$.

De 3 derdemachtswortels uit een getal a zijn van de gedaante α , $\alpha\rho$ en $\alpha\rho^2$, waarbij α een der wortels van $z^3 = a$ voorstelt.

Opg. 5. Bewijs dit.

Ook de formules voor regelmatige vijf- en tienhoek zijn te vinden met boven behandelde methoden.

We lossen daartoe op de vergelijking $z^5 = 1$, dus afgezien van de wortel $z = 1$ hebben we de wortels te zoeken van de vergelijking $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ welke we door een kunstgreep kunnen bepalen. Voor nl. de hulpgrötoheid $u = z + \frac{1}{z}$ in, dan gaat onze vergelijking over in

$$u^2 + u - 1 = 0.$$

Nadat hieruit u bepaald is vindt men uit $u = z + \frac{1}{z}$ de gezochte vier andere wortels van $z^5 - 1 = 0$.

Opg. 6. Vcer dit uit.

Opmerking: Het is door de wiskundige Gauss aangetoond, dat op deze wijze de wortels van $z^{17} - 1 = 0$ gevonden kunnen worden en dat de zijde der regelmatige 17-hoek kan worden geconstrueerd met passer en lineaal. Gauss toonde aan dat slechts construeerbaar zijn de zijden der regelmatige n -hoek, waarbij

$$n = 3, 5, 17, 257, \dots$$

of een product van een willekeurige macht van het getal 2 en de eerste macht van een willekeurig aantal der getallen 3, 5, 17, 257,

De laatste rij getallen is de rij der priemgetallen van de gedaante $2^m + 1$. Een zodanig getal p kan slechts priem zijn als m zelf een macht van 2 is, dus zo'n getal p moet zeker van de gedaante $p = 2^{2^k} + 1$ zijn ($k = 0, 1, 2, \dots$). Niet alle getallen van deze gedaante zijn echter priem want voor $k = 5$ vindt men het getal $2^{32} + 1$, dat, zoals Euler in 1753 heeft opgemerkt, deelbaar is door 641 .. Het getal $2^{64} + 1$ is deelbaar door 274177 (in 1880 door Landry bewezen). Voor $k = 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38$ en 73 heeft men ook kunnen bewijzen dat $2^{2^k} + 1$ niet priem is. Het getal $2^{16} + 1 = 65537$ is wel priem; de regelmatige 65537-hoek is dus volgens Gauss te construeren met passen en lineaal. De getallen $2^{2^k} + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) heten de getallen van Fermat.

Opg. 7. Men vermindert de wortels der vergelijking $z^n - 1 = 0$ allen met 1, dus beschouwt de wortels van de vergelijking $(w+1)^n - 1 = 0$.

Bewijs dat het product der koorden, die in een regelmatige n -hoek beschreven in de eenheidscirkel, één hoekpunt verbinden met elk der andere hoekpunten, gelijk is aan n .

Opg. 8. Bewijs $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Ten slotte geven we nog even in het kort aan hoe Gauss de vergelijking $z^{17} - 1 = 0$ oploste.

Men heeft $(z^{17} - 1) = (z - 1)(z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1)$,

zodat we slechts de vergelijking

$$z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$$

behoeven te beschouwen. De wortels hiervan zijn

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{17} + i \sin \frac{2\pi k}{17} \quad (k = 1, 2, \dots, 16)$$

Men heeft $z_1 + z_2 + \dots + z_{16} = -1$.

We stellen nu $z_k + z_{17-k} = w_k$. $(k = 1, \dots, 16)$

Dus $w_k = 2 \cos \frac{2\pi k}{17}$. Hieruit volgt $w_k = w_{17-k}$ en $w_k w_m = w_{k+m} + w_{k-m}$.

Dus $w_1 + \dots + w_8 = -1$.

Verder stellen we in navolging van Gauss

$$\begin{cases} u_1 = w_1 + w_2 + w_4 + w_8 \\ u_2 = w_3 + w_5 + w_6 + w_7 \end{cases}$$

Dan is $u_1 + u_2 = -1$ en $u_1 u_2 = 4 (w_1 + \dots + w_8) = -4$.

Hieruit zijn u_1 en u_2 te bepalen (alleen met behulp van vierkantswortels!). Men overtuige er zich van dat $u_1 > 0 > u_2$.

Stel nu $v_1 = w_1 + w_4$; $v_2 = w_2 + w_8$; $v_3 = w_3 + w_5$; $v_4 = w_6 + w_7$.

Dan is

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = u_1 \\ v_1 v_2 = -1 \\ v_1 > 0 > v_2 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} v_3 + v_4 = u_2 \\ v_3 v_4 = -1 \\ v_3 > 0 > v_4 \end{cases}$$

Hieruit zijn v_1, v_2, v_3 en v_4 , wederom alleen met vierkantswortels, te bepalen.

Uiteindelijk heeft men

$$\begin{aligned} w_1 + w_4 &= v_1 \\ w_1 w_4 &= v_3 \\ w_1 &> w_4 \end{aligned}$$

waaruit, alweer alleen met vierkantswortels, w_1 en w_4 te bepalen zijn.

Tenslotte is $a_{34} = 2R \sin \frac{\pi}{34} = 2R \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{34}) = 2R \cos \frac{16\pi}{17} = w_4 R$.

§7. De cubische en bikwadratische vergelijking.

Beschouw een willekeurige cubische vergelijking

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Om hiervan de wortels te bepalen gaan we de drie wortels met een zodanig getal vermeerderen, dat de drie zo ontstane getallen wortels zijn van een cubische vergelijking, waarvan de quadratische term ontbreekt.

De substitutie $z = w-k$ levert

$$(w-k)^3 + a(w-k)^2 + b(w-k) + c = 0,$$

$$\text{dus } w^3 + (a - 3k)w^2 + (3k^2 - 2ak + b)w - k^3 + ak^2 - bk + c = 0.$$

Wij kiezen derhalve $k = \frac{a}{3}$ en vinden dat w voldoet aan een vergelijking van de gedaante

$$(1) \quad w^3 + pw + q = 0,$$

welke vergelijking wij thans gaan oplossen volgens een door Cardano gegeven methode.

Stel $w = u + v$, waardoor de vergelijking de gedaante

$$u^3 + v^3 + (p+3uv)(u+v) + q = 0$$

aanneemt. Wij kunnen aan de getallen u en v , waarvan slechts de som w vastligt, nog één voorwaarde opleggen en eisen

$$3uv + p = 0. \text{ Dan geldt dus}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

De getallen u en v zijn hieruit te bepalen. Men vindt b.v.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}; \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}.$$

Hieruit volgt

$$u = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \text{ waarin } \varepsilon = 1, \rho \text{ of } \rho^2 \text{ is.}$$

Evenzo

$$v = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \text{ waarin } \varepsilon_2 = 1, \rho \text{ of } \rho^2.$$

Het is niet zo dat hieruit 9 mogelijkheden voor u en v volgen, want de getallen ε_1 en ε_2 moeten zo gekozen zijn dat $3uv = -p$, zodat bij een bepaalde keuze van het getal ε_1 slechts één waarde van ε_2 behoort. Bij elk der drie keuzen van ε_1 vindt men een bijbehorende waarde van ε_2 , zodat men drie corresponderende stellen (u, v) vindt en dus ook drie waarden voor de wortel $w = u + v$ der beschouwde vergelijking.

Opg.1. Bepaal de wortels van de vergelijking

$$z^3 + z\sqrt[3]{6} + i = 0.$$

In het vervolg onderstellen we dat p en q reëel zijn en onderscheiden verder drie gevallen.

1e geval. Onderstel $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$.

Dan zijn de getallen

$$m = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \text{ en } n = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \text{ reëel en wegens } uv = -\frac{p}{3},$$

dus uv is reëel, heeft men

$$u = m, v = n \text{ of } u = \rho m, v = \rho^2 n \text{ of } u = \rho^2 m, v = \rho n,$$

dus

$$w_1 = m + n; w_2 = \rho m + \rho^2 n; w_3 = \rho^2 m + \rho n.$$

Hierin is w_1 reëel, maar w_2 en w_3 niet reëel, want hun som is weliswaar reëel (n.l. $-m-n$, waarom?) maar hun verschil is

$$(\rho - \rho^2)(m-n) = (2\rho+1)(m-n) \text{ en dit getal is zuiver imaginair wegens}$$

$$2\rho + 1 = \frac{1}{2}i\sqrt{3} \text{ en } m \neq n, \text{ zodat } w_2 \text{ en } w_3 \text{ toegevoegde complex zijn.}$$

Opg. 2. Waarom is $m \neq n$?

Als $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$ heeft de beschouwde cubische vergelijking (1) dus één reële en twee toegevoegde complexe wortels.

$$2\text{e geval. Onderstel } \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0.$$

De getallen m en n zijn dan reëel en gelijk. Men heeft

$$w_1 = m+n = 2m; w_2 = \rho m + \rho^2 n = -m; w_3 = \rho^2 m + \rho n = -m,$$

zodat de vergelijking twee samenvallende wortels bezit.

Opg. 3. Bewijs dit resultaat ook door naast vergelijking (1) de "afgeleide" vergelijking te beschouwen.

$$3\text{e geval. } \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0.$$

In dit geval zijn de getallen $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$ en $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$ toegevoegd complex, dus m en n ook. Daar het product mn dan reëel is en $uv = -\frac{p}{3}$ ook reëel is, kiese men

$$w_1 = m+n; w_2 = \rho m + \rho^2 n; w_3 = \rho^2 m + \rho n.$$

De wortel w_1 is dus reëel. Echter zijn ρ en ρ^2 toegevoegd complex; m en n ook, dus ρm en $\rho^2 n$ ook, dus w_2 is eveneens reëel. Dan is ook w_3 reëel. Het karakter der wortels van de vergelijking $z^3 + pz + q = 0$ hangt dus af van de vorm $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$, die de discriminant van deze vergelijking wordt genoemd.

Men heeft dus

$D > 0$ één reële en twee toegevoegd complexe wortels.

$D = 0$ reële wortels, waarvan er twee gelijk zijn.

$D < 0$ drie verschillende reële wortels.

Opg. 4. Toon aan dat in het derde geval de drie wortels inderdaad verschillend zijn.

Het derde geval beschouwen we nog iets nader. Men kan proberen om

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \text{ te vinden in de gedaante } s + it \text{ door de betrekking}$$

$$(s + it)^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \text{ te beschouwen.}$$

Men heeft dan $s^3 - 3st^2 = -\frac{q}{2}$
 $3s^2t - t^3 = \sqrt{-\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}$

Quadrateren en optellen levert

$$(s^2 + t^2)^3 = -\frac{p^3}{27},$$

dus, daar $s^2 + t^2$ reëel is, $s^2 + t^2 = -\frac{p}{3}$, dus $t^2 = -\frac{p}{3} - s^2$,

hetgeen na substitutie in de eerste betrekking voor s en t levert

$$s^3 + ps + 3s^3 = -\frac{q}{2},$$

dus

$$(2s)^3 + p(2s) + q = 0,$$

zodat we om s te vinden weer bij de oorspronkelijke vergelijking terecht zijn gekomen. Dit is de reden waarom het derde geval wel het onherleidbare geval wordt genoemd.

Een methode, die wel tot het gestelde doel voert, is de volgende.

Stel $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}} = a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Dan heeft men

$$a^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = -\frac{q}{2} + i\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}},$$

dus

$$a^6 = -\frac{p^3}{27} \text{ of (a is n.l. reëel) } a = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

N.B. Wegens $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ is $\frac{p^3}{27} < 0$, dus $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ reëel.

Voorts heeft men $\cos 3\varphi = -\frac{q}{2a^3}$; $\sin 3\varphi = \frac{\sqrt{-\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}}}{a^3}$.

Hieruit bepale men 3φ , waarna voor φ drie hoeken mogelijk zijn, die allen $\frac{2\pi}{3}$ verschillen.

Boter is het om in het onherleidbare geval direct de goniometrie te hulp te roepen.

Beschouw weer de vergelijking $z^3 + pz + q = 0$ met $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$, dus $p < 0$.

Stel $z = a \cos \varphi$ (in dit geval is elke wortel z immers reëel, zodat deze substitutie geoorloofd is).

Men heeft dan na substitutie wegens $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$

$$a^3 \cos 3\varphi + 3a^3 \cos \varphi + 4pa \cos \varphi + 4q = 0.$$

Kies nu a zo dat $3a^2 + 4p = 0$, hetgeen mogelijk is wegens $p < 0$. Dan vindt men $a^3 \cos 3\varphi = -4q$, dus $\cos 3\varphi = -\frac{4q}{a^3}$.

Wegens $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ en $p = -\frac{3}{4}a^2$ heeft men $a^3 \left| \frac{4q}{a^3} \right| < 1$, zodat inderdaad een hoek 3φ bepaald kan worden zodanig dat $\cos 3\varphi = -\frac{4q}{a^3}$. Is deze hoek gevonden, afgezien van veelvouden van 2π , dan is φ bepaald op een veelvoud van $\frac{2\pi}{3}$ na, zodat men drie verschillende waarden vindt voor $z = a \cos \varphi$.

Opg. 4. De hier gevonden hoeken φ zijn dezelfde als die bij de voorgaande methode gevonden.

Opg. 5. Los op de vergelijking $z^3 - 3z - 1 = 0$.

Tenslotte geven we in het kort een methode aan, om rechtstreeks de vierdegraadsvergelijking

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

op te lossen.

Wij trachten het linkerlid te brengen in de gedaante

$$(z^2 + \frac{a}{2}z + p)^2 - (qz + r)^2,$$

waarna de ontbinding

$$(z^2 + \frac{a}{2}z + qz + p + r)(z^2 + \frac{a}{2}z - qz + p - r)$$

ons de vier gezochte wortels oplevert.

We behoeven dus nog slechts de getallen p , q en r te bepalen.

Men heeft door vergelijking der coëfficiënten

$$(2) \quad \begin{cases} 2p - q^2 = b - \frac{a^2}{4} \\ ap - 2qr = c \\ p^2 - r^2 = d \end{cases}$$

Uit de tweede betrekking lost men q op en vult dit in in de eerste, waarna er komt

$$2p - \left(\frac{ap-c}{2r}\right)^2 = b - \frac{a^2}{4},$$

dus

$$4r^2(2p + \frac{a^2}{4} - b) = (ap-c)^2,$$

waarna de laatste der betrekkingen (2) ons leert

$$(p^2-d)(8p+a^2-4b) = (ap-c)^2$$

Uit deze cubische betrekking is p te bepalen, waarna de betrekkingen (2) ons q en r opleveren.

Op een nadere bespreking der mogelijke gevallen gaan wij hier niet in.

Opg. 6. Los op de boven aangegeven wijze op de vergelijking

$$z^4 + 4z^3 + 4z^2 - 4z + 1 = 0.$$

§4. Symmetrische functies.

Bij de vierkantsvergelijking $z^2 - a_1 z + a_2 = 0$ met de wortels z_1 en z_2 zijn de elementair-symmetrische functies $a_1 = z_1 + z_2$ en $a_2 = z_1 z_2$. Wij gaan nu beschouwen gehele rationale symmetrische functies van z_1 en z_2 , dwz. veeltermen in z_1 en z_2 , die niet veranderen, als z_1 en z_2 worden verwisseld. Bij voorbeeld:

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2 z_1 z_2 = a_1^2 - 2 a_2.$$

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3 z_1 z_2 (z_1 + z_2) = a_1^3 - 3 a_1 a_2.$$

$$z_1^4 + z_2^4 = (z_1 + z_2)^4 - z_1 z_2 (4 z_1^2 + 6 z_1 z_2 + 4 z_2^2) = a_1^4 - a_2 (4 a_1^2 - 6 a_2).$$

In deze voorbeelden hebben we genomen homogene veeltermen in z_1 en z_2 resp. van de graad 2, 3 en 4. In het eerste antwoord hebben we gevonden een veelterm in a_1 en a_2 , waarvan elke term het gewicht 2 bezit; daarbij wordt aan een constante het gewicht 0, aan a_1 het gewicht 1 en aan a_2 het gewicht 2 toegekend en onder het gewicht van een product verstaan de som van de gewichten der factoren. Een veelterm, waarvan elke term eenzelfde gewicht bezit, heet isobaar (isos. = gelijk; baros = gewicht). Het eerste antwoord is dus een isobare veelterm met gewicht 2. Het tweede antwoord is een isobare veelterm met gewicht 3 en het derde een isobare veelterm met gewicht 4. Ander voorbeeld :

$$\begin{aligned} z_1^4 + 3 z_1^3 z_2 + 3 z_1 z_2^3 + z_2^4 &= (z_1^4 + z_2^4) + 3 z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^2) \\ &= a_1^4 - 4 a_1^2 a_2 + 2 a_2^2 + 3 a_2 (a_1^2 - 2 a_2) \end{aligned}$$

zodat dit antwoord wederom een isobare veelterm met gewicht 4 is.

We gaan nu de volgende stelling bewijzen.

Een homogene symmetrische veelterm in z_1 en z_2 van de m^e graad is te schrijven als een isobare veelterm in a_1 en a_2 met gewicht m .

De bewering is evident voor $m=1$, want een homogene symmetrische veelterm in z_1 en z_2 van de 1^e graad heeft de gedaante $cz_1 + cz_2 = ca_1$. Wij mogen dus $m \geq 2$ veronderstellen en aannemen, dat de bewering reeds bewezen is, wanneer m door een kleiner natuurlijk getal wordt vervangen.

We kunnen de beschouwde homogene symmetrische veelterm van de m^e graad schrijven in de gedaante

$$c(z_1^m + z_2^m) + z_1 z_2 P(z_1, z_2),$$

waarin P een homogene symmetrische veelterm van de graad $m-2$ is. Verder kunnen we schrijven

$$z_1^m + z_2^m = (z_1 + z_2)^m - z_1 z_2 Q(z_1, z_2),$$

waarin Q eveneens een homogene symmetrische veelterm van de graad $m-2$ is. Aldus hebben we de oorspronkelijke symmetrische veelterm geschreven in de gedaante

$$c(z_1 + z_2)^m + z_1 z_2 R(z_1, z_2),$$

waarin R een homogene symmetrische veelterm van de graad $m-2$ voorstelt.

(Als $m=2$, is R een constante). Volgens onze inductie veronderstelling is $R(z_1, z_2)$ gelijk aan een isobare veelterm $U(a_1, a_2)$ met gewicht $m-2$. Dus de oorspronkelijke homogene symmetrische veelterm in z_1 en z_2 van de m^e graad is gelijk aan $c a_1^m + a_2 U(a_1, a_2)$

en dit antwoord is inderdaad een isobare veelterm met gewicht m .

Opg. 1. Bewijs dat $z_1^{10} + z_2^{10}$ te schrijven is in de gedaante

$$c_1 a_1^{10} + c_2 a_1^8 a_2 + c_3 a_1^6 a_2^2 + c_4 a_1^4 a_2^3 + c_5 a_1^2 a_2^4 + c_6 a_2^5,$$

waarin $c_1, \dots, c_6$ absolute constanten voorstellen.

Opmerking. Deze constanten kunnen worden bepaald op de manier, z. als in het bewijs is aangegeven. De berekening kan echter vlugger als volgt geschieden.

$$\begin{aligned} z_1^5 + z_2^5 &= (z_1 + z_2)(z_1^4 + z_2^4 - z_1 z_2(z_1^2 + z_2^2) + z_1^2 z_2^2) \\ &= a_1(a_1^4 - 4 a_1^2 a_2 + 2 a_2^2 - a_1^2 a_2 + 2 a_2^2 + a_2^2) \\ &= a_1(a_1^4 - 5 a_1^2 a_2 + 5 a_2^2). \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} z_1^{10} + z_2^{10} &= (z_1^5 + z_2^5)^2 - 2 z_1^5 z_2^5 \\ &= a_1^2(a_1^4 - 5 a_1^2 a_2 + 5 a_2^2)^2 - 2 a_2^5 \text{ enz.} \end{aligned}$$

Aldus blijkt $c_1=1$, $c_2=-10$, $c_3=35$, $c_4=-50$, $c_5=25$, $c_6=-2$.

Worden slechts enkele coëfficiënten gevraagd dan kan men soms vlugger te werk gaan. Wil men bv. alleen de coëfficiënt c_6 bepalen, dan beschouwt men een vierkantsvergelijking, waarbij $a_1=0$ is, bv. de vierkantsvergelijking $z^2-1=0$. Bij deze vergelijking (die de wortels ± 1 bezit), is $z_1^{10} + z_2^{10} = 2$, terwijl het antwoord gelijk moet zijn aan $-c_6$; dus $c_6 = -2$.

Opg. 2. Wat is de gemakkelijkste manier om c_1 te bepalen?

In plaats van vierkantsvergelijkingen gaan we nu vergelijkingen van willekeurige graad n beschouwen: lk schrijf deze vergelijking in de gedaante

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

Noem de wortels van deze vergelijking $z_1, \dots, z_n$. De elementaire symmetrische functies zijn hier

$$a_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum z_i$$

$$a_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \sum z_i z_j$$

$$\dots$$

$$a_{n-1} = z_1 z_2 \dots z_{n-1} + \dots + z_2 \dots z_n = \sum z_1 z_2 \dots z_{n-1}$$

$$a_n = z_1 z_2 \dots z_n$$

De hier optredende sommen bevatten resp. $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$ termen. Wij stellen ons de vraag of bij een vergelijking van willekeurige graad een stelling geldt, analoog aan die, welke we bij vierkantsvergelijkingen gevonden hebben. Daartoe is het nodig in te voeren het be-

grip van isobare veelterm in de coëfficiënten $a_1, a_2, \dots, a_n$. De definitie ligt voor de hand. Ik geef aan een constante het gewicht 0, aan a_1 het gewicht 1, aan a_2 het gewicht 2, ..., a_n het gewicht n en ik versta onder het gewicht van een product wederom de som der gewichten der factoren. Dus bv. $a_1^7 + 5a_1^5 a_2 + a_1 a_3^2$ is een isobare veelterm met gewicht 7. De stelling, die we nu gaan bewijzen, luidt alvolgt:

Een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de m^e graad is te schrijven als een isobare veelterm in $a_1, \dots, a_n$ met gewicht m .

Anders uitgedrukt: Een symmetrische veelterm in de wortels van een algebraïsche vergelijking kan geheel rationaal worden uitgedrukt in de coëfficiënten van die vergelijking. In deze stelling wordt $m \geq 1$ verondersteld. De bewering is evident voor $n=1$, want dan treedt slechts één wortel z_1 op, die gelijk is aan de coëfficiënt a_1 , die in de lineaire vergelijking voorkomt; de beschouwde homogene veelterm in z_1 heeft de gedaante $c z_1^m = c a_1^m$ en dit antwoord is isobaar met gewicht m . Ik mag dus $n \geq 2$ veronderstellen (dat hierboven het bewijs voor $n=2$ reeds geleverd is, wordt niet eens gebruikt) en ik mag veronderstellen, dat het bewijs reeds geleverd is, als n door $n-1$ wordt vervangen.

De bewering is eveneens evident als m gelijk is aan 0. Immers, dan is de beschouwde homogene symmetrische veelterm een constante en een constante is te beschouwen als een isobare veelterm in $a_1, \dots, a_n$ met gewicht 0. Bij het bewijs mag ik dus $m \geq 1$ veronderstellen. Verder mag ik aannemen, dat het bewijs reeds geleverd is, als n onveranderd blijft, maar m door een kleiner getal wordt vervangen.

Wij hebben hier te doen met een voorbeeld van een bewijs met dubbele inductie. Bij een zodanig bewijs (trouwens bij elk bewijs) is voorzichtigheid geboden.

Voordat ik het algemene bewijs geef, wil ik eerst de strekking door een voorbeeld toelichten. Stel wij willen bewijzen, dat bij de cubische vergelijking

$z^3 - a_1 z^2 + a_2 z - a_3 = 0$ met de wortels z_1, z_2 en z_3 de uitdrukking $z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$ te schrijven is als een isobare veelterm in a_1, a_2 en a_3 met gewicht 5. Daarbij hebben wij aangenomen, dat de overeenkomstige stelling reeds bewezen is voor vierkantsvergelijkingen, dwz. dat bij de vierkantsvergelijking $z^2 - A_1 z + A_2 = 0$ met de wortels z_1 en z_2

de uitdrukking $z_1^5 + z_2^5$ te schrijven is als een isobare veelterm $A_1^5 - 5A_1^3 A_2 + 5A_1 A_2^2$. Nu komt de kunstgreep: Wij gaan nl. beschouwen

$$v = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 - (a_1^5 - 5a_1^3 a_2 + 5a_1 a_2^2).$$

De eigenaardigheid is, dat we in het gevonden antwoord de coëfficiënten A_1 en A_2 eenvoudig door a_1 en a_2 gaan vervangen en het aldus verkregen antwoord aftrekken van de functie, die we willen onderzoeken. Wij wreeh, dat a_1 en a_2 elementaire symmetrische functies zijn van z_1, z_2 en z_3 ,

die in A_1 en A_2 overgaan, als z_3 door 0 wordt vervangen. Hieruit blijkt dat v een symmetrische functie is van z_1, z_2 en z_3 ; wordt z_3 door 0 vervangen dan gaat v over in

$$z_1^5 + z_2^5 - (A_1^5 - 5 A_1^3 A_2 + 5 A_1 A_2^2)$$

en we hebben ervoor gezorgd, dat dit juist nul is. De symmetrische veelterm v wordt dus 0 als z_3 door 0 wordt vervangen, waaruit blijkt, dat elk zijner termen door z_3 deelbaar is. Vanwege de symmetrie is elke term dan deelbaar door z_1 en z_2 , dus ook door $z_1 z_2 z_3$. We krijgen dus $v = z_1 z_2 z_3 w$, waarin w een homogene symmetrische veelterm in z_1, z_2 en z_3 voorstelt van de tweede graad. Die veelterm zouden we kunnen neerschrijven, (uitvoeren!) maar dat is voor ons bewijs niet nodig, omdat we verondersteld hebben, dat de stelling reeds bewezen is voor $n=3$ en voor alle homogene symmetrische veeltermen van de graad ≥ 5 . Uit deze inductieveronderstelling volgt, dat w te schrijven is als een isobare veelterm in a_1, a_2, a_3 met gewicht 2. Derhalve is

$$z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = a_1^5 - 5a_1^3 a_2 + 5a_1 a_2^2 + a_3 w$$

geschreven als een isobare veelterm in a_1, a_2, a_3 met gewicht 5.

Na deze toelichting aan dit speciale geval met $n=3$ en $m=5$ gaan we over tot de volkomen analoge behandeling van het algemene geval.

Bij de vergelijking

$$z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-)^n a_n = 0$$

met de wortels $z_1, \dots, z_n$ zij gegeven een homogene symmetrische veelterm $f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$. Daarbij hebben we aangenomen, dat de te bewijzen stelling reeds bewezen is voor vergelijkingen van de graad $n-1$. Bij de vergelijking

$$z^{n-1} - A_1 z^{n-2} + \dots + (-)^{n-1} A_{n-1} = 0$$

met de wortels $z_1, \dots, z_{n-1}$ is $f(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$ ofwel identiek nul, ofwel een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_{n-1}$ van de graad m . Volgens onze inductieveronderstelling is deze uitdrukking, als ze niet identiek nul is, te schrijven als een isobare veelterm $g(A_1, \dots, A_{n-1})$ met gewicht m . Indien de uitdrukking wel nul is, verstaan we onder $g(A_1, \dots, A_{n-1})$ eenvoudig het getal 0.

De kunstgreep bestaat nu hierin, dat we beschouwen

$$v = f(z_1, \dots, z_n) - g(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Men lette er dus op, dat hier wederom de coëfficiënten A door de overeenkomstige coëfficiënten a zijn vervangen. We weten, dat $a_1, \dots, a_{n-1}$ elementaire symmetrische functies zijn van $z_1, \dots, z_n$, die overgaan in $A_1, \dots, A_{n-1}$, als z_n door 0 wordt vervangen. Hieruit blijkt, dat v een symmetrische functie van $z_1, \dots, z_n$ is. Hierbij is a_1 een veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de 1^e graad, a_2 een veelterm van de 2^e

graad, enz'. Omdat $g(a_1, \dots, a_{n-1})$ isobaar is met gewicht m , gaat deze functie over in een homogene veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de graad m . Dus ook v is een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ van de graad m .

Wordt z_n door 0 vervangen, dan gaat v over in

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) = g(a_1, \dots, a_{n-1})$$

en we hebben ervoor gezorgd, dat dit juist nul is. De veelterm v wordt dus 0 als z_n door 0 wordt vervangen, waaruit blijkt, dat elk zijner termen door z_n deelbaar is. Vanwege de symmetrie is elke term dan eveneens door $z_1, \dots, z_{n-1}$ deelbaar, dus deelbaar door $z_1 z_2 \dots z_{n-1}$.

We krijgen dus

$$v = z_1 z_2 \dots z_{n-1} w,$$

waarin w een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ voorstelt

van de graad $m-n$; is $m < n$, dan is w identiek nul. Is $m \geq n$, dan vinden we dus, dat v identiek nul is, dus $f(z_1, \dots, z_n) = g(a_1, \dots, a_{n-1})$; waarbij het rechterlid isobaar is met gewicht m . In dat geval is de stelling bewezen. Voor $m < n$ komt dus a_n in het antwoord niet voor.

Zij nu verder $m \geq n$. Omdat w een homogene symmetrische veelterm in $z_1, \dots, z_n$ voorstelt van een graad $m-n$, die kleiner is dan m , volgt uit de inductieveronderstelling, dat w te schrijven is als een isobare veelterm in $a_1, \dots, a_n$ met gewicht $m-n$. Derhalve is

$$f(z_1, \dots, z_n) = g(a_1, \dots, a_{n-1}) + a_n w.$$

geschreven als een isobare veelterm in $a_1, a_2, \dots, a_n$ met gewicht m .

Hiermede is het bewijs volledig geleverd.

Opg. 3. Beschouw in de opgaven 3, 4, 5 en 6 de vergelijking

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0.$$

Bewijs dat de som van de derde machten der wortels gelijk is aan $a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3$. Waarin gaat deze betrekking over bij een vergelijking van de 2e graad of bij een lineaire vergelijking?

Opg. 4. Bewijs $\sum z_1^2 z_2 = a_1 a_2 - 3a_3$.

Uit hoeveel termen bestaat het linkerlid? Wat wordt deze betrekking bij vergelijkingen van de eerste of tweede graad?

Opg. 5. Bewijs $\sum \frac{1}{z_1 z_2 z_3} = \frac{a_{n-3}}{a_n}$. Uit hoeveel termen bestaat het linkerlid?

Opg. 6. Bewijs $\sum \frac{z_1}{z_2} = - \frac{a_1 a_{n-1}}{a_n} - n$.

Opg. 7. Bewijs dat bij de vierkantsvergelijking $z^2 - a_1 z + a_2 = 0$

z_1^m , waarin m een natuurlijk getal is, te schrijven is in de gedaante $z_1^m = P_m z_1 + Q_m$, waarin P_m en Q_m isobare veeltermen in a_1 en a_2 voorstellen. Bepaal verder de gewichten van P_m en Q_m en geef de teruglopende betrekkingen aan, waarmee P_m en Q_m kunnen worden berekend.

Wenst men in de practijk de symmetrische functies uit te drukken in de elementair-symmetrische, dan gaat men veelal als volgt te werk.

$$\text{Uit } f(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = b_0 (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n)$$

volgt

$$(1) \quad f'(z) = n b_0 z^{n-1} + (n-1) b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} = \frac{f(z)}{z-z_1} + \frac{f(z)}{z-z_2} + \dots + \frac{f(z)}{z-z_n}.$$

$$\text{Men heeft } \frac{f(z)}{z-z_1} = \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \frac{b_0(z^n-z_1^n)}{z-z_1} + \frac{b_1(z^{n-1}-z_1^{n-1})}{z-z_1} + \dots + \frac{b_{n-1}(z-z_1)}{z-z_1}$$

$$= b_0(z^{n-1} + \dots + z_1^{n-1}) + \dots + b_{n-1},$$

$$\text{dus } \sum_{m=1}^n \frac{f(z)}{z-z_m} = b_0 s_1 z^{n-1} + (b_0 s_2 + b_1 s_1) z^{n-2} + \dots + (b_0 s_n + b_1 s_{n-1} + \dots + b_{n-1} s_1) z^0 + \dots$$

De hierbij optredende uitdrukkingen $s_k = z_1^k + \dots + z_n^k$ worden sommen van Newton genoemd. Men heeft $s_0 = n$.

Vergelijkt men in (1) de termen met gelijke machten van z , dan vindt

$$\text{men } \left\{ \begin{array}{l} n b_0 = b_0 s_0 \\ (n-1) b_1 = b_0 s_1 + b_1 s_0 \\ (n-2) b_2 = b_0 s_2 + b_1 s_1 + b_2 s_0 \\ \dots \end{array} \right. \quad \text{dus } \left\{ \begin{array}{l} b_0 s_1 + b_1 = 0 \\ b_0 s_2 + b_1 s_1 + 2 b_2 = 0 \\ b_0 s_3 + b_1 s_2 + b_2 s_1 + 3 b_3 = 0 \\ \dots \end{array} \right. \quad (2)$$

Hieruit kunnen de sommen $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ worden berekend. Verder volgen uit $f(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$ na vermenigvuldiging met $1, z, z^2, \dots$ en na substitutie van z door $z_1, \dots, z_n$ en optellen de relaties

$$\begin{aligned} b_0 s_n + b_1 s_{n-1} + \dots + n b_n &= 0 \\ b_0 s_{n+1} + b_1 s_n + \dots + b_n s_1 &= 0 \\ b_0 s_{n+2} + b_1 s_{n+1} + \dots + b_n s_2 &= 0, \text{ enz.} \end{aligned}$$

zodat ook voor $k \geq n$ uit (2) de grootheden s_k gevonden kunnen worden, als men daarin $b_r = 0$ stelt voor $r > n$.

Opg. 7A. Laat zien hoe men ook de grootheden s_k voor $k < 0$ uit (2) kan afleiden.

Om nu bv. de som $\sum z_1^2 z_2^2$ te berekenen, gebruiken we de relatie

$\sum z_1^2 z_2^2 = -s_3 + s_1 s_2$, waarmee de gezochte som in reeds bekende grootheden is uitgedrukt.

Wenst men de som $\sum z_1^2 z_2^2 z_3^2$ te berekenen, dan kan men bv. gebruik maken van de gevonden uitdrukking voor $\sum z_1^2 z_2^2$. Vermenigvuldigt men deze met s_2 dan ontstaat een resultaat, waarin o.a. de gezochte term optreedt.

Opg. 7B. Voor die berekening uit.

Opg. 7C. Bereken bij de vergelijking $z^{10} + a z^2 + b z + c = 0$ de som

$$\sum z_1^7 z_2^2; \text{ eveneens de som } \sum z_1^7 z_2^3 z_3^2.$$

Wij voeren naast de enkelvoudige sommen $\sum x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_m^t$ nog sommen in, die wij complete sommen noemen en aanduiden met

$$\sum^* x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_m^t.$$

De bedoeling hierbij is, dat als onder de exponenten $a, b, c, \dots$ één of meer gelijke optreden, bv. $a = b$, naast de term $x_1^a x_2^a x_3^b \dots x_m^t$ in de complete som ook de term $x_1^a x_2^b x_3^b \dots x_m^t$ optreedt, hetgeen in de enkelvoudige som niet het geval is. In het algemeen: treden onder de exponenten $a, b, c, \dots$ j_1 gelijke op, verder j_2 gelijke hiervan verschillende exponenten, j_2 gelijke exponenten verschillend van de j_1 genoemde en de j_2 genoemde, ..., dan heeft men voor de enkelvoudige som $\sum$ en de complete ermee corresponderende som $\sum^*$

$$\sum^* = j_1! j_2! \dots \sum$$

Men heeft dan de volgende formule voor complete sommen

$$\sum x_1^h \sum^* x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_m^t = \sum^* x_1^h x_2^a x_3^b x_4^c \dots x_m^t + \sum^* x_1^{a+h} x_2^b x_3^c \dots x_m^t + \dots + \sum^* x_1^a x_2^b x_3^c \dots x_m^{t+h}.$$

Vb. Zij gevraagd de som $\sum x_1^3 x_2 x_3$ te berekenen.

Wij gaan uit van de relaties

$$\sum^* x_1^3 x_2 x_3 = \sum x_1^3 \sum^* x_1 x_2 - 2 \sum^* x_1^4 x_2$$

$$\sum^* x_1^4 x_2 = \sum x_1^4 \sum x_1 - \sum x_1^5 = S_1 S_4 - S_5, \text{ dus}$$

$$\sum^* x_1^3 x_2 x_3 = 2a_2 S_3 - 2S_1 S_4 + 2S_5 = 2a_2 S_3 + 2a_1 S_4 + 2S_5 = -2a_3 S_2 - 2a_4 S_1 - 10a_5,$$

dus

$$\sum x_1^3 x_2 x_3 = -a_3(a_1^2 - 2a_2) + a_1 a_4 - 5a_5 = -a_1^2 a_3 + a_1 a_4 + 2a_2 a_3 - 5a_5.$$

Anders:

$$3 \sum^* x_1^3 x_2 x_3 = \sum x_1^2 \sum^* x_1 x_2 x_3 - \sum^* x_1^2 x_2 x_3 x_4$$

$$4 \sum^* x_1^2 x_2 x_3 x_4 = \sum x_1 \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 - \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

dus

$$\begin{aligned} 3 \sum^* x_1^3 x_2 x_3 &= (a_1^2 - 2a_2) \sum^* x_1 x_2 x_3 + \frac{1}{4} a_1 \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 + \frac{1}{4} \sum^* x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &= -6(a_1^2 - 2a_2)a_3 + 6a_1 a_4 - 30 a_5. \end{aligned}$$

Dus

$$\sum x_1^3 x_2 x_3 = -a_1^2 a_3 + a_1 a_4 + 2a_2 a_3 - 5a_5.$$

Opg. 8. Bewijs, dat $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2})^{100}$ iets kleiner is dan een geheel getal en dat de afwijking kleiner is dan $0,13 \cdot 10^{-20}$.

Hoofdstuk III.

Benadering van de wortels van vergelijkingen.

§1. Rekenwijze van Horner.

Opg. 1. Bewijs de ontwikkeling van Taylor voor een veelterm $f(x)$ hoogstens van de n^{e} graad:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Men merke op, dat deze formule onmiddellijk volgt uit de binomiaal-formule van Newton, als $f(x)$ gelijk is aan een macht van x , waarvan de exponent geheel, niet negatief en hoogstens n is. Vanwege haar lineair karakter geldt de formule dan algemeen.

Om $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ voor $x = p$ te berekenen, als de coëfficiënten en p gegeven zijn, past men de rekenwijze van Horner toe

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ & pa_0 & pa'_1 & \dots & pa'_{n-3} & pa'_{n-2} & pa'_{n-1} \\ \hline a_0 & a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{n-2} & a'_{n-1} & a'_n \end{array} +$$

De bedoeling is dus, dat a_0 eerst met p wordt vermenigvuldigd; het verkregen resultaat met a_1 vermeerderd, levert een getal, dat we a'_1 hebben genoemd. Dit getal a'_1 wordt weer met p vermenigvuldigd. Het aldus verkregen resultaat levert, met a_2 vermeerderd, een getal op, dat we a'_2 genoemd hebben, enz. Zo doorgaande vinden we een getal, a'_{n-1} , dat weer met p wordt vermenigvuldigd, terwijl de aldus verkregen uitkomst, met a_n vermeerderd, een som oplevert, die we a'_n genoemd hebben. Wij beweren, dat deze som juist gelijk is aan de waarde, die de functie $f(x)$ in het punt $x=p$ aanneemt. Dit is trouwens duidelijk, want

$$a'_1 = pa_0 + a_1;$$

$$a'_2 = pa'_1 + a_2 = p^2 a_0 + pa_1 + a_2;$$

$$a'_3 = p^3 a_0 + p^2 a_1 + pa_2 + a_3;$$

en ten slotte

$$a'_n = p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + \dots + pa_{n-1} + a_n.$$

Het hierboven aangegeven schema van Horner is het verkort delingsschema, dat men verkrijgt, als $f(x)$ door $x-p$ wordt gedeeld, nl.:

$$\begin{array}{r}
 \text{- 29 -} \\
 x-p \overline{) \begin{array}{l} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ a_0 x^n - p a_0 x^{n-1} \\ \hline a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \\ a_1 x^{n-1} - p a_1 x^{n-2} \\ \hline a_2 x^{n-2} \end{array} } \\
 \dots \\
 \begin{array}{r} -p a_{n-2}' x \\ a_{n-1}' x + a_n \\ a_{n-1}' x - p a_{n-1}' \\ \hline a_n' \end{array}
 \end{array}$$

Ook hieruit blijkt weer onmiddellijk, dat a_n' de waarde is, die de veelterm $f(x)$ voor $x=p$ aanneemt, want a_n' is de rest, die $f(x)$ bij deling door $x-p$ overlaat. Het voordeel van de rekenwijze van Horner is, dat ze ons ^{niet} alleen de rest leert, die $f(x)$ bij deling door $x-p$ oplevert maar ook het quotient, nl. $a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}'$.

Om bv. $x^3 - 6x^2 + 7x - 5$ voor $x=2$ te bepalen, schrijven we

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -6 \quad 7 \quad -5 \\
 \quad 2 \quad -8 \quad -2 \\
 \hline
 1 \quad -4 \quad -1 \quad \boxed{-7}^+
 \end{array}$$

Verder is $f(x) = (x-2) g(x) - 7$, waarin $g(x) = x^2 - 4x - 1$.

Indt de opgave $f(x)$ te ontwikkelen naar machten van $x-2$, dan passen we het proces op $g(x)$ toe, enz., zodat we het volgende schema vinden:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -6 \quad 7 \quad -5 \\
 \quad 2 \quad -8 \quad -2 \\
 \hline
 1 \quad -4 \quad -1 \quad \boxed{-7}^+ \\
 \quad 2 \quad -4 \\
 \hline
 1 \quad -2 \quad \boxed{-5}^+ \\
 \quad 2 \\
 \hline
 \boxed{1} \quad \boxed{0}
 \end{array}$$

Aldus vinden we $f(x) = -7 - 5(x-2) + (x-2)^3$.

Is een veelterm $f(x)$ van de n^e graad in $n+1$ verschillende punten $x_0, x_1, \dots, x_n$ gegeven, dan is die veelterm ondubbelzinnig bepaald, omdat twee verschillende veeltermen met deze eigenschap een verschil zouden bezitten, hoogstens van de n^e graad met meer dan n nulpunten.

Zal de veelterm $f(x)$ gegeven heeft, kunnen we die veelterm bepalen door te stellen

$$f(x) = a_0(x-x_1)\dots(x-x_n) + a_1(x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots + a_{n-1}(x-x_n) + a_n.$$

Stelt men hierin $x=x_n$, dan vindt men $f(x_n) = a_n$, zodat de coëfficiënt a_n bekend is. Stelt men vervolgens $x=x_{n-1}$, dan krijgt men

$f(x_{n-1}) = a_{n-1}(x_{n-1}-x_n) + a_n$, waaruit a_{n-1} kan worden bepaald, enz. Zijn $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ bekend, dan krijgt men door $x=x_0$ te stellen

$$f(x_0) = a_0(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n) + \dots + a_{n-1}(x_0-x_n) + a_n,$$

waaruit tenslotte a_0 kan worden bepaald. De aldus voor $f(x)$ verkregen

formule heet de interpolatieformule van Newton.

Hierbij moeten achtereenvolgens de coëfficiënten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ worden bepaald, hetgeen dikwijls een heel werk is.

We kunnen ons nu de opgave voorleggen om bij een veelterm $f(x)$ van de n^o graad van bovenstaande gedaante (waarbij dus $x_1, \dots, x_n$ en $a_0, \dots, a_n$ bekend verondersteld worden) de waarde van de veelterm $f(x)$ te berekenen in een willekeurig voorgeschreven punt p . Daarbij krijgen we het volgende schema.

Factor	$x-x_1$	$x-x_2$	$x-x_3$	$x-x_n$	
Coëff.	a_0	a_1	a_2	$a_3 \dots a_{n-1}$	a_n
	$a_0(p-x_1)$	$a_1(p-x_2)$	$a_2(p-x_3)$	$a_{n-2}(p-x_{n-1})$	$a_{n-1}(p-x_n)$
	a_0	a'_1	a'_2	$a'_3 \dots a'_{n-1}$	a'_n

De bedoeling is, dat eerst met $p-x_1$ wordt vermenigvuldigd. Het verkregen resultaat, met a_1 vermeerderd, levert een getal, dat we a'_1 hebben genoemd. Dit getal a'_1 wordt met $p-x_2$ vermenigvuldigd. Het aldus verkregen resultaat levert, met a_2 vermeerderd, een getal op, dat we a'_2 genoemd hebben, enz. Zo doorgaande vinden we een getal a'_{n-1} , dat, met $p-x_n$ wordt vermenigvuldigd, terwijl de aldus verkregen uitkomst, met a_n vermeerderd, een som oplevert, die we a'_n hebben genoemd. We beweren thans, dat deze som a'_n juist gelijk is aan de waarde, die de functie $f(x)$ in het punt $x=p$ aannemt. Dit is trouwens eveneens duidelijk, want

$$a'_1 = (p-x_1)a_0 + a_1$$

$$a'_2 = (p-x_1)(p-x_2)a_0 + (p-x_2)a_1 + a_2$$

$$a'_3 = \dots$$

$$a'_n = (p-x_1) \dots (p-x_n)a_0 + \dots + (p-x_n)a_{n-1} + a_n$$

en die laatste uitdrukking is juist gelijk aan $f(p)$.

Indien bv. $f(x)$ de veelterm voorstelt van de 4e graad, die voor $x=3, 4, 7, 8, 9$ resp. de waarden 5, 11, 5, 75 en 41 aannemt, dan vindt men na berekening

$$f(x) = 5 + 6(x-3) - 2(x-3)(x-4) + 4(x-3)(x-4)(x-7) - 3(x-3)(x-4)(x-7)(x-8).$$

Bij de berekening van $f(1)$ krijgen we het volgende schema:

Factoren	-7	-6	-3	-2	
Coëff.	-3	4	-2	6	5
	$\nearrow 21$	$\nearrow 150$	$\nearrow 456$	$\nearrow 924$	
	$+ -3$	$\nearrow 25$	$\nearrow 152$	$\nearrow 462$	$\nearrow 919$

$= f(1)$

De berekening van $f(2)$ gaat als volgt:

Factoren	-6	-5	-2	-1	
Coëff.	-3	4	-2	6	5
	$\nearrow 18$	$\nearrow 110$	$\nearrow 224$	$\nearrow 230$	
	$+ -3$	$\nearrow 22$	$\nearrow 112$	$\nearrow 230$	$\nearrow 225$

$= f(2).$

En tenslotte die van $f(2,1)$:

Factoren	-5,9	-4,9	-1,9	-0,9	
Coëff.	-3	4	-2	6	5
		17,7	-106,33	205,827	-190,6443
	-3	21,7	-108,33	211,827	<u>-185,6443</u>
					= f(2,1)

§2. Het theorema van Budan-Fourier.

Als X een nulpunt is van een veelterm $f(x)$, dan kunnen we het grootste natuurlijke getal m bepalen met de eigenschap, dat $f(x)$ door $(x-X)^m$ deelbaar is. Dan heet m de multipliciteit van het nulpunt X en X heet een m -voudig nulpunt van de veelterm. We hebben dan $f(x) = (x-X)^m g(x)$, waarin $g(x)$ een veelterm voorstelt, die niet door $x-X$ deelbaar is en die dus in het punt X niet nul is. Door differentiatie vinden we, dat de functie $f(x)$ met haar 1e, 2e, ..., $(m-1)^e$ afgeleide in X gelijk is aan nul, maar dat de m^e afgeleide in dat punt ongelijk aan nul is. De reeksontwikkeling van Taylor geeft dan

$$f(X+h) = \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(X) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(X).$$

Deze uitdrukking heeft voor kleine waarden van h een vast teken, als de multipliciteit m even is, maar wisselt van teken, als m oneven is. Hiermede is bewezen:

Als $f(x)$ in X een nulpunt met even multipliciteit bezit, dan heeft $f(x)$ in de omgeving van X , aan weerszijden van X , hetzelfde teken. Bezit daarentegen $f(x)$ in X een nulpunt met oneven multipliciteit, dan heeft $f(x)$ in de omgeving van X , aan weerszijden van X , tegengesteld teken. Meerkundig uitgedrukt: In een nulpunt met oneven multipliciteit wordt de X -as gesneden door de kromme $y=f(x)$. In de omgeving van een nulpunt met even multipliciteit ligt de kromme aan een bepaalde kant van de X -as.

Beschouw twee getallen a en b , waarbij $a < b$ en een veelterm $f(x)$. We kunnen steeds een natuurlijk getal k kleiner dan of gelijk aan de graad van de veelterm $f(x)$ bepalen, zodanig dat de k^e afgeleide van $f(x)$ tussen a en b steeds positief of steeds negatief is. Immers we kunnen steeds k gelijk kiezen aan de graad van de veelterm $f(x)$, maar in vele gevallen zal het zo mogelijk aanbeveling verdienen k kleiner te kiezen. Beschouw het systeem gevormd door de getallen $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$. Ik beschouw het aantal tekenwisselingen, dat men verkrijgt, als men de eventuele termen 0 buiten beschouwing laat. Bv. in een systeem $+ 0 0 - + 0 + -$ is het aantal tekenwisselingen 3. Het aantal tekenwisselingen zal niet veranderen als aan het begin of aan het einde van het systeem nullen worden toegevoegd. Het aldus gedefinieerde aantal tekenwisselingen wordt met $V(x)$ aangeduid. Het blijkt, dat de verandering van het aantal tekenwisselingen ons iets leert over het aantal nulpunten van de veelterm $f(x)$, gelegen tussen a en b . Dit resultaat kan worden samengevat in het volgende theorema, dat genoemd wordt naar Budan-Fourier:

Zij $a < b$, waarin a en b geen van beide nulpunten van de veelterm $f(x)$

voorstellen. De afname $V(a)-V(b)$ van het aantal tekenwisselingen is een geheel getal $p \geq 0$ en het aantal der tussen a en b gelegen nulpunten van $f(x)$, waarbij elk nulpunt even vaak geteld wordt, als zijn multipliciteit bedraagt, is gelijk aan p , of een even aantal minder.

Het theorema van Budan-Fourier heeft het voordeel, dat daarin uitsluitend veeltermen optreden, die gemakkelijk neer te schrijven zijn (nl. de afgeleiden), maar het nadeel is, dat het aantal nulpunten niet altijd ondubbelzinnig wordt bepaald.

Om deze stelling te bewijzen, laten we x aangroeien van a naar b . Het aantal tekenwisselingen kan alleen verspringen in een punt, waar de veelterm $f(x)$ of minstens een zijner afgeleiden de waarde nul aanneemt. Laten we eerst een tussen a en b gelegen punt X beschouwen, waar de veelterm $f(x)$ zelf niet gelijk is aan nul, maar, waarin minstens een der afgeleiden wel de waarde 0 aanneemt. Laten we eerst het geval bekijken, waarin het aantal opeenvolgende afgeleiden, die in X de waarde 0 aannemen, even is. (Om de gedachte te bepalen neem ik voor dat aantal 4, maar ik kan er elk positief even aantal voor nemen). Het gedeelte van het systeem, waar het hier op aan komt, heeft de volgende gedaante:

	$f^{(r-4)}$	$f^{(r-3)}$	$f^{(r-2)}$	$f^{(r-1)}$	$f^{(r)}$	$f^{(r+1)}$
I	+	0	0	0	0	+
of						
II	+	0	0	0	0	-

De vier nullen in dit schema corresponderen met de 4 opeenvolgende afgeleiden $f^{(r-3)}(x)$, $f^{(r-2)}(x)$, $f^{(r-1)}(x)$, $f^{(r)}(x)$, die voor X de waarde 0 aannemen. Ik onderscheid nu 2 gevallen, alwaar geval I of II optreedt.

In geval I is $f^{(r+1)}(x)$ in de omgeving van X positief, zodat $f^{(r)}(x)$ in die omgeving links van X negatief en rechts van X positief is. Daaruit blijkt, dat de voorafgaande afgeleide $f^{(r-1)}(x)$ in die omgeving aan weerskanten van X positief is, dus dat de daaraan voorafgaande afgeleide $f^{(r-2)}(x)$ in die omgeving links van X negatief is en rechts van X positief. Ten slotte blijkt dan, dat de afgeleide $f^{(r-3)}(x)$ in die omgeving wederom positief is. Het systeem vertoont dus in de omgeving van X , links van X de volgende tekens:

+ + - + - + ,

maar rechts van X ziet het er als volgt uit:

+ + + + + .

Het aantal tekenwisselingen bedroeg dus eerst 4 of 5 en later 0 of 1. Bij het passeren van X zijn dus 4 tekenwisselingen verloren gegaan, niet aan het begin van de rij, maar ergens in het midden.

Geval I gaat in geval II over, als alle tekens worden omgekeerd, zodat ook hierbij weer ergens in het midden 4 tekenwisselingen verloren zijn gegaan.

Laten we vervolgens het geval beschouwen, dat het aantal opeenvolgende afgeleiden, die in X de waarde 0 aannemen, oneven is. Om onze gedachte te bepalen. neem ik voor dat aantal 3. Het gedeelte van het systeem,

waar het hier op aan komt, heeft de gedaante

$$\begin{array}{l} \text{III} \quad + \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad + \\ \text{of IV} \quad - \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad - \end{array}$$

Gemakkelijk ziet men in, dat in geval III het systeem in de omgeving van X, links van X, de tekens

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$$

en rechts van X de tekens

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad +$$

vertoont. Het aantal tekenwisselingen bedraagt dan links 4 of 3 en rechts 0 of 1. Bij het passeren van X zijn dus ergens in het midden 4 of 2 tekenwisselingen verloren gegaan. Geval III gaat in geval IV over, als alle tekens worden omgekeerd, zodat ook hier weer ergens in het midden 4 of 2 tekenwisselingen verloren zijn gegaan. Aldus komen we tot de volgende conclusie:

Zij X een tussen a en b gelegen punt, waarin niet de veelterm $f(x)$ zelf, maar minstens een zijner afgeleiden de waarde 0 aannemt. Bij het passeren van een zodanig punt X blijft het aantal tekenwisselingen constant of neemt met een even aantal af.

Opg.1. Licht toe, dat uit het bovenstaande niet volgt, dat bij het passeren van een zodanig punt X het aantal tekenwisselingen altijd afneemt.

Ma moeten we nog onderzoeken, wat er gebeurt, als we een tussen a en b gelegen nulpunt X van de veelterm $f(x)$ zelf passeren. Zij X een m-voudig nulpunt van $f(x)$, zodat $f^{(m)}(X) \neq 0$ is.

Opg.2. Waarom is $m \leq k$?

Het gedeelte van het systeem $V(X)$, waar het nu op aankomt, heeft de gedaante

$$\begin{array}{l} \text{V} \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad + \\ \text{of} \end{array}$$

$$\text{VI} \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -,$$

alnaargelang $f^{(m)}(X)$ positief of negatief is. In geval V vertoont het systeem in de omgeving van X, links van X, de tekens

$$(-1)^m \quad (-1)^{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \quad - \quad +$$

en rechts van X de tekens

$$+ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad + \quad + \quad + \quad +.$$

Het aantal tekenwisselingen bedraagt dus eerst m en later 0, zodat er bij het passeren van X juist m tekenwisselingen verloren zijn gegaan.

Geval V gaat in geval VI over, als alle tekens worden omgekeerd, zodat ook dan bij het passeren van X weer m tekenwisselingen verloren zijn gegaan. Bij het passeren van een nulpunt X van de veelterm $f(x)$ gaan dus aan het begin evenveel tekenwisselingen verloren, als de multipliciteit van X bedraagt. Aldus komen wij tot het volgende besluit:

Groeit x geleidelijk aan van a naar b, dan kunnen in het systeem tekenwisselingen verloren gaan, voorerst aan het beginpunt en dan is het

verlies juist gelijk aan de multipliciteit van het gepasseerde nulpunt, en verder ergens in het midden, maar dan is het verlies steeds even. Hiermede is de stelling van Budan-Fourier bewezen.

Dit theorema geldt trouwens niet alleen voor veeltermen, maar voor alle functies $f(x)$ die een k^e afgeleide bezitten, welke tussen a en b steeds positief of steeds negatief is.

Opg. 3. Pas het theorema van Budan-Fourier toe op de veelterm

$$(1) \quad x^4 + 3x^3 - 6x + 1$$

waarbij $a = 0$ en b positief heel groot wordt gekozen. Het theorema levert dan , dat de veelterm 0 of 2 positieve nulpunten bezit. Bewijs verder, dat deze veelterm er werkelijk 2 bezit. Het theorema van Budan-Fourier levert dus dat bij deze vergelijking het aantal positieve wortels gelijk is aan of een even aantal minder dan het aantal tekenwisselingen, voorkomend in het systeem $(1, 3, 0, -6, 1)$, gevormd door de coëfficiënten. Op analoge manier bewijst men het algemene

Theorema van Descartes. In een algebraïsche vergelijking met bestaانبare coëfficiënten is het aantal positieve wortels gelijk aan of een even aantal minder dan het aantal tekenwisselingen, optredend in het coëfficiëntensysteem.

Opg. 4 Door x te vervangen door $-y$ vindt men dat de vergelijking (1) 0 of 2 negatieve wortels bezit.

Opg. 5 De vergelijking $x^{11} + ax^7 - bx^6 + cx^3 - d = 0$,

waarin a, b, c en d positief zijn, heeft 1 of 3 positieve wortels en geen negatieve. Aanvaardt men de grondstelling van de algebra, dat elke algebraïsche vergelijking evenveel wortels bezit, als de graad bedraagt, dan verkrijgt men, dat de beschouwde vergelijking 10 of 8 onbestaانبare wortels bezit. Het hiaat tussen x^{11} en x^7 levert minstens 4 onbestaانبare wortels, dat tussen x^6 en x^3 levert er minstens 2 en dat tussen x^3 en x^0 eveneens.

Opg. 6 De vergelijking $x^{11} + ax^7 + bx^5 - cx + d = 0$,

waarin a, b, c en d positief zijn, bezit 0 of 2 positieve, verder 1 negatieve wortel, dus 10 of 8 onbestaانبare. Het hiaat tussen x^{11} en x^7 levert er minstens 4, het hiaat tussen x^7 en x^5 twee (omdat dit een hiaat is van een term tussen een permutatie), het hiaat tussen x^5 en x ook minstens twee (omdat dit een hiaat is van 3 termen tussen een variatie)

Opg. 7 Bewijs, dat de vergelijking

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$$

0 of 2 wortels tussen 0 en 1,

1 wortel tussen 1 en 6

1 wortel tussen -1 en 0

en geen enkele wortel groter dan 6 of kleiner dan -1 bezit.

Om de tekens te bepalen ontwikkelde men met behulp van de rekenwijze van Horner naar machten van $x-1$ en $x+1$, waarbij de berekening kan worden stopgezet, zodra blijkt, welke tekens verder zullen optreden.

§ 3. Het theorema van Sturm. De stelling van Buden-Fourier heeft het nadeel dat ze niet steeds het aantal wortels in een gegeven interval ondubbelzinnig vastlegt. Dit noopt ons een ander theorema af te leiden, het theorema van Sturm, waardoor het aantal wortels in een gegeven interval wel vastgelegd wordt.

Om te bepalen, hoeveel nulpunten een gegeven veelterm $f_0(x)$, die louter enkelvoudige nulpunten heeft, in een gegeven interval $a \leq x \leq b$ bezit, beschouwen wij een rij veeltermen $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)$, verbonden door de volgende teruglopende betrekkingen:

$$f_0(x) = q_1(x) f_1(x) - p_2(x) f_2(x)$$

$$f_1(x) = q_2(x) f_2(x) - p_3(x) f_3(x)$$

.....

$$f_{k-2}(x) = q_{k-1}(x) f_{k-1}(x) - p_k(x) f_k(x),$$

waarin $q_1(x), \dots, q_{k-1}(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ eveneens veeltermen voorstellen. Ik neem daarbij aan, dat de veeltermen $p_2(x), \dots, p_k(x)$ in het genoemde interval $a \leq x \leq b$ alle positief zijn, dat $f(x)$ in geen der punten a en b de waarde nul aannemt en dat $f_k(x)$ voor $a \leq x \leq b$ steeds positief of steeds negatief is. Verder neem ik nog aan, dat tussen $f_1(x), f_0(x)$ en de afgeleide $f'_0(x)$ de volgende relatie bestaat:

$$(1) \quad p_0(x) f_1(x) = q_0(x) f_0(x) + p_1(x) f'_0(x)$$

(merk op, dat hier de laatste term van een plusteken is voorzien), waarbij $q_0(x), p_0(x)$ en $p_1(x)$ veeltermen voorstellen met de eigenschap, dat $p_0(x)$ en $p_1(x)$ in het interval $a \leq x \leq b$ beide positief zijn.

Onder $V(x)$ verstaan wij het aantal tekenvariatiën, optredende in het systeem $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)$ en we zullen nagaan, wat er met dit aantal gebeurt, als x monotoon en geleidelijk aangroeit van a naar b . Laten we eerst het geval beschouwen, dat x een nulpunt ξ van minstens een der veeltermen $f_h(x)$ ($1 \leq h < k$) passeert. Was ξ ook een nulpunt van de voorgaande veelterm $f_{h-1}(x)$, dan was ξ volgens de hierboven gegeven teruglopende betrekkingen ook een nulpunt van $f_{h-2}(x), f_{h-3}(x), \dots, f_0(x)$ en volgens (1) ook van $f'_0(x)$, zodat ξ een meervoudig nulpunt van $f_0(x)$ zou zijn, in strijd met de veronderstelling. Dus $f_{h-1}(x)$ en $f_{h+1}(x)$ hebben volgens de recurrente betrekking in de omgeving van ξ tegengesteld teken zodat het aantal tekenvariatiën links van ξ even groot als rechts van ξ is. Stel x passeert nu een nulpunt ξ van $f_0(x)$. In de omgeving van dat punt is $f_0(x)$, dus blijkens (1) ook $f_1(x)$ onge-

lijk aan nul en bezitten $f'_0(x)$ en $f_1(x)$ hetzelfde teken. Is $f_1(x)$ in die omgeving van ξ positief, dan neemt $f_0(x)$ aldaar toe en wordt dus van negatief positief; is daarentegen $f_1(x)$ in de omgeving van ξ negatief, dan wordt $f_0(x)$ van positief negatief. Bij het passeren van het nulpunt ξ van $f_0(x)$ is dus juist één tekenvariatie verloren gegaan.

Aldus komen wij tot het volgende besluit: Theorema van Sturm:
Groeit x geleidelijk en monotoon aan van a naar b , dan is het verlies $V(a) - V(b)$ van het aantal tekenvariatiën in het systeem $f_0(x), \dots, f_k(x)$ gelijk aan het aantal tussen a en b gelegen nulpunten van $f_0(x)$.

In de praktijk kiezen we vaak $f_1(x) = f'_0(x)$ en alle veeltermen $p_2(x), \dots, p_k(x)$ gelijk aan 1.

Opg. 1 Bepaal het aantal en de ligging der reële wortels van de vergelijking

$$f_0(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$$

Kies $f_1(x) = 3x^2 - 10x + 8$ en $f_2(x) = x + 16$. In elk interval, dat het getal -16 niet bevat, verandert $f_2(x)$ niet van teken en is dus het verlies in het aantal tekenvariatiën juist gelijk aan het aantal nulpunten van $f_0(x)$ in dat interval. Intervallen, die het punt -16 bevatten, behoeven wij niet te onderzoeken, daar $f_0(x)$ geen wortels < -16 bevat. Verder blijkt, dat de vergelijking 2 niet-bestaansbare wortels heeft en 1 reële, gelegen tussen 3 en 4.

Opg. 2 Onderzoek de ligging van de wortels der vergelijking

$$x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x - 1 = 0$$

Hierbij is $f_2(x) = 27x^4 + 34x^2 + 11$ definitief, zodat we bij $f_2(x)$ onze rij afbreken. We vinden dan 1 positieve, 1 negatieve en 4 niet-reële wortels.

Opg. 3 De vergelijking $x^3 + px + q = 0$ ($p \neq 0$),

heeft twee niet-reële wortels, als $27q^2 + 4p^3 > 0$,
en drie reële wortels, als $27q^2 + 4p^3 < 0$.

Men merke op, dat voor $p > 0$ de afgeleide van het linkerlid ook positief is, zodat de vergelijking dan slechts 1 bestaansbare wortel bezit. Het onderzoek behoeft dus alleen voor negatieve p te worden gedaan.

Opg. 4 De n^e afgeleide van $e^{-\frac{1}{2}x^2}$

is gelijk aan $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, vermenigvuldigd met een veelterm van de n^e graad. Die veelterm heet de veelterm $H_n(x)$ van Hermite, dus

$$\frac{d^n e^{-\frac{1}{2}x^2}}{dx^n} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot H_n(x)$$

Bewijs dit met behulp van het principe van volledige inductie.

Men heeft $H_0(x) = 1$; $H_1(x) = -x$ en $H_2(x) = x^2 - 1$. Hieruit blijkt dat de betrekking

$$(2) \quad H_{n+1}(x) + xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$$

geldt voor $n = 1$. Ik ga nu deze formule voor elk natuurlijk getal n bewijzen. Vermenigvuldigt men beide leden van de te bewijzen formule met $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, dan gaat de formule over in een van de gedaante

$$(3) \quad D^{n+1} + xD^n + nD^{n-1} = 0;$$

Hierin is D een afkorting voor $\frac{d}{dx}$ en bedoeld wordt, dat de differentiaaloperatoren steeds toegepast worden op de functie $e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Bij het bewijs van (3) mogen we $n \geq 2$ veronderstellen en aannemen, dat de formule voor $n-1$ i.p.v. n reeds bewezen is, dus

$$D^n + xD^{n-1} + (n-1)D^{n-2} = 0.$$

Deze betrekking gaat bij differentiatie naar x over in de te bewijzen betrekking. De gevonden teruglopende betrekking levert:

$$H_3(x) = -x^3 + 3x; \quad H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3; \quad H_5(x) = -x^5 + 10x^3 - 15x; \\ H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15.$$

Opg. 5 Is n even, dan is $H_n(x)$ een even functie van x ; is n oneven, dan is $H_n(x)$ een oneven functie van x .

Opg. 6 Twee opeenvolgende termen van Hermite, $H_{n+1}(x)$ en $H_n(x)$, hebben geen nulpunt gemeen (een gemeenschappelijk nulpunt zou volgens (2) ook nulpunt zijn van $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$, ..., $H_1(x)$, $H_0(x)$).

Opg. 7 Differentieert men beide leden van de definitie van de veelterm van Hermite naar x , dan vindt men met behulp van (2)

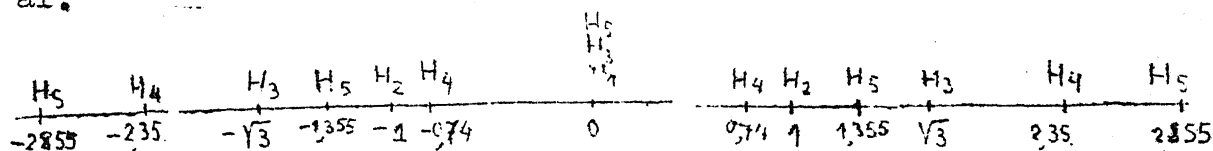
$$H_n'(x) = -nH_{n-1}(x). \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Opg. 8 $H_n(x)$ heeft geen meervoudig nulpunt, want een zodanig punt zou ook nulpunt zijn van $H_{n-1}(x)$ volgens de voorafgaande opgave.

Opg. 9 $(-1)^n H_n(x)$ is voor grote waarden van x positief en heeft voor grote waarde van $-x$ hetzelfde teken als $(-1)^n$.

Opg. 10 Het theorema van Sturm, toegepast op de veeltermen $(-1)^n H_n(x)$, $(-1)^{n-1} H_{n-1}(x)$, ..., $-H_1(x)$, $H_0(x)$, leert, dat $H_n(x)$ n verschillende bestaanbare nulpunten heeft.

Opg. 11 De $n-1$ verschillende nulpunten van $H_{n-1}(x)$ verdelen de bestaanbare as in n intervallen, in elk waarvan $H_n(x)$ volgens opg. 7 monotoon (stijgend of dalend) is, zodat $H_n(x)$ in elk dier intervallen hoogstens 1 nulpunt bezit. Bewijs, dat $H_n(x)$ in elk dier intervallen werkelijk 1 nulpunt bezit. De nulpunten van $H_{n-1}(x)$ en die van $H_n(x)$ wisselen elkaar dus af.



In dit schema zijn de nulpunten van $H_1, \dots, H_5$ aangegeven, bv. heeft H_5 de nulpunten $0; \pm 2,855\dots; \pm 1,355\dots$

In het geval het ~~aantal~~ nulpunten, gelegen in een gegeven interval, gevraagd wordt bij een veelterm met een of meer meervoudige nulpunten, bepaalt men de GGD $D(x)$ van $f(x)$ en $f'(x)$. Dan is $\frac{f(x)}{D(x)}$ een veelterm $g(x)$ van lagere graad dan $f(x)$, die dezelfde wortels als $f(x)$ bezit, maar alle met multipliciteit 1; immers is ξ een nulpunt van $f(x)$ met multipliciteit m , dan is ξ een nulpunt van $f'(x)$ (dus ook van $D(x)$) met multipliciteit $m-1$, zodat ξ een enkelvoudig nulpunt van $\frac{f(x)}{D(x)}$ is. Men kan dus het theorema van Sturm op $g(x)$ i.p.v. $f(x)$ toepassen en vindt dan in elk interval het juiste aantal der nulpunten van $g(x)$, dus ook van $f(x)$, waarbij echter alle nulpunten slechts enkelvoudig geteld worden.

§4. Benadering van bestaanbare wortels.

Indien een veelterm $f(x)$ met bestaanbare coëfficiënten in twee verschillende punten a en b tegengesteld teken aanneemt, dan volgt uit continuïteitsoverwegingen, dat die veelterm tussen a en b minstens eenmaal de waarde nul aanneemt. Uit deze stelling volgt:

De veelterm heeft tussen twee opeenvolgende nulpunten een vast teken. Tussen twee punten a en b , waar de veelterm $f(x)$ tegengesteld teken aanneemt, ligt een oneven aantal nulpunten van die veelterm, waarbij elk nulpunt even vaak wordt geteld als de multipliciteit bedraagt.

Tussen 2 punten a en b , waar de veelterm $f(x)$ eenzelfde teken bezit, ligt een even aantal nulpunten van de veelterm, waarbij elk nulpunt even vaak geteld wordt als de multipliciteit bedraagt.

Men merke op, dat in dit laatste geval het aantal nulpunten gelijk aan nul kan zijn.

Stel in het bewijs $a < b$. Stel $\xi_1, \dots, \xi_m$ zijn de naar opklimmende grootte gerangschikte tussen a en b gelegen nulpunten van de veelterm $f(x)$ met multipliciteiten $k_1, \dots, k_m$. Indien $f(a) > 0$, dan blijft de veelterm positief tussen a en ξ_1 . Omdat ξ_1 een nulpunt is met multipliciteit k_1 , heeft $f(x)$ tussen ξ_1 en ξ_2 hetzelfde teken als $(-1)^{k_1}$. Die veelterm heeft tussen ξ_2 en ξ_3 hetzelfde teken als $(-1)^{k_1+k_2}$. Zo doorgaande vinden we, dat $f(x)$ tussen ξ_m en b en ook in het punt b zelf, hetzelfde teken heeft als $(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_m}$. Is de som $k_1+\dots+k_m$ der multipliciteiten even, dan bezitten $f(a)$ en $f(b)$ hetzelfde teken. Is daarentegen de som der multipliciteiten oneven, dan bezitten $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken.

Op dezelfde manier wordt het bewijs geleverd, als $f(a) < 0$ is, want dan behoeft men slechts $f(x)$ door $-f(x)$ te vervangen.

Theorema van Rolle. Indien een functie $f(x)$ in een interval $a \leq x \leq b$ waarbij $a < b$ verondersteld wordt, continu is, in de uiteinden van het interval de waarde nul aanneemt en in het inwendige van het interval differentieerbaar is, dan is $f'(x)$ in minstens één punt tussen a en b gelijk aan nul. Dit is evident als $f(x)$ identiek nul is en anders neemt de continue functie $f(x)$ ergens tussen a en b een maximale of minimale

waarde aan. In het punt, waar die extreme waarde wordt aangenomen, is het buitengesloten, dat $f(x) \neq 0$, dus $f'(x) = 0$.

Zij ξ een bestaanbare wortel van de vergelijking $f(x) = 0$ van de n^o graad. De coëfficiënten van die vergelijking worden bestaanbaar verondersteld. Zij a verder een willekeurig bestaanbaar getal. Wordt $\xi = a+h$ gesteld, dan krijgt men

$$0 = f(\xi) = f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Indien a dicht bij ξ ligt, ligt h dicht bij nul, zodat dan de termen met de factoren $h^2, \dots, h^n$ soms ten opzichte van h kunnen worden verwaarloosd, zonder dat daarbij grote fouten optreden. Als eerste benadering vinden we dan $f(a) + h f'(a) = 0$, dus $h = -f(a)/f'(a)$, aangenomen, dat de noemer niet nul is. Hiermede vinden we voor de gevraagde wortel ξ een eerste benadering $a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. (Formule van Newton).

Uit het voorafgaande volgt volstrekt niet, dat deze waarde a_1 werkelijk dicht bij een wortel van de vergelijking ligt, zelfs niet als a dicht bij zo'n wortel ligt. Trouwens het begrip "dicht bij" is een onnauwkeurig begrip. Bij de vergelijking $x^2 = 10^{-6}$ ligt $a = 10^{-6}$ dicht bij het nulpunt 10^{-3} , maar $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 10}$ ligt hdemaal niet in de buurt. Bij de toepassing van de formule van Newton moet dus voorzichtigheid worden betracht. Die formule is zinloos, als $f'(a) = 0$ is, maar ze is in den regel onbruikbaar, als $f'(a)$ dicht bij nul ligt.

In de wiskunde passen we vaak het proces van iteratie toe. Uitgaande van het getal a en $f'(a) \neq 0$ veronderstellend hebben we een getal

$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ geconstrueerd. Wij herhalen (itereren) dit proces met a_1 in plaats van a , waarbij we dan natuurlijk verplicht zijn $f'(a_1) \neq 0$ te veronderstellen. Aldus vinden we $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$.

Zo voortgaande krijgt men onder bepaalde veronderstellingen (nl. dat alle optredende noemers $\neq 0$ zijn) een rij van getallen $a_1, a_2, \dots$, die in vele gevallen snel tot de gezochte wortel ξ naderen. Breken we de rij op een geschikte plaats af, dan kunnen we in dat geval ξ met iedere van te voren voorgeschreven nauwkeurigheid berekenen.

Om dit proces meetkundig toe te lichten beschouw ik een rechthoekig assenstelsel en teken ik de grafiek $y=f(x)$ van de functie $f(x)$. De nulpunten van de veelterm $f(x)$ worden aangegeven door de abscissen der snijpunten van deze grafiek met de X-as.

Opg. 1. Trek in een op de grafiek gelegen punt P met abscis a de raaklijn aan de kromme. Deze raaklijn snijdt, indien ze niet evenwijdig met de X-as loopt, de X-as in een punt met abscis $a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

Stel de veelterm $f(x)$ bezit in twee verschillende punten a en b tegengesteld teken en tussen a en b is $f''(x)$ steeds ≥ 0 of steeds ≤ 0 . Dan bezit $f(x)$ tussen a en b één en slechts één nulpunt ξ .

Dat er minstens één nulpunt is, is evident. Was er meer dan één nul-

punt, dan waren er tussen a en b minstens 3, omdat $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken bezitten. Indien die 3 nulpunten 2 aan 2 verschillend zijn vinden we volgens de stelling van Rolle twee verschillende punten, waar $f'(x)=0$ is; omdat $f''(x)$ een vast teken heeft, is $f'(x)$ monotoon, zodat $f'(x)$ tussen die 2 punten identiek nul zou zijn. In dat geval is $f'(x)$ overal gelijk aan nul, zodat $f(x)$ een constante zou zijn in strijd met de veronderstelling, dat ze in a en b tegengesteld teken aanneemt. Nu blijft nog over te onderzoeken het geval, dat $f(x)$ tussen a en b twee verschillende nulpunten bezit, waarvan er minstens één een meervoudig nulpunt is. In dit laatste nulpunt is $f'(x)$ wederom nul, zodat we wederom tussen a en b twee verschillende punten zouden vinden, waarin $f(x)$ de waarde nul zou aannemen. Dit is, zoals we hierboven gezien hebben, uitgesloten.

We weten dus nu, dat de veelterm $f(x)$ tussen a en b precies één nulpunt bezit. De vraag is: , of dit nulpunt met willekeurig voorgeschreven nauwkeurigheid kan worden berekend met behulp van de benaderingsmethode van Newton.

Laten we eerst het geval beschouwen, dat $f(a)$ en $f'(a)$ hetzelfde teken bezitten. Het punt $a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ ligt dan, zoals we bewijzen zullen, tussen a en het gesochte nulpunt ξ en we zullen laten zien, dat in dat punt a_1 de veeltermen f en f'' wederom hetzelfde teken hebben. Dit proces met a_1 in plaats van a herhalende, vinden we het tussen a_1 en ξ gelegen punt a_2 , waarin f en f'' wederom eenzelfde teken bezitten. Zo doorgaande vinden we een monotone rij getallen $a, a_1, a_2, \dots$. We gaan bewijzen, dat deze monotoon tot het gevraagde nulpunt ξ nadert.

Bezaten $f(a)$, $f'(a)$ en $f''(a)$ alle drie hetzelfde teken, dan zouden $f'(x)$ en ook $f(x)$ in het gehele interval $a \leq x \leq b$ dat teken bezitten, in strijd met de veronderstelling, dat $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken hebben. Dus $f(a)$ en $f'(a)$ bezitten tegengesteld teken, waaruit volgt, dat $a_1 > a$ is. Stelt men $\xi = a + h$, dan is

$$0 = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2} h^2 f''(a + \theta h), \quad \text{waarin } 0 \leq \theta \leq 1,$$

dus

$$0 < -\frac{f(a)}{f'(a)} = h - \frac{1}{2} h^2 \frac{f''(a + \theta h)}{f'(a)} < h.$$

Hieruit blijkt $h > 0$, dus $a < a_1 < \xi$. De veelterm $f(x)$ heeft links van ξ , dus zeker in a_1 , hetzelfde teken als in a , zodat f en f'' in a_1 hetzelfde teken bezitten. De redenering met $a_1, a_2, \dots$ in plaats van a herhalend, vinden we een monotoon toenemende rij $a, a_1, a_2, \dots$ gevormd door getallen, die alle kleiner dan ξ zijn. Die rij is convergent. De limiet η van die rij is $\leq \xi$. Uit $(a_{n+1} - a_n) f'(a_n) = -f(a_n)$

volgt bij limietovergang $f(\eta) = 0$, zodat η met het gevraagde nulpunt ξ samenvalt.

Voor de berekening is het niet alleen van belang te weten, dat een limietproces tot het gevraagde antwoord voert, maar het is ook van gewicht

te weten of dit antwoord snel wordt benaderd. Immers, in de praktijk breken we na een eindig aantal stappen af en het is dan van belang te weten of het aldus gevonden antwoord een voldoende scherpe benadering levert. Dit onderzoek is hier zeer gemakkelijk. Immers wegens $f(\xi)=0$ volgt uit de teruglopende betrekking

$$\xi - a_{h+1} = - \frac{1}{f'(a_h)} \left\{ f(\xi) - f(a_h) - f'(a_h) (\xi - a_h) \right\} = - \frac{1}{2} (\xi - a_h)^2 \frac{f''(\lambda)}{f'(a_h)}$$

waarbij λ tussen a_h en ξ ligt. Het blijkt dus, dat $\xi - a_{h+1}$ hoogstens van dezelfde orde van grootte is als $(\xi - a_h)^2$, tenminste als men bewijzen kan, dat de noemer $f'(a_h)$ niet dicht bij nul ligt. Dat die noemer inderdaad niet dicht bij nul ligt, kan als volgt worden ingezien: Ik ga eerst bewijzen, dat in het gehele interval $a \leq x \leq \xi$ de afgeleide $f'(x) \neq 0$ is. Bevatte dat interval een punt ζ met $f'(\zeta)=0$, dan zou $f(x)$ in dat punt een minimale waarde ofwel een maximale waarde aannemen, al naar gelang $f(a)$ positief of negatief zou zijn. In beide gevallen zou $f(\zeta)$ hetzelfde teken bezitten als $f(b)$, dus een teken tegengesteld aan dat van $f(a)$, hetgeen buitengesloten is, omdat a en ξ aan dezelfde kant van ζ liggen.

De afgeleide veelterm $f'(x)$, die in het interval $a \leq x \leq \xi$ niet nul is, bezit een positieve ondergrens. De breuk $-\frac{1}{2} \frac{f''(\lambda)}{f'(a_h)}$ is derhalve begrensd, waarmede bewezen is, dat $\xi - a_{h+1}$ hoogstens van dezelfde orde is als $(\xi - a_h)^2$. Dus als $\xi - a_h$ ongeveer van de orde 10^{-3} is, is $\xi - a_{h+1}$ ongeveer van de orde 10^{-6} , terwijl dan $\xi - a_{h+2}$ ongeveer van dezelfde orde is als 10^{-12} enz. Hieruit blijkt, dat $\xi - a_h$ zeer snel tot nul nadert, zodat we in de praktijk mogen verwachten, dat we reeds een bruikbaar antwoord vinden, indien we na een paar passen afbreken.

In het geval, $f(a) < 0$ en dus $f(b) > 0$ is, kan het bovenstaande proces met b in plaats van a worden toegepast. We krijgen dan een rij monotoon afnemende getallen, die snel tot het gevraagde nulpunt ξ naderen.

De benaderingsmethode van Newton komt daarop neer, dat een gedeelte van de grafiek van de functie $f(x)$ bij eerste benadering door een raaklijn is vervangen. De regel, die we nu gaan afleiden, de zgn. regula falsi, berust op het feit, dat in vele gevallen een boog van de genoemde grafiek bij benadering door de corresponderende koorde kan worden vervangen. Indien nl. de veelterm $f(x)$ in 2 verschillende punten a en b tegengesteld teken bezit, dan kunnen we de boog tussen de 2 punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ vervangen door de koorde, die deze twee punten verbindt en die tot vergelijking heeft

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Deze koorde snijdt de X -as in een punt met de abscis $x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$. In vele gevallen is deze waarde van x een approximatieve waarde van het gezochte nulpunt van de veelterm $f(x)$.

Om onze gedachte te bepalen zullen we eerst het geval behandelen, dat in het gehele interval $a \leq x \leq b$ de tweede afgeleide $f''(x)$ steeds ≥ 0 is.

In dat geval ligt de beschouwde boog van de kromme beneden de corresponderende koorde voorzover deze daar niet mee samenvalt. Immers de verticaal met abscis x snijdt de kromme en de koorde in twee punten, wier coördinatenverschil gelijk is aan

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) &= -\frac{1}{b-a} \left\{ (b-x)(f(a) - f(x)) + (x-a)(f(b) - f(x)) \right\} \\ &= -\frac{1}{b-a} \left\{ (b-x)(a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)(a-x)^2 f''(\xi') + (x-a)(b-x)f'(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(x-a)(b-x)^2 f''(\xi'') \right\} \\ &= -\frac{(b-x)(x-a)}{b-a} \left\{ (x-a)f''(\xi') + (b-x)f''(\xi'') \right\} \leq 0, \end{aligned}$$

waarbij ξ' en ξ'' geschikt gekozen punten voorstellen tussen a en b .

Laten we nu eerst het geval behandelen, dat $f(a) < 0$, dus $f(b) > 0$. Dan ligt het snijpunt x_1 van de koorde met de X -as tussen a en ξ , zodat de veelterm $f(x)$ ook in het punt x_1 weer negatief is. De redenering met x_1 en b herhalende in plaats van a en b , vinden we een punt x_2 , gelegen tussen x_1 en ξ . Zo doorgaande krijgen we een monotoon toenemende rij getallen $a, x_1, x_2, \dots$, alle $< \xi$. Deze rij is convergent. Haar limiet ω is $\leq \xi$. Om te bewijzen, dat ω met ξ samenvalt, beschouwen we, evenals hierboven de teruglopende betrekking, die hier de gedaante

$$x_h f(b) - b f(x_h) = \{ f(b) - f(x_h) \} x_{h+1}$$

bezit. Dit levert bij grensovergang $\omega f(b) - b f(\omega) = \{ f(b) - f(\omega) \} \omega$, waaruit volgt $f(\omega) = 0$, dus $\omega = \xi$.

Als $f''(x)$ in het interval $a \leq x \leq b$ voortdurend ≥ 0 is (en ook als die tweede afgeleide in het interval voortdurend ≤ 0 is), levert de regula falsi het tussen a en b gelegen nulpunt van $f(x)$ met iedere willekeurig voorgeschreven nauwkeurigheid, tenminste als $f(a)$ en $f(b)$ tegengesteld teken bezitten. Dit hebben we hierboven bewezen als $f(a)$ en $f''(x)$ tegengesteld teken bezitten (is nl. $f(a) > 0$ en $f''(x) \leq 0$, dan behoeven we in het bovenstaande slechts $f(x)$ door $-f(x)$ te vervangen). Hebben $f(a)$ en $f''(x)$ hetzelfde teken, dan moeten we in het bovenstaande a en b verwisselen, zodat we dan een afnemende rij getallen $b, x_1, x_2, \dots$ krijgen, die tot het gevraagde nulpunt ξ naderen.

We zullen niet de convergentiesnelheid van dit proces onderzoeken. Bij nader onderzoek zou blijken, dat die snelheid veel geringer is dan bij de benaderingsmethode van Newton. Het blijkt nl. dat bij de regula falsi $\xi - x_{h+1}$ niet van dezelfde orde is als $(\xi - x_h)^2$, maar van dezelfde orde als $\xi - x_h$, zodat de approximatie veel langzamer geschiedt.

In de practijk worden niet zozeer de benaderingsmethode van Newton en de regula falsi gebruikt, als wel de rekenwijze van Horner, die hier aan een speciaal geval zal worden toegelicht.

Beschouw de vergelijking $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 77x - 10077 = 0$. Het linkerlid is negatief voor $x=10$ en positief voor $x=11$. Uit het vervolg blijkt dat de vergelijking tussen 10 en 11 slechts een enkel nulpunt bezit. Indien gevraagd wordt, dit nulpunt in 6 decimalen achter de komma te be-

rekenen, ontwikkelen we $f(x)$ met de rekenwijze van Horner naar opklimmende machten van $y=x-10$. Men krijgt het schema

1	-4	3	77	-10077
	10	60	630	7070
1	6	63	707	-3007
	10	160	2230	
1	16	223	2937	
	10	260		
1	26	483		
	10			
1	36,			

dus $f(x) = y^4 + 36y^3 + 483y^2 + 2937y - 3007$. Gevraagd wordt van deze vergelijking de tussen 0 en 1 gelegen wortel y in zes decimalen nauwkeurig te berekenen. Zouden we $y=0,9$ proberen, dan zou blijken, dat deze waarde te groot is, zodat we gaan ontwikkelen naar opklimmende machten van $z=y-0,9$.

1	36	483	2937	-3007
	0,8	29,44	409,952	2677,5616
1	36,8	512,44	3346,952	-329,4384
	0,8	30,08	434,016	
1	37,6	542,52	3780,968	
	0,8	30,72		
1	38,4	573,24		
	0,8			
1	39,2			

Dus $f(x) = z^4 + 39,2 z^3 + 573,24 z^2 + 3780,968 z - 329,4384$. Gevraagd het tussen 0 en 0,1 gelegen nulpunt van deze veelterm te bepalen. Voor een zdanige waarde van z zijn de eerste 3 in het rechterlid optredende termen klein t.o.v. de beide andere termen, zodat men z bij benadering vindt door de som van deze laatste twee termen gelijk aan 0 te stellen. We vinden dan dat z approximatief gelijk is aan 0,08, zodat we gaan ontwikkelen naar opklimmende machten van $u=z-0,08$. Om niet te veel decimalen te krijgen, ronden we af.

1	39,2	573,24	3780,968	-329,4384
	0,1	3,14	46,110	306,1662
1	39,3	576,38	3827,078	-23,2722
	0,1	3,15	46,36	
1	39,4	579,53	3873,44	
	0,1	3,16		
1	39,5	583		
	0,1			
1	39,6			

De veelterm $f(x)$ gaat dus bij grote benadering over in

$$u^4 + 39,6u^3 + 583u^2 + 3873,44u - 23,2722.$$

Het tussen 0 en 0,01 gelegen nulpunt van deze veelterm is approximatief 0,006, zodat we ontwikkelen naar opklimmende machten van $v=u-0,006$. We krijgen dan het schema

1	39,6	583	3873,44	-23,2722
	...	...	3,50	23,2616
1	39,6	583	3876,94	- 0,0106
	...	...	3,50	
1	39,6	583	3880,44	
	...	...		
1	39,6	583		
	...	...		
1	39,6.			

De veelterm $f(x)$ is dus bij grote benadering gelijk aan de veelterm

$$v^4 + 39,6 v^3 + 583 v^2 + 3880,44 v - 0,0106.$$

Het tussen 0 en 0,001 gelegen nulpunt vindt men weer approximatief door de som van de laatste twee termen gelijk aan nul te stellen, waaruit volgt $v=0,000027$, waarbij voor de laatste decimaal niet kan worden ingestaan.

We vinden dus als benaderde waarde van het tussen 10 en 11 gelegen nulpunt van $f(x)$ de waarde 10,886027.

§ 5. Ontbinding in factoren.

In deze paragraaf wensen wij te onderzoeken of een gegeven veelterm

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

met rationale coëfficiënten ontbonden kan worden in twee veeltermen

$$g(x) = b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r \quad \text{en} \quad h(x) = c_0 x^s + c_1 x^{s-1} + \dots + c_s,$$

eveneens met rationale coëfficiënten.

Het is duidelijk dat wij bij ons onderzoek de coëfficiënten van de veelterm $f(x)$ allen geheel mogen onderstellen, want om dit te bereiken behoeven wij $f(x)$ slechts met het KGV der noemers, optredende in de $n+1$ coëfficiënten, te vermenigvuldigen en deze vermenigvuldiging heeft geen invloed op het al of niet ontbindbaar zijn van $f(x)$ in de gewenste gedaante $g(x) \cdot h(x)$. Wij onderstellen dus voortaan dat $a_0, a_1, \dots, a_n$ allen geheel zijn.

Gauss heeft verder aangetoond dat wij slechts behoeven te zoeken naar veeltermen $g(x)$ en $h(x)$ met gehele coëfficiënten, m.a.w. als er geen $g(x)$ en $h(x)$ met gehele coëfficiënten bestaan, die voldoen aan $f(x) = g(x) h(x)$, is er ook geen stel veeltermen $g(x)$ en $h(x)$ met rationale coëfficiënten te vinden die aan deze relatie voldoen.

Wij voeren het begrip primitieve veelterm in; hieronder verstaan wij een veelterm met gehele coëfficiënten, waarvan de GGD gelijk is aan 1. Allereerst bewijzen wij na de volgende stelling van Gauss:

Het product van twee primitieve veeltermen is weer een primitieve veelterm.

Immers onderstel $g(x)$ en $h(x)$ primitief. Dan vindt men voor de coëfficiënten van hun product

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$$

$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$$

$$- - - - -$$

$$a_k = \sum b_p c_\sigma \quad \text{waarin} \quad p + \sigma = k; \quad 0 \leq p \leq r; \quad 0 \leq \sigma \leq s$$

$$- - - - -$$

$$a_n = b_r c_s$$

Onderstel nu dat $f(x) = g(x) h(x)$ niet primitief was. Dan bestond er een priemgetal p dat deelbaar was op alle coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_n$. Onderstel dat b_r de eerste in $g(x)$ optredende coëfficiënt is, waarop p niet deelbaar is en evenzo dat c_s de eerste in $h(x)$ optredende coëfficiënt is waarop p niet deelbaar is. Wij beschouwen dan de coëfficiënt a_{r+s} waarin de term $b_r c_s$ optreedt die ondeelbaar is door p terwijl

alle andere in $\ell_R \subset \mathcal{S}$ optredende termen producten zijn van een b met lagere index dan R en een c met lagere index dan S , zodat die allen wel door p deelbaar zijn. Bij gevolg was de grootheid a_{R+S} niet deelbaar door p in tegenstelling met de onderstelling.

Wij formuleren nu onze ontbindingsstelling nog iets anders nl.:

Is $f(x)$ (met gehele coëfficiënten) gelijk aan een product $g(x) h(x)$ van twee veeltermen met rationale coëfficiënten, dan bestaat er een rationaal getal t , zodanig dat $tg(x)$ en $\frac{h(x)}{t}$ gehele coëfficiënten bezitten (zodat $f(x)$ dus te schrijven blijkt als een product van twee veeltermen met gehele coëfficiënten).

Bewijs: Onderstel $f(x)$ primitief en zij $f(x) = g(x) h(x)$, waarin de coëfficiënten van $g(x)$ en $h(x)$ rationaal zijn. Er bestaat dan een kleinste geheel getal a zodanig dat $ag(x)$ slechts gehele coëfficiënten bezit; als nu b de GGD dier coëfficiënten is, is $\frac{ag(x)}{b}$ primitief (en de GGD (a,b) van a en b is 1). Evenzo bestaan er twee gehele getallen c en d (met $\text{GGD}(c,d) = 1$), zodanig dat $\frac{ch(x)}{d}$ primitief is. Men heeft dan dat $\frac{ac}{bd} f(x) = \frac{ag(x)}{b} \cdot \frac{ch(x)}{d}$ als product van twee primitieve veeltermen primitief is. Geen factor van bd is deelbaar op de coëfficiënten van f want f is primitief. Dus bd is deelbaar op ac . Het quotient is echter 1 want anders was $\frac{ac}{bd} f(x)$ niet primitief. Bij gevolg is $bd = ac$. Dus $f(x) = \frac{a}{c} g(x) \cdot \frac{b}{a} h(x)$, waarmee de stelling bewezen is.

Is $f(x)$ niet primitief, dan volgt uit $f(x) = g(x) h(x)$ dat

$\frac{f(x)}{e} = \frac{g(x)}{e} h(x)$ (waarin e de GGD der coëfficiënten van $f(x)$ voorstelt), $\frac{f(x)}{e}$ primitief is; er bestaat dan een rationaal getal t met $\frac{f(x)}{e} = \frac{tg(x)}{e} \frac{h(x)}{t}$, waarin $\frac{tg(x)}{e}$ en $\frac{h(x)}{t}$ gehele coëfficiënten hebben, dus $f(x) = tg(x) \cdot \frac{h(x)}{t}$ is ook een product van twee veeltermen met gehele coëfficiënten.

Opg. 1. Als de primitieve veelterm $f(x)$ geschreven is als een product $g_1(x) g_2(x) \dots g_k(x)$, dan bestaan er rationale getallen $r_1, r_2, \dots, r_k$, met $r_1 r_2 \dots r_k = 1$, zodanig dat $r_1 g_1(x), r_2 g_2(x), \dots, r_k g_k(x)$ allen primitief zijn.

Def. Men noemt een primitieve veelterm irreducibel als zij niet te schrijven is als product van primitieve veeltermen van lagere graad.

Uit de gevonden resultaten blijkt dat men bij het zoeken naar ontbindingen van primitieve veeltermen zich slechts tot primitieve factoren behoeft te beperken. Wenst men b.v. na te gaan of de veelterm

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

irreducibel is of niet, dan zijn slechts mogelijk de gevallen

$$f(x) = (x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$$

en

$$f(x) = (x^2+ex+g)(x^2+hx+k),$$

waarbij alle optredende coëfficiënten a, b, c, d, e, g, h en k geheel zijn.

In het eerste geval is $ad = 2$, dus $a = 1, -1, 2$ of -2 en men controleert met behulp van de reststelling direct dat $f(x)$ geen factor $x+1, x-1, x+2$ of $x-2$ bevat.

In het tweede geval heeft men

$$\begin{cases} e+h=2 \\ g+eh+k=1 \\ gh+ek=-5 \\ gk=2 \end{cases}$$

Uit $gk=2$ volgt dat juist één der grootheden g en k even is, dus uit de 2e relatie volgt dat eh even is; daar $e+h$ even is, zijn dus e en h beide even, wat strijdt met de 3e relatie. De veelterm $f(x)$ is derhalve irreducibel.

Wij leiden nog de stelling van Eisenstein af, die ons in bepaalde gevallen helpt om veeltermen op hun reducibiliteit te onderzoeken. Deze stelling zegt: Als van de veelterm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ de coëfficiënt a_n niet en de overige coëfficiënten $a_{n-1}, \dots, a_0$ door een priemgetal p deelbaar zijn, terwijl a_0 niet door p^2 deelbaar is, dan is $f(x)$ irreducibel.

Bewijs: Stel er bestond een ontbinding

$$f(x) = (b_r x^r + \dots + b_0)(c_s x^s + \dots + c_0),$$

waarin alle coëfficiënten geheel zijn, dan is $a_0 = b_0 c_0$ deelbaar door p maar niet door p^2 , dus hetzij b_0 hetzij c_0 is deelbaar door p . Zonder de algemeenschap te schaden mogen we aannemen dat b_0 wel en c_0 niet deelbaar is door p . Daar niet alle coëfficiënten $b_0, b_1, \dots, b_r$ deelbaar zijn door p (anders was a_n het ook) is er een eerste coëfficiënt, welke wij b_R zullen noemen, die niet door p deelbaar is. Echter is dan a_R een som van termen die allen, op de ene term $b_R c_0$ na, door p deelbaar zijn, dus a_R is niet deelbaar door p in strijd met de onderstelling.

Opg. 2. Als p priem is, is de veelterm

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x^2 + x + 1$$

irreducibel. Men bewijze dit door $x = y+1$ te stellen en te beschouwen

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = \frac{(y+1)^p - 1}{y}, \text{ op welke veelterm in } y \text{ de stelling van}$$

Eisenstein is toe te passen.

Opg. 3. Als van de veelterm $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ alle coëfficiënten $a_1, \dots, a_n$ deelbaar zijn door een priemgetal p , maar a_n niet deelbaar is door p^2 en als verder a_0 niet deelbaar is door p , dan is die veelterm irreducibel.

Opg. 4. Ontbind de veelterm $x^{15} - 1$ in irreducibele factoren.

Hoofdstuk IV.

§ 1. Eliminatie.

Wij wensen in deze paragraaf na te gaan onder welke voorwaarden twee veeltermen

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n; \quad g(x) = b_0 x^m + \dots + b_m$$

een nulpunt gemeen hebben. Wij zoeken daartoe een functie die alleen afhangt van de coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$ en die dan en slechts dan nul wordt als een der n nulpunten $x_1, \dots, x_n$ van $f(x)$ samenvalt met een der m nulpunten $y_1, \dots, y_m$ van $g(x)$. Het is duidelijk dat de functie

$$C = \prod_{\mu=1}^m \prod_{\nu=1}^n (x_\nu - y_\mu)$$

juist in die gevallen nul wordt. Wij merken verder op dat uit $g(x) = b_0(x-y_1)\dots(x-y_m)$ volgt $g(x_1) = b_0(x_1-y_1)\dots(x_1-y_m)$, dus

$$C = \prod_{\nu=1}^n \frac{g(x_\nu)}{b_0^m}$$

De functie $C b_0^m = \prod_{\nu=1}^n g(x_\nu)$ is een gehele rationale symmetrische functie in de grootheden $x_1, \dots, x_n$ en dus volgens de theorie der symmetrische functies geheel en rationaal uit te drukken in de grootheden $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$. Deze functie is van de graad m in elk der grootheden $x_1, \dots, x_n$, zodat a_0^m maal deze functie, dus de functie

$$D_{fg} = a_0^m b_0^n C$$

geheel en rationaal uit te drukken is in de grootheden $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$.

Uit $D_{fg} = a_0^m \prod_{\nu=1}^n g(x_\nu)$ ziet men dat D_{fg} homogeen en van de graad n is in de grootheden $b_0, \dots, b_m$; evenzo is D_{fg} homogeen en van de graad m in de grootheden $a_0, \dots, a_n$.

Toepassing. Bepaalde uitdrukking D_{fg} voor de veeltermen

$$f(x) = a_0 x + a_1; \quad g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2.$$

Men vindt

$$D_{fg} = a_0^2 g(x_1) = b_0 a_1^2 - b_1 a_0 a_1 + b_2 a_0^2,$$

of door uit te gaan van $g(x)$

$$\begin{aligned} D_{fg} &= a_0^2 f(y_1) f(y_2) = b_0 (a_0 y_1 + a_1) (a_0 y_2 + a_1) \\ &= b_0 (a_0^2 y_1 y_2 + a_0 a_1 (y_1 + y_2) + a_1^2) = b_2 a_0^2 - b_1 a_0 a_1 + b_0 a_1^2. \end{aligned}$$

Opg. 1. Bepaal de uitdrukking D_{fg} voor de veeltermen $a_0 x + a_1$ en $b_0 x + b_1$.

Opg. 2. Bewijs dat uitdrukking D_{fg} voor twee veeltermen f en g resp. van de graad n en m gelijk is aan de uitdrukking D_{gf} voor de veeltermen g en f afgezien van een factor $(-)^{mn}$. [Wij zien dat de functie D_{fg} of de functie $D_{gf} = (-)^{mn} D_{fg}$ dan en slechts dan nul wordt als de veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ een nulpunt gemeen hebben. De functie D_{fg} is dus de resultante van de veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ en deze resultante is zoals wij hierboven zagen, homogeen en van de graad n in de coëfficiënten $b_0, b_1, \dots, b_m$ van $g(x)$ en homogeen en van de graad m in de coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_n$ van $f(x)$. De resultante is dus homogeen en van de graad $m+n$ in de coëfficiënten van de veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ tesamen. Wij tonen ook nog aan dat de resultante isobaar is in de coëfficiënten van deze beide veeltermen tesamen. Beschouw daartoe de vergelijking $\varphi(\xi) = 0$, waarvan alle nulpunten $\xi_1, \dots, \xi_n$ t maal zo groot zijn als die van $f(x)$, dus als

$$\varphi(\xi) = a_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

dan is $\alpha_1 = t a_1$; $\alpha_2 = t^2 a_2$; $\dots$; $\alpha_n = t^n a_n$. Verder beschouwe men de veelterm $\chi(\xi)$ waarvan de nulpunten $t x$ zo groot zijn als die van $g(x)$. Voor de coëfficiënten $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ van $\chi(\xi)$ ziet men dan direct in dat geldt

$$\beta_1 = t \beta_1, \beta_2 = t^2 \beta_2, \dots, \beta_m = t^m \beta_m.$$

Verder is

$$\begin{aligned} D_{\varphi\chi} &= a_0^m b_0^n \prod_{\mu, \nu} (\xi_\nu - \eta_\mu) = a_0^m b_0^n \prod_{\mu, \nu} t(x_\nu - y_\mu) \\ &= t^{mn} a_0^m b_0^n \prod_{\mu, \nu} (x_\nu - y_\mu) = t^{mn} D_{fg}. \end{aligned}$$

Daar $D_{\varphi\chi}$ ontstaat uit D_{fg} door bij D_{fg} in elke term a_i te vervangen door α_i , a_2 door α_2 , $\dots$, a_n door α_n , b_1 door β_1 , b_2 door β_2 , $\dots$, b_m door β_m en bij die vervanging hierbij evenveel factoren t gewonnen worden als de index aangeeft, is het gewicht van iedere term van D_{fg} gelijk aan mn , dus D_{fg} is isobaar van het gewicht mn in de coëfficiënten van de veeltermen f en g .

Indien men op een of andere wijze een veelterm V in de grootheden $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$ afleidt, die nul wordt als f en g een wortel gemeen hebben, is die veelterm V deelbaar door D_{fg} . Immers de veelterm V is symmetrisch in de grootheden $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ en wordt nul als er een i en j bestaan zodanig dat $x_i = y_j$, zodat V de factor $x_i - y_j$ bevat, maar wegens de symmetrie is V dan deelbaar door elk der $m \cdot n$ uitdrukkingen $x_\nu - y_\mu$, dus door hun product C . Daar echter C gebroken rationaal is in de grootheden $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$, (en wel met noemer $a_0^m b_0^n$), is V deelbaar door $a_0^m b_0^n C$, dus door D_{fg} .

Toepassing. Men elimineert x uit de vergelijkingen

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

$$g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

op twee wijzen, nl. door ze met b_0 resp. a_0 te vermenigvuldigen en af te trekken en door ze met b_2 resp. a_2 te vermenigvuldigen en af te trekken. Men vindt dan bij $x \neq 0$

$$(ab)_{10} x + (ab)_{20} = 0$$

$$(ab)_{02} x + (ab)_{12} = 0$$

(hierin stelt $(ab)_{ij}$ de determinant $a_i b_j - a_j b_i$ voor) en dus na eliminatie van x

$$R = (ab)_{10} (ab)_{12} + (ab)_{02}^2 = 0.$$

Deze relatie geldt ook in het nog niet behandelde uitzonderingsgeval $x = 0$, want dan is $a_2 = b_2 = 0$. Men kan het gevonden resultaat nog in een andere gedaante brengen. Men heeft nl.

$$R = \begin{vmatrix} (ab)_{02} & (ab)_{12} \\ (ab)_{01} & (ab)_{02} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_0 b_2 - a_2 b_0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 & a_0 b_2 - a_2 b_0 \end{vmatrix},$$

waaruit na 2 maal randen volgt

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dit laatste resultaat is een bijzonder geval van een resultaat dat ons door de eliminatie methode van Sylvester wordt gegeven. Indien de vergelijkingen $f(x)=0$ en $g(x)=0$ een wortel gemeen hebben, is dit getal x wortel van elk der vergelijkingen

$$x^{m-1}f(x)=0, x^{m-2}f(x)=0, \dots, xf(x)=0, f(x)=0, x^{n-1}g(x)=0, \\ x^{n-2}g(x)=0, \dots, xg(x)=0, g(x)=0.$$

Schrijft men deze vergelijkingen uit dan ziet men dat het systeem homogene vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_0 z_{m+n-1} + a_1 z_{m+n-2} + \dots + a_n z_{m-1} &= 0 \\ a_0 z_{m+n-1} + \dots &+ a_n z_{m-2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \dots \dots \\ a_0 z_n + \dots &+ a_n z_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 z_{m+n-1} + b_1 z_{m+n-2} + \dots + b_m z_{n-1} &= 0 \\ b_0 z_{m+n-1} + \dots &+ b_m z_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots \dots \dots \\ b_0 z_m + \dots &+ b_m z_0 = 0 \end{aligned}$$

tegelijk moet bestaan (en wel de oplossing

$$z_0 = 1, z_1 = x, z_2 = x^2, \dots, z_{m+n-1} = x^{m+n-1},$$

die niet de nuloplossing is, moet bezitten), zodat de coëfficiënten-determinant

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

nul is. Dat omgekeerd uit het nul zijn van R volgt, dat het stelsel een oplossing bezit, is evident maar het staat niet a priori vast dat die oplossing $(z_0, z_1, \dots, z_{m+n-1})$ de eigenschap bezit, dat $z_0 = 1$; $z_1 = x$;

$z_2 = z_1^2; \dots; z_{m+n-1} = z_1^{m+n-1}$ en pas daaruit volgt dat f en g een nulpunt z_1 gemeen hebben. Dat dit bij $R = 0$ toch wel het geval is, blijkt uit de hierboven gemaakte opmerking, dat als f en g een nulpunt gemeen hebben, $R = 0$ is, zodat R deelbaar is door elk der verschillen $x_i - y_i$, dus door D . Aangezien echter R niet identiek nul is (men kijke b.v. naar de term $a_0^m b_0^n$, die in R éénmaal optreedt en wel met coëfficiënt 1) en van de graad m in de coëfficiënten a_i en van de graad n in de coëfficiënten b_i is, kunnen R en D slechts in een constante factor verschillen, zodat uit $R = 0$ inderdaad volgt dat $D = 0$ is, dus dat f en g een nulpunt gemeen hebben.

Opg. 3. Toon aan dat een gemeenschappelijk nulpunt van $f(x)$ en $g(x)$ ook een gemeenschappelijk nulpunt is van de veeltermen $f(x)$ en $f(x) + \lambda g(x)$ (λ willekeurig $\neq 0$).

Euler heeft nog een andere methode gegeven om de resultante der veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ te vinden. Hij merkte op, dat, als $f(x)$ en $g(x)$ een nulpunt c gemeen hebben, geldt $f(x) = (x-c) p(x)$; $g(x) = (x-c) q(x)$, dus

$$q(x) f(x) = p(x) g(x),$$

waarbij $p(x)$ en $q(x)$ ten hoogste van de graad $n-1$ resp. $m-1$ zijn. Omgekeerd als twee dergelijke veeltermen $p(x)$ en $g(x)$ bestaan, moeten de n lineaire factoren van $f(x)$ deelbaar zijn op het rechterlid $p(x) q(x)$, maar omdat $p(x)$ ten hoogste van de graad $n-1$ is, moet ten minste een dier factoren deelbaar zijn op $g(x)$, waaruit volgt dat $g(x)$ en $f(x)$ een factor, dus een nulpunt gemeen hebben. Zodra dus een tweetal veeltermen

$$p(x) = p_0 x^{n-1} + \dots + p_{n-1}; \quad q(x) = q_0 x^{m-1} + \dots + q_{m-1}$$

bepaald kan worden, waarvoor geldt $q(x) f(x) = p(x) g(x)$, hebben $f(x)$ en $g(x)$ een nulpunt gemeen. Door de producten $q(x) f(x)$ en $p(x) g(x)$ uit te werken en de coëfficiënten van overeenkomstige machten gelijk te stellen, ziet men dat er getallen $p_0, \dots, p_{n-1}; q_0, \dots, q_{m-1}$ (niet allen nul) bepaald kunnen worden zodanig dat

$$\begin{cases} p_0 b_0 & - q_0 a_0 & = 0 \\ p_0 b_1 + p_1 b_0 & - q_0 a_1 - q_1 a_0 & = 0 \\ p_0 b_2 + p_1 b_1 + p_2 b_0 & - q_0 a_2 - q_1 a_1 - q_2 a_0 & = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} b_m & - q_{m-1} a_{n-1} & = 0 \end{cases}$$

Van dit homogene stelsel moet de coëfficiëntendeterminant dus nul zijn en men ziet gemakkelijk in dat deze, na wentelen om de hoofddiagonaal, op eenvoudige wijze over te voeren is in de determinant R van Sylvester.

Opg. 4. Toon aan dat het bestaan van een veelterm $p(x)$ van de graad $n-2$ en een veelterm $q(x)$ van de graad $m-2$, die voldoen aan

$$q(x) \cdot f(x) = p(x) \cdot g(x)$$

tot gevolg heeft dat $f(x)$ en $g(x)$ twee wortels gemeen hebben.

Opg. 5. Bepaal de relaties die tussen de coëfficiënten der veeltermen

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad \text{en} \quad g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

moeten gelden, opdat deze een (resp. twee) nulpunten gemeen hebben.

De eliminatie methode van Bezout gaat geheel anders te werk dan die van Sylvester. Wij lichten deze toe aan een speciaal geval

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 ; \quad g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

Hebben $f(x)$ en $g(x)$ een wortel gemeen, dan geldt voor die wortel

$$\frac{a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3}{b_0 x + b_1} = \frac{a_4}{b_2} ; \quad \frac{a_0 x^2 + a_1 x + a_2}{b_0} = \frac{a_3 x + a_4}{b_1 x + b_2}$$

dus na herleiding twee betrekkingen van de gedaante (waarvan de coëfficiënten c en d op eenvoudige wijze in de coëfficiënten a en b uit te drukken zijn)

$$\begin{aligned} c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 &= 0 \\ d_0 x^3 + d_1 x^2 + d_2 x + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aan deze betrekkingen voegen we nog toe de betrekkingen

$$\begin{aligned} b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x &= 0 \\ b_0 x^2 + b_1 x + b_2 &= 0. \end{aligned}$$

De 4 gevonden betrekkingen, alleen geldig als er een gemeenschappelijk nulpunt^x der twee veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ bestaat, leveren na eliminatie een resultante

$$B = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

op. Men weet dat deze deelbaar moet zijn door D. Lettende op de graad van B en op het feit dat B niet identiek nul is, ziet men gemakkelijk in, dat B en D_f slechts in een constante factor verschillen.

Opg. 6. Laat zien dat bij veeltermen $f(x)$ en $g(x)$, beide van de graad 3, de determinant B van Bezout de gedaante

$$B = \begin{vmatrix} (ab)_{03} & (ab)_{13} & (ab)_{23} \\ (ab)_{02} & (ab)_{12} + (ab)_{03} & (ab)_{13} \\ (ab)_{01} & (ab)_{02} & (ab)_{03} \end{vmatrix}$$

bezit.

§2. Toepassingen van de eliminatietheorie.

Wij geven van het gevondene twee toepassingen.

De eerste toepassing bestaat uit het opsporen van de snijpunten van twee willekeurige vlakke krommen $f(x,y) = 0$ en $g(x,y) = 0$, resp. van de graad n en m. We schrijven

$$f(x,y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n; \quad g(x,y) = b_0 x^m + \dots + b_m,$$

waarbij elke coefficient $a_\nu = a_\nu(y)$ een veelterm is van een graad ν in y en elke coefficient $b_\mu = b_\mu(y)$ een veelterm is van een graad μ in y. Een snijpunt $S(x_0, y_0)$ van de krommen heeft de eigenschap, dat de veeltermen $f(x, y_0)$ en $g(x, y_0)$ een gemeenschappelijk nulpunt hebben, d.w.z. dat hun resultante nul is. Deze resultante is in ons geval een veelterm in y_0 en wel van een graad, die gelijk is aan het gewicht m n dier resultante, juist omdat in de coefficienten a_ν resp. b_μ de grootheid y in de ν^e resp. μ^e graad optreedt. Er zijn wegens de hoofdstelling der algebra juist m n waarden y_0 te vinden waarvoor deze resultante (als veelterm van een graad m n in y_0) nul wordt. Is eenmaal zo'n waarde y_0 gevonden, dan kan het bijbehorende punt S gevonden worden door, zoals boven is opgemerkt, een stelsel van m+n-1 homogene lineaire vergelijkingen in de onbekenden $z_0 = 1, z_1 = x_0, z_2 = x_0^2, \dots, z_{m+n-1} = x_0^{m+n-1}$ op te lossen, waaruit in het algemeen juist 1 waarde van x_0 volgt. In het algemeen vindt men zo dat twee vlakke krommen van de graden m en n precies m n snijpunten gemeen hebben (stelling van Bezout). In de analytische of in de algebraïsche meetkunde worden deze resultaten gepreciseerd en de uitzonderingsgevallen, die zich hierbij kunnen voordoen en waarop wij nu niet ingaan, bestudeerd.

Opg. 1. Bepaal op de aangegeven wijze de snijpunten van de krommen

$$x^3 + y^3 = 4\frac{1}{2}x; \quad x^2 + y^2 = 5.$$

Opg. 2. Is het mogelijk dat twee krommen van de graad m resp. n meer dan $m n$ snijpunten hebben?

Een geheel andere toepassing van de eliminatietheorie levert ons de voorwaarde waaronder een veelterm $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ een dubbel nulpunt bezit. Wij weten dat het daartoe nodig en voldoende is, dat $f(x)$ en $f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$ een nulpunt gemeen hebben. Wij vinden de genoemde voorwaarde direct door ^{de} resultante R van f en f' op te schrijven, die van de graad $n(n-1)$ in de coëfficiënten a is en van het gewicht $n(n-1)$. Men ziet echter onmiddellijk in dat deze resultante deelbaar is door a_0 , zodat wij na verwijdering van deze factor een resultante $D = \frac{R}{a_0}$ vinden, die in de coëfficiënten van de graad $2n-2$ en van het gewicht $n(n-1)$ is.

Men overtuigt zich er gemakkelijk van dat D niet identiek nul is. De gevonden uitdrukking D wordt de discriminant van f genoemd.

Opg. 3. De discriminant van f is op te vatten als resultante van

$$f_1 = f' \quad \text{en} \quad f_2 = n f - x f'.$$

Opg. 4. Schrijft men $f(x) = f(x, 1)$, waarbij

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n,$$

dan is de in opgave 3 gevonden vorm f_2 gelijk aan $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, waarin $y = 1$ gesteld is. (Dit is een bijzonder geval van de stelling van Euler, die zegt dat een homogene vorm f van de graad n in de variabelen $x, y, z, \dots$ voldoet aan

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + \dots = n f.)$$

Opg. 5. Bepaal de discriminant van elk der vergelijkingen

$$x^2 + p x + q = 0; \quad x^3 + p x + q = 0; \quad x^4 + p x + q = 0.$$

Opg. 6. Bepaal de discriminant van de vergelijking

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

Men kan ook op geheel andere wijze komen tot de uitdrukking D . Beschouw daartoe de uitdrukking

$$V = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n)$$

bestaande uit $\frac{n(n-1)}{2}$ factoren. Het is duidelijk dat V nul wordt zodra twee der nulpunten van $f(x)$ gelijk zijn. V is echter geen symmetrische vorm in de grootheden $x_1, \dots, x_n$ want verwisseling van twee dezer grootheden doet V in zijn tegengestelde overgaan. (Een zodanige vorm noemt men alternerend). Juist dit resultaat leert ons welke functie der nul-

puntverschillen we moeten nemen om wel een symmetrische uitdrukking in de wortels te krijgen. We beschouwen nl. de functie $\prod_{\mu \neq \nu} (x_\mu - x_\nu)$,

waarin naast b.v. de factor $x_1 - x_2$ ook de factor $x_2 - x_1$ optreedt.

Deze functie, die juist gelijk is aan $(-)^{\frac{n(n-1)}{2}} V^2$, wordt slechts nul als twee der nulpunten van $f(x)$ samenvallen en deze functie is symmetrisch in die nulpunten, dus geheel en rationaal uit te drukken in

$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$. Daar V^2 in elk der nulpunten van de graad $n-2$ is, is $a_0^{2n-2} V^2$ een gehele rationale functie van $a_1, a_2, \dots, a_n$, die dan en slechts dan nul wordt, als twee der nulpunten van $f(x)$ samenvallen. De bovengevonden uitdrukking D wordt nul als twee der nulpunten samenvallen en is dus deelbaar door $a_0^{2n-2} V^2$. Aangezien echter D van het gewicht $n(n-1)$ is in de grootheden $a_0, a_1, \dots, a_n$ en $a_0^{2n-2} V^2$ als symmetrische functie van de graad $n(n-1)$ eveneens dit gewicht bezit moet het quotient

een gewicht nul bezitten, zodat dit quotient af-

gezien van getallen factoren van de gedaante a_0^p is. Daar D van de graad $2n-2$ is in de coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_n$ en V^2 van de graad $2n-2$ in x_1 , dus $a_0^{2n-2} V^2$ van de graad $2n-2$ in de grootheden $a_0, a_1, \dots, a_n$, is, moet $p = 0$ zijn zodat $a_0^{2n-2} V^2$ en D afgezien van getallen factoren overeenstemmen.

Zo heeft men bij de vierkantsvergelijking $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 2 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix} = -a_1^2 + 4a_0 a_2.$$

$$a_0^2 V^2 = a_0^2 (x_1 - x_2)^2 = a_0^2 ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2) = a_1^2 - 4a_0 a_2.$$

Opg. 7. Bij de cubische vergelijking $x^3 + p x + q = 0$ drukke men de symmetrische uitdrukking

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

uit in de coëfficiënten p en q , gebruik makende van de relatie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.