STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 18g

Avondcursus wiskunde 1950-1951;

Analytische meetkunde, 1.

H.J.A. Duparc.

1951
~~1952~~

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam-O.

Avondcursus 1950/1951.

ANALYTISCHE MEETKUNDE

door

H.J.A. Duparc.

1. De rechte lijn.

Beschouw een vaste rechte l. Kies hierop een vast punt O. De plaats van een willekeurig punt P op l is dan bepaald door de afstand OP en de richting van OP.

Men is gewoon om op l één richting de positieve te noemen en de andere de negatieve.

Onder de coördinaat van het punt P t.o.v. O verstaat men het getal +a als a de lengte van OP voorstelt en OP de positieve richting op l aangeeft; men verstaat hieronder -a als a de lengte van OP voorstelt en OP met de negatieve richting van l samenvalt.

Uiteraard is de lengte van OP eerst bepaald, nadat op l een lengte-eenheid is aangenomen. Deze denken we in het vervolg gegeven. Vaak kiest men hiervoor de cm.

Het punt O wordt oorsprong genoemd. De coördinaat van O is nul.

Elk punt op l heeft één coördinaat; bij elk gegeven reëel getal a is één punt te vinden, dat a als coördinaat bezit.

Men zegt in dit geval dat er een één-éénduidig verband bestaat tussen de reële getallen en de punten op de rechte lijn.

De bovengegeven definitie van coördinaat heeft het voordeel, dat verschillende formules, waarin coördinaten van punten optreden, geldig zijn onafhankelijk er van of deze punten aan dezelfde of aan verschillenden zijde van het punt O liggen. Als voorbeeld noemen we de afstandsformule voor 2 punten P_1 en P_2 resp. met coordinaten x_1 en x_2. Men heeft

$$P_1 P_2 = |x_1 - x_2|.$$

Hierin stelt het symbool $|a|$ voor de waarde van het getal a, afgezien van het teken, dus bv. $|+3| = 3$; $|-2| = 2$.

Opg. 1. Bewijs dat de afstand der bovengenoemde punten P_1 en P_2 eveneens wordt gegeven door de formule

$$P_1 P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} .$$

Opg. 2. Bewijs dat de coordinaat van het midden van het lijnstuk $P_1 P_2$ gegeven wordt door $\frac{x_1 + x_2}{2}$, waarin x_1 en x_2 wederom de coördinaten resp. van P_1 en P_2 voorstellen.

Beschouw op de rechte l twee vaste punten A en B en een punt P. Laat de verhouding der afstanden PA en PB gelijk zijn aan m : n. Men zegt nu dat P het lijnstuk AB in de verhouding m : n of - m : n verdeelt al naar gelang P wel of niet tussen A en B gelegen is.

Als P het lijnstuk AB in de verhouding $\lambda : \mu$ verdeelt, en de coördinaten van P, A en B resp. gelijk zijn aan p, a en b, heeft men

$$p = \frac{\lambda b + \mu a}{\lambda + \mu} .$$

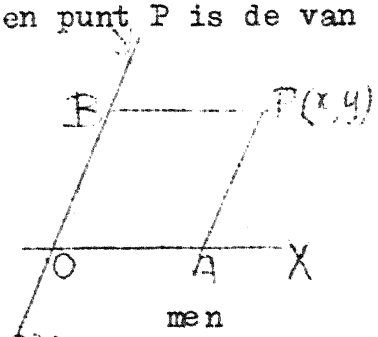
Opg. 3. Bewijs deze formule, zowel in het geval dat $\lambda : \mu$ positief is, als in het geval dat $\lambda : \mu$ negatief is.

Opg. 4. Bestaat er één-éénduidig verband tussen de verhoudingen $\lambda : \mu$ en de punten P?

§ 2. Plaatsbepaling in het platte vlak.

Men beschouwt twee willekeurige elkaar snijdende rechten OX en OY.

De X-coördinaat, ook wel abscis genaamd, van een punt P is de van passend teken voorziene lengte van OA; de Y-coördinaat ook wel ordinaat genaamd, is de van passend teken voorziene lengte van OB. Hierbij is A het snijpunt van CX en de rechte door P evenwijdig met OY ; B dat van OY en de rechte door P evenwijdig met OX.



men

De rechten OX en OY heten coördinaat-assen. OX noemt ook wel de X-as; OY de Y-as.

Het punt O heet oorsprong. De coördinaten van O zijn (0,0). Men is gewoon de coördinaten x en y van een punt O als volgt aan te geven: P(x,y).

Er bestaat een één-éénduidig verband tussen de punten van het platte vlak en de getallenparen (x,y).

Is $\angle YOX$ recht, dan spreekt men van een rechthoekig coördinatenstelsel (of assenstelsel). Is $\angle YOX \neq 90^\circ$, dan van een scheefhoekig coördinatenstelsel (of assenstelsel).

Opg. 1. Teken de punten (3,4); (-2,5); (-4,0); (0,-7) bij een willekeurig aan te nemen coördinatenstelsel.

Opg. 2. Bewijs dat meetkundige plaats der punten, waarvan de X-coordinaat gelijk is aan nul, bestaat uit de Y-as.

Men drukt dit meestal anders uit, nl.:

"De vergelijking der Y-as luidt x = 0."

Opg. 3. Wat is de vergelijking der X-as?

Opg. 4. Van welke lijn is de vergelijking x = 4 ? x = a? y = b?

Opg. 5. Gegeven zijn twee punten (2,4) en (6,2). Bepaal de coördinaten van het midden van het lijnstuk, dat deze punten verbindt.

Opg. 6. Hetzelfde voor de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2).

Opg. 7. Bij een rechthoekig assenstelsel bepale men de afstand van het punt (3,4) tot de oorsprong. Eveneens van (x,y) tot de oorsprong.

Opg. 8. De afstand van de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) is

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + 2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

Hierin is ω de hoek YOX der coördinaatassen.

Opg. 9. Als een punt P (x,y) het lijnstuk P_1P_2 in de verhouding m : n verdeelt (verg. § 1) dan geldt

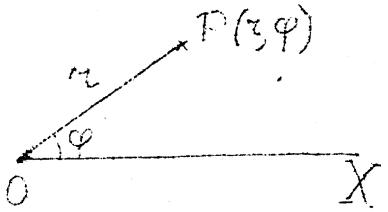
$$x = \frac{n x_1 + m x_2}{n+m} \; ; \; y = \frac{n y_1 + m y_2}{n+m}$$

Opg. 10. Bewijs dat de coordinaten (x,y) van het zwaartepunt van een $\triangle P_1P_2P_3$ gegeven worden door

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \; ; \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \; .$$

Een geheel andere wijze van plaatsbepaling van een punt in het platte vlak geschiedt als volgt.

Kies een willekeurige rechte OX (O is een vast punt). Dan is een punt P éénduidig bepaald door de lengte r der afstand OP en de hoek $\varphi = \angle POX$ (deze wordt gewoonlijk in radialen gemeten). Men schrijft dan $P(r,\varphi)$ en noemt r en φ de poolcoordinaten van P.



O heet pool; OX poolas; $\angle POX$ poolhoek; OP voerstraal.

Opg. 11. Van een punt zijn de rechthoekige coördinaten (6,6). Hoe groot zijn de poolcoördinaten?

Opg. 12. Van een punt zijn de poolcoördinaten $(4, \frac{\pi}{2})$. Hoe groot zijn de rechthoekige coördinaten?

Zoals uit het bovenstaande blijkt, bestaat er een verband tussen de poolcoördinaten en de rechthoekige coördinaten van een punt.

Opg. 13. Is gegeven een punt P(x,y), bewijs dan dat men voor de poolcoördinaten vindt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \; ; \; \varphi = \text{bg tg} \frac{y}{x} \; .$$

Opg. 14. Zijn gegeven de poolcoördinaten (r,φ) van een punt, bewijs dan dat men hieruit voor de rechthoekige coordinaten (x,y) vindt

$$x = r\cos\varphi \; ; \; y = r\sin\varphi \; .$$

Men is gewoon bij de poolcoördinaten (r,φ) van een punt het getal r positief te rekenen. Nodig is dit niet.

Opg. 15. Toon aan dat de poolcoordinaten van het punt (r,φ) ook voorgesteld kunnen worden door $(-r, \varphi + \pi)$.

De in opgave 13 en 14 genoemde formules worden transformatieformules genoemd. Zij leren ons coördinaten van een punt, uit andere coördinaten bepalen.

§ 3. Krommen voorgesteld door vergelijkingen.

Indien de meetkundige plaats der punten (x,y), waarvan de coördinaten x en y voldoen aan een relatie $f(x,y) = 0$, bestaat uit een aantal krommen en/of rechten, dan zegt men dat deze krommen en/of rechten tot vergelijking hebben $f(x,y)= 0$. Men noemt $f(x,y)= 0$ de vergelijking van dat stel krommen en/of rechten.

Opg. 1. Wat is de vergelijking der x-as?

Opg. 2. Wat is de vergelijking der bisectrix van $\angle YOX$?

Opg. 3. Zij a een gegeven getal. Van welke rechte is $x = a$ de vergelijking?

Opg. 4. Waarvan is $y = a$ de vergelijking?

Opg. 5. De vergelijking $y = m\,x$ stelt bij gegeven m een rechte lijn door de oorsprong voor. De richting dier lijn wordt bepaald door m.

Opg. 6. Bij een rechthoekig coördinatenstelsel is $m = \operatorname{tg}\varphi$, waarin φ de hoek aangeeft tussen de beschouwde rechte en de positieve x-as.

Het in opgave 5 en 6 genoemde getal m heet de richtingscoëfficiënt van de rechte $y = m\,x$.

De vergelijking

$$y = m\,x + n$$

stelt eveneens een rechte voor. Is $n \neq 0$, dan gaat deze niet door de oorsprong. De rechte loopt evenwijdig met $y = m\,x$ en ontstaat hieruit door verschuiving over een afstand n in de richting der positieve y-as.

Opg. 7. Teken bij een gegeven assenstelsel de rechten

$$y = 3\,x + 2; \quad y = x - 1; \quad y = -\,x + 2; \quad 2\,x + 3\,y = 6.$$

Opg. 8. De vergelijking van iedere in het platte vlak gelegen rechte is van niet hoger dan de eerste graad in x en y.

Omgekeerd beschouwen we de meest algemene vergelijking van de eerste graad in x en y. Deze luidt

$$a\,x + b\,y = c.$$

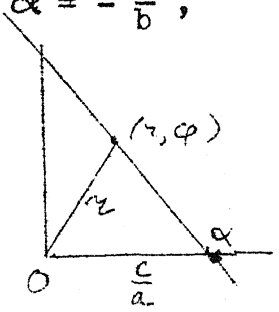
Hierin stellen a,b en c gegeven reële getallen voor. Immers is $b \neq 0$, dan brengen we de vergelijking in de gedaante $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, welke laatste vergelijking blijkens het voorgaande een rechte lijn voorstelt. Is echter $b = 0$, dan luidt de vergelijking $ax = c$. Onderstel $a \neq 0$ (waarom mag dat)? Dan vindt men $x = \frac{c}{a}$, hetgeen eveneens een rechte voorstelt.

In poolcoördinaten luidt de meest algemene vergelijking van een rechte (op grond van de in § 2 gegeven transformatieformules):

$$a\, r \cos\varphi + b\, r \sin\varphi = c.$$

Deze uitkomst kunnen wij nog omvormen door te stellen $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{b}$, waarna men vindt

$$r \sin(\alpha - \varphi) = \frac{c}{a} \sin\varphi .$$



Opg. 9. Leid deze betrekking direct meetkundig af, (zie figuur).

Vervolgens beschouwen we enige voorbeelden van vergelijkingen van niet rechte lijnen. In deze § zullen we verder met rechthoekige coordinaten of poölcoordinaten werken.

De cirkel met straal d en middelpunt in de oorsprong heeft tot vergelijking $x^2 + y^2 = d^2$.

Opg. 10. Bewijs dit.

Opg. 11. Wat is de vergelijking in poölcoordinaten van deze cirkel?

Opg. 12. De cirkel met straal d en middelpunt (a,b) heeft tot vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = d^2$.

Opg. 13. Stelt de vergelijking

$$4x^2 + 4y^2 - 8x - 4y = 11$$

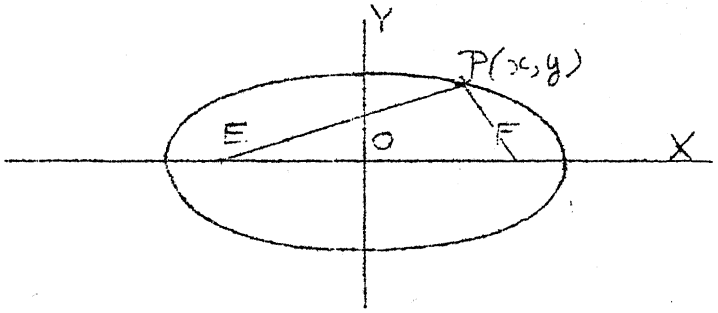
ook een cirkel voor?

Opg. 14. Onderzoek of de vergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ een cirkel voorstelt. Hierin zijn a, b en c gegeven reële getallen.

Zoals uit bovenstaande voorbeelden blijkt, wordt een cirkel voorgesteld door een bepaalde soort van vergelijkingen van de tweede graad. Dit is niet alleen een eigenschap van cirkels, maar ook van ellipsen, hyperbolen en parabolen. Later zal blijken welk type krommen in het algemeen door een vergelijking van de tweede graad wordt voorgesteld.

Thans beschouwen wij nog even de vergelijkingen der genoemde krommen in bijzondere gevallen.

De ellips is de meetkundige plaats der punten, waarvan de som der afstanden tot twee vaste gegeven punten constant is. De vaste punten heten brandpunten; hun verbindingslijn de lange as der ellips; hun middenloodlijn korte as. Om de vergelijking der ellips te bepalen kiezen we het coördinatenstelsel zo, dat de x-as langs de lange en de y-as langs de korte as der ellips valt. Noem de coördinaten van het ene brandpunt F(c,0).
Dan zijn die van het andere E(-c,0). Zij P(x,y) een willekeurig punt van de ellips. Dan is PF + PE = 2a (constant). Wegens § 2 (opg. 8) geldt dan



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

dus $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

dus $$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

dus $$a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

dus $$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

dus $$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2).$$

Men herleidt dit meestal nog verder door in te voeren een grootheid $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Wegens PE + PF > EF (waarom?) is $2a>2c$ dus $a^2-c^2>0$, zodat b een reële grootheid is. Men vindt dan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Aan deze vergelijking merken we op

1° het tweedegraad karakter.

2° dat x^2 wel, maar x zelf niet optreedt. Zodra dus een punt (x,y) op de ellips ligt, is dat ook het geval met een punt (-x,y). Men zegt dat de ellips symmetrisch is ten opzichte van de Y- as.

3° dat y^2 wel, maar y zelf niet optreedt. Behalve (x,y) liggen dus ook (x,-y),(-x,-y) op de ellips. De ellips is dus symmetrisch ten opzichte van de beide coordinaatassen.

Opg. 15. Bepaal de snijpunten van de ellips met de coordinaatassen.

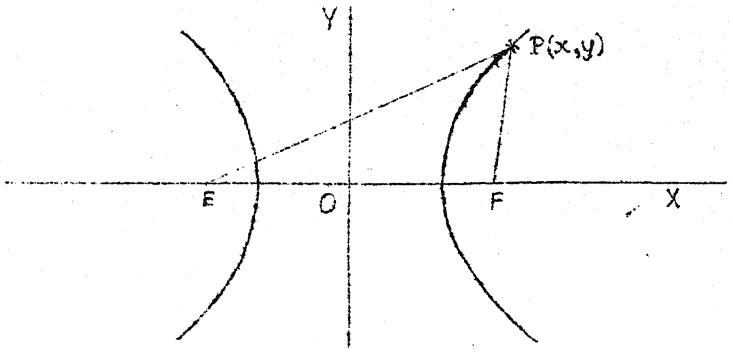
De hyperbool is de meetkundige plaats der punten, waarvan het verschil der afstanden tot 2 gegeven punten (brandpunten genaamd) constant is.

Kies het coordinatenstelsel analoog als bij de ellips. Men heeft dan voor een willekeurig punt P(x,y) der hyperbool

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

of

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$



Opg. 16. Leid hieruit af ($b^2 = c^2 - a^2$ stellende) de vergelijking van de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Opg. 17. Bewijs de symmetrie der hyperbool ten opzichte van x-as en y-as en bepaal de snijpunten van de hyperbool met zijn assen.

Terwijl de ellips een gesloten kromme is, evenals de cirkel, is dat niet met de hyperbool het geval.

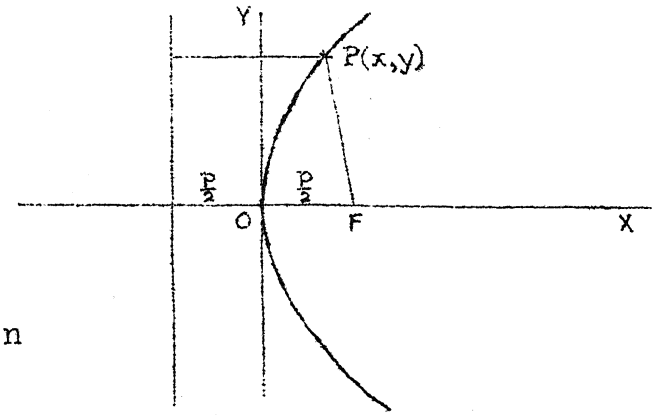
De parabool is de meetkundige plaats der punten, die gelijke afstanden hebben tot een vast gegeven punt (brandpunt genaamd) en een vaste gegeven rechte (richtlijn genaamd). Om de vergelijking van de parabool af te leiden kieze men de X-as door het brandpunt en loodrecht op de richtlijn en de Y-as evenwijdig aan de richtlijn op gelijke afstand van brandpunt en richtlijn.

Onderstel de lengte der afstand van brandpunt tot richtlijn gelijk aan p. Voor de coordinaten van een willekeurig punt P (x,y) van de parabool geldt dan

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2}$$

dus na herleiding

$$y^2 = 2px.$$



Opg. 18. Is de parabool symmetrisch ten opzichte van de X-as en van de Y-as?

Behalve ellips, hyperbool en parabool zijn er nog andere figuren, waarvan de vergelijking in x en y van de tweede graad is. Als voorbeeld nemen we de vergelijking $x^2 - 4y^2 = 0$ waarvoor we ook kunnen schrijven $(x - 2y)(x + 2y) = 0$. Elk punt P(x,y), dat ligt op de figuur met vergelijking $x^2 - 4y^2 = 0$ heeft coördinaten, die voldoen of aan $x - 2y = 0$ of aan $x + 2y = 0$. Het punt P is dus gelegen: of op de rechte $x - 2y = 0$ of op de rechte $x + 2y = 0$. De beschouwde vergelijking stelt dus twee rechte lijnen voor.

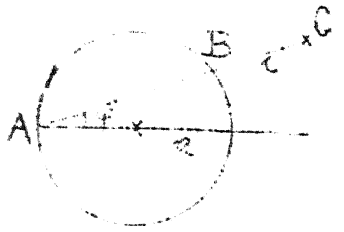
Opg. 19. Welke figuur wordt voorgesteld door

$x^2 - 4 = 0$; door $(y - 2)^2 = 0$; door $x(x-1)(x-y) = 0$?

Wij geven nog een paar voorbeelden van krommen van hogere graad.

Beschouw een cirkel met straal a.

Door een punt A van de cirkel trekt men een willekeurige koorde, die de cirkel nogmaals in B snijdt. Men verlengt deze koorde AB met een constant stuk ter lengte c. Gevraagd de meetkundige plaats der uiteinden der verlengde koorden, als deze om het punt A draaien.



Wij bepalen de vergelijking der gevraagde meetkundige plaats eerst in poolcoördinaten. Kies het punt A tot oorsprong en de poolas door het middelpunt van de gegeven cirkel. Zij nu C een punt der m.p. met coördinaten (r, φ). Dan vinden we direct de vergelijking in poolcoördinaten

$$r = 2a\cos\varphi + c .$$

Wij vinden hieruit de vergelijking in rechthoekige coördinaten. Men heeft $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, dus

$$r^2 = 2ax + cr,$$

dus
$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = c^2(x^2 + y^2) .$$

Ditmaal vinden we een vergelijking van de 4^e graad in x en y. De gevonden kromme heet limaçon van Pascal. Het speciale geval $c = 2a$ levert een figuur, die men cardioïde noemt.

Opg. 20. Toon aan dat de in rechthoekige coördinaten gevonden vergelijking ook die punten bevat, die men verkrijgt door de koorde AB met de lengte c te verkorten.

Men beschouwe een vast punt A en een rechte k niet door A. Een willekeurige rechte door A snijdt k in B. Men verlengt AB met een lengte c. De m.p. der uiteinden der zo gevonden punten is een figuur, die conchoïde (of schulptrek) wordt genoemd.

Opg. 21. Kies de oorsprong in A en de poolas door A en loodrecht op k. Bepaal de vergelijking der gezochte kromme eerst in poolcoördinaten en daarna in rechthoekige coördinaten.

Men vindt:
$$r = \frac{d}{\cos\varphi} + c$$

$$(x^2 + y^2)(x-d)^2 = c^2 x^2 .$$

Opg. 22. Beschouw een middellijn AB van een cirkel. Trek door A een willekeurige rechte, die de cirkel in C en de raaklijn in B aan de cirkel in D snijdt. Bepaal tussen A en D op AD een punt P, zodanig dat

AP = CD. Wentelt de beschouwde rechte om A, dan beschrijft P een kromme, die cissoïde (klimoplijn) van Diocles wordt genoemd. Bepaal daarvan de vergelijking.

Opg.23. Twee loodrechte rechten a en b snijden elkaar in O. Een lijnstuk AB van constante lengte 2c beweegt zo, dat A op a en B op b blijft. Bepaal de vergelijking der meetkundige plaats van de projectie van O op AB. (vierbladig roset).

Opg.24. Een bewegende rechte a gaat door de oorsprong O. Zij A een vast punt. Zij B de projectie van A op a. Zij C het spiegelpunt van B t.o.v. OA. Bepaal de vergelijking der m.p. der projectie van C op a. (trifolium van de Longchamps).

Opg.25. Bepaal de vergelijking der m.p. der punten P ,waarvoor bij gegeven punten A en B het product PA.PB constant is ($=c^2$). In het geval $c=\frac{1}{2}$ AB ontstaat een kromme, die lemniscaat van Bernoulli wordt genoemd.

Een geheel andere wijze van bepalen van een kromme bestaat daarin, dat van elk punt (x,y) van de kromme niet direct de relatie tussen x en y wordt gegeven, maar dat men van elk punt (x,y) de waarde der coördinaten x en y geeft als functies van een hulpgrootheid (parameter)t

$$x = f(t);\ y = g(t).$$

Bij iedere waarde van t vindt men dan een of meer punten (x,y) der kromme.

Voorbeeld: $x = 3t;\ y = 4t.$

Elk punt der hierdoor bepaalde figuur, is door de keuze van t vastgelegd. De vergelijking van deze figuur vindt men door het verband tussen x en y op te sporen, ongeacht de waarde van t, of zoals men dit uitdrukt, door eliminatie van t. In dit geval vindt men $y = \frac{4}{3}x$.

Opg. 26. Bepaal de vergelijking der kromme

$$x = 4t + 3;\ y = 2t - 1.$$

Opg.27. Bewijs dat de vergelijkingen

$$x = at + b;\ y = ct + d$$

een rechte lijn voorstellen.

Ogp. 28. Bepaal de vergelijking der kromme

$$x = \frac{2t}{1+t^2};\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Opg. 29. Om een parametervoorstelling van de punten der ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ te vinden, stellen we $x = a\cos\varphi$. Het getal φ treedt hier op als parameter. Welke betrekking vindt men voor y als functie van φ?

In het getal a = b = 1 vindt men dezelfde figuur als in opg.27. Wat is het verband tussen de daar optredende parameter t en de parameter φ?

Opg. 30. Bepaal een parametervoorstelling van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ door te stellen $x = a\sec\varphi$.

Opg.31. Voor de parabool $y^2 = 2px$ heeft men als parametervoorstelling $x = 2pt^2;\ y = 2pt$. Een andere parametervoorstelling is $y = t;\ x = \frac{t^2}{2p}$.

§ 4. Algemene eigenschappen van krommen.

In deze § beschouwen we krommen met vergelijking $f(x, y) = 0$, waarin $f(x, y)$ een veelterm in x en y voorstelt. Zo'n kromme heet een algebraische kromme.

Zoals we reeds zagen is een kromme symmetrisch t.o.v. de X-as, als de vergelijking onveranderd blijft als y door -y wordt vervangen, d.w.z. als in de vergelijking slechts even of slechts oneven machten van y optreden.

Opg. 1. Hoe ziet men aan de vergelijking van een kromme of deze symmetrisch is t.o.v. de Y-as?

Een kromme is symmetrisch t.o.v. de oorsprong, als de vergelijking ongewijzigd blijft als x door -x en tegelijkertijd y door -y wordt vervangen.

Dit is het geval als in de „uitgewerkte" vergelijking der kromme slechts termen $x^r y^s$ optreden met even som $r + s$ of slechts termen met oneven som $r + s$.

Opg. 2. Als een kromme symmetrisch is t.o.v. x-as en t.o.v. y-as, is zij symmetrisch t.o.v. de oorsprong.

De snijpunten van twee krommen $f(x,y)= 0$ en $g(x,y)= 0$ zijn die punten (x,y), die voldoen aan deze beide betrekkingen zodat men deze en slechts deze punten vindt door het stelsel vergelijkingen in de twee onbekenden x en y

$$f(x,y)= 0;\ g(x,y)= 0\ .$$

op te lossen.

Opg. 3. Bepaal de snijpunt(en) van de x-as en de rechte $y = 3x + 6$; van de y-as en de rechte $y = 3x + 6$;
van de cirkel $x^2 + y^2 = 25$ en de rechte $y = 3x - 5$;
van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en de rechte $y = 1$.

In het laatste geval vindt men slechts één snijpunt of zoals men het vaak uitdrukt twee samenvallende snijpunten. Men zegt in dit geval dat de beschouwde rechte en cirkel elkaar raken.

Wil men de snijpunten bepalen van de rechte $y = 2$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, dan vindt men geen punten met reële coördinaten. Opdat toch de regel blijve gelden, dat cirkel en rechte twee snijpunten gemeen hebben is men gewoon het (reële) platte vlak uit te breiden tot

het complexe platte vlak door punten met niet reële coördinaten eveneens in de beschouwingen op te nemen. Zo zegt men, dat de punten $(i\sqrt{3},2)$ en $(-i\sqrt{3},2)$ snijpunten zijn van cirkel en rechte. Een punt met minstens één niet reële-coördinaat heet imaginair.

Het is duidelijk dat punten met niet reële coördinaten niet te tekenen zijn. Toch spreekt men van het midden van het rechte verbindingsstuk van twee punten met niet reële coördinaten (x_1,y_1) en (x_2,y_2). In analogie met het geval, dat beide punten reële coördinaten hebben, bedoelt men hiermede het punt

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Opg. 4. Kan dit midden reëel zijn, zonder dat de oorspronkelijke punten het zijn?

Een rechte lijn $y = m\,x + n$ met niet reële m bevat ten hoogste één reëel punt. Zo'n lijn heet imaginair.

Opg. 5. Bevat een rechte twee reële punten, dan bevat ze er oneindig veel.

Opg. 6. Bepaal het reële punt, dat op de rechte

$$(1 + i)y = (2 + i)x + 3 + 4\,i$$

ligt.

Opg. 7. Bevat de rechte $y = 2\,x + 3$ ook niet reële punten?

Opg. 8. Is de rechte

$$(1 + i)\,y + x = (2 + i)(x-1)+1\ .$$

imaginair?

Opg. 9. De vergelijking $x^2 + 1 = 0$ stelt twee rechten voor. Bewijs dit. Wat stelt de vergelijking $x^2 + y^2 = 0$ voor?

Opg. 10. Bepaal de snijpunten van de ellips(hyperbool) met de verbindingslijn hunner brandpunten en de middenloodlijn ervan. Deze snijpunten worden toppen genoemd.

Bepaal ook de toppen van de parabool, dat zijn de snijpunten van parabool en de rechte door het brandpunt loodrecht op de richtlijn getrokken.

Opg. 11. Het snijpunt van twee toegevoegd complexe rechten (dat zijn rechten $y = m\,x + n$ en $y = \bar{m}\,x + \bar{n}$, waarin m en $\bar{m}$ en ook n en $\bar{n}$ toegevoegd complex zijn) is reëel.

Een vorm $f(x,y)$ heet homogeen van de graad k, als men heeft

$$f(tx,ty) = t^k\,f(x,y).$$

Voorbeelden van homogene vormen zijn

$$x^2 + y^2, \quad xy + x^2 - y^2, \quad \sin\frac{x}{y}, \quad (x+4y)^3\,(4x - y) .$$

Is $f(x,y)$ homogeen, dan bevat de kromme $f(x,y)= 0$, naast ieder punt (x,y) ook elk punt (tx,ty), d.w.z. als een punt P op deze kromme ligt, dan ligt ook elk punt van de rechte verbindingslijn OP op deze kromme. De kromme bevat dus, zodra zij een reëel punt P bevat, een reële rechte door O.

De kromme $f(x,y)= 0$, waarin $f(x,y)$ homogeen is, stelt in het algemeen een aantal rechten door O voor. De richtingscoëfficient m van zo'n rechte vinden we door de substitutie $y = mx$, waarna de vergelijking overgaat in $f(x,mx)= 0$, dus

$$x^k f(1,m)= 0,$$

dus afgezien van $x = 0$ een vergelijking van een of andere graad in m, die een aantal al of niet reele wortels m bezit, die de richtingscoëfficiënten der rechten aanwijzen, die door de vergelijking worden voorgesteld.

Opg. 12. Bepaal de snijpunten der krommen

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ en } x^2 - 1 = 0 .$$

De algebraische vergelijking van de n^e graad $f(x,y) =0$ van een kromme is in de gedaante

$$f_n(x,y) + f_{n-1}(x,y) + \ldots + f_0(x,y) = 0$$

te brengen. Hierbij wordt onder f_ν verstaan het homogene aggregaat van termen die in $f(x,y)$ optreden, welke in x en y samen van de ν^e graad ($\nu=0, \ldots, n$); $f_0(x,y)$ stelt dus een constante voor. Het is duidelijk dat als deze constante nul is, de kromme bepaald door $f(x,y)=0$ door de oorsprong gaat. Wij zullen in dit geval de betekenis van de rechte $f_1(x,y)=0$ nagaan.

Zij $y=mx$ een willekeurige rechte door O. Wij trachten nu een rechte met een zodanige richting(scoëfficiënt) te bepalen dat deze in O raakt aan de gegeven kromme $f(x,y)=0$. Het is dus nodig dat men bij het bepalen der snijpunten van $f(x,y)=0$ en $y=mx$ ten minste twee maal het punt (0,0) vindt. De snijpunten bepalen we, zoals bekend is, door oplossen der beide vergelijkingen. Dit geschiedt b.v. door substitutie van $y=mx$ in $f(x,y)=0$, hetgeen oplevert $f(x,mx)=0$, dus

$$f_n(x,mx) + f_{n-1}(x,mx) + \ldots + f_2(x,mx) + f_1(x,mx) = 0,$$

dus, wegens de homogeniteit der vormen $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_2, f_1$,

$$(1) \quad x^n f_n(1,m) + x^{n-1} f_{n-1}(1,m) + \ldots + x^2 f_2(1,m) + x f_1(1,m) = 0$$

Dit is een vergelijking van de graad n in x. Deze moet ten minste

twee maal dezelfde wortel x = 0 opleveren. Dat x = 0 aan deze vergelijking voldoet is evident (waarom?); verder zal x = 0 een tenminste "dubbele" wortel dezer vergelijking zijn, als deze niet alleen de factor x, maar zelfs de factor x^2 bevat, d.w.z. als de coëfficiënt van x zelf nul is. Wij zien dus dat de rechte y=mx dan en slechts dan in O aan de kromme f(x,y)=0 raakt als het getal m zo wordt gekozen, dat $f_1(1,m)=0$ is. In de praktijk vindt men deze waarde van m en tevens de vergelijking der gezochte rechte direct door te nemen

$$f_1(x,y)=0,$$

want onderstel, dat $f_1(x,y)$ de gedaante ax + by heeft, dan is de richtinscoëfficiënt dezer rechte gelijk aan $-\frac{a}{b}$ en men vindt deze waarde juist door te nemen

$f_1(1,m)=0$, want dit levert a.1 + b.m = 0, dus $m = -\frac{a}{b}$.

Het is duidelijk, dat, als in de vorm f(x,y)=0 geen termen van de eerste graad optreden, in de vergelijking (1) de term $xf_1(1,m)$ wegvalt, d.w.z. elke rechte door de oorsprong snijdt onze kromme in twee samenvallende punten. In dit geval is de oorsprong een dubbelpunt der kromme (mits natuurlijk niet de termen van de tweede graad eveneens alle wegvallen, want dan krijgt men een drievoudig punt enz.) Bij een tweevoudig punt van de kromme zijn twee rechten die de kromme aldaar in drie samenvallende punten te snijden. Wij bepalen de richtingscoefficiënt m van zo'n rechte y=mx. Dit getal m moet zo zijn, dat in (1) ook de term met x^2 wegvalt, want het linkerlid van (1) moet deelbaar zijn door x^3. Men bereikt dit door te nemen $f_2(1,m) = 0$. Zij $f_2(x,y)$ van de gedaante $ax^2 + bxy + cy^2$ Het getal m moet dan voldoen aan $f_2(1,m) = a + bm + cm^2 = 0$, waaruit in het algemeen twee waarden van m volgen. De vergelijkingen der gezochte twee raaklijnen zijn hierdoor bepaald. Evenals in het bovenbeschouwde geval worden deze direct gegeven door $f_2(x,y) = 0$ te stellen, dus uit $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, want van de hierdoor bepaalde rechten voldoen de richtingscoëfficiënten m aan $a + bm + cm^2 = 0$.

Hierbij zij nog opgemerkt, dat de wortels dezer vergelijking van de tweede graad hetzij

1e. reëel en verschillend zijn; dan is O een dubbelpunt met verschillende reële raaklijnen, hetgeen een knooppunt wordt genoemd.

2e. samenvallen; dan vallen de beide raaklijnen in O samen; O heet een keerpunt.

3e. toegevoegd complex zijn; in dit geval is O een geïsoleerd dubbelpunt.

Op analoge wijze blijkt dat de oorsprong een p-voudig punt is van de kromme f(x,y) = 0, als

$$f_1(x,y) = f_2(x,y) = \ldots = f_p(x,y) = 0,$$

d.w.z. de coefficiënten van alle gedeelten van lagere graad dan de $(p + 1)^e$ nul zijn, terwijl tenminste één coëfficiënt van $f_{p+1}(x,y)$ niet

nul is. De p raaklijnen in de oorsprong vindt men dan door $f_{p+1}(x,y)=0$ te stellen.

Opg. 12. Bepaal de aard van de oorsprong en de raaklijnen in de oorsprong van elk der volgende krommen:

a) Parabool $y^2 = 2px$;

b) Lemniscaat $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$;

c) Trifolium van de Longchamps $(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - y^2)$;

d) Limaçon $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = c^2(x^2 + y^2)$.

Bij de kromme $f(x,y) = x^4 + y^3 + x^2 - y^2 + x-y = 0$

is

$$f_1(x,y) = x-y.$$

De oorsprong is dus enkelvoudig punt met raaklijn $y=x$.

Bepaald men de snijpunten van deze rechte met de kromme, dan geeft substitutie van $y = x$ het resultaat $x^4 + x^3 = 0$, zodat deze raaklijn in het enkelvoudige punt O drie samenvallende snijpunten met de kromme gemeen heeft. In dit geval heet de oorsprong een buigpunt en de rechte $y = x$ buigraaklijn. Bij de kromme $x^4+y^4+x^3-y^3-x - y=0$ blijkt de raaklijn $y = x$ in het enkelvoudige punt O zelfs 4 samenvallende punten met de kromme gemeen te hebben. In dit geval is O een buigpunt van hoger (de vierde) orde.

Opg. 13. Toon aan, dat bij de lemniscaat

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$$

de in opgave 12 gevonden raaklijnen beide buigraaklijnen zijn.

Ten slotte behandelen we nog een elementaire methode om de maxima, de minima en de meest links en rechts gelegen punten van een kromme te bepalen.

Nemen wij als voorbeeld de kromme

$$x^2+y^2+4x+3y = 0 .$$

Een rechte $y=a$, evenwijdig met de x-as, heeft snijpunten met de kromme, die bepaald worden door de wortels van de na substitutie verkregen vergelijking

$$x^2 + 4x + a^2 + 3a = 0 . \qquad (1)$$

Men vindt in bepaalde gevallen twee wortels, die de gezochte snijpunten bepalen. Het kan echter gebeuren, dat de wortels samenvallen, in welk geval men met een maximum of minimum te doen kan hebben. De wortels z_1 en z_2 van de vierkantsvergelijking (1) vallen dan en slechts dan samen als de discriminant $16-4(a^2+3a) = 0$ is. We vinden dat dit optreedt bij $a_1=1$ of bij $a_2= -4$. In het eerste geval is dus de rechte $y=1$ een raaklijn. Het raakpunt heeft een x-coördinaat die bepaald is door (1), dwz. in dit geval door $x^2+4x+4 = 0$, dus $x=-2$. De rechte $y=1$ raakt dus aan de beschouwde kromme in het punt $(-2,1)$. Evenzo vindt men dat de rechte $y=-4$ de kromme raakt in het punt $(-2,-4)$. Dit laatste punt blijkt een minimum te zijn van de kromme, terwijl $(-2,1)$ een maximum is.

Opg. 13. Bepaal de maxima en minima en de meest links en rechts gelegen punten van

a) lemniscaat $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

b) parabool $y^2 = px$.

c) trifolium $(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - y^2)$.

Opg. 14. Bepaal maxima en minima en aard van de oorsprong en de raaklijn(en) aldaar van de kromme

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x + 4} .$$

§ 5. Transformaties.

Naast elk punt P(x,y) in het platte vlak beschouwen wij een punt P'(x',y'), waarin x' = x + a; y' = y + b; hierin stellen a en b vaste getallen voor. Op deze wijze ontstaat een punt-verwantschap, waarbij aan elk punt P een nieuw punt P' is toegevoegd. Deze verwantschap is zodanig dat bij een willekeurig punt Q slechts één punt P te vinden is dat de eigenschap heeft, dat het punt P' samenvalt met P.

Men zegt dat de formules

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

een punt transformatie voorstellen. Zoals we zagen is deze één-éénduidig. De oorsprong gaat over in het punt (a,b), terwijl het punt (-a, -b) door de transformatie overgaat in de oorsprong.

Het is duidelijk dat de transformatieformules (1) een verschuiving of translatie voorstellen.

De transformatie laat geen enkel punt op zijn plaats.

Wij kunnen aan de formules (1) ook nog een geheel andere betekenis hechten. Denken we het assenstelsel xOy zodanig evenwijdig aan zichzelf verschoven, dat het in de stand x'O'y' komt, waarbij O' het punt (-a,-b) is, dan kan men de coördinaten (x,y) van een punt P t.o.v. het stelsel xOy vergelijken met de coördinaten (x',y') van hetzelfde punt P' t.o.v. het stelsel x'O'y'. Men vindt dan dat het verband tussen (x,y) en (x',y') eveneens wordt gegeven door de formules (1).

De formules (1) hebben dus twee betekenissen:

1e. Bij eenzelfde assenstelsel een transformatie van punten

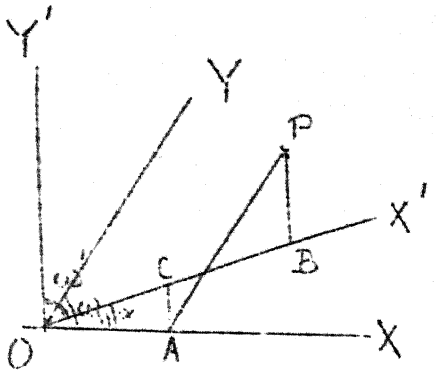
2e. Het verband tussen de coördinaten van eelzelfde punt bij verschillende assenstelsels.

De formules (1) hebben de eigenschap dat figuren er door overgaan in nieuwe figuren, die congruent zijn met de oorspronkelijke.

Datzelfde geschiedt ook bij een geheel ander type van transformatie formules, die wij thans gaan bepalen.

Beschouw twee assenstelsels met assenhoeken ω en ω', die de oorsprong gemeen hebben. Om het verband tussen de coördinaten (x,y) en

(x',y') van eenzelfde punt P bij beide stelsels op te sporen, merken we op dat de scheve (in de richting van Oy') projectieve van OAP op de Ox' as gelijk is aan OB = x'. Dus heeft men als $\angle yOx = \omega$ en $\angle y'Ox' = \omega'$ is en de hoek tussen de overeenkomstige assen van beide stelsels α bedraagt



$$x' = OC + CB = \frac{OA\sin(\omega'+\alpha)}{\sin\omega'} + \frac{AP\sin(\alpha+\omega'-\omega)}{\sin\omega'}$$

$$= \frac{x\sin(\omega'+\alpha)}{\sin\omega'} + \frac{y\sin(\alpha+\omega'-\omega)}{\sin\omega'}.$$

en $$y' = PB = \frac{AP\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega} - \frac{OA\sin\alpha}{\sin\omega} = -x\frac{\sin\alpha}{\sin\omega'} + y\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega'}.$$

De transformatieformules luiden dus

$$(2)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{x\sin(\omega'+\alpha)}{\sin\omega'} + \dfrac{y\sin(\alpha+\omega'-\omega)}{\sin\omega'} \\ y' = -\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\omega'} + \dfrac{y\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega'}. \end{cases}$$

Behalve als transformatieformule van coördinaten kan men de formules (2) in het geval $\omega = \omega'$ ook opvatten als punt transformatieformules, waarbij aan een punt P met coördinaten (x,y) ten opzichte van een assenstelsel yOx wordt toegevoegd een nieuw punt P' met coördinaten (x',y') ten opzichte van hetzelfde assenstelsel. P' ontstaat dan uit P door een rotatie om O over een hoek $-\alpha$. Het is van belang het speciale geval te beschouwen, dat $\omega' = \frac{\pi}{2}$ is en ω willekeurig, in welk geval de formules (2) luiden

$$(3)\quad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\cos(\omega-\alpha) \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Dit is dus de overgang van rechthoekige naar scheefhoekige coördinaten. Is bovendien $\omega = \frac{\pi}{2}$, dan krijgen wij

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}.$$

Wij merken nog even op dat bij elk der transformaties (1), (2), (3) en (4), opgevat als punt transformaties, een rechte lijn weer overgaat in een rechte lijn. Dit is meetkundig evident. Om te berekenen in welke rechte de lijn y = mx + n b.v. door de transformatie (3) overgaat, gaan wij eerst iets anders doen.

Wij bepalen de inverse of omgekeerde transformatie van transformatie (3), dus die transformatie, die x en y uitdrukt in x' en y'. Deze is te vinden door oplossen van x (resp. y) uit de beide vergelijkingen (3). Het resultaat is echter ook direct te voorspellen, want (3) geeft het verband weer tussen de coördinaten (x,y) en (x',y') van een punt P waarbij $\angle xCx' = \alpha$. Het omgekeerde verband tussen (x',y') en (x,y) vindt men door uitgaande van het stelsel x'Oy' over een hoek α terug te draaien, waardoor men het stelsel yOx vindt. Verwisselt men dus in (3) x en x', ook y en y' en vervangt men α door $-\alpha$, dan ontstaan de formules van de omgekeerde transformatie

$$(5)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Het is nu duidelijk dat de rechte y = mx + n door (4) overgaat in een rechte, want de vergelijkingen (5) geven na substitutie in y = mx + n direct de in x' en y' lineaire betrekking

$$x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = mx'\cos\alpha - my'\sin\alpha + n,$$

die een rechte voorstelt.

Opg. 1. Toon algebraisch aan dat door de transformatie (1) en ook door de transformatie(4) een willekeurige cirkel

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

weer overgaat in een cirkel.

Opg. 2. Gegeven zijn de punten (2,4) en (3,6). Waar komt het midden van de verbindingslijn dezer punten te liggen na de transformatie (4) met $\alpha = bg\,tg\,\frac{3}{4}$?

De meest algemene verplaatsing in het platte vlak is ontstaan te denken uit een translatie en een rotatie. Werken we verder met rechthoekige coördinaten, dan gaat een punt (x,y) door de rotatie over in het punt $(x\cos\alpha - y\sin\alpha\ ,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$, waarna de translatie het overvoert in het punt (x',y') met

(6) $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

Een transformatie van het type

(7) $$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

stelt echter niet steeds een verplaatsing voor, want vergelijkt men de transformatie (7) met (6), dan ziet men dat

(8) $$a = e;\ b = -d;\ a^2 + b^2 = 1.$$

Is hieraan voldaan, dan bestaat er als a, b, c, d reëel zijn een hoek φ met $\cos\varphi = a$; $\sin\varphi = d$, dus dan stelt (7) voor een draaiing en tegelijkertijd een verschuiving.

Aan een zeer elementair voorbeeld is ook direct te zien, dat in het algemeen (7) geen transformatie voorstelt, die als een verplaatsing kan worden opgevat. Immers bij een verplaatsing moet de afstand tussen twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) dezelfde blijven. Deze afstand is $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Na de transformatie (7) vindt men de punten (x_1', y_1') en (x_2', y_2') met

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + by_1 + c \\ y_1' = dx_1 + ey_1 + f \end{cases} \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} x_2' = ax_2 + by_2 + c \\ y_2' = dx_2 + ey_2 + f. \end{cases}$$

De afstand der nieuwe punten is

$$\sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2}$$

en hiervoor vindt men na invullen

$$\sqrt{(a^2+d^2)(x_1 - x_2)^2 + 2(ab+de)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (b^2+e^2)(y_1 - y_2)^2}.$$

Daar deze gelijk moet zijn aan de oorspronkelijke afstand voor elke keuze van de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) vindt men

$$a^2 + d^2 = 1;\ b^2 + e^2 = 1;\ ab + de = 0.$$

Uit de laatste betrekking volgt in verband met de eerste en tweede relatie

$$e^2 = (a^2+d^2)e^2 = a^2e^2 + a^2b^2 = a^2,$$

dus $a = \pm e$. Is $a = e$, dan vindt men $b = -d$, juist overeenkomstig (8).

Is $a = -e$, dus $b = d$ en stelt men $\cos\varphi = e$, $\sin\varphi = d$, dan krijgt men voor de transformatie (7)

$$x' = -x\cos\varphi + y\sin\varphi + c$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + f,$$

dan vindt men, afgezien van een draaiing bepaald door φ en een verschuiving bepaald door c en f, welke transformaties tezamen luiden

$$x'' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + c$$
$$y'' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + f,$$

dat nog een transformatie

$$\begin{cases} x'' = -x \\ y'' = y \end{cases} \qquad \text{(spiegeling)}$$

dient te worden toegevoegd. De meest algemene lineaire transformatie in het Euclidische platte vlak, die figuren met behoud van afstanden transformeert, bestaat uit een combinatie van een rotatie, translatie en een spiegeling.

Wij geven tenslotte een zeer belangrijke toepassing van de gevonden transformatieformules.

Beschouw een in rechthoekige coördinaten gegeven kromme van de tweede graad

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Wij wensen te onderzoeken of er transformaties bestaan, die deze kromme brengen in een der drie vormen, die wij in § 3 als vergelijkingen van ellips hyperbool en parabool vonden.

Stelt f(x,y) een ellips of hyperbool voor, dan bezit de kromme een middelpunt. Wij verschuiven het coördinatenstelsel door een transformatie

$$(9) \qquad \begin{cases} x = x' + m \\ y = y' + n \end{cases}$$

zo, dat de nieuwe oorsprong in in het middelpunt van onze kromme komt te liggen. In het nieuwe assenstelsel is dan de kromme symmetrisch ten opzichte van de oorsprong, dus de termen van de eerste graad in x' en y' moeten daarin ontbreken. Wij passen nu de transformatie (9) toe op f(x,y) en vinden als resultaat dat f(x,y) de gedaante

$$G(x',y') = \alpha x'^2 + \beta x'y' + \gamma y'^2 + \delta x' + \varepsilon y' + F$$

aanneemt, waarin

$$\alpha = a,\ \beta = b,\ \gamma = c,\ \delta = 2am + bn + d,\ \varepsilon = bm + 2cn + e,$$
$$F = am^2 + bmn + cn^2 + dm + en + f = F(m,n).$$

De eerste graadstermen ontbreken dan en slechts dan als $\delta = \varepsilon = 0$, dus

$$(10)\quad \begin{cases} 2am + bn + d = 0 \\ bm + 2cn + e = 0 . \end{cases}$$

Hieruit kan men m en n berekenen mits deze betrekkingen niet strijdig of afhankelijk zijn. Wij gaan eerst apart deze uitzonderingsgevallen na. De vergelijkingen zijn afhankelijk als

$$2a : b = b : 2c = d : e .$$

Stelt men elk dezer verhoudingen gelijk aan s, dan vindt men

$$F(x,y) = c(sx+y)^2 + e(sx+y) + f = c(sx+y+t_1)(sx+y+t_2),$$

waarin t_1 en t_2 de wortels zijn van de vierkantsvergelijking $cX^2 + eX + f = 0$. In dit geval stelt de gegeven kromme twee (al of niet samenvallende en al of niet reële rechten voor).

Zijn de vergelijkingen (10) strijdig dan heeft men

$$2a : b = b : 2c \neq d : e .$$

Er is geen middelpunt te vinden. Wij verwachten "dus" een parabool. Stel weer $2a : b = s$, dan vindt men

$$F(x,y) = c(sx+y)^2 + dx + ey + f .$$

Hierop passen we de transformatie

$$\begin{cases} x = \dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}\, x' - \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}\, y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}\, x' + \dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}\, y' \end{cases}$$

toe. Daardoor gaat F(x,y) over in

$$c\left(\sqrt{s^2+1}\; x'\right)^2 + \frac{ds+e}{\sqrt{s^2+1}}\, x' + \frac{es-d}{\sqrt{s^2+1}}\, y' + f = 0,$$

dus

$$x'^2 + \frac{ds+e}{c(s^2+1)^{3/2}}\, x' + \frac{es-d}{c(s^2+1)^{3/2}}\, y' + \frac{f}{s^2+1} = 0;$$

dus als men $x'' = x' + \dfrac{ds+e}{2c(s^2+1)^{3/2}}$ stelt,

$$x''^2 + \frac{es-d}{c(s^2+1)^{3/2}}\, y' + \frac{f}{s^2+1} - \left\{\frac{ds+e}{2c(s^2+1)^{3/2}}\right\}^2 = 0,$$

dus als men

$$y''=y'+\left\{\frac{f}{s^2+1}-\frac{(ds+e)^2}{4c^2(s^2+1)^3}\right\}\frac{c(s^2+1)^{3/2}}{es-d},$$

stelt

$$x''^2+\frac{es-d}{c(s^2+1)^{3/2}}y''=0,$$

zodat dus na een draaiing en een verschuiving wij inderdaad een parabool vinden. Wij merken nog op de overgang van y' op y'' mogelijk is daar in de noemer dezer transformatieformule het getal es-d optreedt, dat $\neq 0$ is, daar d : e $\neq$ s is. De coëfficiënt van y'' in de laatste vergelijking is dus eveneens $\neq 0$. Men kan zich overtuigen dat als c = 0, dus wegens 2a : b = b : 2c ook b = 0, de vergelijking $F(x,y) = ax^2 + dx + ey + f$ met 2a : b $\neq$ d : e, dus e $\neq 0$ eveneens een parabool oplevert. In dit geval is draaiing van het coördinatenstelsel overbodig. Men kan volstaan met verschuivingen.

De beide uitzonderingsgevallen treden op als 2a : b = b : 2c, dus als $b^2 - 4ac = 0$ is.

Nu keren we terug tot het geval, dat het stelsel (10) wel oplosbaar is naar de onbekenden m en n (dus $b^2 - 4ac \neq 0$. Heeft men hieruit op de normale wijze m en n bepaald, dan vindt men de transformatieformules (9). Hierdoor gaat F(x,y) over in de gedaante $G(x',y') = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + f$.

Het getal f is te berekenen door substitutie der gevonden waarden van m en n in $f = F(m,n)$. Het kan echter iets vlugger gevonden worden op de volgende wijze

$$\begin{aligned}F(m,n) &= am^2+bmn+cn^2+dm+en+f\\ &= \tfrac{1}{2}m(2am+bn)+\tfrac{1}{2}n(bm+2cn)+dm+en+f\\ &= -\tfrac{1}{2}md-\tfrac{1}{2}ne+dm+en+f=\tfrac{1}{2}md+\tfrac{1}{2}ne+f\end{aligned}$$

en hierin substitueren we pas de uit (10) gevonden waarden van m en n waarna men vindt

$$f=\frac{cd^2+ae^2-bde+fb^2-4acf}{b^2-4ac}$$

Het geval $f = 0$, dus $cd^2 + ae^2 - bde + fb^2 - 4acf = 0$ kan apart worden bekeken, want dan luidt de vergelijking na de gedane verschuiving van het assenstelsel

$$ax'^2+bx'y'+cy'^2=0,$$

welke vergelijking zoals we al weten twee reële of twee toegevbegd complexe rechten door de nieuwe oorsprong O' voorstelt. Deze rechten

kunnen wegens $b^2 - 4ac \neq 0$ niet samenvallen.

We beschouwen nu het geval $F \neq 0$, daar $cd^2 + ae^2 - bde + fb^2 - 4acf \neq 0$.

Onze vergelijking

$$G(x',y') = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + F = 0$$

gaan we nu transformeren door een draaiing

$$(11) \qquad \begin{cases} x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha, \end{cases}$$

waarna zij overgaat in

$$H(x'',y'') = Ax''^2 + Bx''y'' + Cy''^2 + F.$$

Hierin is

$$A = a\cos^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha + c\sin^2\alpha$$
$$B = -2a\sin\alpha\cos\alpha + b(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2c\sin\alpha\cos\alpha$$
$$C = a\sin^2\alpha - b\sin\alpha\cos\alpha + c\cos^2\alpha$$
$$F = F.$$

Wij merken op dat in de bekende standaard-vormen der vergelijking van ellips en hyperbool de term met xy ontbreekt. Derhalve zullen we de draaiingshoek α zo kiezen dat $B = 0$ is, dus

$$(c-a)\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha = 0,$$

dus

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b}{a-c}.$$

Hierdoor vindt men twee hoeken 2α met $0 \leqq 2\alpha < 2\pi$; (zelfs als $a = c$; hoe groot is α dan?), die π verschillen, dus wij vinden twee hoeken α, die $\frac{\pi}{2}$ verschillen (verklaar dit).

Is α gevonden dan zijn A en C bepaald, dus ook de vorm $H(x'',y'')$. Voor de berekening van A en C gaan wij als volgt te werk. Uit $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b}{a-c}$ volgt $\cos 2\alpha = \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$ en $\sin 2\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$, dus

$$A = a\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + c\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) + \frac{b}{2}\sin 2\alpha$$
$$= \frac{a+c}{2} + \frac{a(a-c) + b^2 - c(a-c)}{2\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$
$$= \frac{a+c}{2} + \frac{(a-c)^2 + b^2}{2\sqrt{(a-c)^2+b^2}} = \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+b^2}.$$

Analoog vindt men $C = \frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+b^2}$.

De vorm

$$Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$$

stelt een ellips voor als A en C hetzelfde teken hebben, een hyperbool als A en C verschillend teken hebben.

In het eerste geval is AC positief, in het tweede negatief. Wegens $AC = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{(a-c)^2+b^2}{4}\right) = -\frac{1}{4}(b^2-4ac)$ vinden we een ellips, als $b^2-4ac < 0$ en een hyperbool als $b^2-4ac > 0$, terwijl we een parabool vinden als $b^2-4ac = 0$.

Wij geven tenslotte de gevonden resultaten nog even tezamen weer. Wij voeren ter afkorting in

$$D = b^2-4ac\ ;\ \Delta = cd^2+ae^2-bde+fb^2-4acf\ .$$

Wij merken op dat in het geval $2a : b = b : 2c = d : e$ geldt $\Delta = 0$, terwijl bij $2a : b = b : 2c \neq d : e$ geldt $\neq 0$.

Wij zien dus dat onze vorm $F(x,y) = 0$ voorstelt in het geval:

I.	$D = 0$	a) $\Delta = 0$	Twee evenwijdige rechten
		b) $\Delta \neq 0$	Een parabool
II.	$D > 0$	a) $\Delta = 0$	Twee snijdende rechten
		b) $\Delta \neq 0$	Een hyperbool
III.	$D < 0$	a) $\Delta = 0$	Twee snijdende (imaginaire) rechten
		b) $\Delta \neq 0$	Een ellips.

In geval Ia valt nog op te merken, dat de rechten kunnen samenvallen.

In geval IIIb kan natuurlijk naast een kromme van het type $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ook optreden $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, hetgeen men een imaginaire ellips noemt.

Opmerking.

Wil men bij de cirkel $x^2+y^2+dx+by+f = 0$ het coördinatenstelsel zo kiezen dat de standaard-vorm $x^2+y^2 = p$ optreedt, dan kan men volstaan met een verschuiving. Wil men tòch draaien, dan vindt men voor de draaiingshoek α

$$tg\ 2\alpha = \frac{b}{a-c} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}\ ,$$

dus α is onbepaald (verklaar dit!)

Opg. 3. Breng in de standaardgedaante en teken daarna de kromme

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 + 72x - 146y + 57 = 0\ .$$

Opg. 4. Hetzelfde voor de kromme $xy = p^2$.

§ 6. Determinanten.

Wenst men de vergelijkingen

(1) $$\begin{cases} ax+by=c \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$$

op te lossen, dan vindt men door de gebruikelijke methode van optellen en aftrekken

$$x=\frac{\beta c-b\gamma}{\beta a-b\alpha}\ ;\ y=\frac{\gamma a-c\alpha}{\beta a-b\alpha},$$

mits $\beta a-b\alpha\neq 0$ is. De uitdrukking $\beta a-b\alpha$ speelt blijkbaar een belangrijke rol bij het stelsel (1).

Wenst men het stelsel

(2) $$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \\ Ax+By+Cz=D \end{cases}$$

op te lossen, dan kan men weer zijn toevlucht nemen tot de methode van optellen en aftrekken en vindt o.a.

$$x=\frac{d\beta C-dB\gamma+\delta Bc-\delta bC+Db\gamma-D\beta c}{a\beta C-aB\gamma+\alpha Bc-\alpha bC+Ab\gamma-A\beta c}.$$

De noemer van deze breuk is voor het stelsel (2) van dezelfde betekenis als de vorm $\beta a-b\alpha$ voor het stelsel (1). Tevens merken we op, dat zowel bij de oplossing x van stelsel (1) als bij die van stelsel (2) de teller een analoge structuur heeft als de noemer. Voor uitdrukkingen als deze gaan wij nu een andere schrijfwijze invoeren.

Beperken wij ons eerst tot het stelsel (1), dan schrijven we de gevonden waarden van x en y eenvoudiger door het symbool $\begin{vmatrix} p & r \\ s & s \end{vmatrix}$ in te voeren. Dit noemen wij een determinant van de tweede orde. We kennen er de waarde ps - qr aan toe, zodat de oplossingen van stelsel (1) luiden

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}}.$$

Voor de voor (1) belangrijke uitdrukking $a\beta-b\alpha$ hebben we dus nu de schrijfwijze $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ ingevoerd.

Alvorens we een betekenis hechten aan het symbool $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix}$,

voeren we eerst het begrip permutatie in.

Een permutatie van een aantal objecten a_1, a_2, ..., a_n is de in willekeurige volgorde opgeschreven rij dezer objecten.
Bij twee objecten a_1 en a_2 zijn twee permutaties mogelijk n.l. a_1, a_2 en a_2, a_1. Het aantal mogelijke permutaties van n objecten is gemakkelijk te berekenen. Immers op de eerste plaats kan elk der objecten geplaatst worden, hetgeen n mogelijkheden geeft. Nadat de eerste plaats bezet is, blijven er voor de n-1 overige objecten n-1 plaatsen over, waarover zij willekeurig gepermuteerd kunnen worden. Het aantal permutaties van n objecten is dus n maal zo groot als dat van n-1 objecten. Dit laatste aantal is weer n-1 maal zo groot als het aantal permutaties van n-2 objecten enz., zodat men uiteindelijk voor het gezochte aantal permutaties van n objecten het getal $n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1 = n!$ vindt.

Beschouwt men een aantal genummerde objecten a_1, a_2, ..., a_n, dan kan men de permutaties hiervan verdelen in evene en onevene. Men let n.l. op de optredende indices en telt het aantal index-paren, waarbij een hogere index voorafgaat aan een lagere. Men zegt dat zo'n paar een inversie vormt. Is dit even, dan heet de permutatie even; is het aantal oneven, dan oneven. Zo is b.v. dit aantal bij de permutatie a_1, a_4, a_2, a_5, a_3 gelijk aan 3 (immers men heeft a_4 voor a_3, ook a_4 voor a_2 en a_5 voor a_3), dus de permutatie is oneven.

Alvorens tot de definitie van determinant over te gaan, leiden we nog een eigenschap van permutaties af. Deze luidt:

Stelling: Verwisselt men twee elementen in een permutatie, dan verandert de pariteit (= het even of oneven zijn) hiervan.
Voor het bewijs beschouwen we een permutatie

$\ldots a_r \ldots \ldots a_s \ldots$ en de verwisselde $\ldots a_s \ldots a_r \ldots$

Het verschil in karakter van deze permutaties wordt gevonden door slechts te letten op de gedeelten $a_r \ldots a_s$ en $a_s \ldots a_r$ (waarom?)

Onderstel dat er tussen a_r en a_s juist n getallen staan, waarvan er n_1 zijn die een grotere index dan r hebben en n_2, die een kleinere index dan r hebben; voorts n_3 die een grotere index hebben dan s en n_4, die een kleinere index hebben dan s. Men heeft dan $n_1+n_2=n_3+n_4=n$.
Het aantal inversies in $a_r \ldots a_s$ is dan gelijk aan n_2+n_3 of n_2+n_3+1 al naar $r < s$ of $r > s$. In $a_s \ldots a_r$ is dit n_1+n_4+1 of n_1+n_4 al naar $r < s$ of $r > s$. Het verschil der aantallen is dus $n_2+n_3-n_1-n_4-1$ of $n_2+n_3-n_1-n_4+1$, dus $2n-2n_1-2n_4 \pm 1$, dus oneven, waarmee de stelling bewezen is.

Nu gaan wij over tot de definitie van een determinant van de n^e orde. Een determinant van de n^e orde is een quadratisch getallenschema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(kortweg geschreven $|a_{rs}|$)

waaraan een getallenwaarde wordt toegekend, die men de waarde van de determinant noemt.
Deze waarde definiëren we als volgt.
Vorm alle producten van één element uit de eerste rij, één uit de tweede rij en één uit de derde rij en wel zo, dat zo'n product juist één element uit iedere kolom bevat. (E.v. voor het getal n = 3 doet het product $a_{11}a_{32}a_{23}$ mee, maar het product $a_{21}a_{32}a_{23}$ niet). Wij geven aan elk dier producten volgens een nader aan te geven regel een teken en tellen de zo verkregen producten op. De gevonden som noemt men de waarde van de determinant. Wij hebben nu nog de tekenregel aan te geven, die ons uitsluitsel geeft of voor een der gevormde producten het + teken of het - teken moet worden geplaatst. Hiertoe beschouwen we zo'n product en rangschikken de factoren zodanig dat de eerste indices resp. 1, 2, 3, ..., n zijn. Zo schrijven wij in het geval n = 3 de term $a_{11}a_{32}a_{23}$ dus in de gedaante $a_{11}a_{23}a_{32}$. Nu letten wij op de tweede indices van elke factor in de opgeschreven term. In het beschouwde bijzondere geval zijn dit de getallen 1, 3, 2. Vormen die tweede indices een even permutatie, dan zetten we voor de beschouwde term het + teken, is die permutatie oneven dan een - teken.

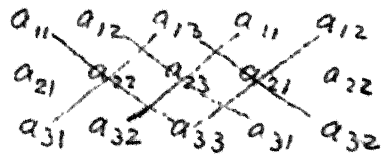
Voorbeeld: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

want in de eerste term vormen de tweede indices 1 en 2 een even permutatie, in de tweede term zijn deze echter 2, 1, dus die permutatie is oneven.

Opg. 1. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Sarrus gaf een regel aan om direct een determinant van de 3e orde te berekenen. Hij schreef n.l. het volgende getallenschema op



en vormde er de 6 door lijnen aangegeven producten uit. De drie producten in de richting $a_{11}a_{22}a_{33}$ krijgen elk het + teken, de andere drie het - teken. De som der 6 zo gevonden producten is juist de waarde van de determinant (Regel van Sarrus).

Opg. 2. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Opg. 3. Bereken

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Opg. 4. Bereken

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

(-360).

Opg. 5. Voor de in § 5 beschouwde vormen D en Δ heeft men

$$D = \begin{vmatrix} b & 2a \\ 2a & c \end{vmatrix} \; ; \; \Delta = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}.$$

Bewijs dit.

Beschouwt men een willekeurige term $a_{r_1 s_1}\ a_{r_2 s_2} \dots a_{r_n s_n}$ uit de ontwikkeling van de determinant van de n^e orde $|a_{rs}|$, dan is het om het teken van deze term te bepalen, niet nodig de factoren zo te rangschikken dat de eerste indices resp. 1, 2, ..., n worden. Wij bewijzen n.l. dat het teken in deze term gelijk is aan de som van het aantal inversies van de indices r en het aantal inversies van de indices. Hiertoe verwisselen wij eens in het beschouwde product twee factoren $a_{r_\nu s_\nu}$ en $a_{r_\mu s_\mu}$. Hierdoor verandert het aantal inversies in de indices r en ook in de indices s met een oneven bedrag hun som dus met een even bedrag. Door nu net zo lang factoren te verwisselen totdat de volgorde der eerste indices gelijk geworden is aan 1, 2, ..., n, is de som der aantallen inversies van de indices r en van de indices s met een even bedrag veranderd. Daar in het nieuw opgeschreven pro-

duct de indices r geen inversies bezitten, is dus het aantal inversies in de indices s daarom (afgezien van een even getal) gelijk aan de som der aantallen inversies in de indices r en de indices s in het oorspronkelijke product zodat deze som het teken bepaalt van dit product in de berekening van de waarde der determinant.

Voorbeeld: De term $a_{21}\ a_{44}\ a_{32}\ a_{13}$ heeft in de eerste indices de inversies (2,1), (4,3), (4,1), (3,1) en in de tweede indices de inversies (4,2), (4,3), het totale aantal is dus 6. Zou men de factoren rangschikken dan vindt men $a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{44}$, waarin de tweede indices de inversies (3,1), (3,2) bezitten dus een even aantal minder dan 6.

In een willekeurige term der uitgewerkte determinant van de n^e orde is het teken dus $(-)^{R+S}$, waarin R en S resp. de aantallen inversies in de indices $r_1,\ldots,r_n$ en $s_1,\ldots,s_n$ voorstellen. Het is duidelijk dat hieruit volgt, dat een determinant niet van waarde verandert, als men haar om de hoofddiagonaal (dit is de verbindingsrechte van de elementen $a_{11}\ a_{22}\ldots a_{nn}$) laat wentelen (d.w.z. elk tweetal elementen a_{rs} en a_{sr} verwisselt). Immers hierna ontstaat een determinant die alle termen van de oorspronkelijke bevat en wel met een teken $(-)^{S+R}$, dus met hetzelfde teken als de oorspronkelijke determinant.

Zo is dus $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. Bij wenteling om de hoofddiagonaal blijven de elementen daarvan natuurlijk op hun plaats.

Definitie: Een determinant heet symmetrisch als zij door wenteling om de hoofddiagonaal in zichzelf overgaat, dus als $a_{rs} = a_{sr}$ voor alle combinaties (r,s) met r = 1, 2, ..., n en s = 1, 2, ..., n. Zo is dus

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ symmetrisch, maar $\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ niet.

Een determinant heet scheef symmetrisch als voor elk paar (r,s) geldt $a_{rs} = -a_{sr}$.

De determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ is in het algemeen niet scheef-symmetrisch (waarom?).

Opg. 6. Bereken de waarde van de scheef-symmetrische determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 9 \\ -3 & -9 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{en} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & e & d \\ -b & -e & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Stelling. Een scheef-symmetrische determinant van oneven orde is nul.

Bewijs: Daar de determinant bij wentelen om de hoofddiagonaal haar waarde behoudt, heeft men voor haar waarde D

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1,n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

In de laatste determinant heeft elk element een teken dat tegengesteld is aan dat van het overeenkomstige element in de oorspronkelijke determinant; elk der optredende termen in de laatste determinant is dan gelijk aan de overeenkomstige in de oorspronkelijke, afgezien van n factoren -1, dus de nieuwe determinant is gelijk aan $(-)^n D$. We weten echter dat zij gelijk is aan D, dus $D=(-)^n D$. Daar n oneven ondersteld was, heeft men $D=-D$, dus $2D=0$, dus $D=0$.

In het voorgaande hebben wij gebruik gemaakt van het feit, dat als men alle elementen van een determinant met -1 vermenigvuldigt, de waarde der determinant met $(-)^n$ wordt vermenigvuldigd. Geheel analoog geldt: Vermenigvuldigt men elk element van een determinant met c, dan wordt de waarde ervan met c^n vermenigvuldigd (bewijs dit).

Opg. 7. Hoe verandert de waarde van een determinant, als men elk element van één bepaalde rij met c vermenigvuldigt?

Opg. 8. Bereken

$$\begin{vmatrix} 0 & 6a & 3b \\ -a & 0 & c \\ -b & -2c & 0 \end{vmatrix}.$$

Wij gaan thans na hoe de waarde van een determinant verandert, als men twee rijen verwisselt, Beschouw dus de determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Het is duidelijk dat een willekeurige term $a_{1s_1} \cdots a_{ps_p} \cdots a_{qs_q} \cdots a_{ns_n}$ van D_1 ook in D_2 optreedt en omgekeerd. Het teken dezer term in D_1 is $(-)^S$ waarin S het aantal inversies in de indices $s_1 \cdots s_p \cdots s_q \cdots s_n$ aangeeft. De beschouwde term treedt ook in D_2 op. Wij geven tijdelijk $a_{q1}, \ldots a_{qn}$ aan resp. door $b_{p1}, \ldots, b_{pn}$ en $a_{p1}, \ldots, a_{pn}$ door $b_{q1}, \ldots, b_{qn}$. Onze term treedt dan in D_2 op als $a_{1s_1} \cdots b_{qs_p} \cdots b_{ps_q} \cdots a_{ns_n}$. Het aantal inversies hierin is de som der aantallen inversies in de 1^e en 2^e in-

dices. De 1^e indices zijn 1, 2, ..., p-1, q, p+1, ..., q-1, p, q+1, ..., n, dus na 1 ruiling 1, 2, .., p-1, p, p+1, ..., q-1, q, q+1, ..., n. De 2^e indices zijn $s_1 \ldots s_{p-1}$, s_p, $s_{p+1}, \ldots$, s_{q-1}, s_q, s_{q+1}, ..., s_n en bevatten dus S inversies. De beschouwde term in D_2 wordt dus voorzien van het teken $(-)^{S+1}$. Iedere term in D_2 is derhalve tegengesteld aan de corresponderende term in D_1, dus $D_1 = -D_2$.

We vinden zo dus de zeer belangrijke stelling:

Verwisselt men twee rijen van een determinant dan verandert deze van teken en natuurlijk ook: verwisselt men twee kolommen van een determinant, dan verandert deze van teken.

Toepassing. Heeft een determinant twee gelijke rijen, dan verandert die determinant (dus ook de waarde D ervan) niet, als men deze verwisselt. Anderzijds gaat bij die verwisseling de waarde D over in -D, dus men heeft D = -D, waaruit volgt 2D = 0, dus D = 0. Dit levert de

Stelling: Een determinant met twee gelijke rijen (of met twee gelijke kolommen) is gelijk aan nul.

Zijn de elementen van een rij een vast veelvoud a van die van een andere rij van een determinant, dan vindt men dat de oorspronkelijke determinant een ax zo grote waarde krijgt, als in die andere rij alle elementen met a worden vermenigvuldigd. Dan ontstaat echter een determinant met twee gelijke rijen, die volgens het bovenstaande nul is. De oorspronkelijke determinant is dus ook nul. (Geldt het resultaat ook als a = 0 is?).

Dit resultaat is nog iets anders te formuleren:

Stelling. Heeft een determinant twee evenredige rijen (of twee evenredige kolommen), dan is haar waarde nul.

Toepassing:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Elk element van een determinant treedt lineair op in de uitdrukking, die de waarde van de determinant aangeeft. Van deze opmerking zullen we verschillende keren gebruik maken. Allereerst blijkt hieruit dat geldt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Gevolg: Telt men bij een rij van een determinant een veelvoud van een andere rij op, dan blijft de waarde ongewijzigd. Immers men heeft

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{r1}+ta_{s1} & \cdots & a_{rn}+ta_{sn} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - \\ ta_{r1} & \cdots & ta_{rn} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In de laatste determinant luidt de r^e rij $ta_{s1} \cdots ta_{sn}$, welke evenredig is met de elementen van de s^e rij $a_{s1} \cdots a_{sn}$, dus de laatste determinant is nul, waaruit de bewering volgt.

Toepassing. Verifieer elk der volgende gelijkheidstekens bij de berekening van de determinant $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Men heeft

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6\frac{1}{2} & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6\frac{1}{2} & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= -(-6\tfrac{1}{2}).2.(-15) = -135.$$

Zo kan men b.v. de determinant $D = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$ als volgt herleiden :

$$D = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & a-b & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2-c^2 & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} a-c & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c).$$

De berekening van deze laatste determinant kan ook geheel anders geschieden. Men merke n.l. op, dat, als a=b is, de determinant twee gelijke rijen heeft, dus nul is. De determinant is dan wegens de reststelling deelbaar door a-b. Evenzo ziet men, dat zij deelbaar is door b-c en a-c. Dus

$$D = (a-b)(b-c)(a-c)f.$$

Daar D van de derde graad is in a, b, en c tezamen, moet de factor f een constante zijn, Bekijkt men de hoofddiagonaal van D dan ziet men dat in D een term a^2b optreedt. Deze treedt ook in het uitgewerkte product (a-b)(b-c)(a-c) op dus f = 1.

Op analoge wijze vindt men

$$\begin{vmatrix} a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^4 & b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^4 & c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^4 & d^3 & d^2 & d & 1 \\ e^4 & e^3 & e^2 & e & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e).$$

(Van der Monde).

Opg. 9. Bewijs

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Opg. 10. Bereken

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \qquad (-11).$$

Opg. 11. Bereken

$$\begin{vmatrix} a^3 & a & 1 \\ b^3 & b & 1 \\ c^3 & c & 1 \end{vmatrix}. \qquad (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c).$$

Opg. 12. Bereken

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Opg. 13. Bereken de determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Opg. 14. Los x op uit de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c & d \\ a & b+x & c & d \\ a & b & c+x & d \\ a & b & c & d+x \end{vmatrix} = 0.$$

Opg. 15. Los x op uit

$$\begin{vmatrix} p & p & x \\ q & x & q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Zoals wij reeds eerder opmerkten, treedt in de waarde der determinant

$\left|\begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{matrix}\right|$ het element a_{11} lineair op. Alle termen, die a_{11} bevatten zijn van de gedaante

$$(-)^R a_{11} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n},$$

waarin R het aantal inversies is dat optreedt in de rij 1, r_2, r_3,..., r_n, dus in de rij r_2, r_3, ..., r_n. Merken wij op dat de som van de termen $(-)^R a_{2r_2} a_{3r_3} \cdots a_{nr_n}$ juist gelijk is aan

$$\left|\begin{matrix} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{matrix}\right|,$$

dan zien wij dat de factor van a_{11} juist die determinant is, die men krijgt door in de oorspronkelijke determinant de eerste rij en de eerste kolom te schrappen.

Schrapt men in een determinant $|a_{rs}|$ van de n^e orde de p^e rij en q^e kolom, dan ontstaat een nieuwe determinant van de $(n-1)^e$ orde, die men de minor noemt van het element a_{pq}. Wij schrijven hiervoor m_{pq}. Wij vonden dus boven dat de factor van het element a_{11} in de ontwikkeling van de determinant $|a_{rs}|$ juist gelijk is aan m_{11}.

Tenst men de factor te vinden, waarmee een willekeurig element a_{pq} in de ontwikkeling van $|a_{rs}|$ optreedt, dan gaan wij eerst de p^e rij achtereenvolgens met de $(p-1)^e$, $(p-2)^e$, ..., 2^e, 1^e rij verwisselen en daarna de q^e kolom achtereenvolgens met de $(q-1)^e$, $(q-2)^e$, ..., 2^e, 1^e kolom. Er ontstaat dan een determinant, die $(-)^{p+q}$ maal zo groot is als de oorspronkelijke determinant. De nieuwe determinant heeft de gedaante

$$\left|\begin{matrix} a_{pq} & a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{p-1,q} & a_{p+1,q} & \cdots & a_{nq} \\ a_{p1} & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p-1,1} & a_{p+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,q+1} & a_{1,q-1} & a_{2,q-1} & \cdots & a_{p-1,q-1} & a_{p+1,q-1} & \cdots & a_{n,q-1} \\ a_{p,q+1} & a_{1,q+1} & a_{2,q+1} & \cdots & a_{p-1,q+1} & a_{p+1,q+1} & \cdots & a_{n,q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{pn} & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{p-1,n} & a_{p+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right|,$$

dus hierin is op grond van het reeds afgeleide resultaat de factor van a_{pq} juist gelijk aan de minor m_{pq} van het element a_{pq} in de oorspronkelijke determinant; in de oorspronkelijke determinant zelve is de coëfficient van a_{pq} dus gelijk aan $(-)^{p+q} m_{pq}$. We zullen de factor $(-)^{p+q} m_{pq}$ voortaan met A_{pq} aanduiden.

Wenst men de determinant $|a_{rs}|$ te berekenen, dan merke men op dat in elke term precies één element van de p^e rij optreedt. Dus men heeft

$$|a_{rs}| = a_{p1}f_1 + a_{p2}f_2 + \cdots + a_{pn}f_n ,$$

terwijl wij nu weten, dat $f_1 = A_{p1}, f_2 = A_{p2}, \cdots, f_n = A_{np}$, dus

$$|a_{rs}| = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \cdots + a_{pn}A_{pn} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{p\nu}A_{p\nu}.$$

Men noemt dit laatste resultaat de ontwikkeling van de determinant $|a_{rs}|$ naar de elementen van de p^e rij.

Toepassing.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{3\nu}A_{3\nu} = 1.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 8.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 - 88 = -90.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 5 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -11 & 6 & 17 \\ -1 & 3 & 6 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -27 & -49 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -11 \end{vmatrix}$$

(−3×, +2×; 3×, 6×)

$$= -(-1).\begin{vmatrix} -27 & -49 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 297 - 245 = 52.$$

Opg. 15. Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Wij vonden hierboven dat voor de waarde A van de determinant $|a_{rs}|$ geldt

$$A = \sum_{m=1}^{n} a_{rm} A_{rm} .$$

Wij kunnen nu ook direct de waarde bepalen van de som die men krijgt als men de elementen van een rij met de minoren van een andere rij vermenigvuldigt en die producten optelt. Immers men vindt dan $\sum_{m=1}^{n} a_{tm} A_{rm}$ en deze som is gelijk aan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ a_{t,1} & \cdots & a_{t,n} \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} .$$

In de laatste determinant zijn de r^e en t^e rij gelijk, dus deze is nul. Dus men heeft

$$\sum_{m=1}^{n} a_{tm} A_{rm} = \begin{cases} A, & \text{als } t = r \\ 0, & \text{als } t \neq r . \end{cases}$$

Van dit resultaat zullen we later nog vaak gebruik maken.

Soms is een determinant van bepaalde orde gemakkelijk te berekenen door deze over te voeren in een determinant van hogere orde, b.v.

$$D = \begin{vmatrix} a+x & b+2x & c+3x \\ a+y & b+2y & c+3y \\ a+2 & b+2z & c+3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & a+x & b+2x & c+3x \\ 0 & a+y & b+2y & c+3y \\ 0 & a+z & b+2z & c+3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ -1 & x & 2x & 3x \\ -1 & y & 2y & 3y \\ -1 & z & 2z & 3z \end{vmatrix}$$

en de laatste determinant blijkt bij ontwikkeling naar de elementen van de eerste rij de waarde nul te bezitten. Men noemt het verhogen van de orde van een determinant door toevoegen van nieuwe rijen en kolommen het randen van een determinant.

Opg. 16. Bewijs $\begin{vmatrix} ac-b^2 & bd-e^2 \\ bd-c^2 & ce-d^2 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$.

Opg. 17. Beschouw een determinant $|a_{rs}|$ van de 3^e orde.

Bereken de waarde van $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$.

Opg. 18. Bereken de waarde der determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

Opg. 19. Bereken de determinant $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a+b+c & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}a & a+\frac{1}{2}b+c & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & a+b+\frac{1}{2}c \end{vmatrix}$.

Opg. 20. Bereken

$$\begin{vmatrix} a^4 & 4a^3 & b^4 & 4b^3 & 12b \\ a^3 & 3a^2 & b^3 & 3b^2 & 6b \\ a^2 & 2a & b^2 & 2b & 2 \\ a & 1 & b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Opg. 21. Bereken $\begin{vmatrix} -1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & -1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & -1 \end{vmatrix}$, als $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Opg. 22. Bereken $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & cda & dab & abc \end{vmatrix}$.

§ 6. Verdere eigenschappen van determinanten.

Om verdere eigenschappen van determinanten af te leiden, stellen wij eerst de vraag op hoeveel verschillende wijzen men k elementen kan kiezen uit een verzameling van n elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Het is duidelijk dat men voor het 1^e der k elementen n mogelijkheden heeft; is het eerste eenmaal gekozen, dan blijven er n-1 mogelijkheden over voor het 2^e element, enz.; voor het k^e element blijven nog n-k+1 mogelijkheden over. In totaal vinden wij dus $n(n-1) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ mogelijkheden. Het is echter duidelijk dat onder alle gevonden k-tallen een groot aantal is, dat uit dezelfde elementen bestaat die echter in verschillende volgorde opgeschreven zijn; zo heeft men b.v. $a_1\ a_2\ a_4 \ldots$ en ook $a_2\ a_1\ a_4 \ldots$ enz. Vraagt men naar het aantal k-tallen, waarbij twee k-tallen met dezelfde elementen, die echter in verschillende volgorde zijn opgeschreven, niet als verschillend rekenen, dan moeten wij het gevonden aantal $\frac{n!}{(n-k)!}$ verkleinen. Aangezien men een willekeurige groep van k elementen op k! manieren kan ordenen (immers voor het 1^e element heeft men de keuze uit k elementen, voor het 2^e element de keuze uit k-1 elementen enz.), is dus het aantal verschillend te rekenen k-tallen van elementen, die uit n gegeven elementen worden gekozen, juist gelijk aan $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Toepassing: Om de coëfficiënt van $a^k b^{n-k}$ in de ontwikkeling van $(a+b)^n$ te bepalen, merken we op dat men deze vindt door het aantal manieren te bepalen, waarop men uit k der n factoren a+b een factor a neemt (en dus uit de overige n-k vanzelf een factor b); dit aantal is dus $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, een resultaat, dat reeds in de algebra op andere wijze is gevonden.

Wij beschouwen om tot de determinant-ontwikkeling van Laplace te geraken, thans eerst een bijzonder geval hiervan.
Wil men de waarde der determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

berekenen, dan merken we op dat wij dit op twee verschillende wijzen kunnen doen, n.l. door A direct uit te rekenen als som van termen $a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4} a_{5i_5}$, waarbij de getallen, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 een willekeurige permutatie vormen van de getallen 1, 2, 3, 4, 5 en waarbij door die permutatie tevens bepaald wordt welk teken voor het beschouwde product gezet moet worden. Een andere wijze was de ontwikkeling naar de elementen van een willekeurige rij.
Dan vond men $A = \sum_{k=1}^{n} a_{rk} \cdot A_{rk}$, waarbij r willekeurig gekozen kan worden uit de waarden 1, ..., n. Wij merken op, dat de berekening van onze determinant van de 5e orde hiermee is teruggebracht tot de berekening van de determinanten A_{rk} van de 4e orde. De vraag is of het ook mogelijk is om de beschouwde determinant te berekenen door gebruik te maken van bepaalde minoren van de derde orde. Het is Laplace geweest, die hierop bevestigend heeft geantwoord. Zijn resultaat is het volgende. Kies 2 willekeurige rijen in A uit, b.v. de 2e en 3e. Vorm nu een willekeurige determinant $\begin{vmatrix} a_{2i} & a_{2j} \\ a_{3i} & a_{3j} \end{vmatrix}$. Vermenigvuldig deze met de complementaire determinant $\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1l} & a_{1m} \\ a_{4k} & a_{4l} & a_{4m} \\ a_{5k} & a_{5l} & a_{5m} \end{vmatrix}$, waarin de getallen i, j, k, l, m een willekeurige permutatie der getallen 1, 2, 3, 4, 5 vormen. Zet voor dit product het teken $(-)^{2+3+i+j}$ en vorm al dergelijke uitdrukkingen voor alle verschillende keuzen van de twee getallen i, j uit de 5 getallen 1, 2, 3, 4, 5. Dan is de som der zo gevonden termen juist gelijk aan A. De berekening van A is dus teruggebracht op die van minoren van A van de 2e en 3e orde.

Wij hebben dus

$$A = \sum_{i,j} (-)^{2+3+i+j} \begin{vmatrix} a_{2i} & a_{2j} \\ a_{3i} & a_{3j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1\ell} & a_{1m} \\ a_{4k} & a_{4\ell} & a_{4m} \\ a_{5k} & a_{5\ell} & a_{5m} \end{vmatrix} .$$

Een willekeurige term in het rechterlid heeft de gedaante $a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma}\, a_{4\delta}\, a_{5\varepsilon}$, waarin $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ een permutatie is der getallen 1,2,3,4,5, en treedt dus zeker op in A. Het rechterlid bevat ook evenveel termen als A, want de eerste determinant achter het somteken bestaat uit 2! termen, hun product dus uit 2! 3! termen. Het aantal termen in $\sum_{i,j}$ is gelijk aan het aantal wijzen, waarop men de 2 getallen i,j kan kiezen uit de getallen 1,2,3,4,5 en dit is, zoals wij zoëven zagen, gelijk aan $\frac{5!}{2!3!}$. Het rechterlid bevat dus $2!3! \frac{5!}{2!3!} = 5!$ termen, dus juist evenveel termen als A zelf. Daar iedere term in het rechterlid eventueel afgezien van het teken, in A optreedt, zal de formule van Laplace voor dit geval bewezen zijn, als wij aangetoond hebben, dat een willekeurige term in linker - en rechterlid van deze formule hetzelfde teken heeft. Dit doen wij voor het algemene geval. Zij $A = |a_{rs}|$ een determinant van de n^{de} orde. Kies hieruit k vaste rijen $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$. Noem de overige rijen $r_1', r_2', \ldots, r_{n-k}'$. Dan is

$$A = \sum_{s_1,\ldots,s_k} (-)^{r_1+\cdots+r_k+s_1+\cdots+s_k} \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & \cdots & a_{r_1 s_k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r_k s_1} & \cdots & a_{r_k s_k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{r_1' s_1'} & \cdots & a_{r_1' s_{n-k}'} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r_{n-k}' s_1'} & \cdots & a_{r_{n-k}' s_{n-k}'} \end{vmatrix} .$$

Hierin wordt gesommeerd over alle combinaties der k getallen $s_1 \ldots, s_k$ uit de getallen $1,\ldots,n$. De overige der getallen $1,\ldots,n$ worden $s_1', \ldots, s_{n-k}'$ genoemd. Wij onderstellen hierbij, dat de getallen $r_1, \ldots r_k$, de getallen $s_1, \ldots, s_k$, de getallen $r_1', \ldots r_{n-k}'$ en de getallen $s_1', \ldots s_{n-k}'$ naar opklimmende grootte gerangschikt zijn.

Het is weer duidelijk, dat de aantallen termen in linker- en rechterlid gelijk zijn want links zijn er n! en rechts $\frac{n!}{k!(n-k)!} k!(n-k)! = n!$

Een willekeurige term rechts in de ontwikkeling der determinanten bestaat uit n factoren a_{rs}, waarin de indices r en ook de indices s een of andere permutatie zijn van de getallen 1, ... ,n, zodat deze term in A ook optreedt. Rest ons dus, evenals in het bovenbeschouwde speciale geval, te verifiëren dat het teken in die term links en rechts in onze formule overeenstemt. Laat deze term de gedaante

$a_{r_1 s_1} \cdots a_{r_k s_k} a_{r'_1 s'_1} \cdots a_{r'_{n-k} s'_{n-k}}$

bezitten. Hierin is $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ een of andere permutatie der getallen $s_1, \ldots, s_k$; $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-k}$ een of andere permutatie der getallen $s'_1, \ldots, s'_{n-k}$. Is σ het aantal inversies in de rij $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ en σ' dat in de rij $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-k}$ dan heeft deze term dus het teken $(-)^{r_1+\ldots+r_k+s_1+\ldots+s_k+\sigma+\sigma'}$. Is r het aantal inversies in de indices $r_1, \ldots, r_k, r'_1, \ldots, r'_{n-k}$ en s dat in de indices $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-k}$ dan heeft dezelfde term in het linkerlid het teken $(-)^{r+s}$. Wij hebben dus te bewijzen dat het verschil $r_1+\ldots+r_k+s_1+\ldots+s_k+\sigma+\sigma'-r-s$ even is. Hiertoe bepalen wij eerst het aantal inversies in de rij $r_1, \ldots, r_k, r'_1, \ldots, r'_{n-k}$. Elk getal r_α is kleiner dan de opvolgende getallen r_β en elk getal r'_γ is kleiner dan de opvolgende getallen r'_δ. Er zijn dus alleen inversies mogelijk tussen getallen r_α en r'_γ. Daar r_1 het kleinste is der getallen $r_1, \ldots, r_k$, zijn de getallen $r_1-1, r_2-1, \ldots, 2, 1$ alle begrepen in de groep $r'_1, \ldots, r'_{n-k}$, dus r_1 geeft aanleiding tot r_1-1 inversies. Het getal r_2 is het op één na kleinste der getallen in de groep $r_1, \ldots, r_k$. De getallen $r_2-1, r_2-2, 2, 1$ liggen dus allen afgezien van het ene getal r_1 in de groep $r'_1, \ldots, r'_{n-k}$. Derhalve geeft het getal r_2 aanleiding tot r_2-2 inversies. Op analoge wijze ziet men dat het getal r_α aanleiding geeft tot $r_\alpha - \alpha$ inversies. De getallen $r_1, \ldots, r_k, r'_1, \ldots, r'_{n-k}$ geven dus aanleiding tot

$$r = r_1+r_2+\ldots+r_k-1-2-\ldots-k = r_1+\ldots r_k-\tfrac{1}{2}k(k+1)$$

inversies. Derhalve is $r_1+\ldots+r_k-r=\frac{1}{2}k(k+1)$.

Op analoge wijze bepalen wij het aantal s der inversies in de rij $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-k}$. Na een aantal ruilingen kan men de getallen $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ in de volgorde $s_1, \ldots, s_k$ brengen. Dit aantal is, afgezien van een even getal, gelijk aan σ. Na (afgezien van een even getal) σ' ruilingen is de rij $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-k}$ te brengen in de volgorde $s'_1, \ldots, s'_{n-k}$. Het aantal inversies in de rij $s_1, \ldots, s_k, s'_1, \ldots, s'_{n-k}$ blijkt op analoge wijze als hierboven gelijk te zijn aan

$$s_1+\ldots+s_k-1-2-\ldots-k = s_1+\ldots+s_k-\tfrac{1}{2}k(k+1),$$

dus afgezien van een even getal heeft men

$$s = \sigma+\sigma'+s_1+\ldots+s_k-\tfrac{1}{2}k(k+1)$$

zodat men uiteindelijk, afgezien van een even getal, vindt

$$r_1+\ldots+r_k+s_1+\ldots+s_k+\sigma+\sigma'-r-s = k(k+1)$$

en deze uitdrukking is inderdaad even, want van elk paar opeenvolgende getallen k en k+1 is er juist één dat even is. Hiermee is de formule van Laplace aangetoond.

Opg. 1. Laat zien dat de ontwikkeling van een determinant naar de elementen van een bepaalde rij een bijzonder geval is van het theorema van Laplace.

Opg. 2. Bereken

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Opg. 3. Berekende waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Opg. 4. Bereken

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Opg. 5. Zijn alle minoren van de tweede orde van een determinant gelijk aan nul, dan is die determinant zelf ook nul.

Wij maken thans gebruik van de ontwikkelingsregel van Laplace om een belangrijke stelling af te leiden over het product van twee determinanten.

Zijn $A = |a_{rs}|$ en $B = |b_{rs}|$ beide determinanten van de n^e orde, dan kan men hun product AB schrijven als een determinant $C = |c_{rs}|$, die eveneens van de n^e orde is. Men heeft n.l. te nemen

$$c_{rs} = \sum_{m=1}^{n} a_{rm} b_{ms}.$$

Bewijs: Op grond van de ontwikkeling van Laplace ziet men direct in dat het product AB gelijk is aan

$$AB = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \cdot & & \cdot \\ 0 & & \ddots & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Vermenigvuldig de eerste kolom met b_{11} en tel die op bij de $(n+1)^e$
" " " " " b_{12} " " " " " " $(n+2)^e$, enz;
" " " " " b_{1n} " " " " " " $2n^e$.
Vermenigvuldig de tweede kolom met b_{21} en tel die op bij de $(n+1)^e$
" " " " " b_{22} " " " " " " $(n+2)^e$, enz;
" " " " " b_{2n} " " " " " " $(2n)^e$.

I.h.a. Vermenigvuldig de 3e kolom met b_{sr} en tel die op bij de $(n+r)^e$ $(r,s=1, \ldots, n)$.

Het is duidelijk dat hierdoor het rechterondervak van de determinant AB geheel uit nullen gaat bestaan. In het rechterbovenvak vinden we in de r^e rij en $(n+s)^e$ kolom de uitdrukking $\sum_{m=1}^{n} a_{rm} b_{ms}$, dus juist c_{rs}. Ontwikkelt men de gevonden determinant volgens Laplace, dan vindt men

$$AB = (-)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+(2n)} \begin{vmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{vmatrix} |c_{rs}| = (-)^{n(2n+1)+n} |c_{rs}| = |c_{rs}|,$$

waarmee de stelling bewezen is.

Natuurlijk kan men het product AB op meer dan een wijze als een determinant van de n^e orde schrijven. Zo kan men b.v. eerst de determinant B om de hoofddiagonaal laten draaien en daarna de productstelling toepassen. Dan vindt men

$$c_{rs} = \sum_{m=1}^{n} a_{rm} b_{sm}$$

en ook zijn natuurlijk de formules

$$c_{rs} = \sum_{m=1}^{n} a_{mr} b_{ms} \quad \text{en} \quad c_{rs} = \sum_{m=1}^{n} a_{mr} b_{sm}$$

juist.

Opg. 6. Schrijf het product der determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

op de bovenaangegeven 4 wijzen als een determinant van de tweede orde.

Opg. 7. Door

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2$$

op twee verschillende manieren te berekenen (rechtstreeks en met behulp van het gevonden theorema) bewijze men

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Wij bewijzen thans nog een aantal resultaten, waarbij het vermenigvuldigingstheorema gebruikt zal worden.

Beschouw bij de determinant $|a_{rs}|$ tevens de determinant $|A_{rs}|$ waarvan elk element de minor is van het corresponderende element $|a_{rs}|$ van de oorspronkelijke determinant. Men heeft

$$|a_{rs}| \cdot |A_{rs}| = |p_{rs}|$$

We weten dat voor een willekeurig element p_{rs} van de product determinant geldt

$$\sum_{k=0}^{n} a_{rk}\, A_{sk} = \begin{cases} 0, & \text{als } r \neq s \\ a, & \text{als } r = s. \end{cases}$$

Hierin is a de waarde van de determinant $|a_{rs}|$. De determinant $|p_{rs}|$ heeft dus de gedaante $\begin{vmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{vmatrix}$ en bezit derhalve de waarde a^n. Wij vinden derhalve

$$a\,|A_{rs}| = a^n.$$

Is $a \neq 0$, dan volgt hieruit $|A_{rs}| = a^{n-1}$. Ook als $a=0$ is, geldt dit resultaat, hetgeen dan inhoudt dat $|A_{rs}| = 0$. Dit tonen wij aan door op te merken, dat als een determinant gelijk is aan nul, voor elk viertal minoren van A_{rs}, A_{rt}, A_{us}, A_{ut} geldt

$$A_{rs} : A_{rt} = A_{us} : A_{ut}.$$

Is dit bewezen, dan zijn in A_{rs} alle minoren van de 2e orde gelijk aan nul, zodat wegens een Laplace ontwikkeling die determinant zelf nul is.

Wij tonen thans de gezochte evenredigheid aan. Door verwisseling van rijen en verwisseling van kolommen kunnen wij volstaan met het bewijzen van de relatie $A_{11} : A_{12} = A_{21} : A_{22}$. Volgens Laplace is

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix},$$

dus

$$A_{11} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Voert men de vermenigvuldiging uit, dan vindt men dat het laatste product gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \end{vmatrix} = 0.$$

Evenzo $A_{12} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0,$ derhalve

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}^2 = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit volgt

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Wij vinden dus $|A_{rs}| = |a_{rs}|^{n-1}$.

Er gelden ook dergelijke relaties tussen complementaire minoren van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$. Wij onderstellen in het volgende dat $|a_{rs}| \neq 0$ is. Beschouw bijv. de minor

$$M = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad \text{in } |A_{rs}|.$$

Men heeft, wederom gebruik makende van het vermenigingstheorema

$$Ma = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dus

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Op analoge wijze vindt men een overeenkomstig resultaat voor willekeurige complementaire minoren van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$.

Opg. 8. Bewijs op analoge wijze

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

en laat zien dat deze relatie m.m. ook geldt voor willekeurige complementaire minoren van de orde 3, resp. n-3 van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$.

Men ziet in het algemeen dat een minor van de orde k van $|A_{rs}|$, gelijk is aan de complementaire minor van de orde $n-k$ van $|a_{rs}|$, vermenigvuldigd met a^{k-1}. Zo heeft men in het bijzonder: De minor van A_{rs} in de determinant $|A_{rs}|$ is gelijk aan $a^{n-2}a_{rs}$.

Men schrijft voor de determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1 & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

wel vaak kortweg (ab...k). wenst men aan te geven welke indices optreden, dan schrijft men wel $(ab...k)_{12...n}$. Zo geeft men dus de minor $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ wel kortweg aan met $(ab)_{12}$. Bij deze notatie schrijft men voor de minor van het element a_r wel A_r enz. Zo vonden we dus

$A_1 = (bc...k)_{23...n}$; $(AB)_{12} = (ab...k)(cd...k)_{34...n}$; $(ABC)_{123} = (ab...k)^2(de...k)_{45...n}$;

$(AB...J)_{12...n-1} = (ab...k)^{n-2}k_n$; $(AB...K)_{12...n} = (ab...k)^{n-1}$.

Wij vinden dus $|A_{rs}| = |a_{rs}|^{n-1}$.

Er gelden ook dergelijke relaties tussen complementaire minoren van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$. Wij onderstellen in het volgende dat $|a_{rs}| \neq 0$ is. Beschouw bijv. de minor

$$M = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad \text{in } |A_{rs}|.$$

Men heeft, wederom gebruik makende van het vermenigingstheorema

$$Ma = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dus

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Op analoge wijze vindt men een overeenkomstig resultaat voor willekeurige complementaire minoren van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$.

Opg. 8. Bewijs op analoge wijze

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

en laat zien dat deze relatie m.m. ook geldt voor willekeurige complementaire minoren van de orde 3, resp. n-3 van $|A_{rs}|$ en $|a_{rs}|$.

Men ziet in het algemeen dat een minor van de orde k van $|A_{rs}|$, gelijk is aan de complementaire minor van de orde n-k van $|a_{rs}|$, vermenigvuldigd met a^{k-1}. Zo heeft men in het bijzonder: De minor van A_{rs} in de determinant $|A_{rs}|$ is gelijk aan $a^{n-2}a_{rs}$.

Men schrijft voor de determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1 & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

wel vaak kortweg (ab...k). wenst men aan te geven welke indices optreden, dan schrijft men wel $(ab...k)_{12...n}$. Zo geeft men dus de minor $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ wel kortweg aan met $(ab)_{12}$. Bij deze notatie schrijft men voor de minor van het element a_r wel A_r enz. Zo vonden we dus

$A_1 = (bc...k)_{23...n}$; $(AB)_{12} = (ab...k)(cd...k)_{34...n}$; $(ABC)_{123} = (ab...k)^2(de...k)_{45...n}$;

$(AB...J)_{12...n-1} = (ab...k)^{n-2}k_n$; $(AB...K)_{12...n} = (ab...k)^{n-1}$.

In de volgende opgaven geven wij hiervan enigetoepassingen en generalisaties:

Opg.9. Bewijs $\begin{vmatrix} (ax) & (ay) \\ (bx) & (by) \end{vmatrix} = (ab)\ (xy).$

Opg.10. Bewijs $\begin{vmatrix} (xbc) & (axc) & (abx) \\ (ybc) & (ayc) & (aby) \\ (zbc) & (azc) & (abz) \end{vmatrix} = (xyz)\ (abc)^2.$

Opg.11. Bewijs $\begin{vmatrix} (xbcd) & (axcd) \\ (ybcd) & (aycd) \end{vmatrix} = (abcd)\ (xycd).$

De ontwikkeling van Laplace kan men in de gedaante

$$(abcde) = \Sigma (ab)_{ij}\ (cde)_{klm}$$

schrijven, waarin gesommeerd wordt over allerlei indices i,j,k,l,m; deze getallen zijn een permutatie der getallen 1,2,3,4,5, die verder nog aan de bekende eisen voldoen.

Opg.12. Bewijs $\Sigma (ab)_{ij}\ (acd)_{klm} = 0.$

Opg.13. Bewijs

$$\begin{vmatrix} (ab)_{12} & (ab)_{13} & (ab)_{14} & (ab)_{23} & (ab)_{24} & (ab)_{34} \\ (ac)_{12} & (ac)_{13} & (ac)_{14} & (ac)_{23} & (ac)_{24} & (ac)_{34} \\ (ad)_{12} & . & . & . & . & . \\ (bc)_{12} & . & . & . & . & . \\ (bd)_{12} & . & . & . & . & . \\ (cd)_{12} & . & . & . & . & (cd)_{34} \end{vmatrix} = (abcd)^3.$$

Men kan dit resultaat ook schrijven in de gedaante

$$\big((ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)\big) = (abcd)^3.$$

Dit resultaat is analoog aan het resultaat

$$(ABCD) = (abcd)^3,$$

waarvoor men ook kan schrijven

$$\big((bcd)\ (acd)\ (abd)\ (abc)\big) = (abcd)^3.$$

Opg.14. Bewijs

$$\begin{vmatrix} (ab)_{12} & (ab)_{13} & (ab)_{14} & (ab)_{23} \\ (ac)_{12} & . & . & . \\ (ad)_{12} & . & . & . \\ (bc)_{12} & . & . & (bc)_{23} \end{vmatrix} = (abcd) \begin{vmatrix} (ab)_{12} & (ab)_{13} \\ (ac)_{12} & (ac)_{13} \end{vmatrix}$$

§ 7. Bijzondere determinanten.

In het voorafgaande beschouwen wij reeds symmetrische determinanten, d.w.z. determinanten waarbij $a_{rs} = a_{sr}$. Wij kunnen een symmetrische determinant D ook op andere wijze karakteriseren, n.l. door de eis, dat de determinant D gelijk is aan zijn toegevoegde D'. Hierbij verstaat men onder de toegevoegde determinant D' van een determinant D die determinant, die uit D ontstaat door de determinant D om de hoofddiagonaal te wentelen, d.w.z. door elk element a_{rs} te vervangen door het element a_{sr}. Een determinant D is dus symmetrisch als D en D' overeenstemmen. Ook de waarden van D en D' stemmen dan overeen; dat is echter bij iedere determinant (ook bij niet-symmetrische determinanten) het geval.

Een determinant is scheefsymmetrisch als elk element a_{rs} het tegengestelde is van het element a_{sr}. Bij een scheefsymmetrische determinant D zijn dus alle elementen van D en D' tegengesteld. Hieruit volgt dat de waarde a van een scheefsymmetrische determinant voldoet aan $a = (-)^n a$, waarin n de orde der determinant is, Is n oneven, dan volgt hieruit $a = 0$. Elke scheefsymmetrische determinant van oneven orde is dus gelijk aan nul.

Wij bewijzen thans dat een scheefsymmetrische determinant van even orde gelijk is aan een volkomen vierkant, d.w.z. aan het kwadraat van een veelterm in de elementen.
Voor n = 2, dus voor de scheefsymmetrische determinant $\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2$ is dit evident. Onderstel thans dat het even getal n groter is dan 2 en de stelling voor n-2 in plaats van n reeds bewezen is. Dan heeft men voor de waarde a van de scheefsymmetrische determinant $|a_{rs}|$ van de n^e orde de relatie

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De minoren A_{11} en A_{22} zijn scheefsymmetrische determinanten van oneven orde, dus gelijk aan nul. Verder heeft men $A_{12} = -A_{21}$.
Opg. 1. Bewijs dit.
Bovenstaande relatie levert dus

$$A_{12}^2 = a \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

De tweede factor in het rechterlid is een scheefsymmetrische determinant van de orde n-2, dus wegens de inductieonderstelling, een volkomen vierkant. Dan is dat ook het geval met a.

Opg.2. Bereken $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$

Opg.3. Bewijs $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{i,k=1}^{3} u_i \cdot u_k \; A_{ik}.$

Tot een ander bijzonder type determinanten behoren de circulaire determinanten. Bij deze is voor alle r en s $a_{r+1,\, s+1} = a_{r,\, s}$; de bedoeling is dat een index, die groter is dan , met n verminderd wordt. Zo luidt de circulaire determinant van de derde orde

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix},$$

Om deze te berekenen vermeerderen we de eerste rij met de tweede en de derde, waarna alle elementen der eerste rij, dus ook de determinant zelf, door a+b+c deelbaar blijken te zijn. Vermeerdert men de eerste rij met ρx de tweede en met $\rho^2 x$ de derde rij met (waarbij ρ een der complexe derdemachtswortels uit de eenheid is), dan blijkt uit het resultaat dat de determinant deelbaar is door $a+\rho^2 b+\rho c$, enz. Men vindt tenslotte, dat de beschouwde determinant gelijk is aan

$$(a+b+c)\,(a+\rho b+\rho^2 c)(a+\rho^2 b+\rho c).$$

Opg.4. Bereken de waarde der circulaire determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ -i & 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \end{vmatrix}.$$

Opg.5. Bereken eveneens de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \\ d & e & a & b & c \\ c & d & e & a & b \\ b & c & d & e & a \end{vmatrix}.$$

Tenslotte behandelen wij een zeer belangrijk type van determinanten, n.l. de orthogonale determinanten.

Een determinant a_{rs} heet orthogonaal als geldt $a_{rs} = \frac{A_{rs}}{a}$. Hierin stelt a weer de waarde der determinant $|a_{rs}|$ voor. Men heeft dan voor een orthogonale determinant

$$a = \sum_{s=1}^{n} a_{rs} A_{rs} = \sum_{s=1}^{n} a\, a_{rs}^2 = a \sum_{s=1}^{n} a_{rs}^2 \text{, dus } \sum_{s=1}^{n} a_{rs}^2 = 1.$$

Verder is voor $r \neq t$

$$0 = \sum_{s=1}^{n} a_{rs} A_{ts} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_{rs} a_{ts}}{a} \text{ , dus } \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, a_{ts} = 0.$$

Op geheel analoge wijze ziet men in $\sum_{r=1}^{n} a_{rs}^2 = 1$; $\sum_{r=1}^{n} a_{rs}\, a_{rt} = 0$,

als $s \neq t$.

Verder heeft man door toepassing van het vermenigvuldigingstheorema

$$a^2 = |a_{rs}| \cdot |a_{rs}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

dus $a = \pm 1$. Is $a = +1$, dan heet de determinant rechtstreeks orthogonaal, is $a = -1$ dan iddirect orthogonaal. Bij een orthogonale determinant heeft men dus $a_{rs} = A_{rs}$ of $-A_{rs}$ al naar de determinant al of niet rechtstreeks orthogonaal is.

Opg.6. Bewijs dat bij een orthogonale determinant $|a_{rs}|$ geldt

$$\sum_{r=1}^{n} A_{rs} A_{rt} = \begin{cases} 1, \text{ als } s = t \\ 0, \text{ als } s \neq t. \end{cases}$$

Is omgekeerd van een determinant $|a_{rs}|$ gegeven

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, a_{ts} = \begin{cases} 1, \text{ als } r = t \\ 0, \text{ als } r \neq t, \end{cases}$$

dan is deze orthogonaal, want vermeerder de met a_{11} vermenigvuldigde eerste kolom met a_{12} x de tweede, a_{13} x de derde , ..., a_{1n} x de n^e kolom, waarna de determinant de gedaante

$$a_{11}\, a = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \\ 0 & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}$$

aanneemt. Dus $a_{11} = \frac{A_{11}}{a}$. Evenzo blijkt $a_{rs} = \frac{A_{rs}}{a}$.

Opg.7. Als bij een determinant $|a_{rs}|$ geldt $\sum_{r=1}^{n} A_{rs} A_{rt} = \begin{cases} 1, \text{ als } s = t \\ 0, \text{ als } s \neq t, \end{cases}$

dan is die determinant orthogonaal. Wij beschouwen thans het product $|c_{rs}|$ van twee orthogonale determinanten $|a_{rs}|$ en $|b_{rs}|$. Hiervoor geldt

$$\sum_{r=1}^{n} c_{rs}^2 = \sum_{r=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{rh}a_{hs}\sum_{k=1}^{n} a_{rk}\,b_{ks} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{hs}\,b_{ks}\sum_{r=1}^{n} a_{rh}\,a_{rk}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} b_{hs}\,b_{hs} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^{n} c_{rs}c_{rt} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} a_{rh}\,b_{hs}\sum_{k=1}^{n} a_{rk}a_{kt} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{hs}\,b_{kt}\sum_{r=1}^{n} a_{rh}\,a_{rk}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} b_{hs}\,b_{ht} = 0 \quad (s \neq t),$$

zodat de productdeterminant in verband met het bovenstaande ook orthogonaal is.

§ 8. Matrices.

Een matrix is een getallenschema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$,

dat niet kwadratisch beheoft te zijn en waaraan geen getallenwaarde behoeft te worden toegekend. Men schrijft wel kortweg $\|a_{rs}\|$. Is m=n dan behoort er bij de matrix $A = \|a_{rs}\|$ een determinant $|a_{rs}|$, waarvan wij de waarde weer met a aanduiden.

Men definieert de productmatrix $C = \|c_{rs}\|$ van twee matrices $A = \|a_{rs}\|$ en $B = \|b_{rs}\|$, op grond van het gevondene bij determinanten door de formules

$$c_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\,b_{ks}.$$

Men schrijft C = AB.

Voorbeeld: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 11 & 0 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 45 \\ 97 & 68 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Opg. 1. Onder welke voorwaarden is het product van twee matrices gedefinieerd?

Opg. 2. Bepaal in welke gevallen het product van twee matrices een kwadratische matrix is.

Opg. 3. Als de kwadratische matrices A, B en C voldoen aan C=A.B, dan geldt voor de waarden a, b en c der bijbehorende determinanten c=ab.

Definitie. Hebben de matrices $A=\|a_{rs}\|$ en $B=\|b_{rs}\|$ evenveel kolommen, dan definieert men $C=A+B$, indien $c_{rs}=a_{rs}+b_{rs}$.

Opg.4. Bewijs $A+B=B+A$.

Verder definieert men voor ieder getal k $B=kA$, indien $b_{rs}=ka_{rs}$.

Opg.5. Bewijs $k(A+B) = kA+kB$;

Opg.6. Is A een kwadratische matrix van de orde n en $B=kA$, dan geldt voor de waarde der bijbehorende determinanten $b=k^n a$.

Opg.7. Bewijs $C(A+B) = CA+CB$.

Opg.8. Laat door een voorbeeld zien dat niet steeds behoeft te gelden $AB = BA$. Is bij een kwadratische matrix $a_{rs}=\begin{cases}1 \text{ voor } r = s\\ 0 \text{ voor } r \neq s\end{cases}$, dan noemt men deze eenheidsmatrix I.

Opg.9. Is de matrix I van de orde n en heeft de matrix A n kolommen, dan is $AI=A$; heeft A echter n rijen dan is $IA=A$. Heeft A n rijen en n kolommen, dan is $AI=IA=A$.

Opg.10. Bewijs voor ieder natuurlijk getal m de relatie $I^m=I$.

Vervangt men in een matrix A elk element a_{rs} door het toegevoegde element a_{sr}, dan ontstaat de toegevoegde matrix, die men veelal met A' aangeeft. B.v. de toegevoegde matrix van $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; van $(a_1 \ldots a_n)$ luidt de toegevoegde $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.

Opg.11. Bewijs $(A+B)'=A'+B'$; $(AB)'=B'A'$.

Opg.12. Is $A=A^1$, $B=B'$, dan is $AB=(BA)'$.
Is $A = \|a_{rs}\|_1$, dan definieert men A^{-1} als $\left\|\frac{A_{sr}}{a}\right\|$, d.w.z. de elementen b_{rs} van $B=A^{-1}$ hebben de gedaante $b_{rs}=\frac{A_{sr}}{a}$. De matrix A wordt hierbij quadratisch verondersteld.

Opg.13. Bewijs $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

Opg.14. Bewijs $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Voert men nog in de nulmatrix O, waarvan alle elementen gelijk zijn aan nul, dan vindt men dat voor kwadratische matrices de volgende rekenregels gelden: Bij elk tweetal matrices A en B met gelijk aantal rijen en gelijk aantal kolommen bestaat één matrix, die de som A+B wordt genoemd. Deze som voldoet aan :

$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A + O = O + A = A.$$

Bij elke A bestaat een matrix B met $A + B = B + A = O$; voor deze matrix B schrijft men wel -A (geheel in overeenstemming met de defini-

tie van kA).

Bij elk paar kwadratische matrices A en B bestaat één matrix, die het product AB wordt genoemd.

Dit product voldoet aan

$$A(BC) = (AB)C$$
$$AI = IA = A$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

Bij elke A met $a \neq 0$ bestaat een matrix B, zodanig dat AB = I. De matrix B heet de inverse matrix. Men schrijft $B = A^{-1}$ en heeft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1.$$

Men definieert $A^{-n} = (A^{-1})^n$ voor gehele positieve n en $A^o = I$.

Opg. 15. Bewijs

$$A^{-n}A^n = I.$$

Opg. 16. Bewijs voor willekeurige gehele m en n

$$A^mA^n = A^{m+n}.$$

Opg. 17. Bewijs $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Opg. 18. Is bij een matrix A de determinant a al of niet gelijk aan nul, dan geldt voor de matrix B met $b_{rs} = A_{sr}$ de relatie

$$BA = AB = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & |A| \end{vmatrix} = |A|\, I .$$

Naast de bijzondere determinanten, die wij in § 7 beschouwden, beschouwen wij de corresponderende bijzondere matrices.

Een matrixA is symmetrisch als A = A' en scheefsymmetrisch als A = -A'.

Een matrix A is orthogonaal als $A' = A^{-1}$. Dus A'A = AA' = I. Beschouw een matrix $X = (x_1, \ldots, x_n)$ en een orthogonale matrix A van de orde n. Zij Y = XA, dus Y' = A'X', dan is $\sum_{(=)}^{n} y_i^2 = YY' = XA(A'X') = X(AA')X' = XIX' = XX' = \sum_{(=)}^{n} x_i^2$.

De gevonden eigenschap zullen wij later meetkundig interpreteren. Is S een scheefsymmetrische matrix, dan is de matrix $A = (I+S)(I-S)^{-1}$ orthogonaal. Immer wegens S'=-S heeft men

$$\begin{aligned} AA' &= (I+S)\,(I-S)^{-1}\,\{(I+S)(I-S)^{-1}\}' \\ &= (I+S)\,(I-S)^{-1}\,\{(I-S)^{-1}\}'\,(I+S)' \\ &= (I+S)\,(I-S)^{-1}\,(I'-S')^{-1}\,(I'+S') \\ &= (I+S)\,(I-S)^{-1}\,(I+S)^{-1}\,(I-S) \\ &= (I+S)\,(I+S)^{-1}\,(I-S)^{-1}\,(I-S) \quad (\text{want } (I-S)(I+S) = I^2-S^2 = \\ &\qquad\qquad = (I+S)\,(I-S)\,) \\ &= I.I = I. \end{aligned}$$

Is S scheefsymmetrisch en Q symmetrisch, dan is $A = (I+SQ)(I-SQ)^{-1}$ orthogonaal, want wegens $S' = -S$, $Q' = Q$ heeft men

$$\begin{aligned} AA' &= (I+SQ)\,(I-SQ)^{-1}\,\{(I+SQ)(I-SQ)^{-1}\}' \\ &= (I+SQ)\,(I-SQ)^{-1}\,(I+SQ)^{-1}\,(I-SQ) \\ &= (I+SQ)\,(I+SQ)^{-1}\,(I-SQ)^{-1}\,(I-SQ) = I\cdot I = I, \end{aligned}$$

wegens

$$(I+SQ)(I-SQ) = I+SQ-SQ-SQSQ = (I-SQ)(I+SQ).$$

Tenslotte definiëren wij nog het belangrijke begrip rang van een matrix.

Beschouw een matrix $\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$. Deze bevat allerlei onderdeterminanten van diverse orde; in het geval $n \geq m$ bevat de matrix b.v. $\binom{n}{m}$ onderdeterminanten van de orde m; de matrix bevat mn onderdeterminanten van de orde 1. Onder de rang der matrix verstaat men de orde der determinant van de hoogste orde, die in de matrix bevat is en van nul verschilt.

Opg.19. De rang der nulmatrix 0 is nul; wat is de rang van de eenheidsmatrix I van de n^e orde?

Opg.20. Bepaal de rang der matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opg.21. Als de determinant a van de matrix A gelijk is aan nul, bepaal dan de rang van de matrix B met $b_{rs} = A_{rs}$.

§ 9. Stelsels lineaire vergelijkingen.

Wij gaan thans de in de vorige paragraphen behandelde eigenschappen van determinanten en matrices toepassen bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen.

Beschouw het stelsel

$$(I) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Wij kunnen hiervan onmiddellijk de oplossing vinden in het geval dat de determinant $a = |a_{rs}| \neq 0$ is. In dat geval vermenigvuldige men n.l. de 1^e verg. met A_{11}, de 2^e met A_{21}, ..., de n^e met A_{n1} (waarin wederom A_{rs} de minor van het element a_{rs} in de determinant $|a_{rs}|$ voorstelt), waarna men vindt

$$ax_1 = b_1A_{n1} + b_2A_{n2} + \ldots + b_nA_{nn} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Noemen wij de determinant, die uit a_{rs} ontstaat door daarin de s^e kolom te vervangen door $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$, voortaan a_s, dan vindt men

$x_1 = \frac{a_1}{a}$ en op gelijke wijze $x_r = \frac{a_r}{a}$ $(r = 2, \ldots, n)$ (regel van Cramer).

Hiermede zijn de formules teruggevonden die in de gevallen n = 2 en n = 3 het uitgangspunt voor de theorie der determinanten waren.

Het is duidelijk dat in het geval, dat a = 0 is, op deze wijze geen oplossing wordt gevonden. Omgekeerd voldoen de gevonden waarden van $x_1, \ldots, x_n$ aan het gegeven stelsel vergelijkingen, deze zijn daarvan bovendien de enige oplossing. In het geval $a \neq 0$ heeft het gegeven stelsel dus één ondubbelzinnig bepaalde oplossing, gegeven door de regel van Cramer.

Opgave 1. Los op het stelsel

$$\begin{cases} 24x + 11y - 10z = 5 \\ 2x + 2y + 2z = 10 \\ 13x - 2y - 7z = -10. \end{cases}$$

Opgave 2. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 \end{cases} \qquad (a \neq b;\ b \neq c;\ c \neq a).$$

Opgave 3. Los op het stelsel

$$\begin{cases} -x + y + z + u = 1 \\ x - y + z + u = 2 \\ x + y - z + u = 3 \\ x + y + z - u = 4. \end{cases}$$

Thans gaan we beschouwen het algemenere geval van p lineaire vergelijking in q onbekenden.

$$(II) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Beschouw de matrix $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ - & - & - \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{matrix} \right\|$. Onderstel dat deze de rang k bezit en laten de onbekenden en vergelijkingen zo genummerd zijn, dat één der in A bevatte van nul verschillende determinanten van de orde k, juist de determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ is.

Allereerst beschouwen we het geval k = p. Door de vergelijkingen te schrijven in de gedaante

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1q}x_q \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pk}x_k = b_p - a_{p,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{pq}x_q, \end{cases}$$

blijkt uit het voorafgaande dat hieruit (met behulp van de regel van Cramer) de onbekenden $x_1, \ldots, x_k$ zijn op te lossen, d.w.z. uit te drukken in de grootheden a_{rs}, b_s en de willekeurig te kiezen grootheden $x_{k+1}, \ldots, x_q$. Op grond van het laatste zegt men wel dat het beschouwde stelsel ∞^{q-p} stellen oplossingen bezit.

Vervolgens beschouwen wij het geval, dat $k < p$ is. Hieronder valt dus tevens het in het begin van deze paragraaph niet behandelde geval a = 0; p = q = n.

Wij kunnen de determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ wederom van nul verschillend onderstellen.

Het stelsel $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kq}x_q = b_k \end{cases}$

is dan op grond van het bovenstaande oplosbaar en bezit zelfs ∞^{q-k} stellen oplossingen. Het is de vraag of zo'n gevonden oplossing ook voldoet aan elk der overige p - k vergelijkingen.

Beschouw daartoe de determinant $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1\ell} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k\ell} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & a_{m\ell} \end{vmatrix}$,

waarin m één der getallen k + 1, ... , p en ℓ één der getallen k + 1,...,q is. Daar elk dezer determinanten de orde k + 1 bezit en de matrix $\|a_{rs}\|$ de rang k bezit, is elk dezer determinanten nul. Duidt men de minoren der elementen $a_{1\ell}, \ldots, a_{m\ell}$ in deze determinant weer aan door

$A_{1\ell}, \ldots, A_{m\ell}$, dan heeft men

$$\sum a_{rs} A_{r\ell} = \begin{cases} 0 \text{ voor } s \neq \ell \\ D = 0 \text{ voor } s = \ell \end{cases}$$

zodat het linker lid van de vergelijking

$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mq} x_q = b_m$$

wegens $A_{m\ell} \neq 0$ een lineair compositum is van de linkerleden der eerste k vergelijkingen.

Hieruit volgt dat een gevonden oplossing der eerste k vergelijkingen dan en slechts dan ook aan de m^e ($m = k + 1, \ldots, p$) vergelijking voldoet, als het rechterlid b_m dier vergelijking eenzelfde lineair compositum is van de rechterleden $b_1, \ldots, b_k$ dier eerste k vergelijkingen, dus als

$$\sum b_r A_{r\ell} = 0, \text{ dus } R_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & b_k \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & b_m \end{vmatrix} = 0$$

Wij zien dus dat het gegeven stelsel ∞^{q-k} oplossingen bezit, als elk der determinanten $R_{k+1}, \ldots, R_p$ gelijk is aan nul en geen oplossing bezit, zodra één dier determinanten van nul verschilt. In het eerste geval noemt men de beschouwde vergelijkingen afhankelijk, in het tweede geval strijdig.

Wij vatten de gevonden resultaten samen.

Bij het stelsel (II) van p lineaire vergelijkingen in q onbekenden, waarin de rang der coëfficiënten matrix gelijk is aan k, heeft men de volgende gevallen:

1^o $k = p$; $q = k$ Er is één stel oplossingen.

2^o $k = p$; $q > k$ Er zijn ∞^{q-k} stellen oplossingen.

3^o $k < p$; $q = k$; $R_{k+1} = \ldots = R_p = 0$. Er is één stel oplossingen.

4^o $k < p$; $q > k$; $R_{k+1} = \ldots = R_p = 0$. Er zijn ∞^{q-k} stellen oplossingen.

5^o $k < p$; $q \geq k$; tenminste één der uitdrukkingen $R_{k+1}, \ldots, R_p$ verschilt van nul. Er zijn geen oplossingen.

Wij kunnen de gevonden resultaten nog iets anders formuleren door naast de coefficienten matrix A ook te beschouwen de

$$\text{matrix } B = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & b_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & b_p \end{Vmatrix}.$$

In geval 1^o is de rang van A en B elk gelijk aan k.
In geval 2^o is dat eveneens het geval.
In geval 5^o is de rang van A gelijk aan k en die van B gelijk aan k + 1.
Wij laten zien, dat in de gevallen 3^o en 4^o de rangen van A en B gelijk zijn. Was dit n.l. niet zo, dan was de rang van B gelijk aan k + 1, dus er bestond een determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & \cdots & a_{r_1 s_k} & b_{r_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r_{k+1} s_1} & \cdots & a_{r_{k+1} s_k} & b_{r_{k+1}} \end{vmatrix}$$

van de orde k+1, die van nul verschilde, d.w.z. op grond van een ontwikkeling naar de elementen der laatste kolom, waren niet alle deelterminanten hiervan, waarin de eerste k kolommen optreden, gelijk aan nul. Laat nu de onbekenden en vergelijkingen zo genummerd zijn, dat die deelterminant juist de determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ is.

Daar $D \neq 0$ is, verkeert dan ons stelsel in geval 5^o en heeft dus geen oplossing, in strijd met de onderstelling, dat wij met geval 3^o of 4^o te maken hebben, en het stelsel wel een oplossing bezit.

Wij zien dus, dat het stelsel (II) dan en slechts dan tenminste één oplossing bezit, als de rangen der matrices A en B gelijk zijn. Dit resultaat is afkomstig van den mathematicus Capelli.

Hecht men voorts aan het symbool ∞^{q-k} voor het geval $q = k$ de waarde 1, dan kunnen de gevallen 1^o en 2^o en eveneens de gevallen 3^o en 4^o samen worden genomen.

Opgave 4. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ \quad y + 2az = 3a^2 \end{cases}$$

Opgave 5. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z - u = 1 \\ x + y - z + u = 2 \\ x - y + z + u = 3 \\ ax + y + z + u = a^2 - a \end{cases}$$

Opgave 6. Als aan de vergelijking

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_q x_q = b$$

voldoen de beide stellen oplossingen $x_1 = c_1, \ldots x_q = c_q$; $x_1 = d_1, \ldots, x_q = d_q$, dan voldoet hieraan ook iedere lineaire combinatie van de gedaante $x_1 = \frac{\lambda c_1 + \mu d_1}{\lambda + \mu}, \cdots, x_q = \frac{\lambda c_q + \mu d_q}{\lambda + \mu}$

Naast de inhomogene stelsel gaan wij thans het homogene stelsel ver-

gelijkingen

$$(III)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

beschouwen. Hierbij zijn de rangen der matrices A en B gelijk, zodat er steeds een oplossing bestaat. Men is echter gewoon slechts dan een stel $(x_1, \ldots, x_q)$ een oplossing van het homogene stelsel III te noemen, als niet alle $x_1, \ldots, x_q$ gelijk zijn aan nul. Het is n.l. direct duidelijk dat aan (III) onder alle omstandigheden het stel oplossingen $x_1 = \ldots = x_q = 0$ voldoet. Verder merken we op, dat als aan (III) een oplossing $(x_1, \ldots, x_q)$ voldoet, aan (III) eveneens de oplossing $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_q)$ voldoet. Men is echter gewoon de oplossingen $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_q)$ voor verschillende waarden van $(\neq 0)$ als dezelfde te rekenen. Zo zijn dus de stellen $x = 2;\ y = 3$ en $x = 4;\ y = 6$ een zelfde oplossing van de vergelijking $3x - 2y = 0$. Wij verstaan dus onder een oplossing van het stelsel (III) een stel getallen $(x_1, \ldots, x_q)$, niet allen gelijk aan nul, of alle daarmede evenredige stellen. Bij homogene stelsels vergelijkingen komt het dus slechts op de verhoudingen der onbekenden aan.

Evenals bij het stelsel (II) voeren we weer de rang k van de coëfficiëntenmatrix in.

Beschouw eerst het geval $p > k;\ q > k$.

Dan is, als wij de nummering der onbekenden en vergelijkingen zo kiezen, dat $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$ is, de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1\ell} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k\ell} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & a_{m\ell} \end{vmatrix} \qquad (m = k+1, \ldots, p\ ;\ \ell = k+1, \ldots, q),$$

die van de orde k + 1 is, gelijk aan nul dus als wij de minoren hierin weer op de gebruikelijke wijze aangeven

$$\sum a_{rs} A_{r\ell} = 0, \text{ zowel voor } s = \ell \text{ als voor } s \neq \ell.$$

Dit houdt in wegens $A_{m\ell} \neq 0$, dat de m^e vergelijking van het stelsel (III) een lineair compositum is van de eerste k, zodat ieder stel oplossingen van de eerste k vergelijkingen tevens voldoet aan de m^e vergelijking $(m = k+1, \ldots, p)$. Hiermede is het geval $p > k;\ q > k$ teruggebracht op het geval $p = k;\ q > k$.

Het is verder duidelijk dat men bij het oplossen der eerste k vergelijkingen de getallen $x_{k+1}, \ldots, x_q$ willekeurig kan kiezen (echter niet allen gelijk aan nul) en dan, zoals in het voorafgaande is aangegeven, uit

die vergelijkingen de onbekenden x_1 , ... , x_k kan oplossen, d.w.z. lineair uitdrukken in de grootheden x_{k+1}, ... , x_q. Men vindt dan niet ∞^{q-k}, maar slechts ∞^{q-k-1} stellen oplossingen daar elk stel evenredig met een vast stel, tot eenzelfde oplossing aanleiding geeft.

Is q = k+1 dan vindt men juist één oplossing, die bepaald wordt door

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = - a_{1,k+1}x_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k = - a_{k,k+1}x_{k+1}. \end{cases}$$

$$\text{dus } x_1 = - x_{k+1} \begin{vmatrix} a_{1,k+1} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k,k+1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \text{ , enz.}$$

Stelt men

$$x_{k+1} = (-)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

(wat mag want wij mogen alle oplossingen x_1, ... , x_q tegelijkertijd met een constante, die van nul verschilt, vermenigvuldigen)

dan vindt men

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k2} & \cdots & a_{k,k+1} \end{vmatrix}; \quad x_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & a_{k3} & \cdots & a_{k,k+1} \end{vmatrix}; \dots ;$$

$$x_{k+1} = (-)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

De onbekenden zijn dus gelijk aan of evenredig met determinanten van de orde k, die men uit de matrix

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k+1} \end{Vmatrix}$$

verkrijgt, door daarin achtereenvolgens een kolom weg te laten en de zo verkregen determinanten op de juiste wijze van een + of - teken te voorzien. Men schrijft in dit geval wel kortweg

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_{k+1} \propto \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k+1} \end{Vmatrix}$$

(Het teken $\propto$ uit te spreken als "evenredig met de minoren van").

Bvb. het stelsel $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$ heeft de oplossing

$$x:y:z \propto \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4:8:-4 = +1:2:1.$$

Het geval $p \geq k$; $q = k$ kan direct worden behandeld. Immers na geschikte nummering der onbekenden en vergelijkingen heeft men

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pk}x_k = 0. \end{cases}$$

Beschouw het stelsel der eerste k vergelijkingen van dit stelsel. Dit is een stelsel van k vergelijkingen met k onbekenden en rang der matrix = k, welk stelsel één en slechts één oplossing bezit, die men vindt met behulp van de regel van Cramer. Men ziet direct in, dat wegens het nul zijn van alle rechterleden, elk der onbekenden nul is, zodat de gevonden oplossing niet als oplossing van het homogene stelsel wordt aangemerkt.

Samenvattend zien wij dus dat p homogene lineaire vergelijkingen in q onbekenden, waarbij de rang der coëfficiëntenmatrix gelijk is aan k,

geen oplossing bezit als $k = q$,

één oplossing bezit als $k = q - 1$.

∞^{q-k-1} oplossing bezit als $k < q - 1$.

Opgave 7. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z - u = 0. \\ x + y - z + u = 0. \\ x - y + z + u = 0. \end{cases}$$

Opgave 8. Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$$

Opgave 9. Los op het stelsel

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \ldots + 2^{n-1}x_n = 0.$$

$$x_1 + 3x_3 + 9x_3 + \ldots + 3^{n-1}x_n = 0.$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_1 + (n-1)x_2 + (n-1)^2x_3 + \ldots + (n-1)^{n-1}x_n = 0.$$

Wij zien uit het voorgaande dat als het stelsel

$$(IV) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

een oplossing bezit, de rang der matrix $\|a_{rs}\|$ kleiner is dan n, dus is de determinant $|a_{rs}| = 0$, zodat het stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

waarin niet alle b_r nul zijn, dan geen oplossing bezit. Beschouw verder het geval dat een quadratische matrix $\|a_{rs}\|$ van de n^e orde de rang $n - 1$ heeft. Dus de determinant $a_{rs} = 0$. Het stelsel (IV) heeft dan juist één oplossing.

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{11} : A_{12} : \ldots : A_{1n}.$$

Deze oplossing vindt men ook door de minoren van een andere rij te nemen, dan vindt men

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{r1} : A_{r2} : \ldots : A_{rn}.$$

Hiermede is de vroeger afgeleide eigenschap teruggevonden die zegt, dat als een determinant $a_{rs} = 0$ is, elk viertal minoren $A_{rs}, A_{rt}, A_{ps}, A_{pt}$ een evenredigheid vormt $A_{rs} : A_{rt} = A_{ps} : A_{pt}$

Wij bespreken tenslotte nog het begrip eliminatie.

Wenst men uit de betrekkingen (IV) de grootheden $x_1, \ldots, x_n$, die niet allen nul worden ondersteld, te elimineren dan houdt dit in, dat men een relatie zoekt, die dan en slechts dan geldt, als er een stel getallen $x_1, \ldots, x_n$ (niet allen nul) bestaat, dat aan de betrekkingen (IV) voldoet. In de gezochte relatie treden slechts de grootheden a_{rs} op, maar de grootheden $x_1, \ldots, x_n$ niet meer: die zijn geëlimineerd.

Het is duidelijk wat in het beschouwde geval het eliminatie resultaat is. Immers, als (IV) een oplossing bezit, is de rang der matrix a_{rs} kleiner dan n, dus is de determinant $|a_{rs}| = 0$; is omgekeerd $|a_{rs}| = 0$, dan leert het hierboven behandelde ons, dat er een stel getallen $x_1, \ldots, x_n$ (niet allen nul) bestaat, dat aan (IV) voldoet. Het eliminatie resultaat is derhalve $|a_{rs}| = 0$. Bij een stelsel (IV) heeft men dus hetzij $x_1 = \ldots = x_n = 0$, hetzij $|a_{rs}| = 0$.

Het is duidelijk dat uit het stelsel (III) in het geval $p < q$ geen eliminatie resultaat te verkrijgen is. Immers, hoe men de coëfficiënten a_{rs} ook kiest, steeds bestaat een oplossing van (III). Het geval $p = q$ is zojuist behandeld en uit het gevondene blijkt dat het geval $p > q$ leidt tot het nul zijn van elke determinant van de orde q, die in de coëfficiënten matrix $\|a_{rs}\|$ bevat is.

Beschouw een stelsel lineaire vormen

$$\begin{cases} L_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_p = a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q. \end{cases}$$

Men noemt deze p vormen lineair afhankelijk als er getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, niet allen nul, te vinden zijn, zodanig dat identiek in de grootheden

$x_1, \ldots, x_n$ geldt

$$\lambda_1 L_1 + \ldots + \lambda_p L_p = 0.$$

Schrijft men deze relatie volledig uit, dan ziet men dat de lineaire afhankelijkheid der p gegeven vormen aequivalent is met het bestaan van een oplossing van het homogene stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{p1}\lambda_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1q}\lambda_1 + \ldots + a_{pq}\lambda_p = 0 \end{cases}$$

Is k de rang der coëfficiënten matrix $\|a_{rs}\|$, dan zien wij dat voor $k = p$ het stelsel geen oplossing bezit en voor $k < p$ wel. Zijn niet alle determinanten van de orde p bevat in de matrix $\|a_{rs}\|$, gelijk aan nul, dan is het stelsel lineaire vormen onafhankelijk.

Is $p = q$, dan ziet men dat de vormen afhankelijk zijn als de determinant van de p^e orde $|a_{rs}| = 0$ is, dus juist in het geval, dat het homogen stelsel $L_1 = 0; \ldots; L_p = 0$ oplosbaar is.

Is $p < q$, en zijn de vormen $L_1, \ldots, L_p$ afhankelijk, dan heeft men $\lambda_1 L_1 + \ldots + \lambda_p L_p = 0$, dus als men $q - p$ willekeurige vormen $L_{p+1}, \ldots, L_q$ toevoegt, ziet men dat er een stel getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ bestaat (niet allen nul), waarvoor geldt

$$\lambda_1 L_1 + \ldots + \lambda_q L_q = 0.$$

Immers neem $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_q = 0$; daar niet alle getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ gelijk zijn aan nul, is dat ook niet met alle getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ het geval.

Zijn de vormen $L_1, \ldots, L_p$ onafhankelijk, dan is $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ & & \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0,$

dus als men neemt $L_{p+1} = x_{p+1}; \ldots; L_q = x_q$, heeft de coëfficiënten determinant van de vormen $L_1, \ldots, L_q$ dezelfde waarde als die der vormen $L_1, \ldots L_p$ en verschilt dus van nul.

De vormen $L_1, \ldots, L_p$ zijn dus voor $q > p$ dan en slechts dan onafhankelijk, als het mogelijk is $q - p$ vormen $L_{p+1}, \ldots L_q$ toe te voegen aan het stelsel, zodanig dat ook het stelsel vormen $L_1, \ldots, L_q$ onafhankelijk is.

§ 10.

De rechte lijn.

Thans geven we nogmaals de theorie van de rechte lijn, waarbij nu gebruik gemaakt wordt van de theorie der determinanten en matrices.

Wij weten uit het voorafgaande, dat de vergelijking

$$ax + by + c = 0$$

een rechte lijn voorstelt, tenzij a en b beide nul zijn. In het geval $b \neq 0$ is, is de vergelijking te brengen in de gedaante

$y = mx + n$.

Zij gevraagd de rechten in vergelijking te brengen, die door een gegeven punt (x_1,y_1) gaan. Substitutie levert dan $y_1 = mx_1 + n$, dus na aftrekken $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Wenst men de rechte te bepalen, die door twee gegeven punten (x_1,y_1) en (x_2,y_2) gaat dan heeft de gezochte lijn in ieder geval de gedaante $y - y_1 = m(x - x_1)$ dus na substitutie van het tweede punt $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, waaruit na eliminatie van m als gezochte vergelijking gevonden wordt

(1) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1), \text{ mits } x_1 \neq x_2.$$

Is $x_1 = x_2$, dan luidt die vergelijking $x = x_1$.

Men kan het resultaat (1) ook anders schrijven, n.l.

$$(y-y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0,$$

dus $$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

dus na randen $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x - x_1 & y - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ dus } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ook in het geval $x_1 = x_2$ levert de laatste uitdrukking ons de gezochte vergelijking, want deze luidt dan

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y & 1 \\ 0 & y_1 & 1 \\ 0 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ dus } x = x_1 \text{ wegens } y_1 \neq y_2.$$

Er is nog een geheel andere wijze om tot de gezochte vergelijking te geraken. Zij de gezochte vergelijking

$ax + by + c = 0$. Dan heeft men na substitutie van het eerste punt $ax_1 + by_1 + c = 0$, en nasubstitutie van het tweede punt $ax_2 + by_2 + c = 0$. Willen deze 3 homogene vergelijkingen in de grootheden a,b,c, een van nul verschillende oplossing bezitten dan moet de coëfficiëntendeterminant, in casu $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$, gelijk zijn aan nul.

De vergelijking der rechte, die van de x- resp. y-as een stuk afsnijdt ter lengte a resp b, luidt dus

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ dus } bx + ay = ab \text{ of } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Wij geven thans nog een voorstelling voor de vergelijking van een rechte, af te leiden uit het laatste resultaat. Laat de loodlijn uit

O op de rechte een hoek α met de positieve x - as maken en een lengte d hebben dan heeft men $\frac{d}{a} = \cos\alpha$; $\frac{d}{b} = \sin\alpha$, dus de gezochte vergelijking luidt $x\cos\alpha + y\sin\alpha = d$ (normaalvergelijking van Hesse).

Een rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ is steeds in de normaal vorm te brengen. Immers men dele beide leden door e, waarin $e = \sqrt{a^2+b^2}$ als $c < 0$ en $e = -\sqrt{a^2+b^2}$ als $c > 0$. Stel $\frac{a}{e} = \cos\alpha$; dan is $\frac{b}{e} \sin\alpha$; stel $-\frac{c}{e} = d$. Dan is $d > 0$ en men heeft juist de gedaante

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = d$$ gekregen.

De normaalvergelijking van Hesse is van belang bij het bepalen van de afstand van een punt tot een rechte. Zij het punt $P(x_0,y_0)$ en de rechte ℓ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = d$. Om de afstand van P tot ℓ te bepalen trekken we door P een rechte $m \parallel \ell$, die dezelfde richting als ℓ heeft en dus een vergelijking

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = f$$

bezit. Daar P op m ligt, heeft men na substitutie

$$x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha = f.$$

De afstand van P en ℓ is gelijk aan de afstand der rechten ℓ en m, dus gelijk aan het verschil van hun afstanden d en f tot O. Derhalve is de afstand van P tot ℓ gelijk aan

$$|f - d| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - d|.$$

Laat men de absoluutstrepen in het rechterlid weg, dan leert het teken van dat lid ons aan welke zijde van ℓ het punt P ligt. Is n.l. dat lid negatief, dan ligt P aan dezelfde zijde van ℓ als O; is het positief, dan aan de tegengestelde en is het nul, dan is, zoals trouwens al bekend is, die afstand nul, d.w.z. P ligt dan op ℓ.

Thans beschouwen we de figuur van twee rechten ℓ_1 en ℓ_2 met vergelijkingen resp. $a_ix + b_iy + c_i = 0$ $(i = 1,2)$. Onderstel $b_1b_2 \neq 0$, dan kunnen we de rechte vergelijkingen schrijven in de gedaante $y = m_ix + n_i$ $(i = 1,2)$.

Allereerst vragen wij naar de hoek, die deze met elkaar maken. Deze hoek α is gelijk aan $\alpha_2 - \alpha_1$, als α_1, α_2 de hoeken zijn, die ℓ_1 resp ℓ_2 met de positieve x-as maken. Men heeft

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = m_1;\ \operatorname{tg}\alpha_2 = m_2;\ \text{dus } \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}.$$

Bij evenwijdige stand is $\alpha = 0$, dus $m_1 = m_2$, zoals ook direct duidelijk is. Bij loodrechte stand is $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dus $m_1m_2 + 1 = 0$.

Opgave 1. Bepaal de afstand van het punt P(1,2) tot de rechte ℓ $3x + 4y = 5$. Bepaal ook de vergelijking der loodlijn m uit P op ℓ. Bepaal het snijpunt S van m en ℓ en laat zien dat de afstand PS gelijk is aan de al eerder gevonden afstand. Thans gaan wij in het algemeen de onderlinge ligging van twee rechten ℓ_1, ℓ_2 met vergelijkingen

$$a_ix + b_iy + c_i = 0 \quad (i = 1,2)$$

na. Wij beschouwen om hun snijpunten op te sporen de matrices

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \quad \text{en} \quad B = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|.$$

1^o Heeft A de rang 2, dan B ook en dan vindt men 1 snijpunt.

In dit geval is $\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right| \neq 0.$

2^o Heeft A de rang 1

(dus $\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right| = 0$), dan kan B de rang 2 bezitten. In dat geval hebben de rechten geen snijpunt. Dit treedt dus op als

$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \neq c_1 : c_2$.

3^o Hebben A en B beide rang één, dan heeft men $\infty^{2-1} = \infty^1$ snijpunten. In dit geval is $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$, zodat dan de rechten samenvallen.

Wij zien dus dat behalve in geval 2^o, twee rechten steeds een snijpunt hebben. Het is duidelijk dat wij ons van dit uitzonderingsgeval wensen te ontdoen. Hiertoe zullen wij nieuwe punten aan het complexe Euclidische vlak moeten toevoegen, die als snijpunt kunnen dienen van twee rechten, die in geval 2^o verkeren (dat zijn, zoals men gemakkelijk inziet, evenwijdige rechten). Reeds eerder hebben wij ons gebied uitgebreid, n.l. toen wij er punten mèt niet reële coordinaten aan toevoegden. De gang van zaken is dus: Uit het z.g.n reële Euclidische platte vlak ontstaat na toevoeging der niet reële punten het complexe Euclidische vlak. Voegt men aan dit laatste nog de hieronder te beschouwen oneigenlijke punten toe, dan ontstaat het complexe projectieve vlak. Had men aan het reële Euclidische vlak eerst de oneigenlijke toegevoegd, dan had men het reële projectieve vlak gekregen, dat na toevoeging van complexe punten eveneens het complexe projectieve vlak had opgeleverd.

Het is thans onze taak om, uitgaande van het complexe Euclidische vlak, de gewenste uitbreiding hiervan tot stand te brengen.

In plaats van getallenparen (x,y) te beschouwen waardoor in het complexe Euclidische vlak een punt is vastgelegd voeren we getallen tripels (x,y,z) in. Wij eisen, dat x,y,z, niet allen gelijk zijn aan nul. We noemen twee tripels (x,y,z) en (x',y',z') gelijk als $x : x' = y : y' = z : z'$, dus als hun elementen evenredig zijn. Verder identificeren we met een punt (x,y) in het complexe Euclidische vlak het tripel (x,y,1) of alle er aan gelijke tripels. Bij een punt (x,y) behoren dus alle tripels van de gedaante (tx,ty,t), waarin $t \neq 0$. De verzameling der punten van het Euclidische platte vlak (derhalve dit vlak zelve) behoort dus tot (is een deelverzameling van) de verzameling der hierboven bechouwde tripels. Echter behoort omgekeerd niet bij ieder tripel

(x,y,z) een punt in het complexe Euclidische vlak. Is $z \neq 0$, dan correspondeert dit tripel, dat men ook kan schrijven in de gedaante $(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1)$ met het punt $(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$, maar is $z = 0$, dan bestaat er geen punt (p,q)dat met het tripel (x,y,0) correspondeert, want men heeft dan p.x=q:y=1:0, dus x=y=0, maar in het gegeven tripel (x,y,0) zijn volgens afspraak niet alle elementen nul. Men is gewoon de getallen x,y,z, waaruit een tripel (x,y,z) is opgebouwd, de homogene coordinaten van een punt te noemen in het projectieve platte vlak.

Evenmin als het mogelijk is om in het reële Euclidische vlak de complexe punten aan te geven, kan men erin de oneigenlijke punten aangeven.

Beschouw echter de rechte y = 2x en bekijk de hierop gelegen rij punten (2,1); (20,10) ; (200,100); (2000,1000);..., die wij in homogene coordinaten kunnen aangeven met (2,1,1); (2,1,0.1); (2,1,0.01); (2,1,0.001);... Men ziet dat de derde coördinaat nadert tot nul, hetgeen reden is om te zeggen dat de bijbehorende punten naderen tot het oneigenlijke punt (2,1,0). Men ziet dus, hoe men dit zou moeten"inpassen" op onze rechte: Ieder op de rechte gelegen punt heeft de eigenschap, dat zijn afstand tot 0 kleiner is dan die van het oneigenlijke punt tot 0. Wij merken op dat wij eveneens tot dit oneigenlijke punt naderen door de rij punten (-2,-1); (-20, -10); (-200,-100);... te beschouwen, welke in homogene coördinaten de gedaante (+2, +1, -0.1); (2,1, -0.01); ... bezitten. Dat de rechte y = 2x maar één oneigenlijk punt bezit, zullen wij zo meteen in een ander verband inzien.

Eerst merken wij op, dat alle oneigenlijke punten gekenmerkt worden door z=0, dus door een vergelijking van de eerste graad, die homogeen is in de veranderlijken. Dit is de reden dat men zegt dat de oneigenlijke punten op één rechte, de oneigenlijke rechte genaamd, gelegen zijn. Ook is n.l. de vergelijking van een willekeurige rechte: ax+by+c=0, in homogene coördinaten geschreven, van de eerste graad want dan diene men, zoals boven is aangetoond, x en y resp. te vervangen door $\frac{x}{z}$ en $\frac{y}{z}$, waarna de vergelijking na vermenigvuldiging met z de homogene gedaante van de eerste graad ax+by+cz=0 aanneemt. Door die vermenigvuldiging is ingevoerd z=0, dus juist het op de rechte gelegen oneigenlijke punt, dat in het Euclidische vlak uiteraard nog niet tot de rechte behoorde.

Wij kunnen nu inzien dat een willekeurige rechte ax+by+c=0 (a en b niet beide nul) slechts één oneigenlijk punt bezit. Immers in homogene coördinaten luidt de vergelijking der rechte ax+by+cz=0 en om daarvan oneigenlijke punten te vinden moet men het stelsel

$$\begin{cases} ax+by+cz=0. \\ z=0. \end{cases}$$

oplossen.

De rang der matrix $\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ van het stelsel is, daar a en b niet beide nul zijn, gelijk aan 2, dus het stelsel heeft een oplossing.

Vanst men in het algemeen het snijpunt te bepalen van twee willekeurige rechten

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

dan merke men op, dat men steeds één punt vindt, zodra de coëfficiënten matrix de rang 2 heeft. Is die rang echter 1, dan vallen, zoals men gemakkelijk inziet, die rechten samen. Wij merken nog even op, dat men de gewoonte heeft alle tripels evenredig met een bepaald tripel (x,y,z), identiek te verklaren bij het beschouwen van oplossingen van homogene vergelijkingen en verder het tripel (0,0,0) niet toe te laten. Echter is hetzelfde het geval met het aangeven van een punt in homogene coördinaten, zodat inderdaad met één oplossing van het beschouwde homogene stelsel juist één punt correspondeert. Ook in het geval 2°, het uitgangspunt hierboven, hebben de twee beschouwde rechten één snijpunt. Dat punt moet dus een nieuw ingevoerd punt zijn. Inderdaad heeft men in dat geval wegens $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \neq c_1 : c_2$ voor het snijpunt

$$x : y : z \propto \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1) : (c_1a_2 - c_2a_1) : 0.$$

Twee evenwijdige rechten hebben derhalve een oneigenlijk snijpunt.

Wij kunnen dus voortaan met homogene coördinaten, dus in het complexe projectieve vlak, werken en zien dan dat twee verschillende rechten steeds een punt gemeen hebben. Het reële Euclidische vlak is voorts een deelverzameling van het complexe projectievlak.

Ook in het projectieve platte vlak is de bewering juist, dat door twee verschillende punten één rechte bepaald wordt. Immers door de punten $P_1(x_1,y_1,z_1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2)$ gaat de rechte ax+by+cz=0 als geldt

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = 0. \end{cases}$$

Uit de laatste drie relaties volgt na eliminatie der homogeen erin optredende onbekende coëfficiënten a,b en c

de relatie $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$

Men merke hieraan op, dat voor eigenlijke punten (waarbij z, z_1 en z_2 gelijk aan 1 te maken zijn) deze relatie overgaat in een al eerder gevondene. Ook kan men aan deze vergelijking (die van de eerste graad is

in x,y en z, dus een rechte voorstelt) direct zien, dat de erdoor bepaalde rechte door het punt P_1 gaat, want vervangt men erin de onbekenden (x,y,z) door de coördinaten van het punt P_1, dan krijgt de beschouwde determinant twee gelijke rijen en is dus gelijk aan nul. Evenzo ziet men dat die rechte door het punt $P_2(x_2,y_2,z_2)$ gaat.

Aan de determinant is nog veel meer te zien. Daar de waarde ervan nul is, is de eerste rij een lineaire combinatie der 2^e en 3^e rij, dus

(2) $x = \lambda x_1 + \mu x_2$; $y = \lambda y_1 + \mu y_2$; $z = \lambda z_1 + \mu z_2$.

Men kan deze relaties, die ons de coördinaten van een willekeurig punt der verbindingslijn der punten (x_1,y_1,z_1) en (x_2,y_2,z_2) leveren, ook uit het al eerder gevondene afleiden voor eigenlijke punten, want men had toen

(3) $x = \dfrac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu}$; $y = \dfrac{\lambda y_1 + \mu y_2}{\lambda + \mu}$.

Men merke op dat hier sprake is van de punten (x,y), (x_1,y_1) en (x_2, y_2), dus in homogene coordinaten (x,y,1), $(x_1y_1,1)$ en $(x_2,y_2,1)$. Voor de noemers $\lambda + \mu$ schrijve men $\lambda z_1 + \mu z_2$ en van het punt (x,y) = = (x,y,1) mag men dan alle coördinaten vermenigvuldigen met $\lambda + \mu =$ $\lambda z_1 + \mu z_2$, waarna juist de voorstelling (2) is teruggevonden. Ook in het geval één der punten P_1 en P_2 oneigenlijk is, geldt (2) natuurlijk. In het geval men van eigenlijke punten (x_1,y_1) en (x_2,y_2) uitgaat, vindt men, als $\lambda + \mu = 0$ is (juist het geval dat wij vroeger moesten buitensluiten), een oneigenlijk punt. Hiermede is dus alweer een uitzonderings geval voor de geldigheid van een formule opgeheven door het invoeren van homogene coördinaten.

Men schrijft de relatie (2) ook wel in de gedaante $P = \lambda P_1 + \mu P_2$, waarbij het dan de bedoeling is, dat deze betrekking voor elk der coördinaten der beschouwde punten geldt. In het Euclidische vlak hing de verhouding $\lambda : \mu$ samen met de deelverhouding $PP_1 : PP_2$, waarin het punt P het lijnstuk P_1P_2 verdeelde. Het begrip deelverhouding heeft, zoals later zal blijken, in het projectieve platte vlak geen zin (evenmin als b.v. de begrippen afstand en hoek). Een ander begrip dat in het projectieve vlak wel zin heeft en dat wij thans alvast willen noemen, is het begrip dubbelverhouding. Beschouw op een rechte vier punten P P_1 P_2 en P_3. Zij $P = \lambda P_1 + \mu P_2$; $P_3 = \rho P_1 + \sigma P_2$. Dan definieert men het quotiënt $\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\rho}{\sigma}$ als de dubbelverhouding der vier punten en men schrijft kortweg $(P_1P_2P_3P) = \frac{\lambda}{\mu} : \frac{\rho}{\sigma}$. Later gaan wij hierop verder in.

Evenals wij thans aan de punten drie homogene coördinaten hebben gegeven, kunnen wij ook aan de rechten drie homogene coördinaten geven. Immers een rechte $ax + by + cz = 0$ is bepaald door hare coëfficiënten, waarbij men weder opmerkt, dat men indien deze coëfficiënten allen worden vermenigvuldigd met eenzelfde van nul verschillend getal, dezelfde rechte terugvindt. De getallen a,b,c nu kunnen dus dienen als homogene

gene coördinaten van een rechte, al hebben ze, zoals blijken zal, geheel andere eigenschappen dan de homogene coördinaten van een punt. Men is veelal gewoon de homogene coördinaten van een punt aan te duiden met (x,y,z) of (x_1,x_2,x_3) of (x_0,x_1,x_2) waarbij men in het tweede geval voor het getal z de aanduiding x_3 gebruikt. Bij de 3e schrijfwijze is het getal z, thans geschreven als x_0, vooropgezet. De coördinaten van een rechte geeft men veelal aan met (u,v,w), (u_1,u_2,u_3) of (u_0,u_1,u_2). Wij zullen ons voorlopig, om dubbelzinnigheid te voorkomen, beperken tot de eerste en tweede schrijfwijze.

Opgave 2. Bepaal het snijpunt van de rechte door de punten (2,3,4) en (1,0,1) met de rechte (2,3,4).

Opgave 3. Bereken de hoek die de rechte door de punten (2,-1) en (1,2) maakt met de rechte door het punt (4,2), die loodrecht staat op de rechte $6x + 3y = 8$.

Opgave 4. Bepaal de vergelijking der bissectrices van de rechten $3x + 4y = 7$ en $12x + 5y = 10$.

Opgave 5. Beschouw een $\triangle ABC$ met hoekpunten (-7,0), (7,0) en (2,12). Bepaal de coördinaten van het hoogtepunt, het zwaartepunt, het middelpunt van de omgeschreven cirkel en het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

Opgave 6. Bepaal de afstand van het snijpunt der rechten $3x+2y=7$ en $x-y=6$ tot de loodlijn uit het punt (1,7) op de rechte $8x+15y=16$.

Opgave 7. Bepaal de vergelijking der rechte door de punten $(x_0,y_0,1)$ en $(1,m,0)$. Men merke op, dat het resultaat overeenstemt met hetgeen men had gevonden bij het bepalen van de rechte door (x_0,y_0) met richtings-coëfficiënt m. Het geven van een richtingscoëfficiënt m is blijkbaar aequivalent met het eisen dat een rechte door het oneigenlijke punt (1,m,0) gaat. (Reken dit na). De stelling dat door een punt P één rechte gaat, die evenwijdig loopt met een gegeven rechte (dus de richting dier rechte heeft) is in het projectieve vlak niets anders dan een byzonder geval van de bewering, dat door twee verschillende punten één en slechts één rechte gebracht kan worden.

Door het snijpunt der rechten ℓ_1 $(u_1x+v_1y+w_1z = 0)$ en ℓ_2 $(u_2x+v_2y+w_2z = 0)$ gaat ook iedere rechte van de gedaante $\lambda\ell_1+\mu\ell_2$, d.w.z. iedere rechte met coordinaten $(\lambda u_1+\mu u_2,\ \lambda v_1+\mu v_2,\ \lambda w_1+\mu w_2)$, want dit punt voldoet aan $u_1x+v_1y+w_1z = 0$ en aan $u_2x+v_2y+w_2z = 0$, dus ook aan

$$\lambda(u_1x+v_1y+w_1z) + \mu(u_2x+v_2y+w_2z) = 0.$$

Evenals een willekeurig punt P der verbindingsrechte van twee punten P_1 en P_2 de schrijfwijze $P = \lambda P_1+\mu P_2$ toelicht, is een willekeurige rechte ℓ door het snijpunt van twee rechten ℓ_1 en ℓ_2 te schrijven in de gedaante $\ell = \lambda\ell_1+\mu\ell_2$. Men kan nu ook aan 4 rechten ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 en ℓ, gaande door één punt, een dubbelverhouding toekennen, waarvoor men vindt

$(\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell) = \frac{\lambda}{\mu} : \frac{\rho}{\tau}$, als $\ell = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$; $\ell_3 = \rho \ell_1 + \sigma \ell_2$.

Zij gevraagd de rechte door het punt (a,b,c), die gaat door het snijpunt der rechten $u_1x+v_1y+w_1z = 0$ en $u_2x+v_2y+w_2z = 0$, te bepalen dan merken wij op dat deze van de gedaante

$$\lambda(u_1x+v_1y+w_1z) + \mu(u_2x+v_2y+w_2z) = 0$$

is en daar zij door het punt (a,b,c) moet gaan, dienen de getallen λ en μ te voldoen aan

$$\lambda(u_1a+v_1b+w_1c) + \mu(u_2a+v_2b+w_2c) = 0.$$

Eliminatie van λ en μ hieruit levert ons direct de gezochte vergelijking

$$\begin{vmatrix} u_1x+v_1y+w_1z & u_2x+v_2y+w_2z \\ u_1a+v_1b+w_1c & u_2a+v_2b+w_2c \end{vmatrix} = 0.$$

Een aantal der bovengevonden resultaten over punten en rechten hebben een merkwaardige overeenkomst, die men dualiteit noemt.

Een punt heeft drie homogene coördinaten (x,y,z), die men de homogene punt coördinaten noemt.	Een rechte heeft drie homogene coördinaten (u,v,w), die men homogene lijncoördinaten noemt.
Door twee verschillende punten gaat één rechte.	Op twee verschillende rechten ligt één punt.
Elk punt op de rechte door twee punten P_1 en P_2 bezit de gedaante $\lambda P_1 + \mu P_2$.	Elke rechte door het snijpunt van twee rechten ℓ_1 en ℓ_2 bezit de gedaante $\lambda \ell_1 + \mu \ell_2$. Elke rechte bezit een vergelijking van de eerste graad in puntcoördinaten.

Om bij de 4° bewering de corresponderende bewering links te kunnen bijschrijven gaan wij de betekenis na dier bewering rechts. Deze luidt: Elk punt op een rechte ℓ heeft puntcoördinaten, die voldoen aan een vergelijking van de eerste graad. Wat weten wij echter over alle rechten die door een gegeven punt P(a,b,c) gaan? Zij ux+vy+wz = 0 zo'n rechte. Dan voldoen de lijncoördinaten (u,v,w) dier rechte aan ua+vb+wc = 0 of au+bv+cw = 0, dus de lijncoördinaten van een willekeurige rechte door een punt P voldoen aan een vergelijking van de eerste graad, anders gezegd: Een willekeurig punt P bezit in lijncoördinaten een vergelijking van de eerste graad. Van de rechte 2x+3y+4z = 0 zijn de lijncoördinaten (2,3,4); zo blijkt ons thans het duale resultaat. Van het punt met puntcoördinaten (2,3,4) is de vergelijking in lijncoördinaten 2u+3v+4w = 0.

Opg. 8. Bewijs dat de vergelijking van een punt, gelegen op de rechte door de punten $a_1u+b_1v+c_1w = 0$ en $a_2u+b_2v+c_2w = 0$ de gedaante $\lambda(a_1u+b_1v+c_1w) + \mu(a_2u+b_2v+c_2w) = 0$ bezit.

Opg. 9. Bewijs dat de vergelijking van het snijpunt der rechten

(u_1,v_1,w_1) en (u_2,v_2,w_2) luidt $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0.$

Tot slot geven wij nog enkele bijzonderheden.
Men noemt vier punten (vier rechten) harmonisch, als hun dubbelverhouding gelijk is aan - 1.

Bijvoorbeeld: Zijn gegeven de eigenlijke punten $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$, dan is de dubbelverhouding $(P_1P_2M\Omega) = -1$, dus P_1,P_2,M en Ω vormen een harmonisch viertal, als men onder M verstaat het midden van het lijnstuk P_1P_2 en onder Ω het oneigenlijke punt der rechte P_1P_2.
Opg.10. Bewijs dit.
Def. Men noemt de rechten met richtingscoefficient i of - i isotroop.
Opg.11. Bewijs dat de volgende vier rechten door O een harmonisch viertal vormen: een rechte $y = mx$; de loodlijn erop $y = -\frac{1}{m}x$; de isotrope rechte $y = ix$ en de isotrope rechte $y = -ix$
Uit de laatste opgaven ziet men dat de uit de gewone meetkunde bekende begrippen als loodrecht en midden ook te definieren zijn met behulp van het begrip dubbelverhouding. Het is dan ook dit begrip dat in de projectieve meetkunde een fundamentele rol speelt.
Opg.12. Bepaal de vergelijking der rechte die het snijpunt van de rechten m_1 en m_2 verbindt met dat van de rechten m_3 en m_4. Heeft m_i de vergelijking

$$u_ix+v_iy+w_iz = 0 \qquad (i = 1,2,3,4),$$

herleid dan de gevonden vergelijking tot de gedaante

$$\begin{Vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} (vw)_{34} & x \\ (wu)_{34} & y \\ (uv)_{34} & z \end{Vmatrix} = 0.$$

Opg.13. Beschouw drie punten A(1,0,0), B(0,1,0) en C(0,0,1). Kies op AC een willekeurig punt P en op BC een willekeurig punt Q. Laat de verbindingsrechte van C en snijpunt van PB en AQ de rechte AB snijden in T. Zij verder S het snijpunt van PQ en AB. Bewijs dan, dat de punten A,B,T en U een harmonisch viertal vormen.
Opg.14. Op de rechthoekszijden AB en AC van een rechthoekige driehoek ABC beschrijft men buitenwaarts de vierkanten ABDE en ACFG. Bewijs, dat de verbindingslijnen CD en BF elkaar snijden in een punt, dat gelegen is op de hoogtelijn AH op de hypotenusa.
Opg.15. Gegeven zijn drie hiet door een punt gaande rechten m_1, m_2 en m_3. Bepaal de meetkundige plaats der punten, waarvan de afstanden tot twee dier rechten samen gelijk zijn aan de afstand tot de derde rechte.
Opg.15. Beschouw een vierhoek ABCD waarvan de overstaande zijden AB en CD elkaar snijden in S en de overstaande zijden BC en DA elkaar snijden in T. Bewijs, dat de middens van AC,BD en ST op één rechte liggen.

Opg. 17. Bewijs dat drie rechten (u_1,v_1,w_1), (u_2,v_2,w_2) en (u_3,v_3,w_3) dan en slechts dan door één punt gaan als

$$\begin{vmatrix} u_1 v_1 w_1 \\ u_2 v_2 w_2 \\ u_3 v_3 w_3 \end{vmatrix} = 0$$

is.

Opg. 18. Wij vonden dat een punt $P_3(x_3y_3z_3)$ dan en slechts dan op de rechte door $P_1(x_1,y_1,z_1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ligt, als

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

is.

Voor eigenlijke punten luidt deze relatie in niet-homogene coördinaten

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & 1 \\ x_2 y_2 & 1 \\ x_3 y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Het linkerlid van deze uitdrukking heeft ook een betekenis voor het geval dat P_1,P_2 en P_3 niet collineair zijn. Men bewijze nl. dat die determinant, afgezien van het teken gelijk is aan 2maal de oppervlakte van $\Delta P_1P_2P_3$. Dit bewijs is rechtstreeks te leveren of door deze oppervlakte te berekenen als $\frac{1}{2}\cdot P_1P_2 \cdot d$, waarin d de met de normaalvergelijking van Hesse te vinden afstand van P_3 tot de rechte P_1P_2 voorstelt.

§11. Krommen in het projectieve vlak.

Beschouw een algebraische kromme, dit is de verzameling der punten (x,y), waarvan de coördinaten voldoen aan een betrekking $f(x,y)=0$ en waarbij $f(x,y)$ een gehele rationale uitdrukking in x en y voorstelt. Het is duidelijk dat wij door x en y te vervangen door $\frac{x}{z}$ resp. $\frac{y}{z}$ na vermenigvuldiging met een geschikte macht van z een homogene vergelijking $\varphi(x,y,z)=0$ vinden, die van dezelfde graad in x,y en z is als $f(x,y)$ in x en y. Men heeft dan wegens de homogeniteit van φ

$$\varphi(x,y,z) = z^n \varphi(\tfrac{x}{z},\tfrac{y}{z},1) = z^n f(\tfrac{x}{z},\tfrac{y}{z}).$$

Wij zien tevens, dat voor $z=1$ gevonden wordt $\varphi(x,y,1)=f(x,y)$, zodat men door in $\varphi(x,y,z)$ de coördinaat z gelijk aan 1 te stellen, de functie $f(x,y)$ terugvindt.

Ieder eindig punt (x,y,z), dat ligt op de kromme $\varphi(x,y,z)=0$, ligt eveneens op de oorspronkelijke kromme. De nieuwe kromme bevat echter nog meer punten dan de oude, nl. die punten waarvoor $z=0$. Wenst men derhalve de oneigenlijke punten der nieuwe kromme te vinden, dan diene men deze te snijden met de oneigenlijke rechte $z=0$. Men heeft dus op te lossen het stelsel

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Nu is $\varphi(x,y,z)$ te schrijven in de gedaante $a_n+a_{n-1}z+\ldots+a_0z^n$, waarbij de grootheden a_ν wegens de homogeniteit van $\varphi(x,y,z)$ homogene veeltermen in x en y zijn van de graad ν ($\nu=1,..,n$). Wij kunnen dus in plaats van het bovenstaande stelsel volstaan met het oplossen van het stelsel

$$\begin{cases} a_n(x,y)=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Hierbij zien wij, dat de coördinaten (x,y,0) der oneigenlijke punten van de kromme $\varphi(x,y,z)=0$ bepaald worden door $a_n(x,y)=0$, dus door nulstellen van het hoogste graadsgedeelte in x en y van $\varphi(x,y,z)$ of door nulstellen van het hoogste graadsgedeelte van $f(x,y)$. Men zegt vaak kortweg, dat men door het bovenstaande de oneigenlijke punten der kromme $f(x,y)=0$ heeft bepaald.

Vb. De oneigenlijke punten der rechte $y=mx+n$ vindt men uit $y=mx$; $z=0$; dit is dus het punt (1,m,0).

Opg. 1. Bepaal de oneigenlijke punten van de

Kegelsnede $x^2-2xy+y^2+3x-2y=10$.

parabool $y^2=2px$

hyperbool $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

In het laatste voorbeeld vinden wij een kromme met complexe oneigenlijke punten. Dit doet zich veelal voor bij geheel in het eindige gelegen figuren.

Onder een asymptoot van een kromme verstaat men de raaklijn aan de kromme in één van haar oneigenlijke punten.

Zij gevraagd de asymptoten te bepalen van de kromme

$$x^2-4xy+3y^2+2x-8y-10=0,$$

dan bepale men eerst haar oneigenlijke punten, waarvoor men vindt (3,1,0) en (1,1,0). Wij trekken eerst een koorde der kromme door het ene oneigenlijke punt (3,1,0), d.i. een rechte met richtingscoefficient $\frac{1}{3}$ dus met de vergelijking $y=\frac{1}{3}x+n$, waarin n willekeurig is. Vervolgens bepalen wij het getal n zodanig, dat het tweede snijpunt van deze rechte en de kromme eveneens in (3,1,0) valt. Nu vindt men dit tweede snijpunt bv. door substitutie van $y=\frac{1}{3}x+n$ in de vergelijking der kromme, hetgeen - meteen homogeen geschreven - oplevert

$$-xz(2n+\tfrac{2}{3})+(3n^2-8n-10)z^2=0.$$

Het ene snijpunt van rechte en kromme is dus $z=0$; $y=\frac{1}{3}x$, dus (3,1,0), zoals wij al wisten. Het andere voldoet aan $-x(2n+\frac{2}{3})+z(3n^2-8n-10)=0$ en wil dit oneigenlijk zijn, dan moet dit neerkomen op $z=0$, dus moet gelden $n=-\frac{1}{3}$. De rechte $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ is dus de gezochte asymptoot.

Opg. 2. Bepaal de andere asymptoot der beschouwde kromme.

Opg. 3. Bewijs dat de asymptoten van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ elkaar snijden in het middelpunt van die hyperbool.

Opg. 4. Bepaal het snijpunt der asymptoten van de in opgave 2 beschouwde kromme en laat zien dat dat het middelpunt is van die kromme.

Opg. 5. Alle cirkels van het platte vlak bezitten dezelfde twee oneigenlijke punten. Men noemt deze punten de cirkelpunten van het platte vlak. Toon aan dat deze punten liggen op de isotrope rechten door een willekeurig eindig punt van het platte vlak getekend.

Opg. 6. Toon aan dat de verbindingsrechte van een brandpunt van een ellips (hyperbool of parabool) en een der cirkelpunten raakt aan deze ellips (hyperbool of parabool).

Opg. 7. Men noemt de op de korte as der ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gelegen punten (0,ci) en (0,-ci) wel de imaginaire brandpunten der ellips ;

bewijs dan dat de som der afstanden van een willekeurig punt van de omtrek der ellips tot deze beide punten eveneens constant is.

Opg. 8. De brandpunten van een ellips zijn de 4 snijpunten der 4 raaklijnen, die men uit de cirkelpunten aan de ellips kan trekken. (verg. opg. 6.)

Wij vonden vroeger een kenmerk om uit te maken of een kromme met verg.

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f= 0$$

een ellips, hyperbool of parabool voorstelt. Lettende op het in opg. 1 gevondene kan men deze 3 typen kegelsneden ook definiëren als krommen van de 2^e graad, die 2 toegevoegd complexe, 2 reëele verschillende of 2 samenvallende snijpunten hebben met de oneigenlijke rechte. Vatten wij deze karakterisering in het oog, dan ziet men dat men bij bovenstaande verg. van de tweede graad slechts behoeft uit te maken hoeveel snijpunten er te vinden zijn met z= 0, teigen, zoals wij zagen, beslist wordt door het aantal nulpunten van het hoogste graadsgedeelte

$$ax^2+bxy+cy^2,$$

en dit wordt weer beslist door uit te maken of $D= b^2-4ac$ positief, nul of negatief is, geheel in overeenstemming met het in §5 gevondene.

Wij bepalen thans het aantal snijpunten van een willekeurige rechte en een kromme van de graad n in het projectieve vlak. Zij de vergelijking der kromme in homogene coördinaten f(x,y,z)= 0, waarbij de uitdrukking f(x,y,z) homogeen is en van de graad n in de variabelen x,y en z. Wij gaan nu ons assenstelsel zo wijzigen (verschuiven en draaien) dat de nieuwe X-as samenvalt met de gegeven rechte. Deze transformatie is va de gedaante

$$\begin{cases} \frac{x}{z} = \frac{X}{Z}\cos\alpha - \frac{Y}{Z}\sin\alpha + a \\ \frac{y}{z} = \frac{X}{Z}\sin\alpha + \frac{Y}{Z}\cos\alpha + b \end{cases}$$

dus van de gedaante

$$\begin{cases} \rho x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha + aZ \\ \rho y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha + bZ \\ \rho z = Z \end{cases}$$

waarin ρ een willekeurige evenredigheidsconstante voorstelt (immers x,y en z zijn, evenals X,Y en Z op een factor na bepaald). Men ziet onmiddellijk in dat hierdoor de vorm f(x,y,z) overgaat in een vorm F(X,Y,Z), die eveneens homogeen en van de graad n is. De snijpunten van onze kromme en de gegeven rechte (dus de nieuwe X-as) voldoen aan

$$\begin{cases} F(X,Y,Z) = 0 \\ Y = 0. \end{cases}$$

Substitutie van Y= 0 in de vergelijking F(X,Y,Z) = 0 geeft ons voor de verhouding X : Z juist n waarden, die bepaald worden door een homogene vergelijking van de graad n in X en Z. Wij vinden zo juist n snijpunten van de gegeven rechte en de gegeven kromme, waarvan er een aantal kan samenvallen, (in welk geval raking kan optreden). Men merke op, dat het heel goed mogelijk is dat een der wortels der homogene vergelijking in X en Z het stel X= 1; Z= 0 is, zodat men dan een oneigenlijk snijpunt van kromme en rechte vindt.

Bv. De kromme xy= x+1 en de x-as hebben één eigenlijk en één oneigenlijk snijpunt nl. (-1,0) en (1,0,0).

Het enige geval dat wij niet op deze wijze kunnen behandelen is het geval, dat wij het aantal snijpunten van een kromme en de oneigenlijke rechte wensen te vinden, want wij kunnen het coördinatenstelsel niet zo verschuiven of draaien dat de x-as met de oneigenlijke rechte samenvalt. Dit geval is echter vroeger al beschouwd, want wij vonden al dat wij om deze snijpunten te bepalen, het hoogstegraads gedeelte van de vergelijking der kromme nul hadden te stellen en dit geeft ons juist een homogene n^e graadsvergelijking in x en y, waaruit in het algemeen n waarden x:y volgen, zodat wij n snijpunten (x,y,0) vinden.

Wij zien dus dat een kromme van de graad n en een rechte in het algemeen n snijpunten hebben. Wij gebruiken hierbij de uitdrukking "in het algemeen" omdat het kan gebeuren, dat er meer snijpunten zijn (minder snijpunten zijn er zeker niet, mits men maar de meervoudige snijpunten meervoudig telt) en wel in het geval, dat de rechte deel uitmaakt van de kromme. Zo vindt men dat de kromme $x^2-y^2= 0$ met iedere rechte twee snijpunten heeft, afgezien van de rechten x=y en x= -y, die geheel tot de kromme behoren en er dus "oneindig veel" snijpunten mee hebben.

Opg. 9. Bepaal de oneigenlijke punten van de lemniscaat

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

Bepaal eveneens de snijpunten van deze kromme met de rechten y= x en y= ix.

§12. De cirkel.

Zoals wij zagen onderscheidt zich de cirkel van de andere krommen van de tweede graad door het feit dat in zijn vergelijking het tweedegraadsgedeelte van de gedaante x^2+y^2 is. Dit houdt in, dat alle cirkels dezelfde oneigenlijke punten bezitten.

Opg. 1. Bewijs dit. Welke punten zijn dit?

Ook het omgekeerde is waar, nl. dat een kromme van de tweede graad, die door de cirkelpunten gaat, een cirkel is. Wij beschouwen thans de verg.

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d= 0.$$

Om te bereiken dat deze onder alle omstandigheden een cirkel voorstelt, hebben we behalve cirkels met reële straal ook cirkels met imaginaire stralen of een straal nul in te voeren. Dit is reeds vroeger geschied. Echter is het geval $a= 0$ thans ook toelaatbaar. Maken wij de vergelijking eerst homogeen, dan zien wij dat dit leidt tot

$$2bxz+2cyz+dz^2= 0$$

dus tot twee rechten, nl. de oneigenlijke rechte en de rechte $2bx+2cy+dz= 0$, die in het geval $b=c= 0$ eveneens de oneigenlijke rechte kan zijn. In dit geval krijgen wij de dubbel gestelde oneigenlijke rechte, die tenslotte ook onder de cirkels gerekend moet worden als we de definitie gebruiken dat een cirkel een figuur van de tweede graad is, die door de cirkelpunten gaat. Met het bovenstaande is tevens de omkering van deze bewering bewezen. (Ga dit na!).

Een willekeurige rechte $ax+by+c= 0$ is dus steeds tezamen met de oneigenlijke rechte als een cirkel te beschouwen en wel de cirkel $axz+byz+cz^2=0$.

Van groot belang zijn de nulcirkels. De vergelijking van de nulcirkel, dit is de cirkel met straal nul, die de oorsprong tot middelpunt heeft, luidt $x^2+y^2= 0$, dus $x+iy= 0$ en $x-iy= 0$. Deze cirkel is "ontaard" (gedegenereerd) in de twee isotrope rechten door de oorsprong. Inderdaad heeft elk eigenlijk punt (t,it) van de isotrope rechte $y= ix$ een afstand nul tot de oorsprong. Het enige reële punt van een nulcirkel is zijn middelpunt.

Wenst men een cirkel te bepalen die gaat door drie punten $P_r(x_r,y_r)$ $(r= 1,2,3)$, dan moeten de homogene coëfficiënten a,b,c,d in de vergelijking van de cirkel

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d= 0$$

zo worden gekozen dat

$$a(x_1^2+y_1^2)+2bx_1+2cy_1+d= 0$$
$$a(x_2^2+y_2^2)+2bx_2+2cy_2+d= 0$$
$$a(x_3^2+y_3^2)+2bx_3+2cy_3+d= 0.$$

waaruit door eliminatie voor de gezochte vergelijking direct wordt gevonden

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

of, als men in homogene coördinaten had gewerkt

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & xz & yz & z^2 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1z_1 & y_1z_1 & z_1^2 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2z_2 & y_2z_2 & z_2^2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3z_3 & y_3z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wij zien hieruit dat door 3 collineaire punten nu ook een cirkel gaat; bij ontwikkeling van een der gevonden linkerleden ziet men, dat dan de minor van x^2+y^2 gelijk is aan nul, zodat men iets vindt van de gedaante $Axz+Byz+Cz^2=0$, hetgeen juist voorstelt de rechte door de drie gegeven punten, aangevuld met de oneigenlijke rechte.

Dat een cirkel door 3 punten bepaald is, vindt zijn oorzaak uiteindelijk daarin dat in de vergelijking van de cirkel 4(=3+1) homogene coëfficiënten optreden. Zo is een rechte, waarvan de vergelijking 3 homogene constanten bevat, bepaald door 2 punten en een willekeurige kegelsnede, waarvan de vergelijking, naar wij vroeger afleidden, 6 homogene coëfficiënten bevat, door 5 punten. Een willekeurige kegelsnede is dus bepaald door 5 punten; door de eis, dat twee dezer punten de cirkelpunten zijn, wordt deze kegelsnede een cirkel, die derhalve door 5-2= 3 punten bepaald is.

Wij geven ook een betekenis aan de uitdrukking $x_1^2+y_1^2+2bx_1+2cy_1+d$ voor een punt (x_1,y_1) dat niet op de cirkel $x^2+y^2+2bx+2cy+d=0$ ligt. Hiertoe gaan wij uit van het begrip macht van een punt P ten opzichte van een cirkel met middelpunt M en straal R. Men verstaat onder de macht m van P t.o.v. cirkel M de uitdrukking $m=PM^2-R^2$. Het is evident dat $m=0$ voor punten P op de cirkel, zodat het vermoeden rijst, dat m wel eens gelijk zou kunnen zijn aan de beschouwde uitdrukking, die ook nul is voor punten op de cirkelomtrek. Inderdaad is dit het geval. Het middelpunt van de cirkel heeft de coördinaten $(-b,-c)$, terwijl de straal R gelijk is aan $\sqrt{b^2+c^2-d}$. Derhalve is $PM^2-R^2=(x_1+b)^2+(y_1+c)^2-(b^2+c^2-d)=$

$\equiv x_1^2+y_1^2+2bx_1+2cy_1+d.$

Wij merken nog op, dat $m=PM^2-R^2$ voor punten P buiten de cirkel positief is en wel gelijk aan het kwadraat van de lengte der raaklijn uit P aan de cirkel, dus gelijk aan het product PS.PT, als S en T de snijpunten zijn van een willekeurige rechte door P, die de cirkel in S en T snijdt. Ligt P binnen de cirkel dan is -m gelijk aan zo 'n product PS.PT. In dit geval is m negatief.

Naast de figuur van punt en cirkel beschouwen wij thans de figuur van rechte en cirkel. Een rechte $y= mx+n$ heeft met de cirkel $x^2+y^2= R^2$ twee verschillende of twee samenvallende punten gemeen al naar gelang de door substitutie gevonden vergelijking $x^2+(mx+n)^2= R^2$ een discriminent D heeft die verschilt van of gelijk is aan nul. In het eerste geval kunnen de snijpunten ook toegevoegd complex zijn, in het tweede geval zegt men dat de rechte aan de cirkel raakt. Dit treedt op als

$$D= m^2n^2-(m^2+1)(R^2+n^2)= 0,$$

dus $n=\pm R\sqrt{m^2+1}$. Wij vinden dus voor de raaklijn aan een cirkel $x^2+y^2=R^2$ met gegeven richting m, de vergelijkingen

$$y= mx \pm R\sqrt{m^2+1}.$$

Dit resultaat kunnen wij o.a. gebruiken om de raaklijn aan de cirkel in een punt $P(x_0y_0)$ van de cirkel te vinden. Immers dan moet het getal m zo bepaald worden, dat $y_0= mx_0\pm R\sqrt{m^2+1}$, dus $(y_0-mx_0)^2= R^2(m^2+1)$, dus (wegens $x_0^2+y_0^2= R^2$), $(y_0m+x_0)^2= 0$, dus $m=-\frac{x_0}{y_0}$.

Opg. 2. Toon aan dat een raaklijn loodrecht staat op de straal door het raakpunt. Na substitutie vinden wij dan $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$ dus

$$xx_0+yy_0= R^2.$$

Dit resultaat is ook op andere wijze te verkrijgen. Een rechte door het punt P heeft de vergelijking $y-y_0= m(x-x_0)$. Hierin is m de nog te bepalen richtingscoëfficiënt. Is (x_1,y_1) het andere snijpunt van deze rechte met de cirkel, dan is, zoals bekend,

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} .$$

Nu is echter $x_0^2+y_0^2= R^2$; $x_1^2+y_1^2= R^2$, dus $y_1^2-y_0^2= x_0^2-x_1^2$, dus

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = -\frac{x_1+x_0}{y_1+y_0} .$$

Nadert het tweede snijpunt tot het eerste, dan nadert de koorde tot een raaklijn, waarvan de richtingscoefficient gelijk is aan

$$\lim_{x_1\to x_0} -\frac{x_1+x_0}{y_1+y_0} = -\frac{x_0}{y_0} ,$$

waarmede het oorspronkelijke resultaat is teruggevonden.
Wij onderzoeken nu de betekenis van de rechte $xx_0+yy_0= R^2$ voor het geval dat P niet op de cirkel ligt. Trek uit P de twee raaklijnen aan de cirkel, die deze in $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ raken (ligt P binnen de cirkel, dan zijn die raaklijnen niet reëel, maar dat is voor de redenering geen bezwaar). De verg. der raaklijn PP_1 luidt $xx_1+yy_1= R^2$. Daar deze door P gaat, heeft men $x_0x_1+y_0y_1= R^2$, hetgeen tevens betekent dat het punt $P_1(x_1,y_1)$ ligt op de rechte $xx_0+yy_0= R^2$. Evenzo ligt het punt P_2 op deze rechte, zodat de gezochte rechte de verbindingslijn van P_1 en P_2 voorstelt. Men noemt deze de raakkoorde van het punt P.

Opg. 3. Bewijs dat de raaklijn aan de cirkel $(x-a)^2+(y-b)^2= R^2$ met

richtingscoëfficiënt m de gedaante heeft $y-b= m(x-a)\pm R\sqrt{m^2+1}$.

Opg. 4. Bepaal de vergelijking een raaklijn in $P(x_0,y_0)$ (raakkoorde van P) aan de cirkel $(x-a)^2+(y-b)^2= R^2$, voor het geval dat P op (niet op) de cirkelomtrek gelegen is.

Opg. 5. De verg. der raaklijn (raakkoorde) van een punt $P(x_0,y_0)$ aan de cirkel $x^2+y^2+ax+by+c=0$ is te schrijven in de gedaante

$$xx_0+yy_0+\frac{a}{2}(x+x_0)+\frac{b}{2}(y+y_0)+c= 0.$$

Opg. 6. Bepaal de vergelijkingen der raaklijnen uit het punt (6,5) aan de cirkel $x^2+y^2-2x-4y+3= 0$.

Opg. 7. Bepaal de vergelijking van de omgeschreven cirkel van de driehoek waarvan de zijden de vergelijkingen

$$y= 0;\ 8y=15x\ ;\ 30x+16y= 15$$

bezitten.

Bij gegeven punt $P(x_0,y_0)$ en cirkel $C(x^2+y^2= R^2)$ noemt men de rechte $xx_0+yy_0= R^2$ de poollijn van P ten opzichte van C. Ligt P op de cirkel, dan is deze poollijn de raaklijn aan C in P, ligt P niet op de cirkel dan is de poollijn de raakkoorde van P ten opzichte van C.

Stelling. Als Q ligt op de poollijn p van P ten opzichte van een cirkel C, dan ligt P op de poollijn q van Q ten opzichte van C. Immers zij $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$, dan luiden bij $C(x^2+y^2= R^2)$ de verg. der rechte p en q resp. $xx_1+yy_1= R^2$ en $xx_2+yy_2= R^2$, en het liggen van P op q of Q op p wordt door dezelfde relatie $x_1x_2+y_1y_2= R^2$ bepaald. Men noemt twee punten, die aan deze relatie voldoen (dus op elkanders poollijn liggen) toegevoegd of poolverwant ten opzichte van C.

Opg. 8. Ieder punt van een raaklijn aan een cirkel C is toegevoegd ten opzichte van het raakpunt. Hiervan is het gevolg dat de poollijn van een punt met de raakkoorde van dat punt samenvalt.

Wij bewijzen nu dat de verbindingslijn van 2 poolverwante, niet op een cirkel C gelegen, punten P en Q die cirkel C in twee punten S en T snijdt die harmonisch liggen ten opzichte van P en Q. Zij $P(x_1,y_1)$; $Q(x_2,y_2)$; $C(x^2+y^2= R^2z^2)$. Een willekeurig punt van PQ heeft dan de homogene coördinaten $(\lambda x_1+\mu x_2,\ \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2)$ en dit ligt op C als

$$(\lambda x_1+\mu x_2)^2+(\lambda y_1+\mu y_2)^2 = R^2(\lambda z_1+\mu z_2)^2,$$

dus

$$\lambda^2(x_1^2+y_1^2-R^2z_1^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+y_1y_2-R^2z_1z_2)+\mu^2(x_2^2+y_2^2-R^2z_2^2)=0.$$

Hieruit volgen twee waarden voor $\lambda:\mu$, die de twee snijpunten S en T bepalen. Daar de punten P en Q poolverwant zijn, is $x_1x_2+y_1y_2=R^2z_1z_2$, zodat deze vergelijking de gedaante $A\lambda^2+B\mu^2= 0$ bezit. Hieruit volgt dat de som der wortels $\lambda:\mu$ nul is, zodat wij deze kunnen aangeven met $\lambda:\mu$ en $\lambda:(-\mu)$. De punten S en T hebben dus de gedaante $\lambda P+\mu Q$ en $\lambda P-\mu Q$, zodat de dubbele verhouding (PQST) gelijk is aan $\frac{\lambda}{\mu}:-\frac{\lambda}{\mu}=-1$, waarmede de harmonische ligging van P,Q,S en T bewezen is.

Opg. 9. Bewijs dat het middelpunt van de cirkel $x^2+y^2= R^2$ de oneigenlijke rechte tot poollijn bezit. Wat is hiervan het gevolg van de snijpunten S en T van een middellijn met de cirkel? Wij zien dus dat men het middelpunt van een cirkel kan karakteriseren als de pool van de oneigenlijke rechte.

Men noemt twee rechten poolverwant ten opzichte van een cirkel als ze elkaars pool bevatten.

Opg. 10. Toon aan dat twee rechten (u_1,v_1,w_1) en (u_2,v_2,w_2) poolverwant zijn ten opzichte van de cirkel $x^2+y^2= R^2$ als geldt

$$R^2(u_1u_2+v_1v_2)= w_1w_2.$$

Opg. 11. Twee loodrechte middellijnen van een cirkel zijn poolverwant.

Opg. 12. De poollijn van een punt P ten opzichte van een cirkel staat loodrecht op de verbindingsrechte van P en het middelpunt van de cirkel. Thans beschouwen wij de figuur van twee cirkels C_1 en C_2 met vergelijkingen

$$x^2+y^2+2a_rx+2b_ry+c_r= 0 \quad (r= 1 \text{ resp. } 2).$$

Wij wensen eerst de hoek φ dezer cirkels te bepalen, dat is de hoek der raaklijnen in een hunner snijpunten. Zij S zo 'n snijpunt, zij M_1 en M_2 de middelpunten van C_1 resp. C_2, en zijn R_1 en R_2 de stralen dezer cirkels dan heeft men wegens de cosinusregel

$$2R_1R_2 \cos\varphi = R_1^2+R_2^2- M_1M_2^2.$$

Men heeft $M_1= (-a_1,-b_1)$, dus $M_1M_2^2- R_2^2$ (dit is de macht van M_1 ten opzichte van cirkel C_2) is gelijk aan $4a_1^2+b_1^2-2a_1a_2-2b_1b_2+c_2$. Verder is $R^2= a_1^2+b_1^2-c_2$, zodat men vindt

$$2R_1R_2 \cos\varphi = 2a_1a_2+2b_1b_2-c_1-c_2.$$

Hiermede is de hoek φ bepaald.

Opg. 13. Geef aan onder welke voorwaarde de cirkels C_1 en C_2 elkaar loodrecht snijden.

Opg. 14. Bepaal een cirkel die de cirkels $x^2+y^2= 4$ en $x^2+y^2-8x-4y+20=0$ loodrecht snijdt en gaat door het punt (3,2).

Opg. 15. Bewijs, dat er in het algemeen één cirkel bestaat, die drie willekeurig gegeven cirkels loodrecht snijdt.

Opg. 16. Bepaal aan welke betrekkingen de coefficienten van twee cirkels C_1 en C_2 moeten voldoen, opdat C_1 de cirkel C_2 halveert, dwz. dat de snijpunten van C_1 en C_2 uiteinden van eenzelfde middellijn van C_2 zijn.

Uit de resultaten van opg. 13 en 16 en het vroeger beschouwde zien wij, dat het gaan door een punt, het loodrecht snijden van of het halveren van een gegeven cirkel aan een cirkel een voorwaarde oplegt, die lineair is in de coëfficiënten. Een gevolg hiervan is dat er in het algemeen één cirkel bestaat, die aan een willekeurig drietal van dergelijke voorwaarden voldoet.

Opg. 17. Laat zien dat het gaan van een cirkel door een punt P neerkomt op het loodrecht snijden van die cirkel en de nulcirkel met P tot middelpunt.

Opg. 18. Laat zien dat de eis dat een cirkel C een cirkel C_1 halveert ermee aequivalent is dat C de met C_1 concentrische cirkel C_2 loodrecht snijdt, waarbij de straal van C_2 het i-voud is van die van C_1.

Opgave 17 en 18 verklaren ons hoe het komt dat de beschouwde voorwaarden van analoge structuur zijn.

Wij beschouwen thans bij 2 gegeven cirkels met verg. $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ de kromme met vergelijking $C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$. Het is duidelijk dat de kromme C_3 door elk der snijpunten van C_1 en C_2 gaat, dus in het bizonder door de cirkelpunten. C_3 is derhalve een cirkel, die door de twee overige snijpunten S en T van C_1 en C_2 gaat. Omgekeerd heeft iedere cirkel C, die door de snijpunten van C_1 en C_2 gaat een vergelijking die van de gedaante $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ is. Immers laat gelden

$$C_1 = C_1(x,y,z) = a_1(x^2+y^2)+b_1xz+c_1yz+d_1z^2 = 0$$

$$C_2 = C_2(x,y,z) = a_2(x^2+y^2)+b_2xz+c_2yz+d_2z^2 = 0.$$

terwijl C tot vergelijking heeft

$$C = a(x^2+y^2)+bxz+cyz+dz^2 = 0.$$

Kies een willekeurig punt P(p,q,r) op C , dat niet samenvalt met een dier snijpunten. Het is duidelijk dat een kromme van de gedaante $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ bepaald kan worden die door P gaat. Immers men neme bv. $\lambda = -C_2(p,q,r)$; $\mu = C_1(p,q,r)$. (Ga na dat λ en μ niet beide nul zijn). De zo gevonden cirkel heeft 3 verschillende punten met C gemeen, nl. P, S en T en valt dus met C samen, indien S en T verschillend zijn en indien deze punten van de cirkelpunten verschillen. Deze gevallen dienen nog apart te worden beschouwd.

Vallen allereerst S en T samen, dan beschouwen wij de verzameling der cirkels, die in S aan C_1 raken. Wij tonen aan dat zo 'n cirkel de gedaante $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ bezit. Immers iedere cirkel met verg. $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ snijdt C_1 in punten, die eveneens voldoen aan $C_2 = 0$ en dus slechts in 1 punt, afgezien van de cirkelpunten. Omgekeerd neme men op een willekeurige cirkel C , die in S aan C_1 raakt, een punt P, tone aan dat door P één cirkel gaat die een verg. van de gedaante $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ bezit en dat deze samenvalt met C.

Tenslotte rest ons het geval dat S en T samenvallen met de cirkelpunten. Laat C_r weer de verg. $a_r(x^2+y^2)+b_rxz+c_ryz+d_rz^2 = 0$ hebben. (r= 1,2). De kromme $a_2C_1 - a_1C_2$ gaat ook door de snijpunten van C_1 en C_2. Deze kromme is van de gedaante $z((ab)_{12}x+(ac)_{12}y+(ad)_{12}z) = 0$ en mag C_1 slechts in de cirkelpunten snijden. Derhalve is dit de kromme z.z= 0, dus $(ab)_{12} = (ac)_{12} = 0$; $(ad)_{12} \neq 0$. Hieruit ziet men dat C_2 de gedaante $\lambda C_1 + \mu z^2 = 0$ bezit.

Natuurlijk stelt omgekeerd deze vergelijking een cirkel voor, die C_1 slechts in de cirkelpunten snijdt.
Daar van C_1 en C_2 de vergelijkingen zo te schrijven zijn dat zij slechts in de constante term (c.q. de term met z^2) verschillen, ziet men dat C_1 en C_2 hetzelfde middelpunt hebben, maar ongelijke stralen.
Opg. 19. De isotrope rechten door het middelpunt van een cirkel raken deze in de cirkelpunten.

Als gevolg van opg. 19 zien wij dat de concentrische cirkels C_1 en C_2 in de cirkelpunten dezelfde raaklijnen hebben, in welk geval men zegt dat ze elkaar raken (twee krommen raken elkaar nl. zodra ze in een hunner snijpunten dezelfde raaklijnen bezitten). Concentrische cirkels raken elkaar dus in elk der cirkelpunten.

Wij kunnen de gevonden resultaten nog iets anders formuleren door het begrip bundel in te voeren, Onder een cirkelbundel verstaat men de verzameling der cirkels met verg. $\lambda C_1+\mu C_2= 0$, waarin λ en μ variabel zijn en $C_1=0$ en $C_2=0$ gegeven cirkels voorstellen.
Opg. 20. Hoe moet men λ en μ kiezen om de cirkel C_1 resp. C_2 te krijgen?

Wij vonden dus dat er de volgende soorten cirkelbundels zijn:

1. De verzameling der cirkels die door twee gegeven eindige punten gaan. Wij kunnen dit geval splitsen in 2 gevallen:

1a. De cirkels bezitten reële eigenlijke snijpunten.

1b. De cirkels bezitten toegevoegd complexe eigenlijke snijpunten.

2. De verzameling der cirkels die een gegeven cirkel (of rechte!) in een gegeven punt raken.

3. De verzameling der cirkels, die concentrisch zijn met een gegeven cirkel.

De snijpunten van twee cirkels C_1 en C_2 bepaalt men het eenvoudigste door dat exemplaar C in de bundel op te sporen waarin de termen x^2+y^2 ontbreken, hetgeen door een passende keuze van λ en μ steeds mogelijk is. Dit exemplaar C bestaat dan uit de oneigenlijke rechte en nog een rechte m. De rechte m heet de machtlijn der cirkels. Men heeft een bundel van het type

1a Als m en C_1 twee eindige snijpunten gemeen hebben

1b als m en C_1 twee toegevoegd complexe snijpunten gemeen hebben

2 als m aan C_1 raakt

3 als m oneigenlijk is.

De macht van een punt (p,q) ten opzichte van een cirkel C_r $x^2+y^2+a_rx+b_ry+c_r= 0$ is $p^2+q^2+a_rp+b_rq+c_r= 0$ $(r= 1,2)$.
Daar m de vergelijking $(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2= 0$ bezit, heeft ieder punt (p,q), dat op m ligt, gelijke machten ten opzichte van de twee gegeven cirkels C_1 en C_2 en omgekeerd. Derhalve is m de meetkundige plaats der punten die gelijke machten hebben t.o.v. twee gegeven cirkels.

Opg. 21. Hoe groot is de macht van de snijpunten S (en T) van C_1 en C_2 ten opzichte van C_1 en C_2 in de gevallen 1a en 1b en 2?

Opg. 22. Bewijs dat de drie machtlijnen van 3 willekeurige verschillende cirkels hetzij samenvallen hetzij elkaar in 1 punt snijden. Wanneer vallen ze samen?

Dit laatste resultaat leert ons een eenvoudige constructie van de machtlijn van twee cirkels C_1 en C_2, die niet elkaar in reële punten snijden. Teken een willekeurige cirkel C_3, die C_1 en C_2 wel reëel snijdt. Bepaal de machtlijnen van C_1 en C_3 en van C_2 en C_3. De gezochte machtlijn gaat dan door hun snijpunt en staat loodrecht op de centraal van C_1 en C_2.

Opg. 23. De middelpunten der cirkels van een bundel liggen op één rechte.

Opg. 24. Als een cirkel C loodrecht staat op twee cirkels dan staat C ook loodrecht op iedere cirkel van de bundel bepaald door C_1 en C_2.

Opg. 25. Alle cirkels die loodrecht staan op twee cirkels C_1 en C_2 vormen een bundel. Van deze bundel en de bundel bepaald door C_1 en C_2 liggen de middelpunten der exemplaren op loodrechte rechten. Men noemt deze bundels orthogonaal.

Opg. 26. Bewijs dat de basispunten van een bundel de centra zijn van de nulcirkels van de orthogonale bundel.

Opg. 27. Bewijs dat bij een raakbundel de centra der nulcirkels van de bundel en de orthogonale bundel in eenzelfde punt samenvallen.

§ 13. Meetkundige plaatsen.

Wij wensen thans na te gaan hoe men met de methoden der analytische meetkunde kan komen tot het opstellen van de vergelijking der meetkundige plaats van punten met een voorgeschreven eigenschap.

In sommige gevallen is het mogelijk de coördinaten van een willekeurig punt als functies van een parameter te bepalen, waarna men door eliminatie van die parameter de vergelijking der gevraagde meetkundige plaats vindt. Wij geven hiervan een voorbeeld.

Zij gevraagd de meetkundige plaats der snijpunten van twee loodrecht op elkaar staande rechten, die door twee gegeven vaste punten A en B gaan.

Wij kiezen het assenstelsel zo dat men heeft A(-c,0) ; B(c,0). Een rechte door A heeft tot vergelijking $y=m(x+c)$ en de daarop loodrecht staande rechte door B bezit de vergelijking $y=-\frac{1}{m}(x-c)$. Wij lossen het stelsel

$$(1)\qquad \begin{cases} y=m(x+c) \\ y=-\frac{1}{m}(x-c) \end{cases}$$

op en vinden

$$x=\frac{1-m^2}{1+m^2}\,c\ ;\ y=\frac{2m}{1+m^2}\,c.$$

Thans elimineren wij m uit deze betrekkingen en vinden $x^2+y^2=c^2$. Hierbij zij evenwel opgemerkt dat de gevolgde weg nodeloos gecompliceerd is. De gevraagde m.p. wordt gevonden door eliminatie van m uit de betrekkingen (2), maar het stelsel (2) is aequivalent met het stelsel (1), dus vindt men de gezochte m.p. ook door eliminatie van m uit het stelsel (1), hetgeen ons direct leert $y^2=c^2-x^2$.

Het is deze bekorting die men veelal kan toepassen om de vergelijking der gezochte m.p. te vinden. Wij geven nog een voorbeeld.

In een driehoek ABC trekt men een willekeurige rechte DE//AB.(D op AC; E op BC). Bepaal de m.p. van het snijpunt van AE en DB, als deze rechte zich evenwijdig aan zichzelf verplaatst.

Kies het assenstelsel zo, dat men heeft A(-a,0); B(b,0); C(0,c). De vergelijking van AC is dan $-\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=1$, dus $-cx+ay=ac$ en evenzo die van BC $cx+by=bc$. De vergelijking van DE zij $y=p$, dus na snijding vindt men $D(\frac{ap-ac}{c},p)$; $E(\frac{bc-bp}{c},p)$. De vergelijkingen van AE resp. BD luiden dan

$$y=\frac{pc}{bc-bp+ac}\,(x+a);\quad y=\frac{pc}{ap-ac-cb}\,(x-b).$$

Eliminatie van de parameter p hieruit levert ons direct

$$y=0\ ;\ \frac{x}{\frac{1}{2}(b-a)}+\frac{y}{c}=1.$$

Opg. 1. Verklaar het optreden van y=0 en bewijs meetkundig de juistheid der andere gevonden vergelijking.

Opg. 2. Bepaal de m.p. der middens der koorden van de cirkel $x^2+y^2=a^2$, welke gaan door het punt (b,0).

Men vindt behalve x=b als m.p. de cirkel $x^2+y^2-bx=0$. In het geval dat $b>a$ en dat men slechts op reële punten ("echte koorden") let, treedt slechts het gedeelte van de cirkel $x^2+y^2-bx=0$, dat binnen de cirkel $x^2+y^2=a^2$ ligt, als m.p. op; het overige gedeelte noemt men dan parasitisch.

Opg. 3. Bepaal de meetkundige plaats der snijpunten der diagonalen der rechthoeken PQRS beschreven in een gegeven driehoek ABC, waarbij PQ op AB ligt en R en S resp. op BC en AC liggen.

Opg. 4. Door de punten A(a,0) en B(0,b) trekt men loodlijnen AP,BQ op een veranderlijke rechte door O. Bepaal de m.p. van het midden van PQ.

Soms kan men de m.p. gemakkelijk bepalen door invoeren van meer parameters welke dan uit een voldoende aantal betrekkingen dienen te worden geëlimineerd.

Zij b.v. gevraagd de m.p. van de middens der koorden AB door een cirkel, die gaat door O en een vast punt P(p,q), afgesneden van de assen.

Zij zo 'n cirkel $x^2+y^2+ax+by=0$. Daar P er op ligt heeft men $p^2+q^2+ap+bq=0$.

Verder vindt men voor A (b.v. op de x-as gelegen) als coördinaten (-a,0) en voor B(0,-b), dus voor M heeft men

$$x=-\frac{a}{2}\ ;\ y=-\frac{b}{2}\ .$$

Men elimineere dus a en b uit

$$p^2+q^2+ap+bq=0\ ;\ x=-\frac{a}{2}\ ;\ y=-\frac{b}{2}$$

en vindt direct

$$2px+2qy=p^2+q^2$$

voor de vergelijking der m.p.

Opg. 5. Bepaal de m.p. der middens der koorden van de parabool $y^2=2px$, welke door het brandpunt gaan.

Opg. 6. Van een rechthoekig trapezium is de rechthoekszijde gegeven. Bepaal de m.p. van het snijpunt der diagonalen als het product der evenwijdige zijden constant is.

Opg. 7. Een rechthoek ABCD heeft een constante omtrek. Het hoekpunt A ligt vast; B en D bewegen zich over twee vaste loodrechte rechten die door A gaan. Bepaal de m.p. van het snijpunt van BC en de loodlijn uit A op de diagonaal BD.

Soms kan men direct de betrekking tussen de coördinaten van een willekeurig punt van een m.p. bepalen zonder parameters in te voeren.

Zij gevraagd de m.p. der punten, waarvan de afstanden tot twee gegeven punten een constante verhouding (k) hebben.
Kies het assenstelsel zo, dat de gegeven punten zijn E(-c,0) en F(c,0). Voor een willekeurig punt P(x,y) der m.p. heeft men dan

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = k\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

waaruit na herleiding volgt $x^2+y^2+2c\,\frac{1+k^2}{1-k^2}\,x+c^2=0$. (Cirkel van Apollonius).

Opg. 8. Ga ook het geval k=1 na.
Opg. 9. Bepaal de m.p. der punten waarvan de afstand tot de basis van een gelijkbenige driehoek middenevenredig is tussen de afstanden tot de benen.
Opg. 10. Bepaal de m.p. der punten waarvan de som der quadraten der afstanden tot de hoekpunten van een gegeven driehoek constant is.
Opg. 11. Gegeven is een punt P(p,q). Een willekeurige rechte door P snijdt de coördinaatassen in A en B. Op AB bepaalt men een punt Q zodanig dat PA=QB is. Bepaal de m.p. van Q als die rechte om P draait.
Opg. 12. De punten A en B liggen zo op de parabool $y^2=2px$, dat hoek AOB recht is. Bepaal de m.p. van het vierde hoekpunt C van de rechthoek AOBC als OA om O draait.
Opg. 13. Gegeven is een cirkel en een punt P erbuiten. Door P trekt men een rechte die de cirkel o.m. in A snijdt. Op AP bepaalt men een punt Q zodanig dat AP.AQ constant is. Bepaal de m.p. van Q als AP om P draait.

§ 14. De kegelsneden.

Wij beschouwen thans nogmaals de algemene vergelijking van de tweede graad, die wij schrijven in de gedaante

$$f(x,y)= a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

De snijpunten met de oneigenlijke rechte worden bepaald door $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$, dus deze zijn reëel verschillend, reëel samenvallend of toegevoegd complex al naar de discr. $a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ van deze kwadratische uitdrukking positief, nul of negatief is. Wij beschouwen de determinant

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(hierin verstaat men onder a_{21} hetzelfde als a_{12} en verder is $a_{31}=a_{13}$; $a_{32}=a_{23}$).

en merken op dat de beschouwde discriminant juist gelijk is aan de minor A_{33}.

Wenst men de vergelijking door transformatie van het assenstelsel in een eenvoudiger gedaante te brengen, dan kan men beginnen met het assenstelsel zo te verschuiven, dat de oorsprong in het middelpunt (x_o,y_o) van de kromme (indien deze althans een middelpunt bezit) komt te liggen, d.w.z. dat de termen van de eerste graad in x en y in de vergelijking ontbreken. De verschuiving had zoals wij vroeger (zie § 5) zagen, de gedaante

$$x=x'+x_o \; ; \; y=y'+y_o,$$

waarbij x_o en y_o bepaald worden door

$$\begin{cases} a_{11}x_o+a_{12}y_o+a_{13}=0 \\ a_{21}x_o+a_{22}y_o+a_{23}=0 \end{cases}$$

Wij merken nog op dat men deze vergelijkingen ook wel kan schrijven in de gedaante $\frac{\partial f}{\partial x_o}=0$; $\frac{\partial f}{\partial y_o}=0$. Het stelsel is oplosbaar als de coefficientendeterminant, welke juist gelijk is aan A_{33}, ongelijk is aan nul. Is $A_{33}=0$ dan heeft de kromme slechts dan een middelpunt (maar dan ook oneindig vele) als ook

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \text{ d.w.z. } A_{12}= 0.$$

De vergelijking der kromme is dan te herleiden tot

$$a_{11}{}^2x^2+2a_{11}a_{12}xy+a_{12}{}^2y^2+2a_{11}a_{13}x+2a_{12}a_{13}y+a_{11}a_{33}=0,$$

dus

$$(a_{11}x+a_{12}y+\alpha_1)(a_{11}x+a_{12}y+\alpha_2)=0,$$

waarin α_1 en α_2 de wortels zijn der vergelijking $\alpha^2+a_{13}\alpha+a_{11}a_{33}=0$. Men krijgt twee evenwijdige (of samenvallende; dit treedt op als ook $a_{13}{}^2=a_{11}a_{33}$, in welk geval de matrix $\|a_{ij}\|$, zoals men gemakkelijk inziet, de rang 1 bezit) rechten.

<u>Opg. 1</u>. Verklaar hoe men aan deze figuur oneindig veel middelpunten kan toekennen.

Het geval $A_{33}=0$; $A_{12}\neq 0$ levert geen (eigenlijk) middelpunt op. Het heeft geen zin van oneigenlijke middelpunten te spreken. Onder dit geval valt ook de kromme met $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$; a_{13} of $a_{23}\neq 0$, zodat men dan twee rechten vindt, waarvan er één oneigenlijk is. Zijn a_{13} en a_{23} beide nul, dan heeft $\|a_{ij}\|$ weer de rang 1 en krijgt men de dubbelgetelde oneigenlijke rechte. Wij gaan nu nog even na wanneer de kromme ontbindbaar is. Men heeft dan hetzij twee elkaar in het eindige snijdende rechten, of twee rechten waarvan er één oneigenlijk is, of twee evenwijdige of twee samenvallende rechten. In het tweede, derde en vierde geval, dat wij reeds beschouwden, is a=0. Wij tonen aan dat dat ook in het eerste geval zo is. Zij nl. (x_o,y_o) het snijpunt der rechten, waaruit de kromme bestaat.

Laat deze resp. richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 hebben dan heeft de kromme tot vergelijking op het stelsel met (x_0,y_0) tot oorsprong

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2=0$$

waarin m_1 en m_2 de wortels der vierkantsvergelijking

$$a_{22}m^2+2a_{12}m+a_{11}=0$$

zijn. Nu vonden wij in § 5 (en in verband met § 6, opg. 5) dat na die verschuiving de kromme de vergelijking

$$(1)\quad a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+\frac{a}{A_{33}}=0$$

bezat. Wij zien dus dat ook in het beschouwde geval geldt a=0.
De gevonden resultaten vatten wij samen:
1°: Rang $\|a_{ij}\|$ is gelijk aan 3. Men krijgt een kromme, die niet uit rechten bestaat (of, zoals men dat noemt, niet gedegenereerd of ontaard is).
2°: Rang $\|a_{ij}\|$ is 2. Men krijgt twee verschillende rechten. Men kan het assenstelsel zo transformeren dat de kromme tot vergelijking krijgt $x^2-y^2=0$ of $x^2+y^2=0$. Is $A_{33}=0$ dan lopen ze evenwijdig of één van hen is oneigenlijk. Men kan het assenstelsel zo transformeren dat de kromme tot vergelijking krijgt $x^2-1=0$ of $x^2+1=0$ resp. $x=0$.
3°: Rang $\|a_{ij}\|$ is 1. Men krijgt twee al of niet oneigenlijke samenvallende rechten, die wij de vergelijking $x^2=0$ resp. $z^2=0$ kunnen laten krijgen.
Rest ons nog het geval 1° te behandelen, waarbij de kromme de vergelijking

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+a_{33}'=0$$

bezat met

$$a_{33}'=\frac{a}{A_{33}} \qquad (\text{waarin } aA_{33}\neq 0).$$

Wij vonden vroeger (§ 5) dat door een draaiing over een hoek α met $tg\,2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$ de kromme de gedaante

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y''^2+a'_{33}=0$$

kreeg, waarin

$$a_{11}'+a_{22}'=a_{11}+a_{22};\quad a'_{11}a'_{22}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

De nieuwe coëfficiënten a_{11}' en a_{22}' zijn dus direct te vinden als wortels van de vierkantsvergelijking

$$s^2-(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,$$

welke wij schrijven in de gedaante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-s \end{vmatrix}=0.$$

Dit resultaat zullen wij later langs een andere weg direct afleiden.

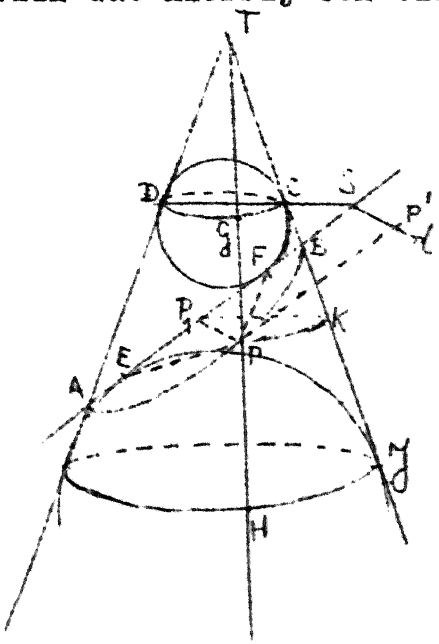
Wij krijgen een ellips als a_{11}' en a_{22}' hetzelfde teken hebben en a_{33}' een hieraan tegengesteld teken. Hebben deze 3 coëfficiënten alle hetzelfde teken, dan krijgt men een imaginaire ellips (zgn. nuldelige kegelsnede). Deze gevallen treden op bij $a_{11}'a_{22}' > 0$, dus $A_{33} > 0$. Bij $A_{33} < 0$ daarentegen hebben a_{11}' en a_{22}' verschillend teken en krijgt men een hyperbool.

Tenslotte merken wij op dat door verschuivingen en draaiingen de uitdrukkingen a, A_{33} en $a_{11}+a_{22}$ ongewijzigd blijven. Behalve door uitcijferen is dit direct in te zien, gelet op de betekenis van a=0, en, wat betreft A_{33} en $a_{11}+a_{22}$, blijkt dit o.a. uit het feit dat deze grootheden resp. het product en de som der grootheden a_{11}' en a_{22}' zijn, welke direct met de aslengten der kegelsnede samenhangen.

Wij laten nu zien dat een aantal der beschouwde kegelsneden hun naam ten rechte dragen d.w.z. dat zij als doorsnijdingen van een plat vlak en een omwentelingskegel kunnen worden verkregen.

Een raakvlak aan een kegel geeft als doorsnijding twee samengevallen rechten, terwijl een vlak door de top, dat de kegel snijdt, als doorsnijding twee rechten geeft. Later zal blijken dat een vlak door de top, dat de kegel verder niet (reëel) snijdt een doorsnijdingsfiguur van twee toegevoegd complexe rechten oplevert.

Wij beschouwen nu een vlak V dat niet door de top T van de kegel gaat en een hoek met de as maakt, die groter is dan de halve tophoek van de kegel en geven het bewijs van Dandelin dat hierbij een ellips als doorsnijdingsfiguur optreedt.



Bepaal de twee, de kegelmantel volgens een cirkel rakende bollen, die V resp. in E en F raken. Een willekeurig punt P van de doorsnijdingsfiguur heeft de eigenschap PF=PG(G op TP en op de bol die V in F raakt; immers twee raaklijnen uit P aan eenzelfde bol zijn even lang) en PE=PH (H op TP en op de andere bol), dus PE+PF=PG+PH=GH. De lengte van GH is onafhankelijk van de keuze van het punt P, en wel GH=CJ=BF+BE= =BF+AF=AB. De doorsnijdingskromme voldoet dus aan PE+PF=AB en is dus een ellips met brandpunten in E en F.

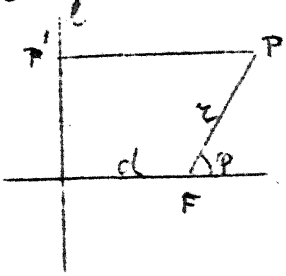
Wij leiden uit de figuur nog een eigenschap af. Laat het vlak V het vlak van de cirkel DGC snijden volgens een rechte d. Dan is $d \perp ABT$ want dit is het geval met V en vlak DGC, dus $d \perp AB$. Trek PP' in V loodrecht op d. Dan is PP':PF=PP':PG. Zij P_1 de projectie van P op AB en laat het

vlak door P evenwijdig met vlak GC de beschrijvende TJ snijden in K. Dan heeft men PP':PG=P_1S:KC=BS:BC=AS:AD=(AS-BS):(AD-BC)=AB:EF, dus PP':PF=AB:EF, d.w.z. de afstanden van een punt der ellips tot een brandpunt en een richtlijn verhouden zich als de brandpuntsafstand en de lange as.

Kiest men het vlak V evenwijdig met een beschrijvende AT, dan blijft de afleiding PP':PF=PP':PG=P_1S:KC=BS:CS gelden en wegens BS=CS vindt men PP'=PF, zodat de doorsnijding een parabool is met F tot brandpunt. Op analoge wijze blijkt de doorsnijding van de kegel en een vlak niet door de top, dat met de kegelas een hoek maakt, die kleiner is dan de halve tophoek van de kegel, een hyperbool op te leveren. Wij merken nog op dat de verhouding PF:PP' bij de ellips gelijk is aan c:a hetgeen men wel de excentriciteit e der ellips noemt, dus PF $<$ PP' (vandaar de naam ellips; $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\omega$ = tekort schieten);
bij de parabool gelijk is aan 1 ($\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\omega$ = gelijk zijn aan)
bij de hyperbool gelijk is aan c:a (hetgeen men weer de excentriciteit e noemt), welke verhouding nu $>$ 1 is ($\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\alpha\lambda\lambda\omega$ = overtreffen).

<u>Opg. 2</u>. Bepaal de meetkundige plaats der toppen T der omwentelingskegels, die een gegeven vlak V volgens een gegeven ellips snijden.

Wij leiden nog even in poolcoördinaten de verg. der 3 beschouwde kegelsneden af. Kies de poolas door het brandpunt F en loodrecht op de bij F behorende richtlijn l. Dan heeft men voor een punt P(r,φ) der kegelsnede r=PF=e.PP'= =e(d+r cosφ), dus



$$r=\frac{de}{1-e\cos\varphi}.$$

Deze vergelijking stelt de 3 kegelsneden tegelijkertijd voor. Is e $>$ 1 dan bestaan er twee richtingenφ, met e cosφ=1, dus de kromme bezit twee oneigenlijke punten; is e=1, dan heeft de kromme juist één oneigenlijk punt, bepaald door cosφ=1, dus φ=0, dus dit punt is het oneigenlijke punt der X-as. Voor e $<$ 1 is er geen (reële) hoekφ met e cosφ =1, dus de kromme bezit geen reële oneigenlijke punten.

Wij zetten nog even de gevonden vergelijking om in een met rechthoekige coördinaten en vinden dan

$$x^2+y^2=e^2(d+x)^2,$$

dus

$$(x-\frac{de^2}{1-e^2})^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{d^2e^2}{(1-e^2)^2},$$

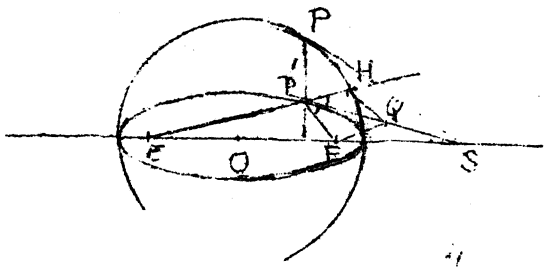
derhalve krijgen wij bij e $<$ 1 een ellips met assen $a=\frac{de}{1-e^2}$ en $b=\frac{de}{\sqrt{1-e^2}}$,

dus $c=\frac{de^2}{1-e^2}$ en met middelpunt (c,0).

Opg. 3. Herleid in de gevallen e=1 en e > 1 de gevonden poolvergelijking tot de bekende vergelijkingen van parabool en hyperbool.
De ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is in verband te brengen met de hoofdcirkel $x^2+y^2 = a^2$. Bij een willekeurig punt (a cosφ , b sinφ) der ellips beschouwen we het punt (a cosφ , a sinφ) van de hoofdcirkel en merken dat men uit een punt (x,y) van die cirkel het bijbehorende punt (x',y') der ellips direct vindt door de transformatie $x'=x$; $y'=\frac{b}{a}y$. Deze transformatie is niet als een verplaatsing (verschuiving of verdraaiing) op te vatten. Het is een dilatatie in één bepaalde richting. Door deze transformatie gaat de cirkel $x^2+y^2=a^2$ over in de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, waaruit men kan afleiden dat de oppervlakte der ellips gelijk is aan $\frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$.

Onderwerpt men het gehele platte vlak aan deze transformaties dan gaan punten in punten en rechten in rechten over. Slechts ieder punt van de X-as blijft op zijn plaats. Dit leert ons hoe een raaklijn aan een ellips te trekken in een punt P' der ellips. Beschouw dit punt P' als het getransformeerde van een punt P aan de hoofdcirkel; trek de raaklijn in P aan die cirkel, die de X-as in S snijdt. Dan is P'S de raaklijn in P' aan de ellips.

Opg. 4. Construeer de raaklijnen uit een punt Q' aan een ellips op een dergelijke wijze.



Beschouwen we de constructie der raaklijn in P' aan de ellips nader. Zij P'(a cosφ , b sinφ), dus P(a cosφ , a sinφ), dus $OS=\frac{a}{\cos\varphi}$.
Men heeft $P'E = a+c\cos\varphi$; $P'F = a-c\cos\varphi$,
dus $P'E:P'F=(\frac{a}{\cos\varphi}+c):(\frac{a}{\cos\varphi}-c)=(OS+OE):(OS-OF)=ES:FS$, dus S ligt op de buitenbisectrix van $\angle EP'F$.

Dit resultaat is ook anders in te zien. Kies G willekeurig op de buitenbisectrix van die hoek EP'F. Maak HP'=P'F(H op EP'). Dan is voor een willekeurig van P' verschillend punt Q van die buitenbisectrix QH=QF, dus QE+QF=QE+QH > EH=EP'+P'H=EP'+P'F=2a, dus QE+QF > 2a voor alle punten Q≠P' van die buitenbisectrix. Deze bevat dus slechts één punt (nl. P') dat op de ellips ligt en raakt derhalve aan de ellips.

Opg. 5. Bewijs een overeenkomstige eigenschap voor de raaklijn in een punt aan een hyperbool.

Opg. 6. De raaklijn in een punt P van een parabool halveert de hoek tussen de verbindingsrechte van P en het brandpunt en de rechte door P evenwijdig aan de as.

Evenals bij de cirkel kunnen wij bij de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de vergelijking der raaklijn met gegeven richting bepalen en vinden dan

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

Bij de hyperbool $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ vindt men $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ en bij de para-

bool $y^2=2px$ vindt men $y=mx+\frac{p}{2m}$.

Opg. 7. Bewijs deze formules.

Opg. 8. Twee loodrecht op elkaar staande raaklijnen van een parabool snijden elkaar op de richtlijn. Bij de beschouwde ellipsen snijden zij elkaar op de cirkel $x^2+y^2=a^2b^2$ (orthoptische cirkel of cirkel van Monge). Evenals bij de cirkel kan men de vergelijking der raaklijn in een punt (x_o,y_o) van de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bepalen en vindt dan $\frac{xx_o}{a^2}+\frac{yy_o}{b^2}=1$. Ligt (x_o,y_o) niet op de ellips dan geeft deze lineaire vergelijking ons weer de raakkoorde.

Opg. 9. Bewijs deze twee eigenschappen.

Men noemt de rechte $\frac{xx_o}{a^2}+\frac{yy_o}{b^2}=1$ de poolijn van een punt (x_o,y_o) ongeacht de ligging van dit punt t.o.v. de ellips. Het punt heet de pool dier rechte. Men heeft weer: De meetkundige plaats der punten,die op hun eigen poollijn ten opzicht van een ellips liggen, is de ellips zelve. De rechten die door hun eigen pool gaan zijn de raaklijnen aan deze ellips.

Verder heeft men: ligt P op de poollijn van een punt Q, dan ligt Q op de poollijn van P.

Opg. 10. Bewijs ook deze eigenschappen.

Twee punten noemt men poolverwant, als ze op elkaars poollijn liggen. Twee rechten heten poolverwant, als ze elkaars pool bevatten. Tenslotte heeft men weer de eigenschappen:

Twee poolverwante punten liggen harmonisch met de snijpunten van hun verbindingslijn met de ellips.

Twee poolverwante rechten liggen harmonisch met de raaklijnen uit hun snijpunt aan de ellips.

Opg. 11. Bewijs deze eigenschappen.

De gehele pooltheorie der ellips levert ons meteen de analoge pooltheorie der hyperbool door overal b^2 door $-b^2$ te vervangen. Ook voor de parabool geldt de pooltheorie. Het uitgangspunt hiervan vindt men door bij de parabool $y^2=2px$ de raaklijn in een punt (x_o,y_o) te bepalen, waarvoor men vindt

$$yy_o=p(x+x_o).$$

Opg. 12. Bewijs dit.

Opg. 13. De pool der oneigenlijke rechte ten opzichte van een ellips of hyperbool is zijn middelpunt.

Opg. 14. Brandpunt en bijbehorende richtlijn bij ellips, hyperbool of parabool zijn poolverwant.

Wij voeren verder nog in het begrip toegevoegde middellijnen bij ellips en hyperbool.

Beschouw een stel evenwijdige rechten $y=mx+n$, allen met dezelfde door m bepaalde richting en verschillende n. Wij vragen naar de meetkundige plaats der middens van de koorden die zij van de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

afsnijden.

De uiteinden van deze koorden vindt men als snijpunten van rechte en ellips. Hun x-coördinaten x_1 en x_2 voldoen dus aan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1 \text{ dus } (a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2n^2-a^2b^2 = 0.$$

De x-coördinaat van het midden dier koorde is dus $x=\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{a^2mn}{a^2m^2+b^2}$, terwijl de bijbehorende y-coördinaat van dit midden voldoet aan $y=mx+n$. De m.p. van het gezochte midden vindt men na eliminatie van n waarna men krijgt

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x.$$

Het is dus een rechte $y=m'x$ door de oorsprong met $m' = -\frac{b^2}{a^2m}$. Gaat men omgekeerd uit van een stel rechten met richtingscoëfficiënt m' dan vindt men voor de meetkundige plaats der middens van de door afgesneden koorden

$$y = -\frac{b^2}{a^2m'}x = mx,$$ dus men vindt de middellijn, die tot de eerste groep koorden behoorde.

Twee middellijnen $y=mx$ en $y=m'x$ die voldoen aan $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ noemt men toegevoegd.

Opg. 15. Een middellijn valt met zijn toegevoegde samen als deze aan de ellips raakt.

Opg. 16. De raaklijn in een punt P van een ellips loopt evenwijdig aan de aan OP toegevoegde middellijn.

Bij de toegevoegde middellijnen gelden de stellingen van Apollonius.

Beschouw de 4 uiteinden $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$ van twee toegevoegde middellijnen. Men tekene in de punten P_i de raaklijnen aan de ellips, welke een ongeschreven parallelogram vormen. De stellingen van Apollonius zeggen nu dat voor alle dergelijke parallelogrammen de oppervlakten en ook de som der quadraten der zijdelengten constant zijn.

Bewijs: Beschouw de matrix

$$\begin{Vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \end{Vmatrix}$$

Daar P_1 en P_2 op de ellips liggen, heeft men $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$; $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$,

en daar OP_1 en OP_2 toegevoegde middellijnen zijn, heeft men

$$\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ dus } \frac{x_1}{a} \cdot \frac{x_2}{a} + \frac{y_1}{b} \cdot \frac{y_2}{b} = 0.$$

De beschouwde matrix is dus orthogonaal, waaruit volgt

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1; \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ dus } OP_1^2+OP_2^2 = a^2+b^2, \text{ zodat de som}$$

der quadraten der zijdelengten van het omgeschreven parallelogram gelijk is aan $8a^2+8b^2$, terwijl de oppervlakte ervan gelijk is aan de absolute waarde van

$$4\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 4ab \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \end{vmatrix},$$ dus gelijk is aan 4ab, want

de waarde van een orthogonale determinant is ± 1.

De gehele theorie geldt m.m. ook voor hyperbolen. Men kan echter daarbij niet spreken van de 4 punten P_i, aangezien het zo is dat als een middellijn de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ in P_1 en P_3 snijdt, de snijpunten der toegevoegde middellijn met de hyperbool imaginair zijn. Om een reële stelling te krijgen, tekene men ook de toegevoegde hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ en vinde P_2 en P_4 als snijpunten der tweede middellijn met deze hyperbool.

Bij de parabool $y^2 = 2px$ gelden geen stellingen van Apollonius. Wel is de meetkundige plaats der middens van evenwijdige koorden ($y=mx+n$) weer een rechte, waarvoor men vindt $y = \frac{p}{m}$.

Opg. 17. Bewijs dit.

Opg. 18. Toegevoegde middellijnen van ellips of hyperbool zijn poolverwant.

Opg. 19. Bij de parabool $y^2=2px$ zijn de rechten $y=mx+n$ en $y = \frac{p}{m}$ poolverwant.

Opg. 20. De assen van een ellips of hyperbool zijn te beschouwen als loodrecht op elkaar staande toegevoegde middellijnen.

Opg. 21. De raaklijnen in twee punten P_1 en P_2 van een parabool snijden elkaar in een punt P. Het midden van P_1P_2 zij M. Bewijs dat PM evenwijdig aan de as der parabool is en dat het snijpunt N van PM met de parabool het midden is van PM. Deze eigenschap is door Apollonius gebruikt om te bewijzen dat de oppervlakte van het paraboolsegment $P_1NP_2MP_1$ gelijk is aan $\frac{2}{3}$ opp Δ PP_1P_2.

Opg. 22. Bepaal de top van de parabool $9x^2-12xy+4y^2-30x-4y-2=0$.

§ 15. Verdere eigenschappen van kegelsneden.

Reeds vroeger merkten wij op, dat een kegelsnede, aangezien deze voorgesteld wordt door een vergelijking met 6 homogene coëfficiënten, door 5 punten bepaald is. De vergelijking van de kegelsnede door 5 punten $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4,5)$ luidt

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Een analoge relatie is op te schrijven in homogene coördinaten, waartoe men moet overgaan, als o.a. onder de gegeven punten oneigenlijke voorkomen. De eerste rij der determinant luidt dan x^2 xy y^2 xz yz z^2.

Het gaan door een punt legt aan de coëfficiënten van een kegelsnede één lineaire voorwaarde op. Men drukt dit uit door te zeggen dat het gaan door een punt aan een kegelsnede een enkelvoudige voorwaarde oplegt. Er zijn natuurlijk andere enkelvoudige lineaire voorwaarden aan een kegelsnede op te leggen, waarvan wij bv. noemen het geven van een asymtotische richting (hetgeen in feite neerkomt op het geven van een oneigenlijk punt) of van een asrichting.

Opg. 1. Bepaal de relatie waaraan de coëfficiënten hebben te voldoen opdat de kegelsnede een asrichting $y=mx$ bezitte.

Een hyperbool van het type $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ heet een gelijkzijdige hyperbool. Wij bewe.zen dat bij verschuiving en draaiing de som der coefficiënten a_{11} en a_{22} van de kegelsnedevergelijking constant is; bij de hyperbool $x^2-y^2= a^2$ is deze som gelijk aan nul, dus dat is ook het geval met $a_{11}+a_{22}$ bij de vergelijking der orthogonale hyperbool op een willekeurig assenstelsel. De eis, dat een kegelsnede een orthogonale hyperbool is, is dus een lineaire enkelvoudige voorwaarde.

Opg. 2. De eis dat een kegelsnede een parabool is, is een quadratische enkelvoudige voorwaarde in de coëfficiënten.

Opg. 3. Onderzoek de eis dat een kegelsnede ontaard is.

Aangezien door 5 lineaire enkelvoudige voorwaarden een kegelsnede bepaald is, bestaan er oneindig veel kegelsneden, die aan 4 lineaire enkelvoudige voorwaarden voldoen. Deze verzameling kegelsneden bestuderen wij thans nader.

De 6 homogene coëfficiënten voldoen dus aan 4 homogene lineaire betrekkingen, zodat elke coëfficiënt a_{ij} een vast lineair compositium $\lambda a'_{ij}+\mu a''_{ij}$ is van twee oplossingen $(a_{11}', \ldots, a_{33}')$ en $(a_{11}'', \ldots, a_{33}'')$ van ons stelsel vergelijkingen, welke twee kegelsneden K' en K'' bepalen. Wij kunnen dus voor een willekeurige kegelsnede K van onze verzameling schrijven $K = \lambda K' + \mu K''$. Zijn K_1, K_2 en K_3 drie willekeurige verschillende kegelsneden van onze verzameling dan bestaan er getallen ρ en σ zodanig dat $K_1 = \rho K_2 + \sigma K_3$. Immers wij bewezen het bestaan van 6 getallen λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; λ_3, μ_3, zodanig dat $K_1 = \lambda_1 K' + \mu_1 K''$; $K_2 = \lambda_2 K' + \mu_2 K''$;

$K_3 = \lambda_3 K' + \mu_3 K''$, waaruit dan na enige herleiding volgt

$$K_1 = \rho K_2 + \sigma K_3 \text{ met } \rho = \frac{(\lambda\mu)_{13}}{(\lambda\mu)_{23}} ; \quad \sigma = \frac{(\lambda\mu)_{21}}{(\lambda\mu)_{23}} .$$

Opg. 4. Waarom mag men onderstellen $(\lambda\mu)_{23} \neq 0$?

Wij noemen de verzameling der kegelsneden K_1 met

$$K_1 = \rho K_2 + \sigma K_3,$$

waarin K_2 en K_3 gegeven kegelsneden zijn en de parameters ρ en σ willekeurig zijn, een bundel. Een bundel kegelsneden wordt dus door twee exemplaren, welke men de basisexemplaren noemt, bepaald. De verzameling der kegelsneden, die aan 4 lineaire enkelvoudige voorwaarden voldoen, is dus een bundel. In het bijzonder is de verzameling der kegelsneden, die door 4 gegeven punten, welke men de basispunten noemt, gaan, een bundel. Snijden de basisexemplaren van een bundel elkaar in 4 punten, dan krijgt men omgekeerd een bundel met 4 basispunten. Het is echter mogelijk dat de basisexemplaren minder dan 4 punten gemeen hebben. Zo heeft b.v. de bundel kegelsneden (bestaande uit concentrische cirkels) $\lambda(x^2+y^2)+\mu z^2=0$ slechts twee basispunten $(1,i,0)$ en $(1,-i,0)$. Uit het bovenstaande blijkt voorts: Hebben twee kegelsneden vier snijpunten, dan is iedere kegelsnede die door die 4 punten gaat een exemplaar van de bundel, die door die twee kegelsneden wordt bepaald.

Wordt b.v. gevraagd de vergelijking van de parabool te bepalen, die door de snijpunten der kegelsneden $8x^2+2y^2 = 10$ en $xy = 1+x$ gaat, dan merken wij op dat deze parabool een vergelijking moet bezitten van de gedaante

$$\lambda(8x^2+2y^2-10)+\mu(xy-1-x) = 0$$

en, opdat dit een parabool zij, kieze men λ en μ zo dat

$$\mu^2 - 64\lambda^2 = 0,$$

dus

$$\mu = \pm 8\lambda \text{ , waarna men vindt}$$

$$8x^2 \pm 8xy + 2y^2 - 10 \mp 8x \mp 8 = 0,$$

zodat de gezochte parabolen zijn

$$8x^2+8xy+2y^2-8x-18=0$$
$$8x^2-8xy+2y^2+8x-2=0.$$

Wij merken nog op dat in een bundel in het algemeen 3 ontaarde exemplaren optreden, want opdat een kegelsnede (waarbij in de verg. van K_1 en K_2 de coëfficiënten a_{ij} resp. b_{ij} optreden) $K = \lambda K_1 + \mu K_2$ van de bundel ontaard zij, is nodig en voldoende

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11}+\mu b_{11} & \lambda a_{12}+\mu b_{12} & \lambda a_{13}+\mu b_{13} \\ \lambda a_{21}+\mu b_{21} & \lambda a_{22}+\mu b_{22} & \lambda a_{23}+\mu b_{23} \\ \lambda a_{31}+\mu b_{31} & \lambda a_{32}+\mu b_{32} & \lambda a_{33}+\mu b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

hetgeen een cubische vergelijking in $\lambda:\mu$ oplevert, welke in het algemeen 3 oplossingen bezit, die aanleiding geven tot 3 ontaarde kegelsneden. Heeft de bundel 4 basispunten A,B,C en D dan is het duidelijk, dat deze 3 ontaarde kegelsneden de lijnen paren AB, CD; AC,BD; AD,BC zijn. Omgekeerd zijn deze lijnenparen vaak nuttig bij het opstellen van de vergelijking van een kegelsnede(nbundel).

Zij gevraagd de kegelsnede, die gaat door de punten A(0,1), B(0,2), C(2,0), D(3,0) en E(4,3). Men heeft voor het paar AB, CD de vergelijking $(x+y-2)(3x+y-3)=0$, de bundel op A, B, C en D heeft dus de vergelijking $(x+y-2)(3x+y-3)+\lambda xy=0$, dus opdat een exemplaar door (4,3) gaat, krijgt men $5.12+12\lambda=0$, dus $\lambda=-5$.

De gezochte kegelsnede heeft dus tot vergelijking

$$3x^2-xy+y^2-9x-5y+6=0.$$

Opg. 5. Bepaal de orthogonale hyperbool door de punten (1,2); (2,3); (3,1); (0,0).

Opg. 6. Bewijs dat er in het algemeen één parabool gaat door de vier hoekpunten van een trapezium.

Opg. 7. Als een bundel twee orthogonale hyperbolen bevat, bevat deze uitsluitend orthogonale hyperbolen.

Opg. 8. De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

Opg. 9. Bepaal de vergelijking der kegelsnede, die in het punt (6,0) aan de x-as raakt en in (0,2) aan de y-as raakt.

Opg. 10. Door een punt P van een orthogonale hyperbool trekt men twee loodrechte koorden, die de hyperbool verder in A en B snijden. Bewijs dat AB loodrecht staat op de raaklijn in P aan de hyperbool.

Aangezien ook bij overgang van rechthoekige op scheefhoekige coördinaten een tweedegraadsvorm haar graad behoudt, heeft een ellips indien de coördinaatassen langs twee toegevoegde middellijnen worden gelegd, een vergelijking van de tweede graad, welke echter vrij eenvoudig is, aangezien de termen met xy, met x en met y ontbreken.

Opg. 11. Bewijs dit.

Derhalve bezit de ellips dan de vergelijking $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, waarin a' en b' de lengten der toegevoegde middellijnen zijn.

Opg. 12. Bewijs een analoge eigenschap voor de hyperbool en voor de parabool.

Opg.13. Bewijs dat de snijpunten van twee parabolen met loodrecht op elkaar staande asrichtingen gelegen zijn op een cirkel.

Hoewel wij hier later op terugkomen, geven wij nog even aan hoe men bij de willekeurige kegelsnede K $f(z) = a_{11}x^2 + \ldots + a_{33}z^2 = 0$ de poollijn van een punt $P(x_o, y_o, z_o)$ vindt. Laat $Q(x_1, y_1, z_1)$ een punt dier poollijn zijn, dan moeten de snijpunten S_1 en S_2 van PQ en K harmonisch liggen met P en Q. Zo'n snijpunt S bezit coordinaten van de gedaante $(\lambda x_o + \mu x_1,\ \lambda y_o + \mu y_1,\ \lambda z_o + \mu z_1)$ want S ligt op PQ. Daar S ook op K ligt heeft men ook

$$(1) \qquad a_{11}(\lambda x_o + \mu x_1)^2 + \ldots + a_{33}(\lambda z_o + \mu z_1)^2 = 0.$$

In deze betrekking zijn de coëfficiënten a_{ij} en de coördinaten $x_o, y_o, z_o, x_1, y_1, z_1$ bekend te denken en dan volgen hieruit twee waarden voor de verhouding $\lambda : \mu$, die corresponderen met de 2 snijpunten van PQ en K. Zoals wij vroeger zagen, liggen die snijpunten harmonisch met P en Q als de som der verhoudingen $\frac{\lambda}{\mu}$, die deze punten bepalen, nul is, dus als de som der wortels van (1), opgevat als vierkantsvergelijking voor $\frac{\lambda}{\mu}$ gelijk aan nul is. Deze vierkantsvergelijking (1) heeft de gedaante $A\lambda^2 + B\lambda\mu + C\mu^2 = 0$ en wij hebben dus de voorwaarde $B = 0$. Deze voorwaarde zegt dus dat in (1) de coëfficiënt van $\lambda\mu$ nul moet zijn en na uitcijferen vindt men daarvoor

$$x_o x_1 a_{11} + (x_o y_1 + x_1 y_o)\, a_{12} + (x_o z_1 + x_1 z_o) a_{13} + (y_o y_1) a_{22}$$

$$+ (y_o z_1 + y_1 z_o) a_{23} + z_o z_1 a_{33} = 0 .$$

Deze uitdrukking, die symmetrisch is in de drietallen (x_o, y_o, z_o) en (x_1, y_1, z_1) is te schrijven in de gedaante

$$x_1 \frac{\partial f(x_o, y_o, z_o)}{\partial x_o} + y_1 \frac{\partial f(x_o, y_o, z_o)}{\partial y_o} + z_1 \frac{\partial f(x_o, y_o, z_o)}{\partial z_o} = 0$$

of

$$x_o \frac{\partial f(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1} + y_o \frac{\partial f(x_1, y_1, z_1)}{\partial y_1} + z_o \frac{\partial f(x_1, y_1, z_1)}{\partial z_1} = 0 .$$

Opg. 14. Laat uit de voorlaatste betrekking zien, dat de m.p. der punten Q bij gegeven P, die aan de voorwaarde der harmonische ligging der 4 punten P, Q, S_1, S_2 voldoen, een rechte is.

Opg. 15. Toon uit de gevonden resultaten nogmaals de stelling aan: Ligt Q op de poollijn p van P, dan ligt P op de poollijn q van Q.