STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 18j

Avondcursus wiskunde 1951-1952;

Projectieve en beschrijvende meetkunde, 2.

G.W. Decnop.

~~1951~~
1952

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49,
AMSTERDAM -O.

Avondcursus 1951-'52.
PROJECTIEVE EN BESCHRIJVENDE MEETKUNDE
door
Dr G.W. Deenop.

In het eerste deel van deze cursus is de projectieve meetkunde opgebouwd van axiomatisch standpunt. We zijn daarbij uitgegaan van de bekende "gewone" meetkunde van Euclides en hebben een aantal eigenschappen gevonden, die bestand bleken tegen centrale projectie. Om deze eigenschappen algemeen geldig te doen zijn, was het nodig, het Euclidische vlak uit te breiden met oneigenlijke of "oneidig verre" elementen.

Sommige van deze eigenschappen hebben we daarna als axioma's genomen voor de op te bouwen projectieve meetkunde. In de bekende meetkunde van het met oneigenlijke elementen aangevulde Euclidische vlak wordt aan deze axioma's dan vanzelf voldaan. De meetkunde van het Euclidische vlak vormt een model van de hier opgebouwde projectieve meetkunde. Omdat in de meeste leerboeken der elementaire Euclidische meetkunde het leggen van een strenge en los van de aanschouwing staande grondslag niet mogelijk is, hebben we hier de projectieve meetkunde autonoom opgebouwd, er echter voor zorgend, dat de bekende projectieve eigenschappen van het Euclidische vlak niet verloren zijn gegaan. Later zal blijken dat omgekeerd de Euclidische meetkunde streng gefundeerd kan worden, door van de projectieve meetkunde uit te gaan.

Met bepaalde soorten projectiviteiten (translaties en dilataties) hebben we bewerkingen (optellen en vermenigvuldigen) leren uitvoeren. Daarbij bleken deze projectiviteiten een commutatief lichaam L te vormen met karakteristiek $\neq 2$. Dit lichaam L - het "grondlichaam" - is van fundamenteel belang voor de meetkunde. Zo is bewezen, dat de axiomatisch opgebouwde projectieve meetkunde isomorf is met de analytische projectieve meetkunde over het grondlichaam L. Het bestaan van dit analytische model toont aan dat het stelsel axioma's niet strijdig is.

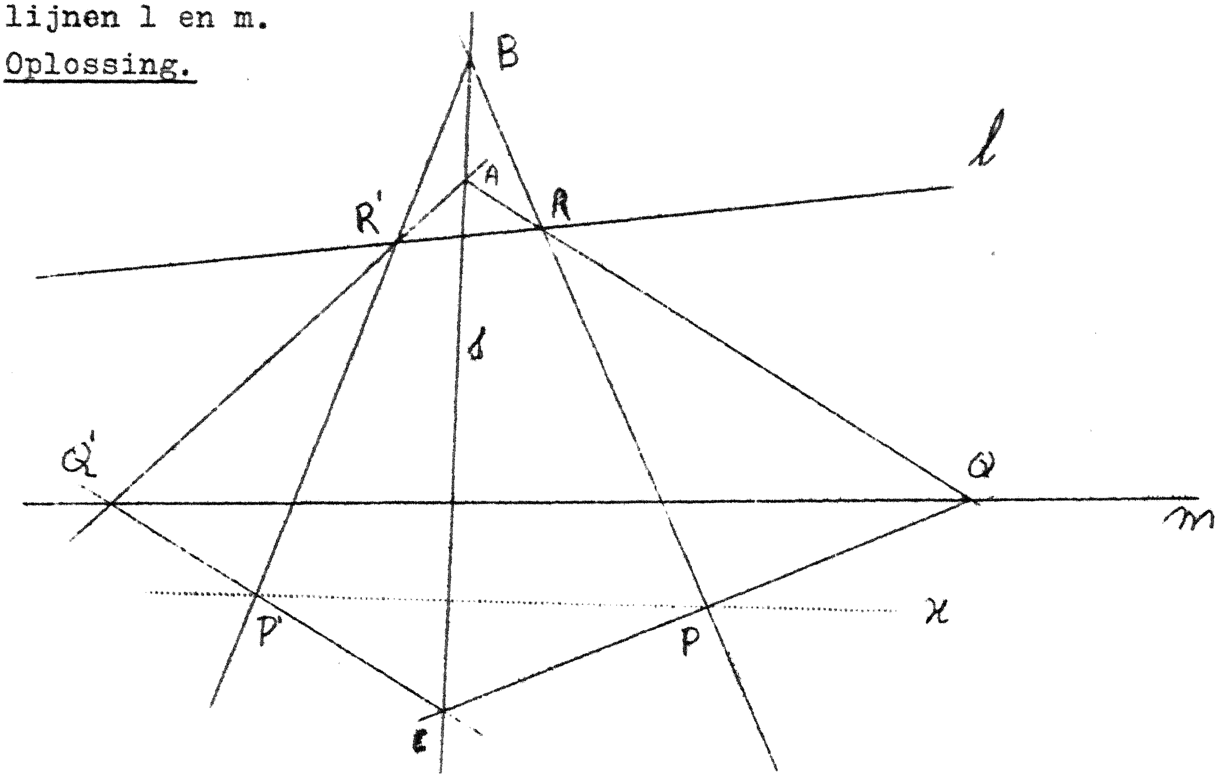
Opgave. Is met het bestaan van het Euclidische model deze niet strijdigheid van de axioma's niet reeds voldoende bewezen?

In het voorgaande werden aan L geen verdere eisen opgelegd: bij elk commutatief lichaam met een van 2 verschillende karakteristiek behoort een projectieve meetkunde. Van nu af zullen we onderstellen, dat L het lichaam der complexe getallen is, in verband met de toepassingen van de projectieve op de beschrijvende meetkunde beperken we ons ook wel tot de reële getallen.

Eveneens met het oog op de toepassingen in de beschrijvende meetkunde zullen we aan constructies in de projectieve meetkunde veel aandacht moeten besteden. Daar het vel tekenpapier eindige afmetingen heeft, zullen we moeilijkheden ondervinden van lijnen, die elkaar in punten buiten het papier (ontoegankelijke punten) snijden. We geven daarom eerst enige constructies, die met deze moeilijkheden in verband staan.

a) Een punt P te verbinden met het ontoegankelijke snijpunt van twee lijnen l en m.

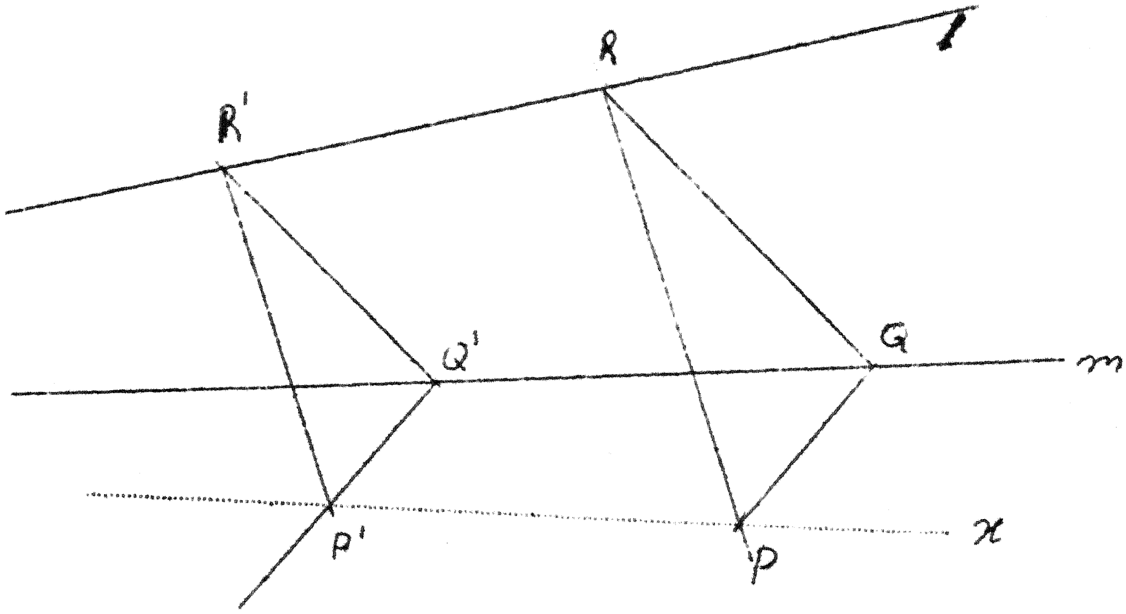
Oplossing.



Kies Q,Q' op m; R,R' op l en maak de driehoeken PQR en P'Q'R' lijnperspectief (as ABC = s).

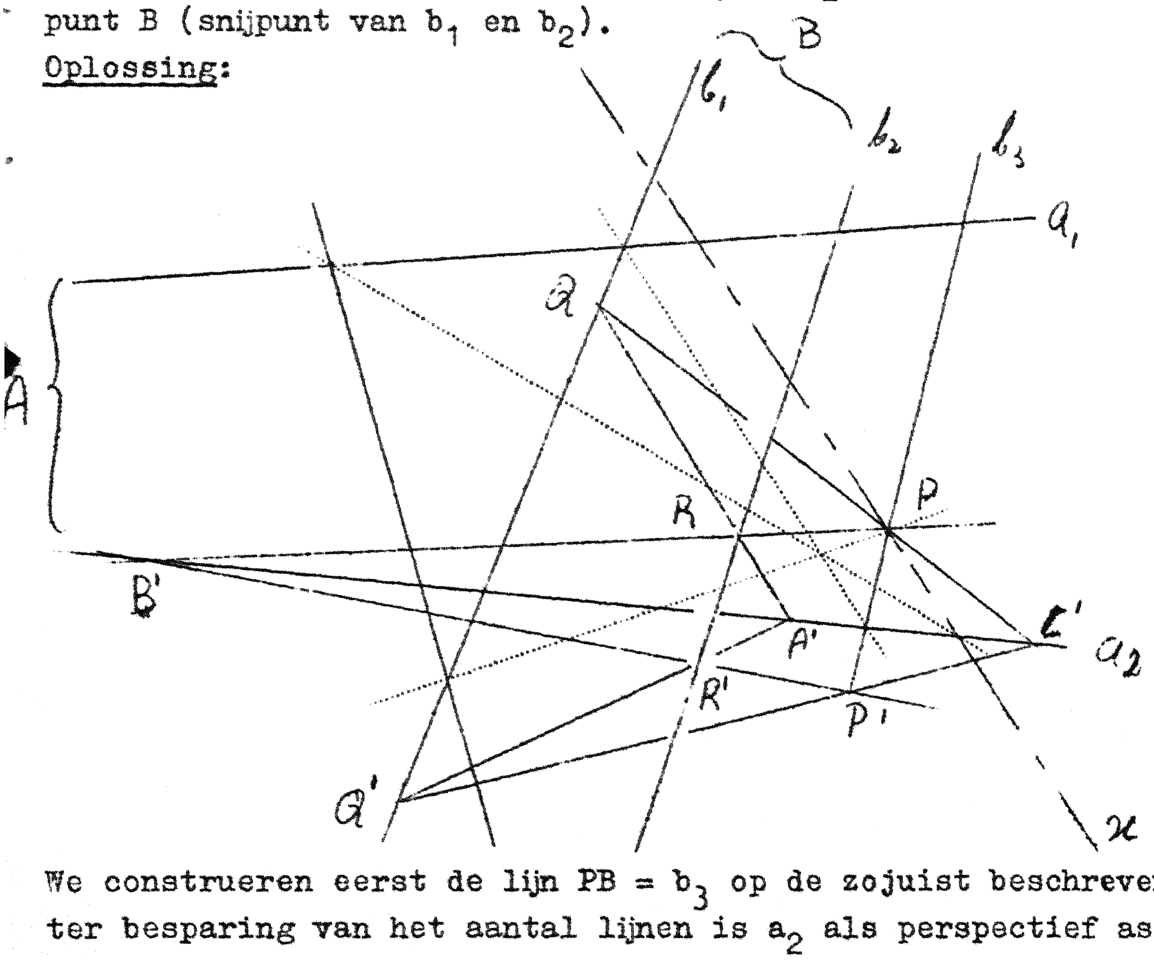
PP' = x is de gevraagde lijn.

Een bijzonder geval van deze constructie ontstaat, als we s in het oneindige kiezen; we kunnen dan m.b.v. twee tekendriehoeken evenwijdige lijnen trekken.



b) Een punt P te verbinden met het ontoegankelijke snijpunt van een lijn l en een ontoegankelijke lijn AB; de lijn AB is gegeven door het on toegankelijke punt A (snijpunt van a_1 en a_2) en het ontoegankelijke punt B (snijpunt van b_1 en b_2).

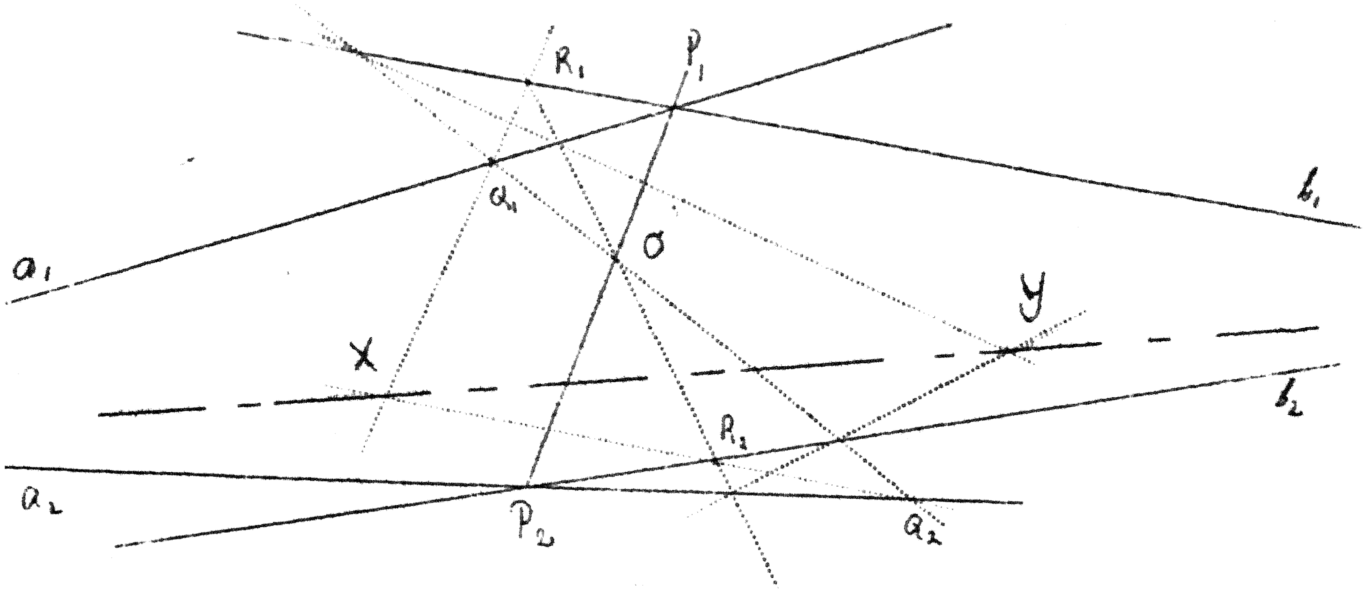
<u>Oplossing</u>:



We construeren eerst de lijn PB = b_3 op de zojuist beschreven wijze; ter besparing van het aantal lijnen is a_2 als perspectief as van de driehoeken PQR en P'Q'R' genomen.

Stelt x de gevraagde lijn door P voor, dan is de driehoek, die a_1, b_1, l tot zijden heeft lijnperspectief met de driehoek, die a_2, b_3, x tot zijden heeft (Contrôleren !). Daar deze driehoeken dan ook perspectief zijn, is van de lijn x, een tweede punt te construeren.

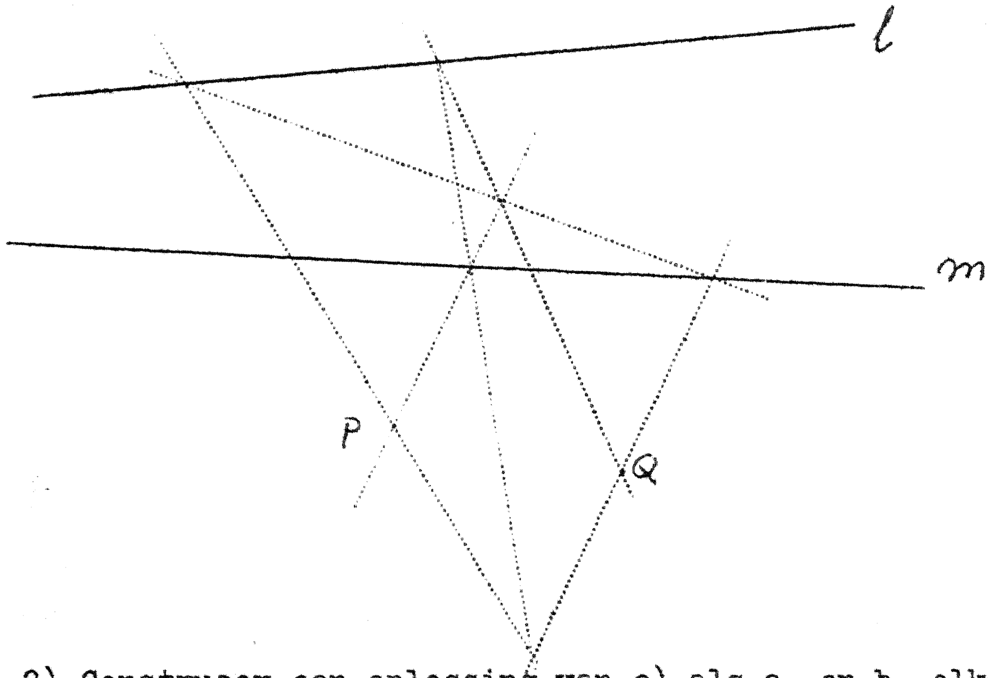
c) Twee ontoegankelijke punten A en B te verbinden.



Verbind het snijpunt P_1 van a_1 en b_1 met het snijpunt P_2 van a_2 en b_2; Kies O op deze lijn. Q_1 op a_1 en Q_2 op a_2 liggen op één lijn met O, evenals R_i op b_1 en R_2 op b_2. Daar $P_1Q_1R_1$ en $P_2Q_2R_2$ puntperspectief zijn, snijden Q_1R_1 en Q_2R_2 elkaar in een punt X van AB. Een tweede punt Y van AB is analoog te construeren.

Opgaven.

1) Bewijs dat in onderstaande figuur de lijn PQ door het snijpunt van l en m gaat. Pas dit toe om een nieuwe oplossing van a) te vinden.

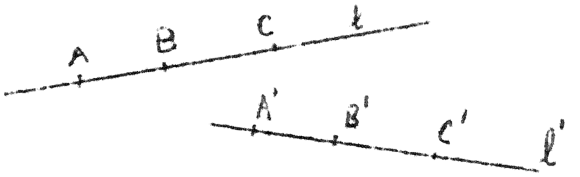


2) Construeer een oplossing van c) als a_2 en b_2 elkaar niet snijden.

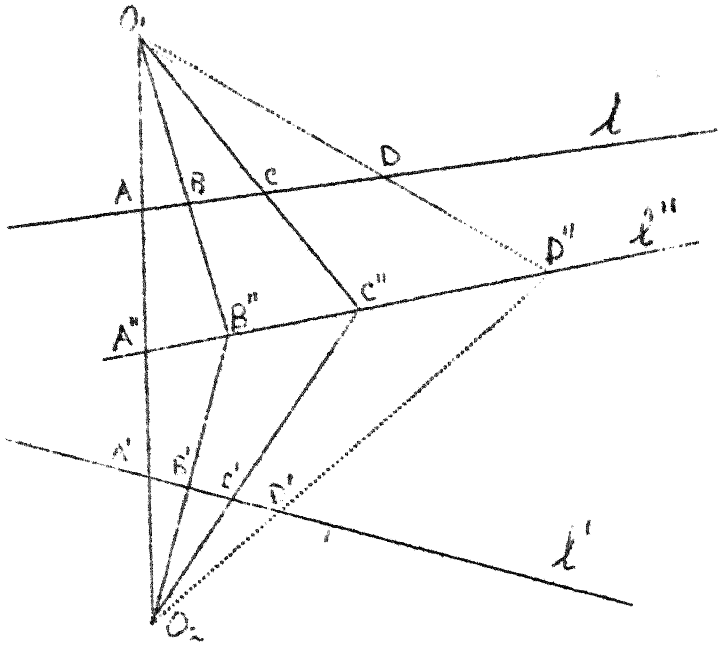
3) Verbind een punt P met het ontoegankelijke snijpunt van twee lijnen l en m, die beide door 2 ontoegankelijke punten gegeven zijn.

Al deze constructies zijn uitgevoerd <u>met de lineaal alleen.</u>

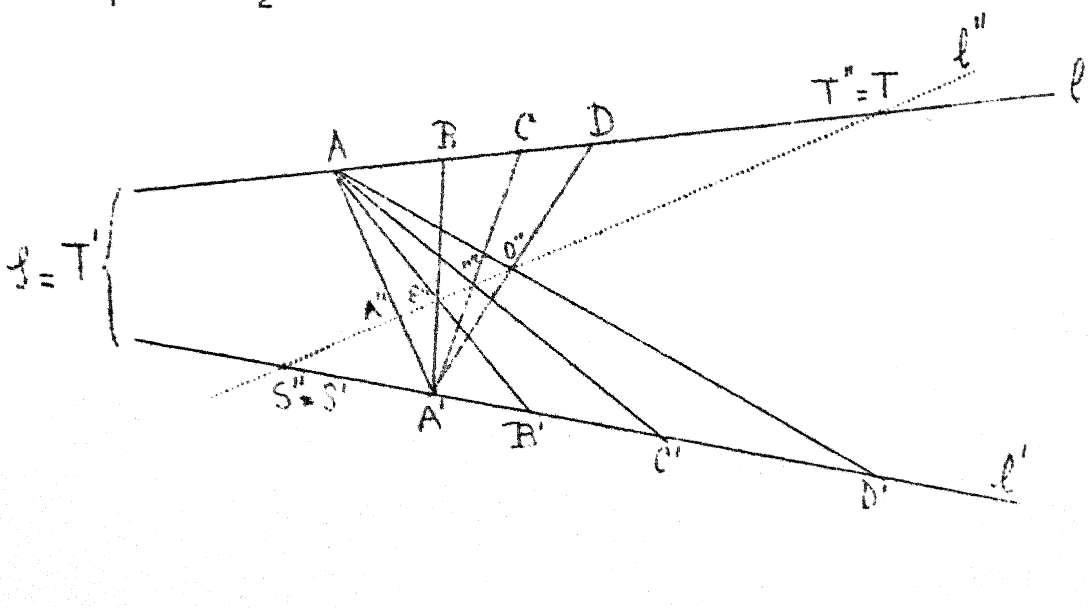
Volgens de hoofdstelling van de projectieve meetkunde wordt en projectieve betrekking tussen twee puntenreeksen eenduidig gegeven door drie punten A, B, C op l en hun beeldpunten A',B',C' op l'.



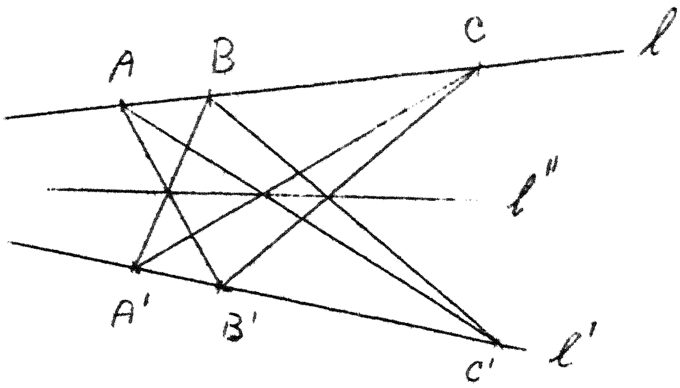
Zij D een punt van l, dan wordt een constructie van het corresponderende punt D' van l' gevraagd.



Door centrale projectie vanuit twee centra O_1 en O_2 van AA' gaan de projectieve puntreeksen (ABCD....), (A'B'C'D'....) over in de perspectieve lijnenwaaiers O_1(ABCD....), O_2(A'B'C'D'....). (Waarom <u>perspectief</u>?) D' wordt gevonden door de projectie D" van D uit O_1 op l' vanuit O_2 te projecteren. De constructie kan worden vereenvoudigd door O_1 = A, O_2 = A' te nemen.

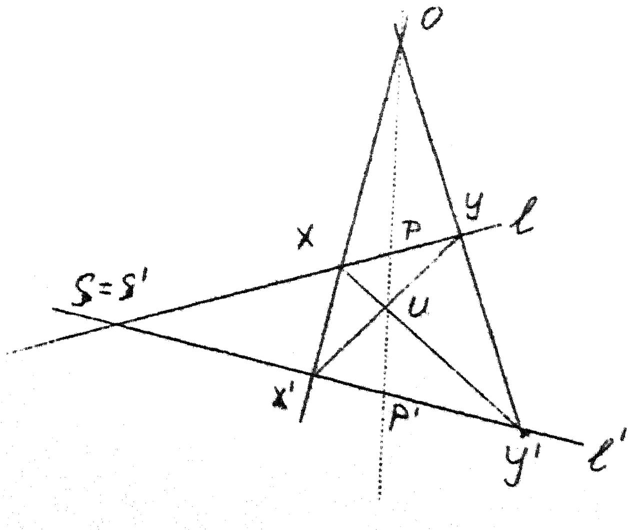


A'D en AD' snijden elkaar op de perspectiefas l''.
Zij S het punt van de puntreeks van l, dat op l' ligt S'' = S' is dan het snijpunt van l'' met l'. Is T' het punt van de puntreeks van l' dat op l ligt (de punten S en T' vallen uiteraard samen), dan is T'' =T het snijpunt van l'' met l. De perspectief-as l'' verbindt dus de punten van l' en l, die overeenkomen met het snijpunt van l en l', eenmaal als punt van l en eenmaal als punt van l' beschouwd. Hieruit volgt dat l'' alleen van de projectieve puntreeksen zelf afhangt en niet van de keuze van A en A' als projectie-centra. Zijn X en Y dus twee punten van l, X' en Y' hun corresponderende op l', dan snijden XY' en X'Y elkaar dus op de <u>vaste lijn</u> l''. Passen we deze stelling drie maal toe op de punten A,B,C en hun beeldpunten A',B',C', dan ontstaat de vroeger op enigszins andere wijze afgeleide stelling van Pappus



l'' = Pappusrechte.

Het bewijs van de hiervoorgenoemde constructie en van de stelling van Pappus is niet meer geldig, als de lijn l'' door de punten S' en T niet ondubbelzinnig bepaald wordt, dus als S' = T, dus S = S'= T = T'. De puntreeksen zijn dan perspectief: AA' en BB' snijden elkaar in het perspectiefcentrum O. Het punt D' ontstaat door D vanuit O op l' te projecteren. Dat ook nu XY' en X'Y elkaar op een vaste rechte l'' snijden blijkt als volgt:



In de volledige vierhoek XX'YY' zijn U en O twee snijpunten van paren overstaande zijden. Hieruit volgt dat OU en PP' harmonisch liggen, dus SU, SO scheiden de stralen SP, SP' harmonisch.
SU is dus een vaste lijn l''.

Een belangrijk geval van projectieve puntreeksen doet zich voor als de dragers samenvallen (collocale puntreeksen). Door één der puntreeksen op een hulprechte te projecteren, wordt de constructie van beeldpunten tot het vorige teruggebracht. Bij collocale puntreeksen kan het voorkomen, dat een punt met zijn beeldpunt samenvalt. Valt de projectieve transformatie van de rechte lijn niet met de identiteit samen, dan kunnen er hoogstens 2 van zulke dekpunten zijn (Waarom?) Om het aantal dekpunten nader te onderzoeken maken we van coördinaten gebruik.
Volgens (12) (pag 29) wordt een collocale projectieve transformatie van puntreeksen analytisch gegeven door de homogene lineaire transformatie.

$$\xi_1' = \alpha \xi_1 + \beta \xi_0$$
$$\xi_0' = \gamma \xi_1 + \delta \xi_0 \quad \text{waarin} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

Een dekpunt ontstaat wanneer $\xi_1' = \lambda \xi_1$, $\xi_0' = \lambda \xi_0$
zodat voldaan moet worden aan

$$(\alpha - \lambda)\xi_1 + \beta \xi_0 = 0$$
$$\gamma \xi_1 + (\delta - \lambda)\xi_0 = 0$$

Dit stelsel heeft alleen andere dan de (onbruikbare) nuloplossing als $\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = 0$; deze vierkantsvergelijking in λ bepaalt het aantal dubbelpunten. Is L het lichaam der complexe getallen, dan heeft elke vierkantsvergelijking precies 2 wortels, die eventueel kunnen samenvallen. Twee collocale projectieve puntreeksen hebben dus altijd twee dekpunten,

Opgaven.

1) Hoe luidt bovenstaande stelling, indien voor L het lichaam gekozen wordt,
   a) der rationale getallen
   b) " reële getallen
   c) " algebraische getallen
   d) " restklassen mod. 5 ?

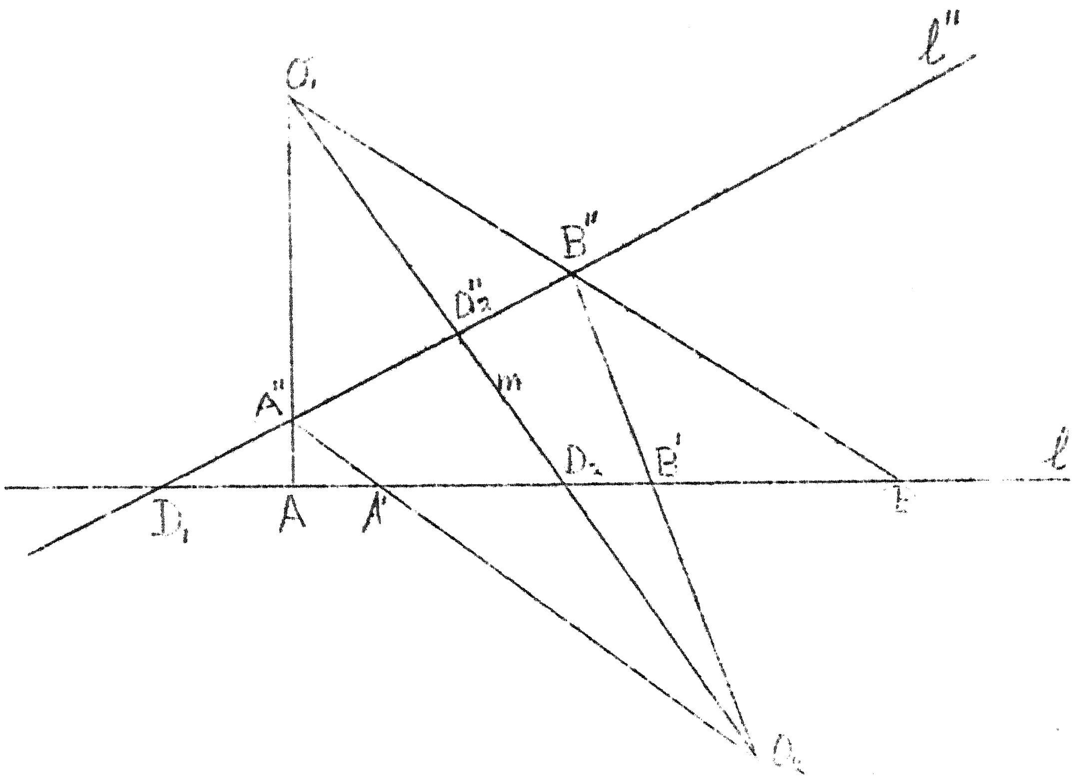
2) Wat zijn de dekpunten van de volgende transformaties van de getallenrechte?
   a) $x' = ax$
   b) $x' = x + b$
   c) $x' = \frac{1}{x}$.

Zijn de verhoudingen van coördinaten van een punt P de toegevoegde complexen van die van de coördinaten van het punt Q, dan heten de punten P en Q zelf toegevoegd complex; zijn de verhoudingen van de coördinaten van P reëel, dan heet P een reëel punt. Zijn van twee

projectieve collocale puntreeksen de reële punten aan elkaar toegevoegd, dan is de transformatiematrix reëel.
De vierkantsvergelijking in λ, waaruit de dekpunten bepaald worden (de zg. eigenwaardenvergelijking) heeft dan reële coëfficienten, zodat de twee wortels (de zg. eigenwaarden) verschillend en reëel, samenvallend en reëel, of toegevoegd complex zijn. Ook de dekpunten zijn dan verschillend en reëel, samenvallend en reëel of toegevoegd complex.

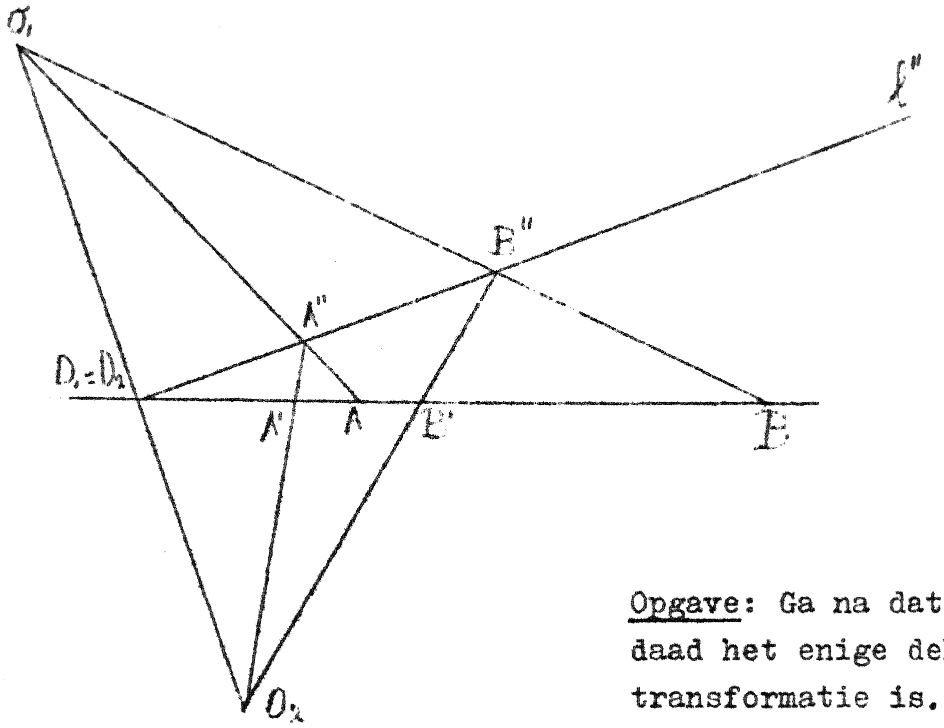
Een projectieve betrekking tussen twee collocale puntreeksen kan gegeven worden door de twee dekpunten D_1 en D_2 en een punt A met zijn beeld A'. (Waarom is de transformatie hierdoor ondubbelzinnig bepaald?) Van een punt B wordt dan het beeld gevraagd.

Oplossing:



Vanuit een punt O_1 projecteren we de puntreeks (D_1D_2A B....) op een rechte l''. De ontstane puntreeks (D_1'' D_2'' A''B''....) is perspectief met (D_1' D_2' A'B'....), omdat de corresponderende punten D_1'' en D_1', samenvallen. Heeft men het centrum O_2 geconstrueerd, dan is B' de projectie van B'' op l.
In bovenstaande figuur is $(D_1D_2AA') = (D_2''D_2O_1O_2)$ zoals blijkt door l vanuit A'' op m te projecteren. Projecteren we terug op l vanuit B'' dan blijkt $(D_2''\ D_2O_1O_2) = (D_1D_2BB')$ Hieruit volgt: Zijn X en X' twee toegevoegde punten in de projectieve betrekking, dan is (D_1D_2XX') constant. Door D_1, D_2 en die constante is de betrekking omgekeerd in het algemeen ondubbelzinnig bepaald, daar X' eenduidig uit X volgt.

Bovenstaande constructie geldt niet als de dekpunten samenvallen. Hiervoor dient onderstaande figuur:



Opgave: Ga na dat $D_1 = D_2$ inderdaad het enige dekpunt van de transformatie is.

Daar de transformatie hier niet gegeven is door drie punten en hun beeldpunten, moet bewezen worden, dat B' niet van de keuze van O_1, O_2 en l'' afhangt.

Bewijs: We projecteren l eerst uit B'' op O_2A'', dan de projectie weer uit O_1 op l terug. Zo blijkt (DA' BB') = (AA' BD), zodat de ligging van B' alleen van D, A, A' en B afhangt.

Ook hier is (D_1D_2XX') constant; deze constante bepaalt de projectieve betrekking echter niet eenduidig.

Opgave: Bepaal de waarde (D_1D_2XX') voor het geval dat $D_1 = D_2$.

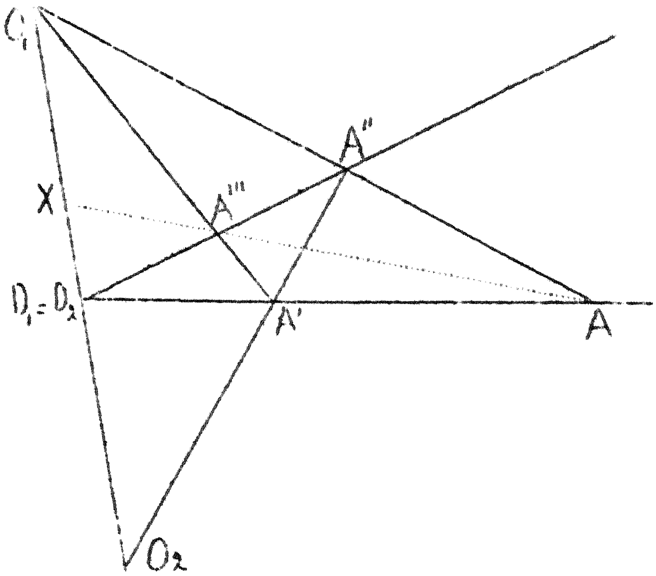
Definitie 1: Een transformatie T heet involutorisch, als $T = T^{-1}$
Een involutorische projectieve betrekking tussen twee collocale puntreeksen heet een involutie: de dekpunten van een involutie heten de dubbelpunten.

Is in een involutie A' het beeld van A, dan is A het beeld A'. Heeft de involutie 2 verschillende dubbelpunten, dan is $(D_1D_2AA') = (D_1D_2A'A)$, zodat deze DV gelijk aan -1 is.

Vandaar def. 2: Een involutie is de verzameling van puntenparen, die met één vast puntenpaar harmonisch liggen. De twee punten van elk paar heten in de involutie aan elkaar toegevoegd.

We zullen onderzoeken in hoeverre deze definities gelijkwaardig zijn. Zijn de dubbelpunten verschillend, dan volgt uit def. 1 zeker def. 2, maar ook omgekeerd. Gaan we nu dus na in hoeverre involuties met samenvallende dubbelpunten mogelijk zijn.

Volgens def. 1, moet A' het beeld van A en A het beeld van A' zijn, d.w.z.



AA''' moet door O_2 gaan. Daar volgens de constructie X en O_2 harmonisch liggen met O_1 en D_{12} vallen volgens axioma D (blz. 8 vorige cursus) X en O_2 <u>niet</u> samen. Dit betekent: een met zichzelf inverse projectieve betrekking tussen twee collocale puntreeksen kan geen samenvallende dubbelpunten bezitten.

Is $D_1 = D_2$ en A een willekeurig onder punt, dan is het enige punt A', dat aan $(D_1D_2AA') = -1$ voldoet het dubbelpunt zelf. (Voor elk ander punt is deze D.V. nl. +1). Zelfs is $(D_1D_2A\ D_{12})$ volkomen onbepaald. Volgens def. 2 bestaat een puntenpaar uit een involutie met samenvallende dubbelpunten dus uit dit dubbelpunt, aangevuld met een willekeurig ander punt van de rechte. Aan elk punt van de rechte behalve het dubbelpunt D, wordt D toegevoegd; het toegevoegde van D zelf is onbepaald. Deze transformatie is ontaard: D heeft geen beeldpunt en de transformatie heeft geen inverse, dus valt zeker niet onder def. 1. Toch beschouwen we ook deze ontaarde transformatie als involutie, zodat def. 2 alle gevallen omsluit, def. 1 echter niet geheel.

Voegt een involutie aan reële punten reële punten toe, dan hebben we de volgende drie mogelijkheden:

a) Twee verschillende reële dubbelpunten		<u>hyperbolische</u> involutie.
b) Twee samenvallende reële	"	<u>Parabolische</u> (Ontaarde) involutie.
c) Twee toegevoegd complexe	"	<u>Elliptische</u> involutie.

Analytisch.

De transformatie
$$\rho\xi_1' = \alpha\xi_1 + \beta\xi_0$$
$$\rho\xi_0' = \gamma\xi_1 + \delta\xi_0$$
is door eliminatie van ρ te schrijven als
$$\alpha\xi_1\xi_0' + \beta\xi_0\xi_0' - \gamma\xi_1\xi_1' - \delta\xi_0\xi_1' = 0$$
Zijn origineel- en beeldpunt te verwisselen, dan moet dit hetzelfde zijn als
$$\alpha\xi_0\xi_1' + \beta\xi_0\xi_0' - \gamma\xi_1\xi_1' - \delta\xi_1\xi_0' = 0,$$
zodat
$$(\alpha+\delta)(\xi_1\xi_0' - \xi_0\xi_1') = 0$$
Is de tweede factor nul, dan is de transformatie de identiteit, zodat een involutie gekenmerkt wordt door $\alpha + \delta = 0$. De transformatie wordt (in enigszins andere schrijfwijze) dan gegeven door
$$a_{00}\xi_0\xi_0' + a_{01}(\xi_0\xi_1' + \xi_1\xi_0') + a_{11}\xi_1\xi_1' = 0 \qquad \text{(A)}$$
d.w.z. door een symmetrische bilineaire betrekking.
De dubbelpunten volgen uit

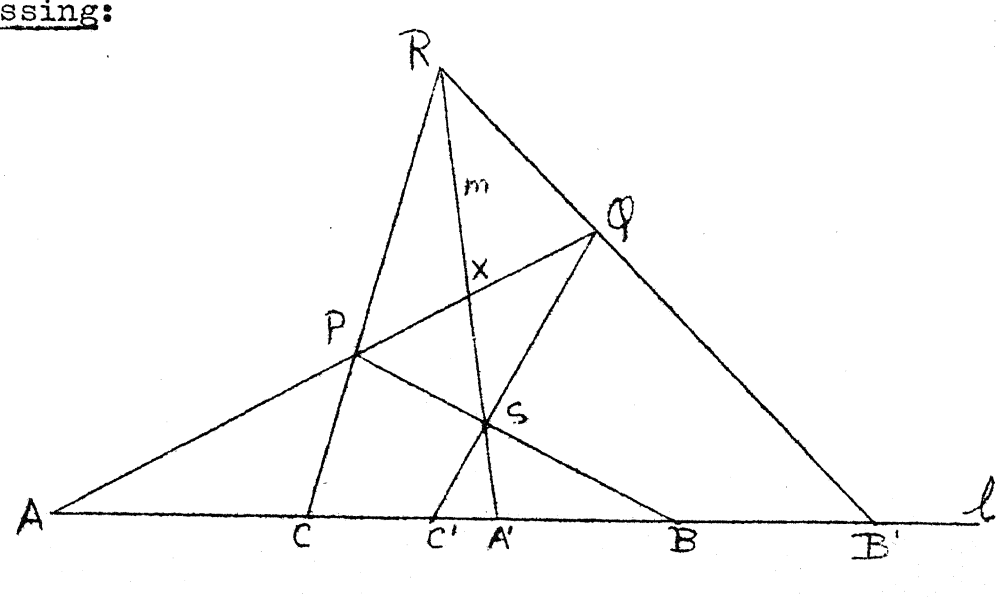
$a_{01}^2 - a_{00}a_{11} > 0 \longrightarrow$ hyperbolische involutie.
$a_{01}^2 - a_{00}a_{11} = 0 \longrightarrow$ parabolische involutie
$a_{01}^2 - a_{00}a_{11} < 0 \longrightarrow$ elliptische involutie.

In het parabolische geval is (A) te ontbinden:
$$(a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1)(a_{00}\xi_0' + a_{01}\xi_1') = 0$$
Is de eerste factor nul, dan valt het origineel in het dubbelpunt, het beeldpunt is onbepaald; is de 1^e factor $\neq 0$, dan is het beeldpunt in het dubbelpunt gelegen.

Opgave: Ga na dat door $a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1 = 0$ inderdaad het dubbelpunt van de parabolisch involutie bepaald wordt.

Gegeven: A_1A' en BB' zijn twee puntenparen van een involutie. Men vraagt het toegevoegde van een punt C te construeren. (Waarom is door twee puntenparen een involutie reeds bepaald?)

Oplossing:



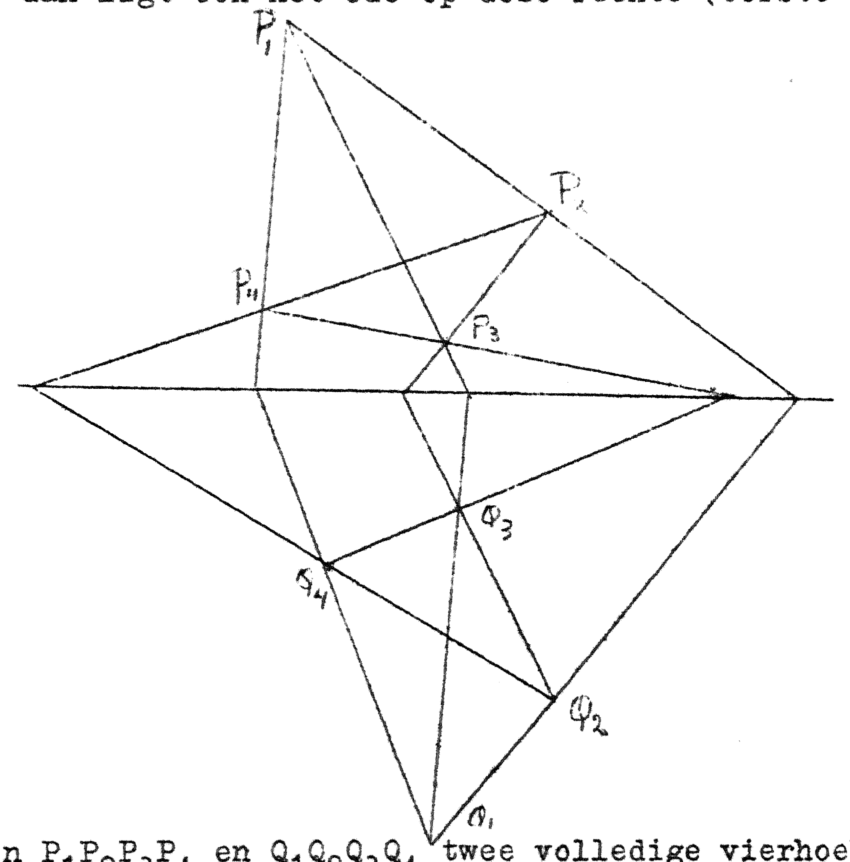
door projectie van l uit P op m en daarna uit Q terug op l blijkt
(AA' BC) = (XA' SR) = (AA' C'B').
Daar echter (AA'C'B') = (A'AB'C') is blijkbaar de D.V. van de 4 punten AA'BC gelijk aan die van de 4 punten A'AB'C', zodat C' het beeldpunt is van C.

Uit bovenstaande constructie volgt een belangrijke stelling betreffende de volledige vierhoek. Beschouwen we nl. de vierhoek PQRS als gegeven, dan snijdt l de overstaande zijden PQ,RS; PS,QR en PR,QS in de puntenparen A,A'; B,B' en C,C'. Dus:
Een willekeurige rechte l snijdt de overstaande zijden van een volledige vierhoek volgens drie puntenparen van een involutie.

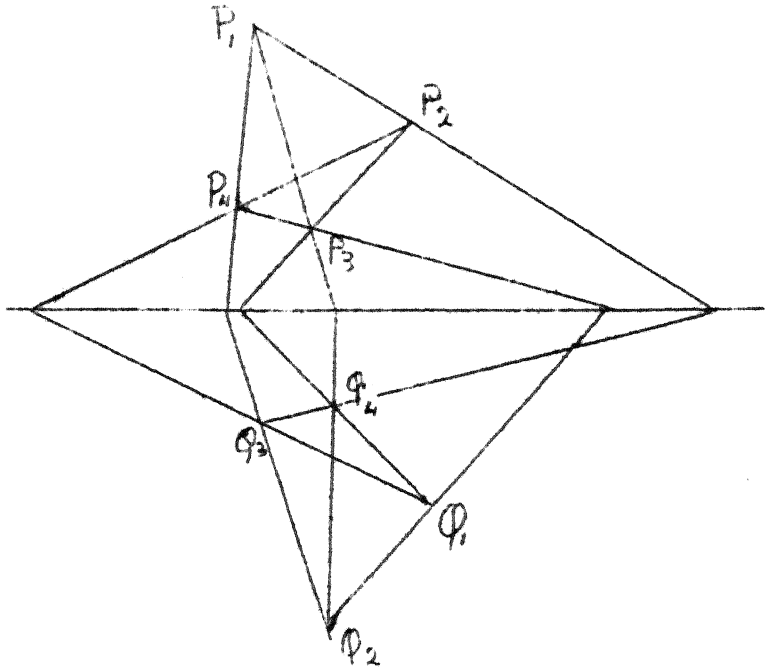
Opgaven:

1) Formuleer en bewijs de duale stelling.
2) Waarin gaat bovengenoemde stelling over, als l door twee diagonaalpunten van de volledige vierhoek gaat.

Gevolgen van bovenstaande stelling:
I) zijn $P_1P_2P_3P_4$ en $Q_1Q_2Q_3Q_4$ twee volledige vierhoeken en liggen van de 6 snijpunten van de zijden P_iP_k en Q_iQ_k (i,k = 1,2,3,4) er 5 op één rechte, dan ligt ook het 6de op deze rechte (eerste vierhoeksstelling)



II) Zijn $P_1P_2P_3P_4$ en $Q_1Q_2Q_3Q_4$ twee volledige vierhoeken en liggen van de 6 snijpunten van de zijden P_iP_k en Q_lQ_m (iklm = perm 1,2,3,4) er 5 op één rechte, dan ligt ook het 6de op deze rechte (tweede vierhoeksstelling)



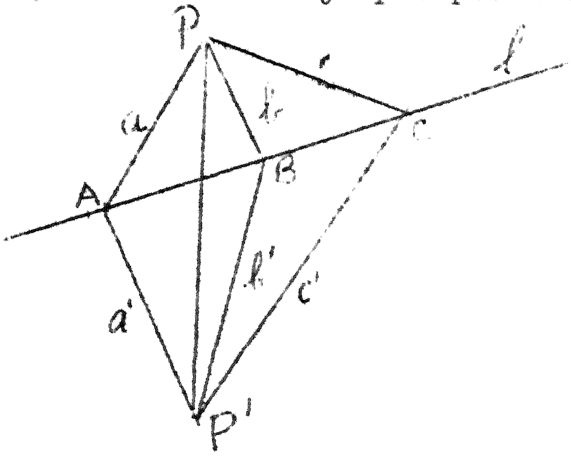
<u>Opgaven</u>.

1) Bewijs beide stellingen.

2) Laat zien, dat de twee stellingen niet identiek zijn, dus dat door andere nummering der hoekpunten van één der vierhoeken niet de ene stelling in de ander kan worden overgevoerd.

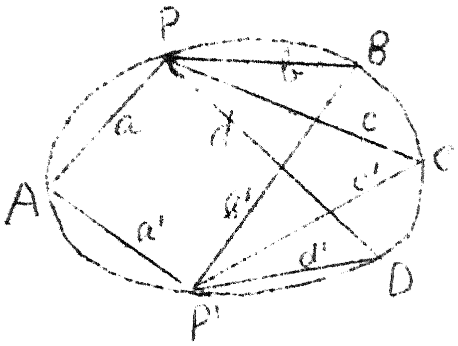
Zijn twee projectieve lijnenwaaiers gegeven met de punten P en P' tot top, dan vormen de punten, die corresponderende stralen uit beide waaiers gemeen hebben, een kromme γ. We onderscheiden twee gevallen:

I. De waaiers zijn perspectief. De straal PP' uit de waaier (P)



komt overeen met de straal P'P uit de waaier (P'). De lijn PP' behoort dan geheel tot γ. Corresponderende stralen van de waaiers snijden elkaar steeds op een vaste lijn l, die dus eveneens geheel tot γ behoort. γ bestaat hier dus uit twee rechte lijnen, is <u>ontaard</u>.

II. De waaiers zijn niet perspectief; γ bevat nu geen rechte lijn.



<u>Opgave</u>. Bewijs dit volledig. Daar geval I voldoende bekend is, beschouwen we verder uitsluitend geval II.

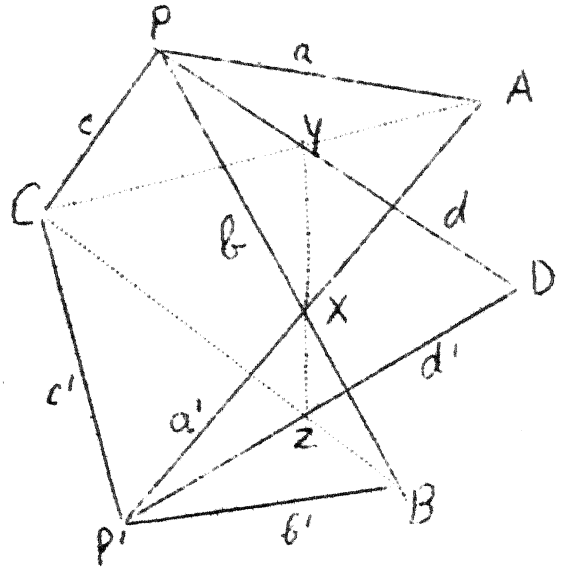
Op een willekeurige lijn s, die geen der punten P,P' bevat, wordt door de waaiers (P), (P') twee projectieve puntreeksen uitgesneden. Daar deze twee (al of niet samenvallende) dekpunten bezitten, heeft s met γ juist twee (al of niet samenvallende) snijpunten. Met de lijn PP'= p komt een zekere straal p' uit de waaier (P') overeen; met de lijn P'P = q' komt een zekere straal q uit de waaier (P) overeen. De punten P en P' behoren dus ook tot γ; we noemen deze punten de <u>fundamentaalpunten</u> van γ.

De lijnen p' en q noemen we <u>raaklijnen</u> aan γ; een P en P' niet bevattende lijn s heet een raaklijn, als de twee snijpunten van s met γ samenvallen. We hebben dan bewezen:

Elke rechte snijdt γ in twee verschillende punten of raakt aan γ. We noemen γ daarom een kromme van de <u>2^e graad</u>.

<u>Opgave</u>. Wat is de gedaante van γ als de twee lijnenwaaiers rechtstreeks congruent zijn?

Een kromme γ van de 2^e orde wordt door de 2 fundamentaalpunten P,P' en drie andere punten A,B,C ondubbelzinnig bepaald, daar dan immers de projectiviteit tussen de lijnenwaaiers (P) en (P') door drie stralen met hun beeldstralen gegeven is. Willekeurig veel punten van γ zijn nu te construeren. Om de met een straal d van de waaier (P) corresponderende straal d' van de waaier (P') te construeren, snijden we de twee waaiers respectievelijk met AC en BC. Daar in de aldus ontstane projectieve puntreeksen het punt C met zichzelf overeenkomt, zijn deze reeksen perspectief; X is het perspectiefcentrum.



De snijpunten Y en Z van d met AC en van d' met BC liggen dus op één rechte met X.
De paren overstaande zijden van de zeshoek PBCAP'DP snijden elkaar in drie punten van een rechte lijn. Deze ligging geven we hier aan met het symbool $\binom{PP'C}{ABD}$; om overstaande zijden van de zeshoek te verkrijgen moeten we twee punten van het bovenste drietal kruiselings verbinden met de er recht onder staande punten van het onderste drietal.

We hebben dan de volgende stelling bewezen:
De punten ABCDPP' liggen dan en slechts dan op een kromme van de tweede graad, die P, P' tot fundamentaalpunten heeft, als $\binom{PP'C}{ABD}$.
Daar dit gelijkwaardig is met $\binom{ABD}{PP'C}$ liggen de 6 punten dan ook op een kromme van de tweede graad met A,B tot fundamentaalpunten. Daar beide krommen door A,B,C,P,P' eenduidig bepaald zijn, zijn ze identiek. Dit betekent dat de fundamentaalpunten geen bijzondere rol spelen, dus dat elke twee punten van een kromme van de tweede graad als fundamentaalpunten gekozen kunnen worden, om de kromme voort te brengen. Tevens hebben we bewezen de stelling van Pascal.
Zijn ABCDEF 6 punten van een kromme van de tweede graad, dan geldt $\binom{ABC}{DEF}$ en omgekeerd.
De rechte, die de snijpunten van de overstaande zijden van een in γ beschreven zeshoek verbindt, heet de Pascallijn van die zeshoek.

OPGAVEN.

1. Als de volgorde van 6 punten van γ niet gegeven is, hoeveel Pascallijnen behoren er dan bij deze 6 punten?
2. Laat zien, dat de stelling van Pascal ook geldt voor ontaarde krommen van de tweede graad.
3. Bewijs: Als van twee driehoeken ABC en A'B'C' de corresponderende zijden elkaar in drie punten van een rechte snijden, dan snijden niet-corresponderende zijden elkaar in 6 punten van een kromme van de tweede graad.

Ook bij de definitie van raaklijn hebben de fundamentaalpunten een speciale rol vervuld. We zullen laten zien, dat het raaklijnbegrip onafhankelijk van de keuze der fundamentaalpunten is.

We onderscheidden twee soorten raaklijnen:

1) door geen der fundamentaalpunten,

2) door één der fundamentaalpunten (stel door P').

Een raaklijn s van de eerste soort is een lijn, waarop de projectieve puntreeksen, die ontstaan door de punten van γ vanuit de fundamentaalpunten op s te projecteren, twee samenvallende dekpunten hebben; s heeft met γ juist één punt gemeen. Een raaklijn s van de tweede soort door P' is het beeld van de lijn PP' door P. P' is het enige punt op s van γ, want anders zou de lijn s met twee verschillende lijnen uit de waaier (P) overeen moeten komen. Een andere lijn door P' komt overeen met een van PP' verschillende lijn door P; deze lijnen snijden elkaar in een van P' verschillend punt van γ.

We kunnen dus de volgende equivalente raaklijndefinitie opstellen:

Een lijn s raakt dan en slechts dan aan een kromme γ van de tweede graad, als s met γ juist één punt (het <u>raakpunt</u>) gemeen heeft. Inderdaad blijkt dit onafhankelijk te zijn van de fundamentaalpunten.

<u>OPGAVEN</u>.

1. <u>Bewijs</u>: door elk punt van γ gaat precies één raaklijn.
2. Zijn de twee boven gegeven raaklijndefinities ook equivalent, als het grondlichaam L dat der reële getallen is?

Het voorgaande is geheel te dualiseren door de woorden punt en lijn te verwisselen. De verbindingslijnen der corresponderende punten van twee projectieve (maar niet perspectieve) puntreeksen op twee verschillende dragers, vormen een lijnenverzameling, die we een kromme van de <u>tweede klasse</u> noemen. Door elk punt P van het vlak gaan twee lijnen van de verzameling, die al of niet samenvallen; vallen de lijnen samen, dan heet P een <u>raakpunt</u> van de kromme van de tweede klasse.

Verder geldt:

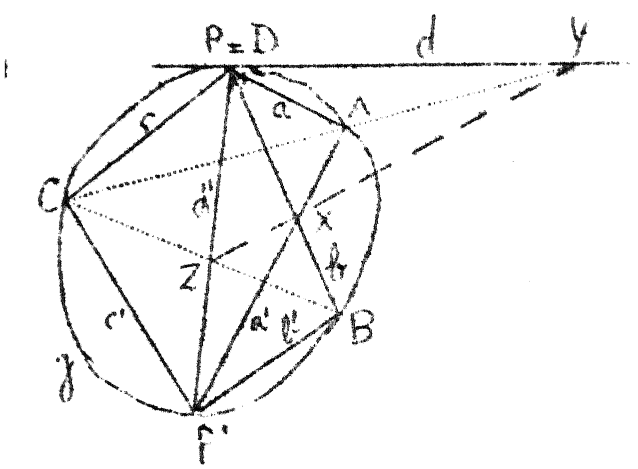
Behoren van een zeszijde abcdef alle 6 zijden tot een kromme van de tweede klasse, dan gaan de verbindingslijnen van de 3 paar overstaande hoekpunten door één punt (<u>Brianchonpunt</u>). Deze stelling van <u>de Brianchon</u> is het duale van de stelling van Pascal.

<u>OPGAVEN</u>.

1. Bewijs de stelling van de Brianchon, door het bewijs van de stelling van Pascal te dualiseren.
2. Wat is een <u>ontaarde</u> kromme van de tweede klasse?
3. Formuleer en bewijs het duale van de stelling, genoemd in opgave 3, op blz. 56.

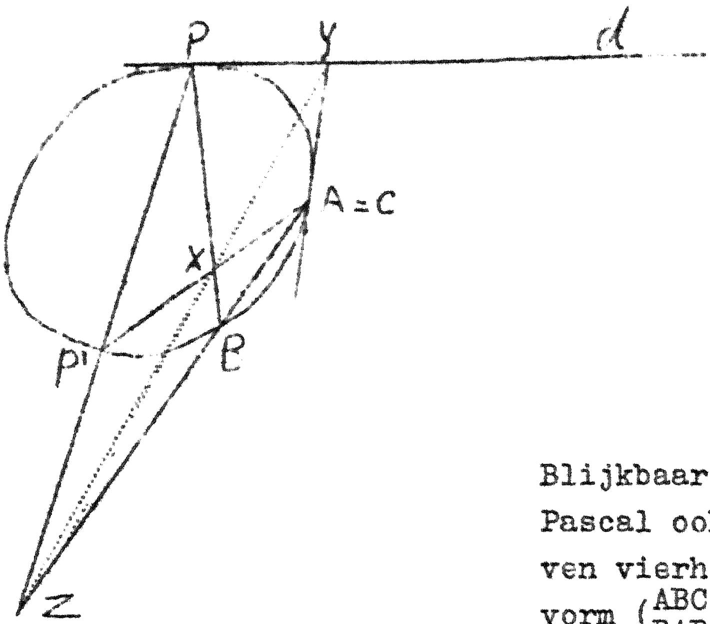
De definitie van een raaklijn in een punt P van een kromme van de tweede graad is het eenvoudigst te geven, wanneer dit punt tot fundamentaalpunt is gemaakt. Belangrijk is hierbij op te merken, dat deze definitie niet steunt op een limietovergang, doch zelfs op dezelfde wijze gegeven zou kunnen worden, indien het grondlichaam slechts een eindig aantal elementen bevat, waarbij het begrip continuiteit geen zin heeft.

De in de vorige figuur gedemonstreerde constructie van de corresponderende stralen d en d' uit de projectieve waaiers (P) en (P') leert ons ook de raaklijn in P vinden, als we d' = P'P kiezen. In dat geval valt D in P; overigens is de figuur hetzelfde. We zullen XYZ ook hier de Pascallijn van de zeshoek PBCAP'DP noemen; we spreken hiervoor of dat we met de zijde PD, die twee samenvallende punten van γ verbindt, de <u>raaklijn</u> in P bedoelen. De stelling van Pascal voor een in γ beschreven vijfhoek ABCDE luidt dus $\binom{ABC}{DAE}$.



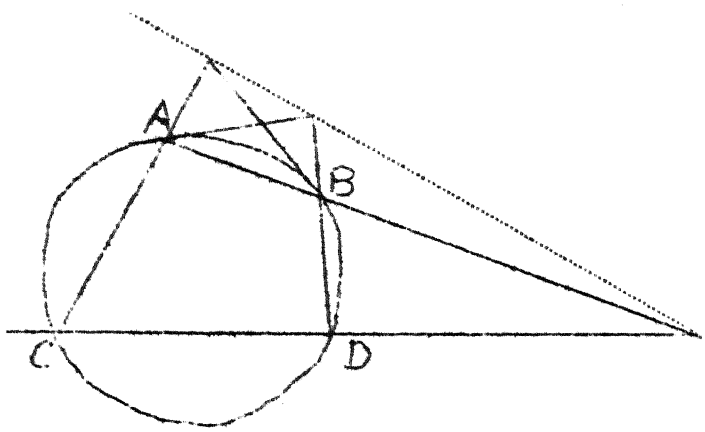
<u>Opgave</u>. Gelden $\binom{AAB}{CDE}$ en $\binom{ABC}{ADE}$ hier ook?

Behalve door 5 punten is een kromme van de tweede graad ook eenduidig te bepalen door 4 punten en de raaklijn in één dier punten. Zijn n.l. P,P',A,B en de lijn d gegeven, dan is een punt C op een gegeven lijn door A als in de vorige figuur te construeren. De kromme γ van de tweede graad, die P,P',A,B,C bevat, zal volgens het voorgaande d tot raaklijn hebben. Het is bovendien de enige kromme met deze eigenschap. Kiezen we n.l. een ander punt c' van AC, dan verandert Z, dus dan zal ZX de lijn AC in een van Y verschillend punt snijden. Hieruit volgt dat de stelling van Pascal ook kan dienen om van γ, gegeven door 4 punten en de raaklijn in één dier punten, andere punten te construeren. Hadden we voor de gegeven lijn door A de raaklijn in A gekozen, dan had de constructie dus C = A op moeten leveren.



Blijkbaar geldt de stelling van Pascal ook voor een in γ beschreven vierhoek ABCD en wel in de vorm $\binom{ABC}{BAD}$.

Door eenzelfde redenering toe te passen op het geval dat γ door 4 punten en de raaklijn in één dier punten gegeven is, echter niet AC doch BC als gegeven beschouwend, blijkt. Voor een in γ beschreven vierhoek ABCD geldt ook $\binom{ABC}{DAB}$

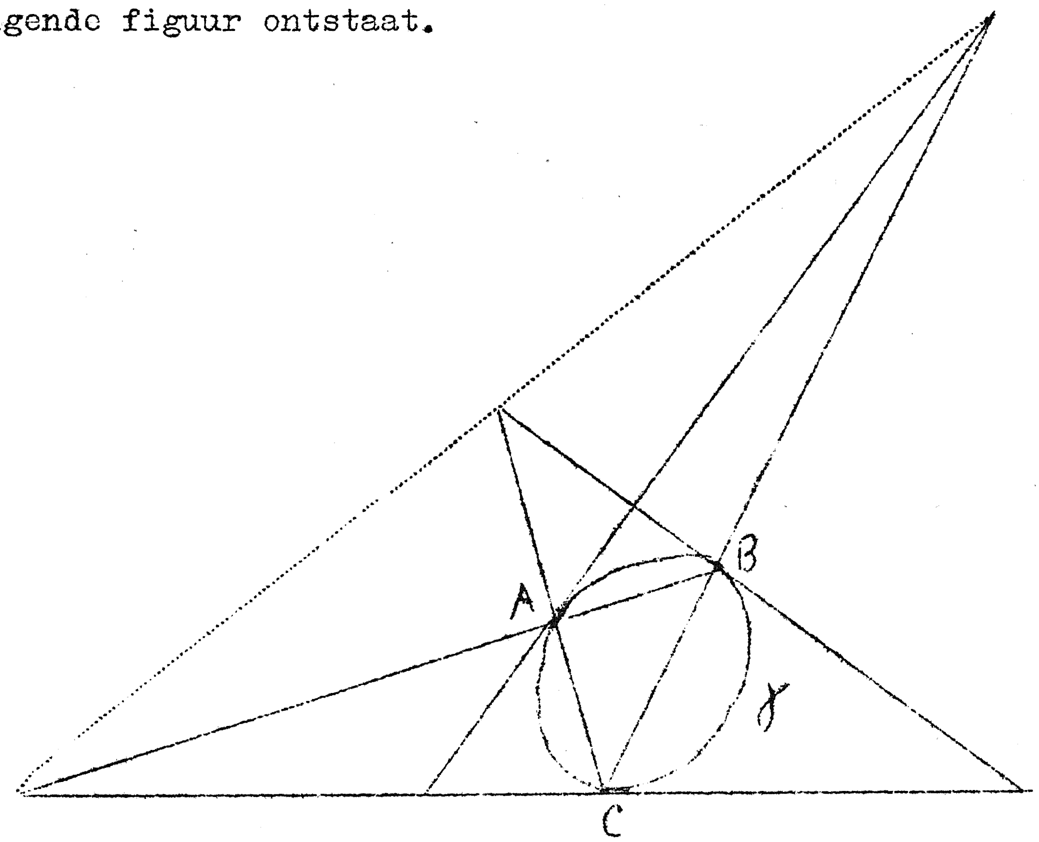


OPGAVEN.

1. Werk dit bewijs volledig uit.
2. Gelden in dit geval ook $\binom{ABC}{ADB}$, $\binom{AAB}{BCD}$ en $\binom{AAB}{CDB}$?
3. Welke andere mogelijkheden doen zich voor bij zeshoeken met twee paar samenvallende hoekpunten?
   Geldt de stelling van Pascal in deze gevallen ook?

Een kromme van de tweede graad is eenduidig bepaald door drie punten en de raaklijnen in twee dier punten.
Zijn A,B,C gegeven, alsmede de raaklijnen in A en B, dan is het snijpunt D van een willekeurige lijn door C met behulp van de stelling van Pascal te construeren. De (volgens het vorige geval eenduidig bepaalde) tweede graads kromme door A,B,C,D, die in A de goede raaklijn heeft, heeft ook in B de goede raaklijn; het is de enige kromme met deze eigenschap.

Tenslotte kunnen we ook voor CD nog een raaklijn kiezen. De constructie voor het punt D moet dan weer C opleveren, zodat de volgende figuur ontstaat.



De stelling van Pascal geldt dus ook voor een in γ beschreven driehoek ABC en wel in de vorm $\binom{ABC}{CAB}$.

<u>Opgave</u>. Ga na welke andere vormen hier mogelijk zijn en of de stelling hiervoor ook geldt.

<u>Opmerking</u>. Bij al onze vorige beschouwingen is slechts gebruik gemaakt van de definitie van raaklijn als een lijn, die behalve het raakpunt, geen punten met γ gemeen heeft. Hoewel limietovergangen onnodig bleken, is voor het geheugen en voorstellingsvermogen een "continue beweging" van punten over γ tot de stand waarin twee der punten samenvallen een eenvoudig hulpmiddel.

Beschouwen we nog eens het geval, dat op een kromme γ van de tweede graad vier punten ABCD gegeven zijn. Is P het snijpunt van AD en BC, Q dat van AC en BD en R dat van AB en CD, dan levert de stelling van Pascal, voorgesteld door het symbool $\left(\frac{ABD}{BAC}\right)$, dat de raaklijnen in A en B aan γ elkaar in een punt van PQ snijden.
Op dezelfde manier bewijst men:

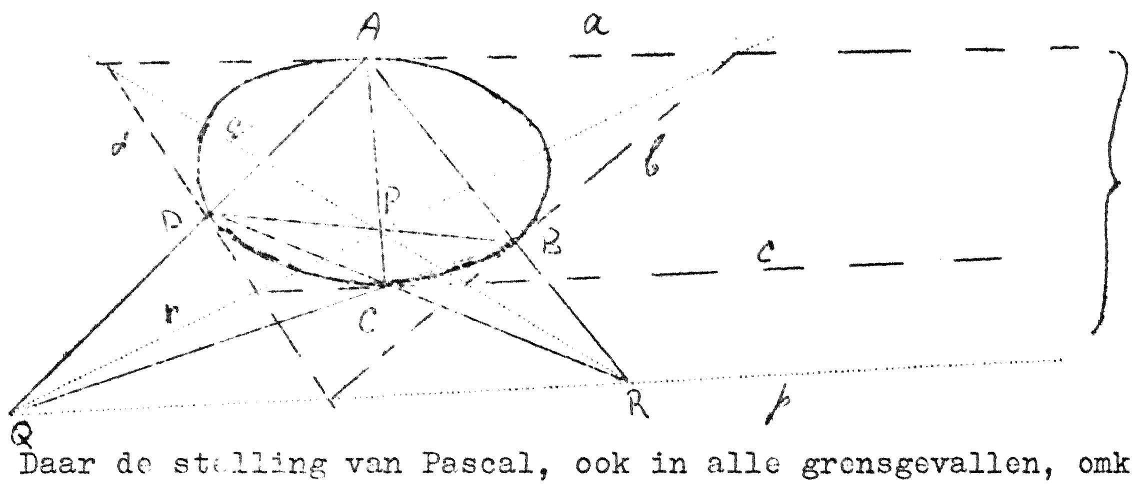
<u>Stelling A</u>:

PQ bevat het snijpunt van de raaklijnen in A en B en van die in C en D;
PR bevat het snijpunt van de raaklijnen in A en C en van die in B en D;
QR bevat het snijpunt van de raaklijnen in B en C en van die in A en D.

<u>Opgave</u>.

Ga na welke Pascalzeshoeksymbolen hier steeds bijhoren.

De volledige vierhoek ABCD heeft de 6 zijden AB, CD, AC, BD, AD, BC, die twee aan twee <u>overstaand</u> zijn. De 3 snijpunten PQR van de paren overstaande zijden heten de <u>diagonaalpunten</u> van de vierhoek, het zijn de hoekpunten van de <u>diagonaaldriehoek</u> PQR van de vierhoek ABCD. Stellen we de raaklijnen aan γ in A, B, C, D, resp. voor door a, b, c, d, dan ontstaat een volledige vierzijde abcd. Deze heeft 6 hoekpunten, die twee aan twee overstaand zijn. De verbindingslijnen van paren overstaande hoekpunten zijn de <u>diagonalen</u> p, q, r, die de <u>diagonaaldriehoek</u> (eigenlijk: diagonaal<u>driezijde</u>) pqr van de vierzijde abcd vormen. Volgens stelling A hebben ABCD en abcd nu dezelfde diagonaaldriehoek. (stelling B)

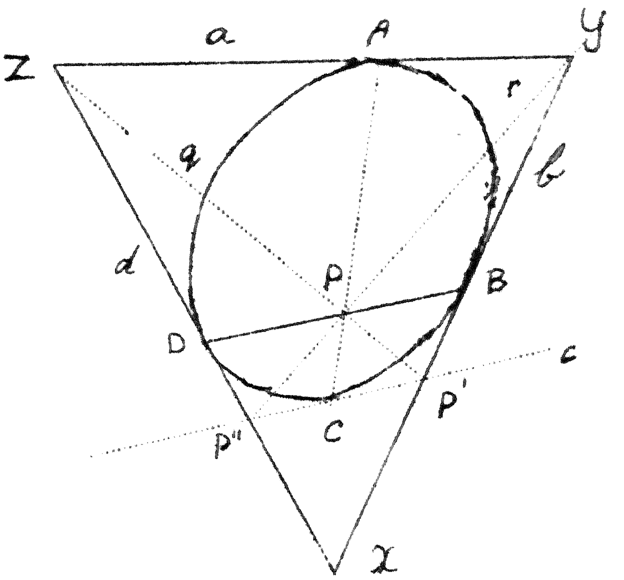


Daar de stelling van Pascal, ook in alle grensgevallen, omkeerbaar is, is ook bovenstaande stelling B omkeerbaar. Ze is uiteraard ook dualiseerbaar, zodat we haar in de volgende gedaante kunnen brengen:
Zijn de hoekpunten van de volledige vierhoek ABCD incident met de corresponderende zijden van de volledige vierzijde abcd, dan hebben ABCD en abcd dan en slechts dan dezelfde diagonaaldriehoek, als A, B, C, D, vier punten en a, b, c, d, vier raaklijnen van een kromme van de tweede graad zijn; ook dan en slechts dan als a, b, c, d vier lijnen en A, B, C, D, vier raakpunten van een kromme van de tweede klasse zijn. (Stelling C)

Deze twee duale stellingen C worden identiek, als we de volgende <u>hoofdstelling der kegelsneden bewijzen</u>:

De raaklijnen aan een kromme van de tweede graad vormen een kromme van de tweede klasse; de raakpunten van een kromme van de tweede klasse vormen een kromme van de tweede graad. Daar het tweede deel van deze stelling het duale van het eerste deel is, bewijzen we slechts het eerste deel.

Bewijs van de hoofdstelling.



Laat A, B, D drie vaste punten van een kromme γ van de tweede graad zijn, a, b, d de raaklijnen in deze punten. Is C een veranderlijk gedacht punt van γ (het in de figuur gestippelde is veranderlijk) met raaklijn c, dan gaan volgens de vorige stelling (vergelijk ook de vorige figuur) YP", ZP', BD en AC door één punt P. Doorloopt P de puntreeks met drager BD, dan doorloopt C de kromme γ. De puntreeksen die P' op b en P" op d hierbij doorlopen zijn beide perspectief met de puntreeks die P doorloopt, zodat P' en P" projectieve puntreeksen doorlopen. We schrijven dit: P' π P".
De raaklijnen aan γ verbinden dus inderdaad corresponderende punten van projectieve puntreeksen op b en d, zodat zij een kromme van de tweede klasse vormen.

OPGAVEN.

1. Laat zien dat A' = Y, A" = Z; ook B' = B, B" = X; ook D' = X, D" = D.
2. Bewijs dat de Pappusrechte van elke zeshoek, die drie punten van d en de drie corresponderende punten van b tot hoekpunten heeft, met DB samenvalt
   a) m.b.v. de stelling A.
   b) m.b.v. de theorie van blz 47.

We zullen in het vervolg steeds het woord kegelsnede gebruiken om niet-ontaarde krommen van de tweede graad en van de tweede klasse aan te duiden. De punten van een kegelsnede vormen een kromme van de tweede graad, de raaklijnen een kromme van de tweede klasse. Dit geldt alleen als we met het niet ontaarde geval te doen hebben, immers een ontaarde kromme van de tweede graad bestaat uit een lijnenpaar (beter: twee puntreeksen), een ontaarde kromme van de tweede klasse uit een puntenpaar (beter: twee stralenwaaiers).

Door een kegelsnede vanuit een punt buiten zijn vlak op een ander vlak te projecteren, ontstaat wederom een kegelsnede. Projectieve stralenwaaiers gaan bij projectie nl. weer in projectieve stralenwaaiers over; analoog voor projectieve puntreeksen.

Daar ook cirkels kegelsneden zijn, kunnen kegelsneden speciaal ontstaan door een rechte cirkelkegel (omwentelingskegel) met een plat vlak te snijden. Op deze wijze zijn de kegelsneden door de Grieken bestudeerd.

Poolverwantschap.

Definitie: Twee punten P en Q heten poolverwant of geconjugeerd ten opzichte van een kegelsnede γ, als de lijn PQ γ in twee punten snijdt, die harmonisch door P en Q gescheiden worden.

De paren poolverwante punten van een lijn s vormen een involutie, de poolinvolutie op s, die de snijpunten van s en γ tot.dubbelpunten heeft.

Zo definiëren we duaal: twee lijnen l en m zijn poolverwant of geconjugeerd t.o.v. γ, als l en m harmonisch gescheiden worden door de twee stralen uit de door deze lijnen bepaalde waaier, die aan γ raken.

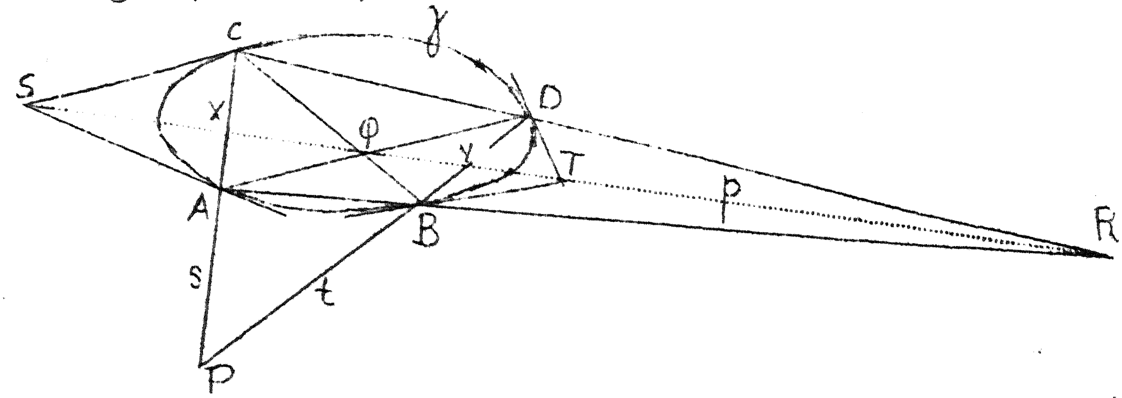
De paren geconjugeerde stralen van een waaier vormen een lijnen involutie, die de raaklijnen aan γ tot dubbelstralen heeft.

Is γ reëel, dan is de poolinvolutie op een reële drager s hyperbolisch als s γ in 2 reële (en verschillende) punten snijdt, parabolisch als s aan γ raakt en elliptisch als s met γ geen reële punten gemeen heeft.

Zeggen we dat een reëel punt P buiten γ ligt, als twee reële raaklijnen aan γ door P gaan en binnen γ, als de raaklijnen aan γ door P toegevoegd complex zijn, dan geldt nog: De poolinvolutie in een waaier (P) is hyperbolisch, parabolisch of elliptisch, al naar gelang P buiten, op of binnen γ ligt.

Zij P een niet op γ gelegen punt; twee lijnen s en t door P snijden γ resp. in A, C en B, D.

Volgens stelling A (blz. 61)



snijden de raaklijnen in A en C, evenals die in B en D elkaar op QR. Volgens constructie is het paar PX harmonisch met AC en het paar PY harmonisch met BD, zodat P poolverwant is met de punten X en Y van p. De lijn p = YT is echter door t alleen al eenduidig bepaald (Waarom?); kiezen we s variabel, dan doorloopt X blijkbaar deze lijn p. Dus: Stelling: De meetkundige plaats der punten, die met een vast punt P geconjugeerd liggen t.o.v. γ is een rechte p, de poollijn van P.

Het hier gegeven bewijs is alleen van kracht als P niet op γ ligt. Ligt P op γ, dan snijdt een willekeurige lijn s door P γ nog in een tweede punt A. Is $A \neq P$, dan heeft de poolinvolutie op s de punten P en A tot dubbelpunten, zodat het op s liggende geconjugeerde punt van P met P zelf samenvalt. Kiezen we voor s de raaklijn in P, dan wordt A = P, zodat de poolinvolutie op s parabolisch is en elk punt van s met P poolverwant is. Ook nu geldt dus de stelling: de poollijn van een punt P van γ is de raaklijn in P.

De duale stellingen luiden: alle lijnen, die met een gegeven lijn l geconjugeerd zijn vormen een stralenwaaier met top L; L heet de pool van l. De pool van een raaklijn l van γ is het raakpunt op l.
Opgave. Dualiseer ook de bewijzen van de laatste stellingen geheel.

Van de diagonaaldriehoek PQR van de in γ beschreven volledige vierhoek ABCD is p = QR de poollijn van P. Op dezelfde wijze blijkt q = PR de poollijn van Q en r = PQ de poollijn van R t.o.v. γ te zijn. Driehoek PQR heet een pooldriehoek van γ : elke zijde is de poollijn van het overstaande hoekpunt.

Is abcd de om γ beschreven volledige vierzijde der raaklijnen in A, B, C en D, dan heeft volgens stelling C (blz 61) de vierhoek ABCD dezelfde diagonaaldriehoek als de vierzijde abcd. Van deze diagonaaldriehoek is blijkbaar nu ook elk hoekpunt de pool van de overstaande zijde. Dit volgt nl. uit het bovenstaande door toepassing van het dualiteitsbeginsel. Zo is dus P de pool van p, Q de pool van q, R de pool van r. Daar P een willekeurig punt was, is hiermee bewezen: Is p de poollijn van P, dan is P de pool van p.
Ligt A op de poollijn b van B, dan zijn A en B geconjugeerde punten, dus dan ligt B ook op de poollijn a van A. Het snijpunt C van a en b is geconjugeerd met A en met B, dus heeft de lijn AB = c tot poollijn. Driehoek ABC is dan een pooldriehoek.
Snijden de poollijnen van twee punten X en Y elkaar in een punt Z, dan is Z de pool van XY, immers Z is zowel met X als met Y geconjugeerd. Zijn X en Y twee punten van γ , dan zien we, dat de poollijn van Z niet anders dan de lijn, die de raakpunten verbindt op de raaklijnen, die uit Z aan γ getrokken kunnen worden.

Zijn A, B, C, D vier punten van een lijn s, dan gaan hun poollijnen a, b, c, d door één punt S en wel geldt (ABCD) = (abcd).

Bewijs: Zij S de pool van s. Omdat A, B, C, D op s liggen, gaan a, b, c, d door S. De vier lijnen a, b, c, d snijden s in vier punten A', B', C', D', die geconjugeerd zijn met A, B, C, D, dus die aan A, B, C, D toegevoegd zijn in de poolinvolutie op s.

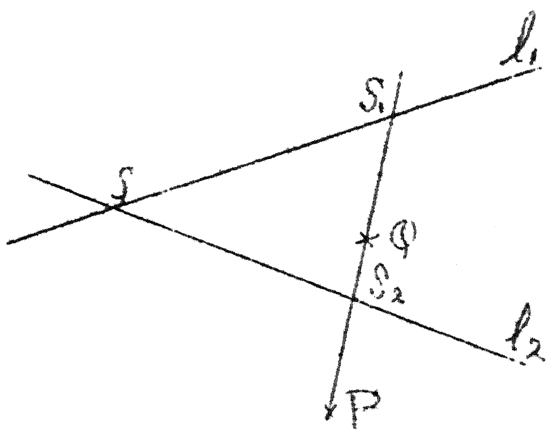
Dus: (abcd) = (A'B'C'D') = (ABCD).

Opgave. Formuleer de duale stelling.

Aan elk punt P van het vlak is een rechte p toegevoegd, de poollijn $\pi P = p$ van P; aan elke lijn l van het vlak is een punt L toegevoegd, de pool $\pi l = L$ van l. Deze toevoeging is eeneenduidig, behoudt incidenties en dubbelverhoudingen en heet de poolcorrelatie t.o.v. de gegeven kegelsnede γ.

Bij elke figuur F_1 kunnen we een figuur $\pi F_1 = F_2$ vinden, waarvan de punten de polen zijn van de lijnen van F_1 en de lijnen de poollijnen van de punten van F_1. F_2 heeft dan alle duale eigenschappen van F_1. Naast $\pi F_1 = F_2$ geldt ook $\pi F_2 = F_1$. Om deze reden heten F_1 en F_2 reciprook polaire figuren: ze worden door de poolcorrelatie π in elkander overgevoerd.

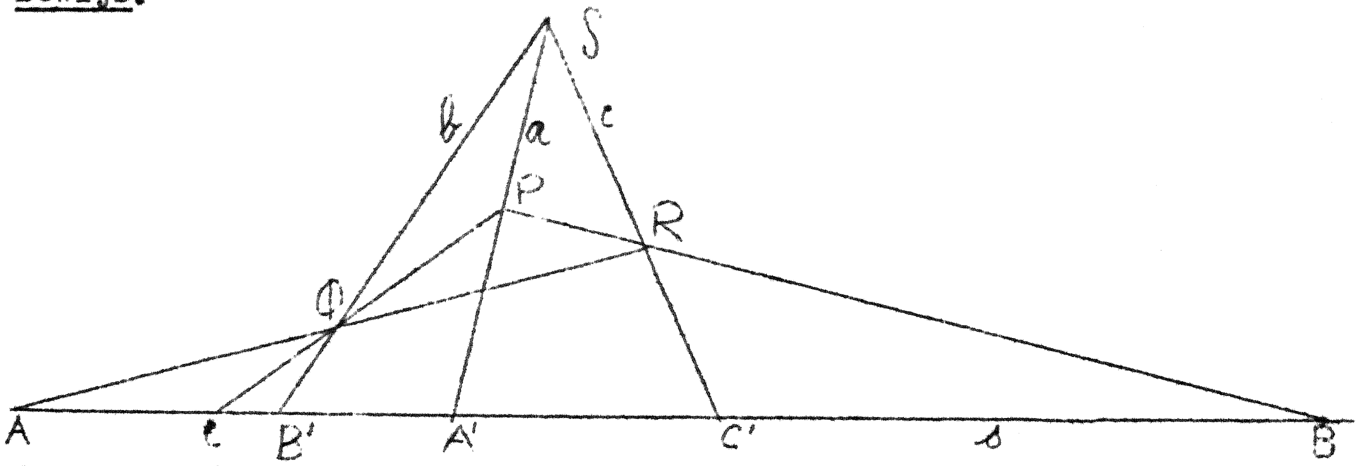
Is een kromme γ van de tweede graad in een lijnenpaar $(l_1 l_2)$ ontaard, dan heet het snijpunt S het dubbelpunt van γ. P en Q zijn geconjugeerd, als $H(S_1 S_2, PQ)$. Blijkbaar is SQ de poollijn van P, zodat P geconjugeerd is met elk punt van het vlak. Van elk punt P gaat de poollijn door S; van punten van l_1 is l_1 zelf de poollijn, analoog voor l_2. De pool van een willekeurige lijn l is S; de pool van l_1 is onbepaald: elk punt van l_1 voldoet, analoog voor l_2. De pool van een willekeurige lijn m door S is onbepaald: elk punt van de lijn n voldoet, als n de lijn door S is, waarvoor $H(l_1 l_2 mn)$. De poollijn van S is tenslotte geheel onbepaald. We zeggen dat de poolcorrelatie ontaard is.



Opgave. Ga na hoe de poolcorrelatie t.o.v. ontaarde krommen van de tweede klasse ontaardt.

Stelling. Zijn van een volledige vierhoek twee paar overstaande zijden geconjugeerd t.o.v. een kegelsnede γ, dan is dit ook met het derde paar het geval.

Bewijs.

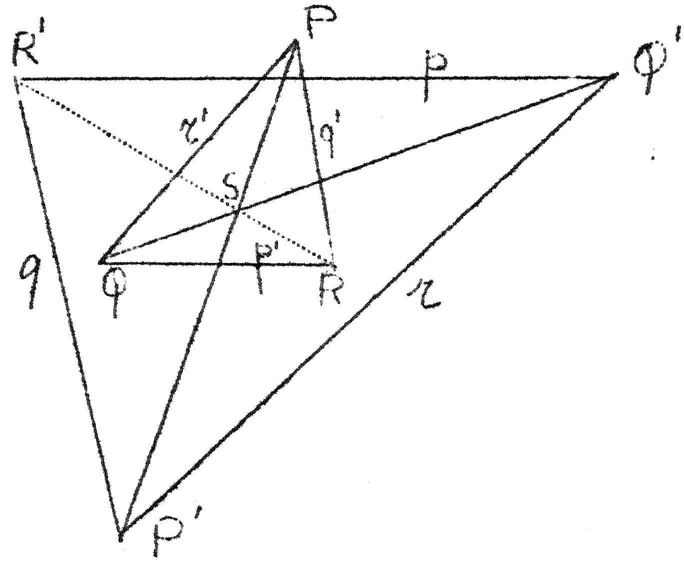


Laat van vierhoek PQRS gegeven zijn dat QR en PS evenals PR en QS geconjugeerde lijnen zijn; zij verder s de poollijn van S. De pool van PS ligt op de hiermee geconjugeerde lijn QR, evenals op de poollijn s van S. Blijkbaar is A de pool van PS, zodat (A,A') een paar voorstelt van de poolinvolutie op s. Zo vinden we analoog de pool van QS als het snijpunt B van PR en s, zodat ook (B,B') een paar van de poolinvolutie op s is. Hieruit volgt dat dan ook (C,C') een paar van deze involutie is, zodat de poollijn van C door C' gaat en dus met RS samenvalt. Ook SR en PQ zijn dus geconjugeerd.

Opgave. Formuleer de duale stelling. (Deze is genoemd naar Hesse.)

Stelling. Twee reciprook polaire driehoeken t.o.v. een kegelsnede zijn perspectivisch.

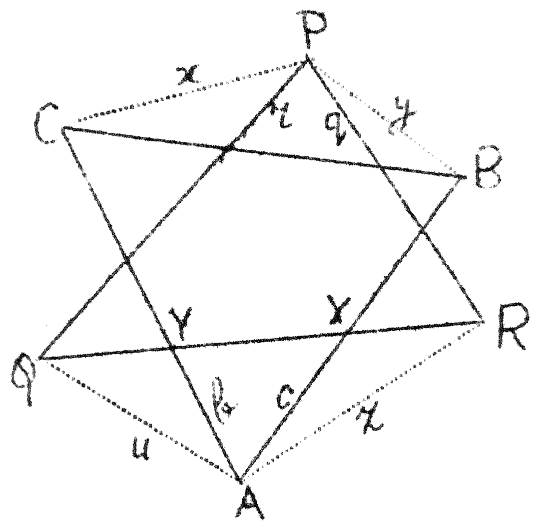
Bewijs. Laat PQR en P'Q'R' de twee polaire driehoeken zijn. Beschouw



de vierhoek PQRS (S is het snijpunt van PP' en QQ'). PS gaat door P' en is dus geconjugeerd met p' = QR; zo is QS geconjugeerd met q' = PR. Volgens voorgaande stelling is dan RS geconjugeerd met PQ, dus gaat door de pool R' van PQ, d.w.z. RR' gaat eveneens door S. De pool van PP' is het snijpunt van p en p'; dit snijpunt is dus zeker geconjugeerd met S. Daar hetzelfde geldt voor de snijpunten van q en q' en van r,r' is hiermee tevens bewezen: Het perspectiefcentrum S en de perspectiefas s zijn pool en poollijn t.o.v. γ.

Stelling. De hoekpunten van twee pooldriehoeken ABC en PQR van γ liggen op eenzelfde kegelsnede.

Bewijs.



De lijnen $PQ = r$ en $PR = q$ hebben resp. de punten R en Q tot pool. De pool van $PC = x$ is het snijpunt X van QR en AB; de pool Y van $PB = y$ is het snijpunt van QR en AC. Blijkbaar is:
$(qrxy) = (QRXY) = (RQYX) = (zubc)$.
Door deze projectieve betrekking tussen de waaiers (P) en (A) wordt een kegelsnede gedefinieerd, die de punten P en A tot fundamentaalpunten heeft en door R, Q, C, B gaat.

Definitie:

Een correlatie van het vlak V op het vlak W is een eeneenduidige afbeelding met de volgende eigenschappen

a) is P een punt van V, dan is P een lijn van W.

b) zijn A, B, C, D vier punten, gelegen op de lijn l van V, dan gaan de lijnen φA, φB, φC, φD door één punt van W (dit punt noemen we φl), en wel is $(ABCD) = (\varphi A, \varphi B, \varphi C, \varphi D)$.

Hieruit volgen:

c) is l een lijn van V, dan is φl een ondubbelzinnig bepaald punt van W.

d) zijn a, b, c, d, vier lijnen, gaande door het punt P van V, dan liggen de vier punten φa, φb, φc, φd op de lijn φP van W en wel is $(abcd) = (\varphi a, \varphi b, \varphi c, \varphi d)$.

Opgave. Bewijs c en d .

Omdat de correlatie eeneenduidig is heeft ze een inverse; ook dit is een correlatie, die nu aan het punt φl van W de lijn l van V en aan de lijn φP van W het punt P van V toevoegt. $\varphi\varphi^{-1}$ laat W invariant, $\varphi^{-1}\varphi$ laat V invariant.

Kiezen we $V = W$, dan kunnen we het geval beschouwen dat $\varphi = \varphi^{-1}$, zodat we met een involutorische correlatie te doen hebben. Dan moet blijkbaar steeds $\varphi\varphi P = P$ en $\varphi\varphi l = l$ zijn. Elke poolcorrelatie is involutorisch. Het omgekeerde geldt echter ook:
elke involutorische correlatie is de poolcorrelatie t.o.v. een zekere kegelsnede. Het bewijs hiervan verloopt in enige stappen.
Zij φ een willekeurige involutorische correlatie.
Is P incident met φQ, dan heet P met Q geconjugeerd. Daar incidentie volgens b en d behouden blijven bij toepassing van φ, zijn dan ook φP en $\varphi\varphi Q = Q$ geconjugeerd, dus dan is ook Q met P geconjugeerd.
De puntreeks, die de stralenwaaier $\{\varphi A\}$ uit een rechte l uitsnijdt

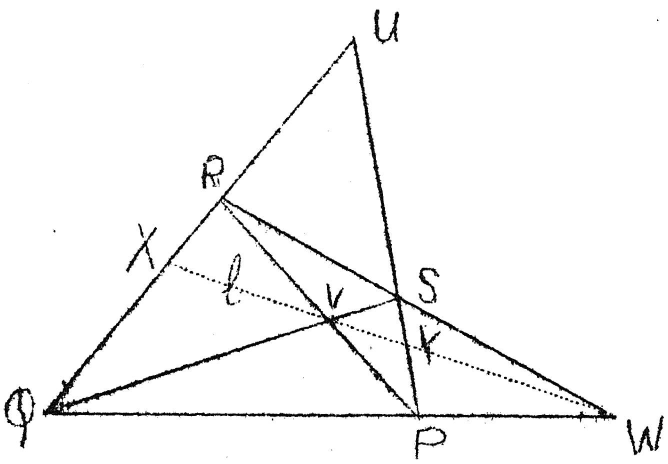
is projectief met de puntreeks $\{A\}$ op l volgens b. Deze projectieve puntreeksen bepalen een involutie op l van geconjugeerde punten; de dubbelpunten van deze involutie zijn <u>zelfgeconjugeerde</u> punten. Elke lijn bevat dus twee (al of niet verschillende) zelfgeconjugeerde punten. We zullen aantonen, dat deze zelfgeconjugeerde punten een kegelsnede vormen, waarvan de poolcorrelatie juist met de gegeven involutorische correlatie samenvalt.

<u>OPGAVEN</u>. 1. Definiëer geconjugeerde lijnen t.o.v. φ en zelfgeconjugeerde lijnen.

2. Bewijs: Is P een zelfgeconjugeerd punt, dan is φP een zelfgeconjugeerde lijn en omgekeerd.

3. Bewijs: Het is mogelijk vier verschillende zelfgeconjugeerde punten te vinden. Hiervan liggen geen drie op één rechte.

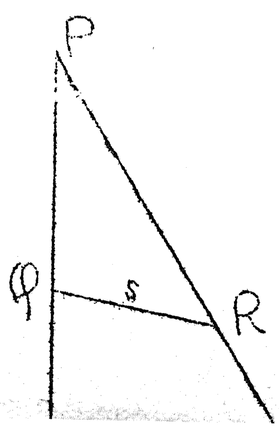
Is PQRS een volledige vierhoek met 4 zelfgeconjugeerde hoekpunten en met een diagonaaldriehoek UVW, dan is φU = VW, φV = UW en φW = UV.



Daar immers H(PS,YU) en H(QR,XU) is U geconjugeerd met X en met Y dus φU = XY = VW enz.
Is PQR een driehoek met drie zelfgeconjugeerde hoekpunten, dan snijdt een met QR geconjugeerde lijn de zijden PQ en PR in geconjugeerde punten. (zie figuur hiernaast). Elke met QR geconjugeerde lijn l heeft nl. φl op QR. Stel dit punt U. Is S het tweede zelfgeconjugeerde punt van UP, dan is volgens vorige stelling l een zijde van de diagonaaldriehoek UVW van PQRS. Daar dan ook φV = UW, zijn V en W geconjugeerde punten.

Na deze voorbereidingen bewijzen we onze stelling:
Elke involutorische correlatie φ is de poolcorrelatie t.o.v. een zekere kegelsnede γ, die de zelfgeconjugeerde punten van φ bevat.

<u>Bewijs</u>:

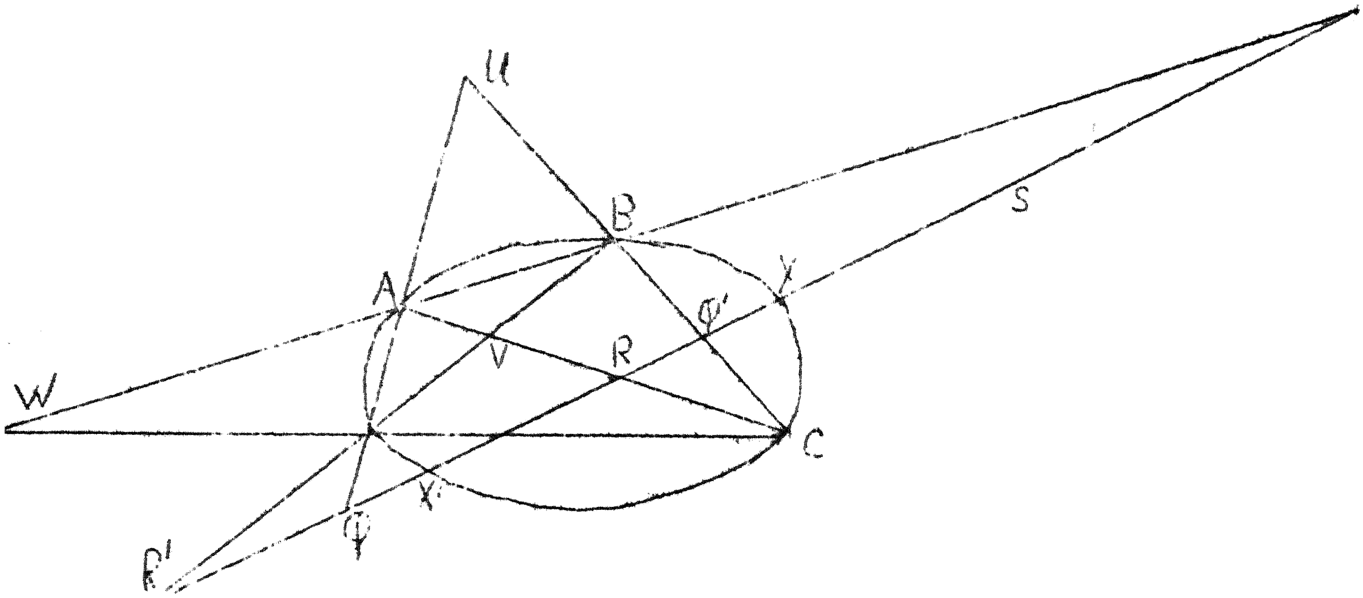


Laat P, Q, R drie zelfgeconjugeerde punten zijn, S = φs, waarin s = QR en laat t een vaste lijn door S zijn. Daar t door S gaat, is t met s geconjugeerd, zodat volgens vorige stelling t de zijden PQ en PR van driehoek PQR in de geconjugeerde punten V en V' snijdt. V,V' is dus een paar van de involutie van geconjugeerde punten

Laten we nu P de verzameling van alle zelfgeconjugeerde punten doorlopen, dan doorlopen V en V' projectieve puntreeksen op s, zodat tussen de waaiers QV en RV' een projectief verband bestaat en blijkbaar P een kegelsnede γ doorloopt, die alle geconjugeerde punten van φ bevat. De definitie van geconjugeerde punten in de correlatie φ is dezelfde als die van geconjugeerde punten t.o.v. φ (op elke lijn vormen geconjugeerde punten dezelfde involutie, zodat de gegeven involutorische correlatie φ met de poolcorrelatie π t.o.v. γ samenvalt.

Stelling van Desargues.

Gaat een kegelsnede γ door de hoekpunten A, B, C, D van een volledige vierhoek, dan snijdt een willekeurige rechte s de kegelsnede γ in een puntenpaar, dat behoort tot de involutie, die door de paren overstaande zijden van ABCD op s ingesneden wordt



Bewijs: Kies A en B tot fundamentaalpunten van γ, dan is DV(AC, AD, AX, AX') = DV(BC, BD, BX, BX'), waaruit door snijding met s volgt: (RQXX') = (Q'R'XX') = (R'Q'X'X).

Er bestaat dus een projectieve relatie T, zodat:

$$TR = R', \; TQ = Q', \; TX = X', \; TX' = X.$$

Daar T één puntenpaar (nl. X,X') verwisselt, is T een involutie, zodat ook TR' = R en TQ' = Q.

Deze involutie heeft met de door de paren overstaande zijden van ABCD op s uitgesneden involutie de puntenparen Q,Q' en R,R' gemeen, zodat ze er geheel mee samenvalt.

Definitie: De verzameling kegelsneden door vier vaste punten ABCD heet een algemene kegelsnedenbundel. De vier punten, die alle kegelsneden van de bundel gemeen hebben heten de basispunten van de bundel.

Het is duidelijk, dat twee kegelsneden van een bundel, buiten A, B, C, D geen punten meer gemeen hebben, daar een kegelsnede door dat door ieder punt van het vlak (dat van de basispunten verschilt) juist een kegelsnede van de bundel gaat. Een willekeurige rechte s snijdt alle exemplaren van een bundel volgens puntenparen van een involutie. Daar deze twee dubbelpunten bezit geldt: aan s raken twee kegelsneden van de bundel. Deze twee kegelsneden zijn i.h.a. verschillend; ze kunnen slechts samenvallen als de involutie op s parabolisch is, dus als van elk puntenpaar één der punten in het dubbelpunt valt, dat dan dus een der basispunten van de bundel is. Slechts aan een lijn door een basispunt raakt dus slechts één exemplaar; het raakpunt is dit basispunt zelf.

De bundel bevat 3 ontaardingen, nl. de paren overstaande zijden van de vierhoek ABCD. De <u>dubbelpunten</u> U, V, W van deze ontaardingen vormen de diagonaaldriehoek UVW van de vierhoek ABCD. UVW is pooldriehoek voor alle kegelsneden uit de bundel. Het omgekeerde geldt echter ook: heeft een punt X dezelfde poollijn x t.o.v. alle exemplaren van de bundel, dan moet X met één der punten U, V, W samenvallen.

<u>Bewijs</u>:

a) Onderstel X is niet op één der ontaardingen van de bundel gelegen. De poollijn van X t.o.v. elk der ontaardingen moet dan door het corresponderende dubbelpunt der ontaarding gaan. Daar UVW echter niet collineair zijn is dit uitgesloten.

b) onderstel X ligt op minstens twee der ontaardingen. X ligt dan op alle drie en is basispunt. De poollijn van X aan is de raaklijn in X; dit kan echter iedere lijn door X zijn, daar door 4 punten en de raaklijn in een dier punten een exemplaar van de bundel bepaald wordt.

c) X moet dan op één der ontaardingen liggen. Zullen de poollijnen t.o.v. de andere twee ontaardingen samenvallen, dan moet deze poollijn hun dubbelpunten bevatten. Hiermee is het oude geval weer verkregen: X is zelf het dubbelpunt van de derde ontaarding.

<u>Opgaven</u>.

1. Duaal tegenover bundel kegelsneden staat <u>schaar</u> kegelsneden. Definiëer de algemene kegelsnedenschaar. Wat zijn de ontaardingen uit de schaar?

2. Bewijs dat alle kegelsneden van een schaar een gemeenschappelijke pooldriehoek hebben. Bewijs dat dit de enige is (dualiseer het voorgaande bewijs geheel).

<u>Opmerking</u>.

Een algemene bundel kegelsneden wordt door twee exemplaren bepaald; deze hebben vier snijpunten, nl. de basispunten. Twee kegelsneden behoeven echter niet altijd vier punten gemeen te hebben. In de analytische meetkunde worden ook bundels kegelsneden beschouwd, die bepaald worden door twee kegelsneden die minder dan vier punten gemeen hebben (enige der snijpunten "vallen dan samen"). We zullen op deze bijzondere typen bundels hier niet in gaan evenmin als op de hiermee duale bijzondere scharen. Bij deze bijzondere typen ontmoeten we voor het eerst andere soorten ontaardingen, nl. een dubbelgetelde rechte als ontaarde bundelkegelsnede en een dubbelgeteld punt als ontaarde schaarkegelsnede.

Valt het punt P niet met één der hoekpunten van de gemeenschappelijke pooldriehoek UVW van een bundel samen, dan heeft P t.o.v. twee exemplaren γ_1, γ_2 van de bundel verschillende poollijnen p_1 en p_2. Snijden deze elkaar in P', dan zijn P en P' geconjugeerd t.o.v. γ_1 en γ_2. Is $P \neq P'$ en is s de verbindingslijn PP', dan wordt het puntenpaar PP' harmonisch gescheiden, zowel door de snijpunten van s met γ_1, als door die met γ_2. P,P' zijn dus de dubbelpunten van de involutie die op s door de bundel uitgesneden wordt, waaruit omgekeerd weer volgt dat P en P' geconjugeerd zijn t.o.v. alle exemplaren van de bundel. Dus: De poollijnen van een vast punt P t.o.v. de exemplaren van een bundel vormen een stralenwaaier met top P'; P' en P zijn hierin verwisselbaar. Is P = P' dan is P een zelfgeconjugeerd punt, zowel van γ_1, als van γ_2, dus een basispunt van de bundel. De poollijnen van P t.o.v. de kegelsneden van de bundel (de raaklijnen aan deze kegelsneden) vormen de waaier met P' tot top. Valt P in één der hoekpunten van de pooldriehoek, dan is P' een onbepaald punt van de overstaande zijde.

We hebben hier te doen met een eeneenduidige involutorische transformatie (met drie uitzonderingspunten U, V, W, waarvoor de transformatie onbepaald is), die echter geen projectieve transformatie is. Dit is een voorbeeld van een <u>Cremona</u>-transformatie.

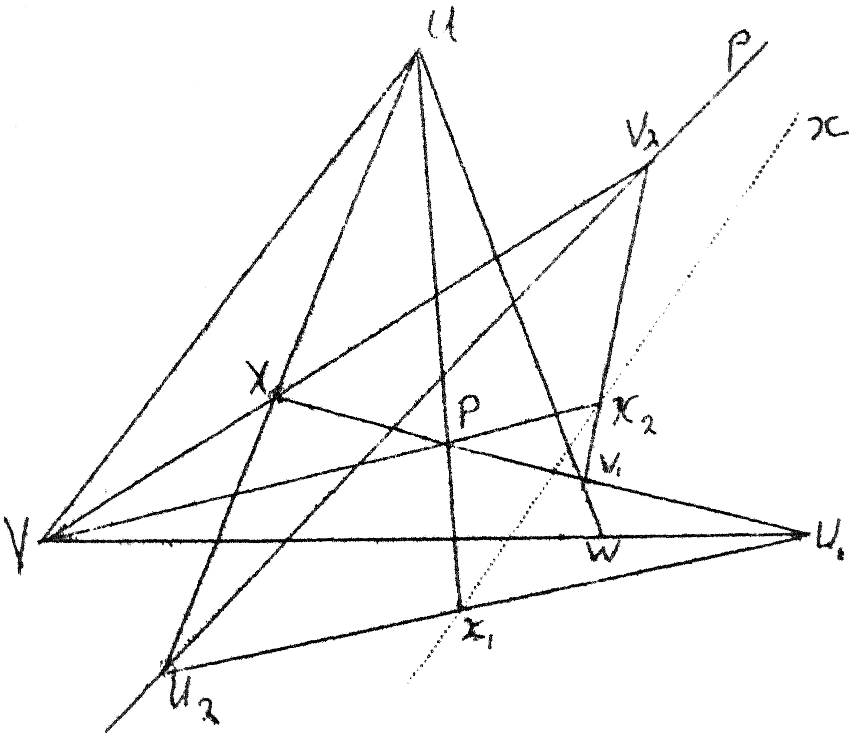
De poollijn van een punt P t.o.v. een geschikt gegeven kegelsnede kan met de lineaal alleen worden geconstrueerd. Ook de pool van een gegeven lijn l is met de lineaal alleen construeerbaar.

<u>Opgaven</u>.

1. Construeer de poollijn van een punt P t.o.v. de kegelsnede door 5 gegeven punten A, B, C, D, C.
2. Construeer de pool van een lijn l t.o.v. de kegelsnede die aan drie gegeven lijnen a, b, c, raakt en een vierde lijn d in een gegeven punt D raakt.

De poolcorrelatie t.o.v. een kegelsnede γ kan, behalve door γ zelf, gegeven worden door 4 vrij gelegen punten en hun poollijnen (op dezelfde wijze als een projectieve transformatie van het vlak gegeven wordt door 4 vrij gelegen punten en hun beeldpunten). We behandelen alleen het belangrijkste geval, waarin de poolcorrelatie π gegeven is door een pooldriehoek UVW en een punt P met poollijn $\pi P = p$. Men vraagt de poollijn van een ander punt X te construeren.

<u>Constructie</u>.



Als PX de zijden VW, UW van de pooldriehoek resp. in U_1 en V_1 snijdt en als p de lijnen UX, VX resp. in U_2 en V_2 snijdt, dan snijden U_1U_2 en PU elkaar in een punt X_1 en V_1V_2 en PV elkaar in een punt X_2, die beide op gevraagde lijn x gelegen zijn.

<u>Bewijs</u>: Passen we de stelling van Hesse (zie pag. 65) toe op de volledige vierzijde, die U, U_1; X, X_1 en P, U_2 tot overstaande hoekpunten heeft, dan blijkt, daar U en U_1 evenals P en U_2 geconjugeerde punten zijn, dat ook X en X_1 geconjugeerd zijn. Op dezelfde wijze blijken ook X en X_2 geconjugeerd te zijn, zodat x inderdaad de poollijn van X is.

Laten we in de laatste figuur de lijn p om een vast punt P' draaien dan zullen de punten U_2 en V_2 projectieve puntreeksen van UX en VX doorlopen, dus X_1 en X_2 projectieve puntreeksen van UP en VP. Deze puntreeksen zijn echter perspectief, daar X_1 en X_2 beide met P samenvallen als p door X gekozen wordt. De rechte X_1X_2 = x draait dus om een vast punt P'.

Een verzameling poolcorrelaties $\{\Pi_i\}$ met gemeenschappelijke pooldriehoek UVW heet een <u>bundel</u> poolcorrelaties, als voor elk punt X de poollijnen $\{\Pi_i\}$ een lijnenwaaier vormen (met uitzondering van X = U, X = V en X = W). Hier is dus bewezen, dat hiervoor voldoende is, dat dit voor één punt P het geval is. Bovendien zijn de waaiers poollijnen voor alle punten projectief. Ook geldt dus: de poolcorrelaties t.o.v. de kegelsneden van een algemene bundel vormen een bundel. Zijn $\gamma_1 \dots \gamma_4$ vier kegelsneden van de bundel, dan is $(p_1p_2p_3p_4) = (x_1x_2x_3x_4)$ als p_i en x_i resp. de poollijnen van P en X t.o.v. γ_i voorstellen. We noemen deze constante DV ook de dubbelverhouding der vier kegelsneden $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Stelling.

De meetkundige plaats der polen van een vaste lijn l t.o.v. de kegelsneden van een algemene bundel is een kegelsnede.

Bewijs: De pool van l t.o.v. een kegelsnede γ uit de bundel wordt gevonden als snijpunt van de poollijnen van twee punten P en Q van l t.o.v. γ. Doorloopt γ de bundel, dan beschrijven volgens het voorgaande deze poollijnen projectieve stralenwaaiers met P' en Q' als top. Deze stralenwaaiers brengen als meetkundige plaats der snijpunten een kegelsnede α voort.

We kunnen eenvoudig enige bijzondere punten van α aangeven.

1°) l snijdt de bundel kegelsneden in een involutie puntenparen. De dubbelpunten hiervan behoren tot α, immers in deze dubbelpunten raken exemplaren van de bundel aan α ; het raakpunt is de pool van l.

2°) de pool van l t.o.v. het ontaarde exemplaar AD, BC is het dubbelpunt U (zie fig. blz.68). De hoekpunten van de pooldriehoek UVW van de bundel liggen dus op α.

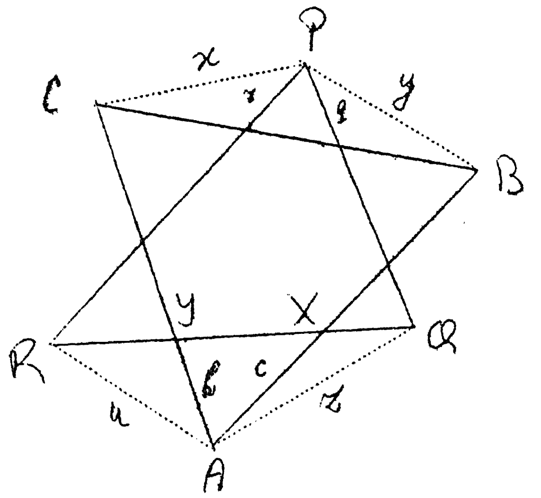
3°) Snijdt l de lijn AB in S_1 en is T_1 het punt van AB, waarvoor geldt $H(AB,S_1T_1)$, dan zijn S_1 en T_1 geconjugeerd t.o.v. alle kegelsneden van de bundel. De poollijnen van T_1 t.o.v. al deze kegelsneden gaan door S_1 en vormen de stralenwaaier met S_1 als top. We kunnen zeker een kegelsnede aangeven ten opzichte waarvan l juist de poollijn van T_1 is.

Opgave. Is het niet mogelijk, dat slechts een deel van de stralenbundel door S_1 optreedt als poollijnen van T_1 t.o.v. kegelsneden uit de bundel?

Op elk der zes zijden van de volledige vierhoek vinden we dus een punt van α nl. $S_1, S_2, \ldots S_6$.

Van α zijn nu elf punten bekend; α draagt daarom de naam van elfpuntskegelsnede van l t.o.v. de kegelsnedenbundel.

Volgens de laatste stelling van pag. 65 zijn twee pooldriehoeken van een kegelsnede in een tweede kegelsnede beschreven. We kunnen deze stelling omkeren: Als twee driehoeken in eenzelfde kegelsnede beschreven zijn, dan bestaat er een kegelsnede ten opzichte waarvan beide pooldriehoeken zijn. Dit bewijzen we als volgt (vergelijk dit bewijs met dat van pag. 66):

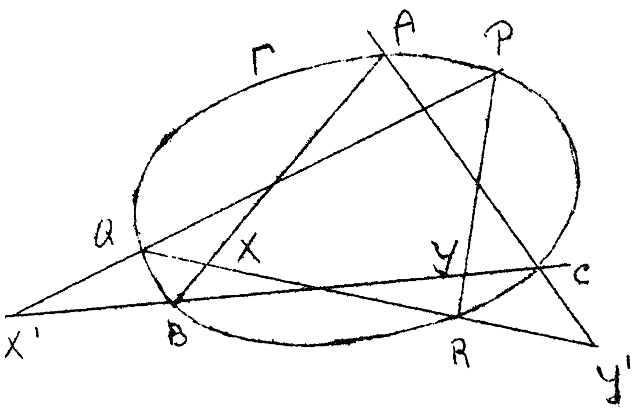


Volgens het gegeven is
(qrxy) = (zubc), zodat
(qrxy) = (RQYX) = (QRXY).
We beschouwen nu de poolcorrelatie π, waarvoor PQR een pooldriehoek is en waarvoor C = πc (volgens de constructie van pag. 71 is π hierdoor ondubbelzinnig bepaald). Daar X nu de pool van x is, volgt uit (qrxy) = (QRXY), dat Y de pool van y is. De poollijn van B gaat dus door Y. Daar hij eveneens C bevat, is b = πB, dus ABC eveneens een pooldriehoek voor π.

<u>Stelling</u>.

Liggen de 6 hoekpunten van de driehoeken ABC en PQR op een kegelsnede Γ, dan raken de 6 zijden van deze driehoeken aan een kegelsnede γ.

<u>Bewijs:</u>



Beschouwen we A en P als de fundamentaalpunten voor Γ, dan blijkt A(B,C,Q,R) = P(B,C,Q,R) of zoals door snijding met QR en BC hieruit ontstaat:
(XY'QR) = (BCX'Y).
Op de dragers QR en BC worden dus projectieve puntviertallen uitgesneden; de lijnen, die corresponderende punten verbinden, raken aan een kegelsnede γ, die aan QR en BC raakt. Dit is juist hetgeen te bewijzen was.

Bovenstaande stelling is één der z.g.n sluitingsstellingen van Poncelet. De sluitingsstelling voor n-hoeken luidt algemeen: Liggen de n hoekpunten van een enkelvoudige n-hoek op een kegelsnede Γ en raken de n zijden aan een tweede kegelsnede γ, dan is dit voor oneindig vele n-hoeken het geval.

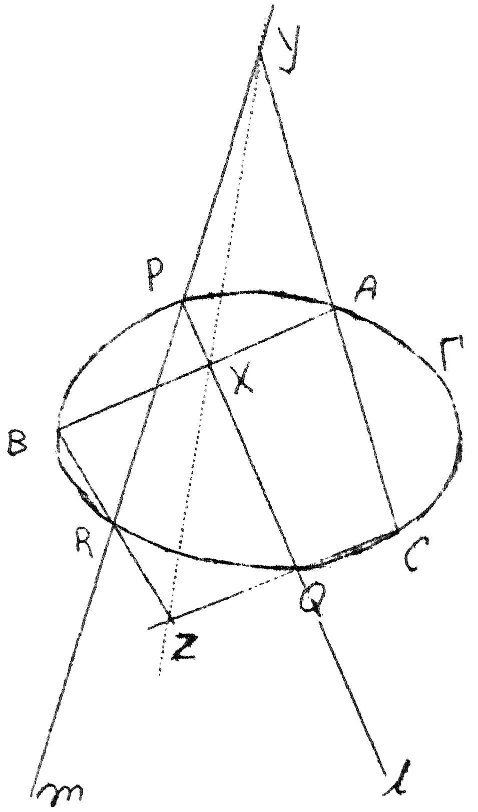
Elk punt van Γ kan daarbij als hoekpunt genomen worden; we trekken één der raaklijnen uit dit punt aan γ. Deze lijn snijdt Γ in een tweede hoekpunt van de n-hoek; hieruit trekken we weer een raaklijn aan γ. Dit is de tweede zijde van de n-hoek. Zo gaan we door: beurtelings ontstaat een hoekpunt en een zijde van de n-hoek. Na n stappen <u>sluit</u> de n-hoek zich dan vanzelf.

We geven van deze belangrijke stelling alleen voor het geval n=3 nog een ander bewijs m.b.v. de theorie der kegelsnedenbundels.

Eerst een <u>hulpstelling</u>: De kegelsneden van een bundel snijden op twee lijnen door eenzelfde basispunt projectieve puntreeksen uit.

<u>Bewijs</u>:

Laat A,B,C,P de vier basispunten van de bundel zijn. Een willekeurige kegelsnede Γ van de bundel zal de gegeven lijnen l en m door P in de punten Q en R snijden.
Volgens de stelling van Pascal, aangeduid door $\binom{PBC}{AQR}$ liggen X,Y,Z op een rechte.



De punten X en Y hangen niet van het gekozen bundelexemplaar Γ , doch slechts van de basispunten A,B,C,P en de lijnen l en m af.
Veranderen we de kegelsnede Γ , dan doorloopt Q de lijn l; Z is de projectie hiervan op XY uit C en R tenslotte is weer de projectie van Z uit B op m. Inderdaad is dus $Q \barwedge R$.
Uit bovenstaande hulpstelling volgt nu onmiddellijk het bewijs voor de sluitingsstelling. De lijnen QR omhullen een kegelsnede γ , wanneer Γ de bundel doorloopt; γ raakt aan de dragers l en m. Beschouwen we de drie ontaardingen (AB,PC), (AC,PB) en (BC,PA) uit de bundel, dan blijken ook AB,AC en BC tot de raaklijnen aan γ te behoren.

Een kegelsnede, ten opzichte waarvan een gegeven driehoek pooldriehoek is heet een <u>poolkegelsnede</u> van die driehoek. De volgende drie uitspraken zijn aequivalent :

a) ABC en PQR hebben eenzelfde poolkegelsnede α

b) ABC en PQR hebben eenzelfde omgeschreven kegelsnede Γ

c) ABC en PQR hebben eenzelfde ingeschreven kegelsnede γ

Vroeger is het bewijs van de stelling $a \rightarrow b$ gegeven; boven gaven we de bewijzen van $b \rightarrow a$ en $b \rightarrow c$. De stelling $a \rightarrow c$ is het duale van $a \rightarrow b$; de stelling $c \rightarrow a$ is het duale van $b \rightarrow a$; de stellingen $b \rightarrow c$ en $c \rightarrow b$ zijn elkaars duale. Strikt genomen waren beide bewijzen van de sluitingsstelling $b \rightarrow c$ dus overbodig.

Van de kegelsneden γ en Γ wordt wel gezegd, dat ze een <u>poristisch</u> stelsel vormen. Een omgeschreven kegelsnede en een ingeschreven kegelsnede van een driehoek vormen dus een poristisch systeem.

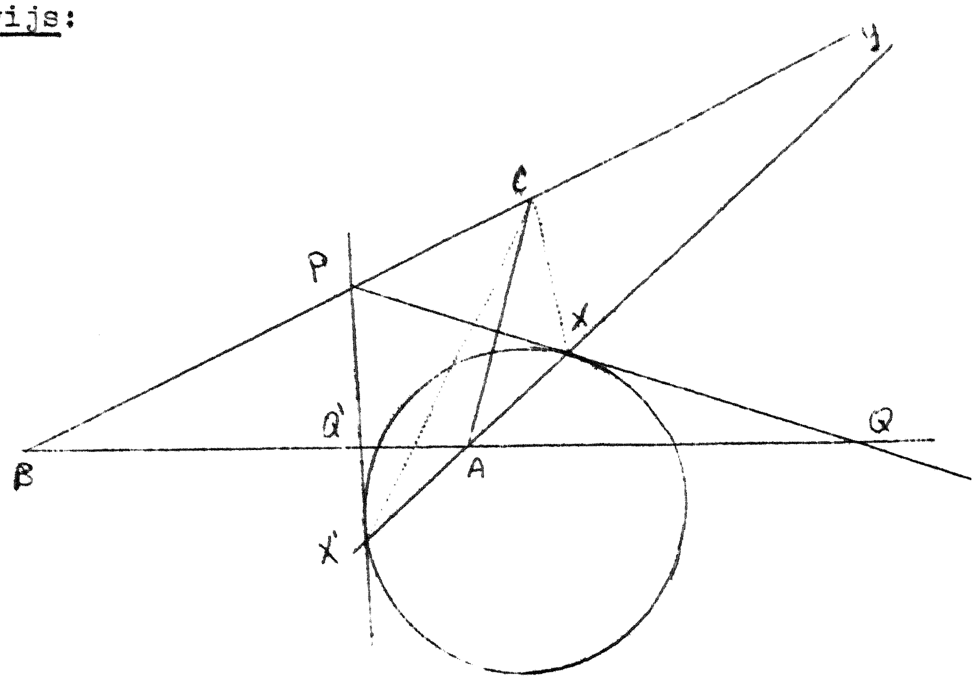
Γ heet <u>harmonisch omgeschreven</u> aan α . Een omgeschreven kegelsnede van een driehoek is dus harmonisch omgeschreven om een poolkegelsnede van die driehoek.

γ heet <u>harmonisch ingeschreven</u> in α . Een ingeschreven kegelsnede van een driehoek is dus harmonisch ingeschreven in een poolkegelsnede van die driehoek.

<u>Hulpstelling.</u>

Is ABC een pooldriehoek van de kegelsnede α , dan snijden de raaklijnen PX en PX', die uit een punt P van BC aan α getrokken kunnen worden de lijn AB in twee punten Q,Q', zodat H(AB,QQ')

<u>Bewijs:</u>



P ligt op BC, dus de poollijn XX' van P gaat door A. Wegens H(YA,XX') geldt ook H(CY,CA; CX,CX'). Ook hun vier polen liggen dus harmonisch, zodat H(AB,QQ').

<u>Stelling:</u>

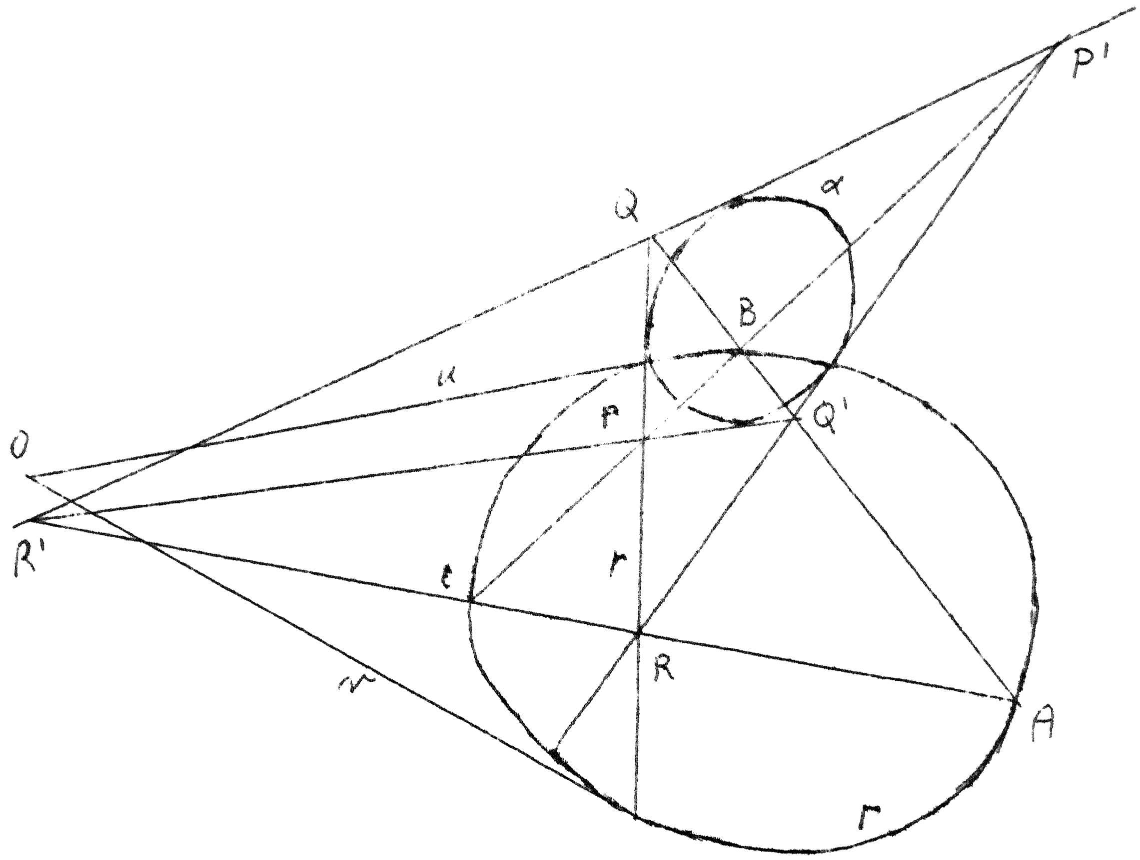
Is Γ harmonisch beschreven <u>om</u> α , dan is α harmonisch beschreven <u>in</u> Γ .

<u>Bewijs:</u>

Volgens het gegevene in Γ beschreven om een pooldriehoek ABC van α .

(Zie voor beschrijving van volgende figuur de volgende bladzij).

Zij r een willekeurige raaklijn van α , die BC in P snijdt. De tweede raaklijn uit P aan α snijdt AB in een punt Q', zodat volgens vorige hulpstelling H(AB,QQ'). De nog niet aangebrachte raaklijnen in Q en Q' aan α snijden volgens dezelfde hulpstelling BC in hetzelfde punt P', zodat H(BC,PP'). We hebben nu vier raaklijnen aan α ; volgens een vroegere stelling vormen deze een volledige vierzijde, waarvan de dia-



gonaaldriehoek een pooldriehoek van α is. Volgens constructie zijn P,P' en Q,Q' paren overstaande hoekpunten, zodat B een hoekpunt van de diagonaaldriehoek is. PQ en P'Q' snijden elkaar dus in een punt R van de poollijn van B; P'Q en PQ' snijden elkaar in R' op dezelfde lijn. Nogmaals dezelfde hulpstelling toepassend blijkt ook H(AC,RR').
Laat u en v de raaklijnen zijn in de punten, waar r Γ snijdt; O is hun snijpunt. De poollijn van P t.o.v. Γ gaat door P', daar P en P' geconjugeerde punten zijn. Daar genoemde poollijn ook door O gaat, is het de lijn OP'. Hieruit volgt dat OP en OP' geconjugeerd zijn t.o.v. Γ. Om dezelfde reden zijn ook OQ en OQ' geconjugeerd t.o.v. Γ, evenals OR en OR'. De poolstralen-involutie om het punt O bevat dus de paren (OP,OP'), (OQ,OQ') en (OR,OR'); de raaklijnen u en v zijn de dubbelstralen van deze involutie.
Passen we de gedualiseerde stelling van Desargues toe op de kegelsnede α en de vier boven aangebrachte raaklijnen, dan blijken de raaklijnen uit O aan α tot dezelfde involutie te behoren.
De raaklijnen uit O aan α worden dus door u en v harmonisch gescheiden dus liggen geconjugeerd t.o.v. Γ. Noemen we deze raaklijnen s en t, dan vormen r,s,t een driehoek, waarvan de zijden alle aan α raken. s en t zijn volgens het bovenstaande geconjugeerd t.o.v. Γ; elk dezer lijnen is echter ook geconjugeerd met r, omdat ze door de pool O van r t.o.v. Γ gaan. We hebben dus met een pooldriehoek van Γ te doen.
Hiermee is dus inderdaad bewezen: Is Γ harmonisch beschreven om α, dan is α harmonisch beschreven in Γ.

Door toepassing van het dualiteitsbeginsel (een andere naamgeving van de kegelsneden) volgt hieruit: Is α harmonisch beschreven in Γ, dan is Γ harmonisch beschreven om α. We hebben hier dus met aequivalente uitspraken te doen: " Γ om een pooldriehoek van α " aequivalent met " α in een pooldriehoek van Γ ".

Projectiviteiten tussen kegelsneden.

Zijn A,B,C,D vier punten van een kegelsnede γ en zijn S en T twee willekeurige andere punten van γ, dan is S(ABCD) = T(ABCD). Dit geldt ook wanneer de punten S of (en) T met een der gegeven punten samenvalt, als we onder de lijn, die twee samenvallende punten van verbindt de raaklijn in dit punt verstaan. Blijkbaar wordt bovenstaande dubbelverhouding door de 4 punten A,B,C,D reeds ondubbelzinnig bepaald, we noemen daarom S(ABCD) de dubbelverhouding (ABCD) der vier punten.

Opmerkingen.

1. De dubbelverhouding van 4 punten op een rechte wordt door deze punten alleen reeds bepaald. De dubbelverhouding van 4 punten op een kegelsnede γ wordt niet alleen door die punten bepaald, maar de kegelsnede γ moet gegeven zijn.

2. De formule S(ABCD) = (ABCD) geldt voor 4 punten op een rechte voor elk punt S van het vlak. Voor 4 punten op een kegelsnede geldt het al- alleen, als S ook op deze kegelsnede ligt.

Opgaven.

1. Definieer zelf de dubbelverhouding van 4 raaklijnen aan een kegelsnede.

2. Bewijs: Zijn a,b,c,d vier raaklijnen aan γ, met raakpunten A,B,C,D, dan geldt (abcd) = (ABCD).

Zijn op de kegelsnede γ drie punten A,B,C en op de kegelsnede γ' drie punten A',B',C' gegeven, dan is bij elk punt D van γ juist één punt D' van γ' te construeren, dat de DV (ABCD) op γ gelijk is aan de DV(A'B'C'D') op γ'. We zeggen, dat we een projectieve afbeelding of projectiviteit tot stand gebracht te hebben tussen γ en γ'.

Er is altijd één en juist één projectieve transformatie van het vlak, die vier vrij gelegen punten in vier andere vrij gelegen punten overvoert (zie onder aan pag. 10). Deze transformatie voert kegelsneden in kegelsneden over en laat dubbelverhoudingen invariant.

Stelling.

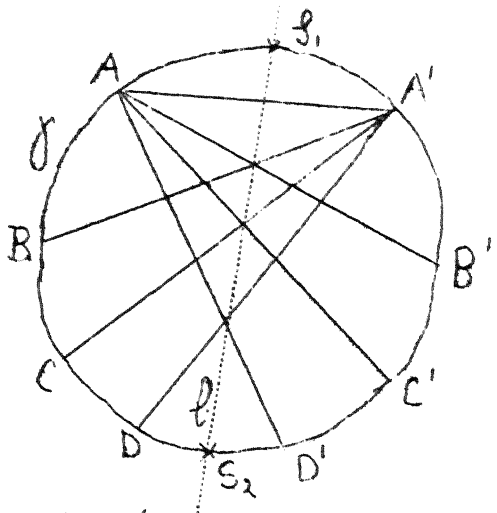
Er bestaat juist een projectieve transformatie van het vlak die een gegeven kegelsnede γ van het vlak in een andere gegeven kegelsnede

γ' overvoert en drie punten A,B,C van γ in drie voorgeschreven punten A',B',C' van γ'.

Bewijs:

Zij D de pool van AB t.o.v. γ en D' de pool van A'B' t.o.v. γ'. We beschouwen de projectieve transformatie S, die A,B,C,D in A',B', C',D', overvoert. γ gaat door A,B,C en raakt in A en B, resp. aan AD en BD. Hieruit volgt dat Sγ door A',B',C' gaat en in A' en B' resp. aan A'D' en B'D' raakt. Sγ is dus γ', zodat de gevraagde projectiviteit bestaat. S is ook de enige die voldoet, omdat poolverwantschap op projectieve wijze gedefinieerd is en dus elke projectieve transformatie die voldoet tevens D in D' moet overvoeren.

Het belangrijkste geval is dat, waarin γ en γ' samenvallen.



Is (ABCD) = (A'B'C'D'), dan zijn de stralenwaaiers A'(ABCD) en A(A'B'C'D') perspectief. De snijpunten van corresponderende stralen behoren dus alle tot een rechte l. De snijpunten S_1 en S_2 van l met γ zijn blijkbaar de dekpunten van de projectieve puntrijen (ABCD...) en (A'B'C'D'...) van γ. Een projectieve transformatie van een kegelsnede op zichzelf bezit dus twee dekpunten (die eventueel samenvallend of complex kunnen zijn). Hieruit volgt dat l alleen van de transformatie afhangt en niet van de keuze der fundamentaalpunten A en A'. Dit betekent: voor elk puntenpaar X,Y van γ met hun beeldpunten X',Y' geldt: XY' en X'Y snijden elkaar op l.

Opmerking.

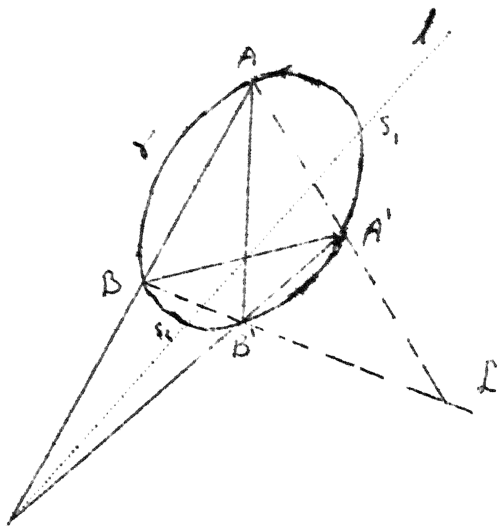
Dit bewijs is geheel analoog aan het overeenkomstige bij projectieve puntreeksen op ontaarde kegelsneden. Evenals uit het vroegere bewijs de stelling van Pappus werd afgeleid is uit het bovenstaande de stelling van Pascal te bewijzen.

Opgave:

Werk dit nader uit.

Ook als de punten S_1 en S_2 samenvallen, gaat de voorgaande redenering nog door; l is dan een raaklijn aan γ . l heet de <u>as</u> van de projectiviteit.

Een <u>involutie</u> op een kegelsnede is een involutorische projectieve transformatie van deze kegelsnede op zichzelf. Is T zo 'n involutie, dan is TA=A' gelijkwaardig met TA'=A. Is verder TB=B', dus TB'=B, dan snijden AB' en A'B elkaar op de as l , evenals A'B' en AB. Hieruit volgt, dat AA' en BB' elkaar in de pool L van l snijden. Daar l alleen van de involutie en niet van de gekozen punten A,B afhangt, is L een voor de involutie vast punt. Uit (LXAA')=-1 volgt S_1(LXAA')=-1 , dus $(S_1S_2AA')=-1$



Een involutie op γ heeft twee dubbelpunten: elk paar punten van de involutie wordt door deze dubbelpunten harmonisch gescheiden. Voor involuties op kegelsneden bestaan dus analoge definities als voor die op rechten; bovendien kan een involutie gedefinieerd worden als de verzameling puntenparen van γ , die met L op één rechte liggen.

<u>Definitie</u>. l heet de <u>as</u> en L het <u>centrum</u> van de involutie op γ . Is γ reëel, dan is de evolutie <u>elliptisch</u>, als L <u>binnen</u> en <u>hyperbolisch</u> als L <u>buiten</u> γ ligt. Ligt **L** op γ , dan is de involutie <u>parabolisch</u> en <u>ontaard</u>: van elk puntenpaar valt één punt in L.

<u>Lineaire en kwadratische constructies.</u>

<u>Lineaire constructiepostulaten</u>:

L_1. De verbindingslijn te bepalen van twee gegeven (niet-samenvallende) punten.

L2. Het snijpunt te bepalen van twee (niet-samenvallende) lijnen.

Volgens de theorie zijn de m.b.v. L_1en L_2 construeerbare lijnen en punten ondubbelzinnig bepaald. We denken deze constructies voorts onbeperkt uitvoerbaar. Voor sommige constructies is het nodig min of meer willekeurige hulplijnen aan te brengen of hulppunten aan te nemen, b.v. bij de constructie van het vierde harmonische van drie gegeven punten van een rechte. Vandaar:

L3. Een rechte lijn te construeren, verschillend van een eindig aantal gegeven rechten en niet incident met een eindig aantal gegeven punten.

L4. Een punt te construeren, verschillend van een eindig aantal gegeven punten en niet incident met een eindig aantal gegeven lijnen.

De volgens L3 en L4 te construeren lijnen en punten zijn niet ondubbelzinnig bepaald. De postulaten L_1 en L2 zijn, evenals L3 en L4 elkaars

Kwadratische constructiepostulaten:

K_1. De snijpunten te bepalen van een rechte lijn met een eens voor altijd gegevene kegelsnede γ.

K_2. De raaklijnen te bepalen, die vanuit een punt aan γ getrokken kunnen worden.

Voor toepassing van K1 en K2 moet γ gegeven zijn. We eisen dus niet, dat de snijpunten van een rechte lijn met een willekeurige gegeven kegelsnede te bepalen zijn, doch alleen als deze kegelsnede met γ samenvalt. Hetzelfde geldt voor K2, het duale van K1. Ook deze constructies denken we onbeperkt uitvoerbaar; ze leveren een eenduidig resultaat.

Onder lineaalconstructie of lineaire constructie verstaan we een constructie, waarbij slechts de postulaten L1...L4 zijn toegelaten. Worden ook K1 en (of) K2 gebruikt, dan spreken we van een kwadratische constructie. Alle vroeger besproken constructies (met de lineaal alleen) zijn lineaalconstructies volgens onze nieuwe betekenis. We noemen nog speciaal: het construeren van het tweede snijpunt van een rechte l, die door een gegeven punt P gaat, met een kegelsnede, die door P en nog 4 andere punten bepaald wordt.

Stelling. L4 is uit te voeren, alleen door toepassing van L2, L3.

Bewijs. Zijn P_i ($i=\ ,\dots,n$) de gegeven punten en l_k ($k=1,\dots,m$) de gegeven lijnen, dan bepalen we volgens L3 een rechte l, verschillend van elke l_k en gaande door geen der punten P_i. Is Q_k het snijpunt van l met l_k (bepaald volgens L2), dan is met L3 een lijn m te vinden, die van l en alle l_k verschilt en door geen der punten P_i, Q_k gaat.

Het snijpunt S van l en m voldoet (bewijs dit!).

Duaal geldt dus ook: L3 is uit te voeren, alleen door toepassing van L1, L4.

Stelling. K2 is uit te voeren, alleen door toepassing van L1...L4 en K1.

Bewijs. Zij L het gegeven punt. Stel eerst dat l niet op γ ligt.

Kies $P \neq L$ (L4) en trek LP (L1). Deze lijn snijdt γ in twee punten A,A' (K1).

Kies nu Q niet op LP (L4) en trek LQ (L1).

Stel deze lijn snijdt γ in B,B' (K1)

AB' en BA' snijden elkaar, evenals AB en A'B' op de poollijn l van L (toep.van L1 en L2). Snijd l met γ (K1) en verbind deze punten met L (L1).

Is bij toeval A=A' of B=B', dan kiezen we weer een derde punt R niet op LP en op LQ, enz.

Opgave. Werk zelf een constructie uit als L op γ ligt.

Duaal geldt: K1 is overbodig, als L1...L4, K2 toegelaten worden.

We geven nu enige kwadratische constructies.

1. De dekpunten te bepalen van twee collocale projectieve puntreeksen van een lijn l .

Constructie. Kies een punt S op γ en projecteer de reeksen beide vanuit S op γ . De projectiviteit op γ heeft twee dekpunten: terugprojecteren uit S op l levert de gevraagde dekpunten.

2. De dekrechten te bepalen van twee projectieve stralenwaaiers met zelfde top S.

Constructie. de duale van de vorige.

3. De snijpunten te bepalen van een rechte l met een kegelsnede α , die door 5 punten bepaald is.

Constructie. Neem twee der vijf punten tot fundamentaalpunten, zodat α door projectieve waaiers wordt voortgebracht. Op l snijden deze projectieve waaiers projectieve puntenreeksen uit, waarvan volgens de eerste constructie de dekpunten geconstrueerd kunnen worden.

Opmerkingen. a) Gaat l door één der gegeven punten van α , dan gaat de kwadratische constructie in een lineaalconstructie over.

b) Voor toepassingen van K 1 mogen we achteraf voor γ dus ook andere kegelsneden nemen, mits 5 punten van γ bekend zijn.

4. De raaklijnen vanuit een punt P aan een kegelsnede te bepalen, die door 5 raaklijnen bepaald is.

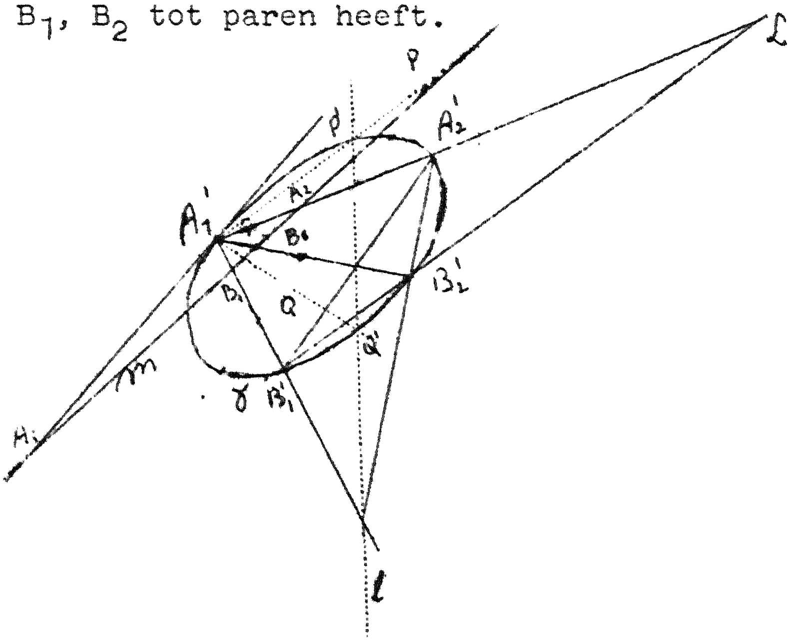
Dit is de duale constructie.

5. Dito, als γ door 5 punten bepaald is.

De constructie volgt uit de vorige op dezelfde wijze als K2 uit K1.

6. Het gemeenschappelijke paar te bepalen van twee involuties op dezelfde rechte m , beide gegeven door dubbelpunten.

Constructie. Denk de eerste involutie gegeven door de dubbelpunten A_1, A_2 en de tweede door de dubbelpunten B_1, B_2. Het gevraagde gemeenschappelijke paar P,Q ligt harmonisch, zowel met A_1, A_2, als met B_1, B_2. P,Q zijn dus de dubbelpunten van een derde involutie, die A_1, A_2 en B_1, B_2 tot paren heeft.



In de figuur is A_1', het raakpunt van een der raaklijnen, uit A aan γ getrokken A_1', A_2', B_1', B_2' ontstaan, door A_1, A_2, B_1, B_2 vanuit A_1', op γ te projecteren. De as l van de involutie, waarvan A_1', A_2' en B_1', B_2' paren zijn snijdt γ in P', Q': deze worden op m teruggeprojecteerd.

7. Zelfde constructie, als beide involuties gegeven zijn door twee puntenparen.

We brengen weer door projectie vanuit een punt van γ de twee involuties op γ over. Van beide zijn de centra onmiddellijk te construeren. De verbindingslijn van deze centra is nu l .

Hiermee zijn de voornaamste kwadratische constructies wel gegeven. In de practijk kunnen we γ door een willekeurige, eenduidig bepaalde kegelsnede vervangen en kiezen dan hiervoor een geschikt gekozen cirkel. Kwadratische constructies zijn dus uitvoerbaar met passer en lineaal. Van het middelpunt van de met een passer getekende cirkel mag echter geen gebruik gemaakt worden!

Gemengde opgaven.

. Bewijs de eerste vierhoekstelling m.b.v. de stelling van Desargues.

2. Zijn D_1 en D_2 de twee dekpunten van twee collocale projectieve puntenreeksen, P' en Q' de beeldpunten van twee willekeurige punten P,Q, dan vormen de paren (D_1,D_2), (P,Q'), (P',Q) een involutie.

3. Bewijs (ABCD)=(BADC) door een projectiviteit te construeren, die deze viertallen punten in elkaar overvoert. Doe hetzelfde voor (ABCD)=(CDAB) en (ABCD)=(DCBA).

4. Als de zijden van een veranderlijke driehoek door drie vaste collineaire punten gaan, terwijl twee hoekpunten over vaste rechte lijnen bewegen, dan beweegt het derde hoekpunt eveneens over een vaste rechte lijn, die door het snijpunt gaat van de eerste twee.

5. Als H(AC,BD) en voor de projectieve transformatie π geldt $\pi A=B$, $\pi B=C$, $\pi C=D$, bewijs dan dat $\pi^4=I$.

6. Gegeven: H(BC,AA'), H(CA,BB'), H(AB,CC'). Te bewijzen: AA',BB',CC' zijn paren van een involutie.
   Aanwijzing: Beschouw de transformatie π met π(BCA)=(ACB), breid π over de gegeven punten uit en bewijs dat (ABCC')=(A'B'C'C).

7. Als driehoek ABC zowel perspectivisch is met driehoek B'C'A' als met driehoek C'A'B', dan is ABC ook perspectivisch met A'B'C'. Bewijs dit!

8. Construeer een driehoek, als de omgeschreven cirkel gegeven is, en elk der zijden door een gegeven punt moet gaan (werkstuk van Castillon).

Een constructie in de synthetische meetkunde heeft tot doel een onbekend punt of onbekende lijn, die aan bepaalde voorwaarden (incidentievoorwaarden) moet voldoen, te bepalen uit een aantal gegeven punten, lijnen, enz. waartussen bepaalde relaties (incidentierelaties) gegeven zijn. Het analoge probleem in de analytische meetkunde leidt tot de berekening van de coördinaten of vergelijkingen van de onbekende punten of lijnen, als die van de gegevene bekend zijn. Er bestaat een belangrijk verband tussen de oplosbaarheid van beide problemen:

Stelling. De synthetische constructie is dan en slechts dan met de lineaal alleen (dus door toepassing van $L_1 \ldots L_4$) oplosbaar, als het bijbehorende analytische probleem slechts aanleiding geeft tot vergelijkingen van de eerste graad.

Bewijs. We brengen eerst $L_1 \ldots L_4$ in analytische vorm; we gebruiken projectieve of driehoekscoördinaten.

Zijn A en B twee gegeven punten met coördinaten (a_0, a_1, a_2) en (b_0, b_1, b_2), dan zal de rechte lijn $p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 = 0$ door beide punten gaan als
$$\begin{cases} p_0a_0 + p_1a_1 + p_2a_2 = 0 \\ p_0b_0 + p_1b_1 + p_2b_2 = 0 \end{cases}$$
De verhouding der onbekenden (p_0, p_1, p_2) volgt uit dit stelsel lineaire vergelijkingen.

Zijn l en m twee gegeven rechten met vergelijkingen $l_0x_0 + l_1x_1 + l_2x_2 = 0$ en $m_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2 = 0$, dan zullen de coördinaten van het snijpunt S moeten voldoen aan
$$\left.\begin{aligned} l_0s_0 + l_1s_1 + l_2s_2 = 0 \\ m_0s_0 + m_1s_1 + m_2s_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$
zodat (s_0, s_1, s_2) uit dit stelsel lineaire vergelijkingen volgt.

Lossen we bovenstaande stelsels lineaire vergelijkingen op, dan zijn de onbekenden steeds veeltermen in de bekende grootheden met geheeltallige coëfficiënten.

Passen wij L_3 of L_4 toe, dan worden de gegevens uitgebreid met (willekeurige) constanten, die slechts voldoen aan de eis, dat bepaalde ongelijkheden gelden. Is het eindresultaat van de keuze der hulppunten en -lijnen onafhankelijk, dan komen in de coördinaten van het te construeren punt deze willekeurige constanten niet meer voor.

Door de gehele synthetische constructie analytisch te "vertalen", wordt een analytische berekening gevonden, geheel berustend op het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad. De helft van de stelling is hiermee bewezen; Is de constructie met de lineaal alleen uitvoerbaar, dan is de analytische berekening uit te voeren slechts door het oplossen van lineaire vergelijkingen.

We zagen reeds, dat door éénmaal toepassen van L_1 en L_2 de coördinaten van de dan geconstrueerde punten en lijnen geheeltallige veeltermen zijn in de coördinaten der gegeven punten en lijnen. Dat dit ook na

Een constructie in de synthetische meetkunde heeft tot doel een onbekend punt of onbekende lijn, die aan bepaalde voorwaarden (incidentievoorwaarden) moet voldoen, te bepalen uit een aantal gegeven punten, lijnen, enz. waartussen bepaalde relaties (incidentierelaties) gegeven zijn. Het analoge probleem in de analytische meetkunde leidt tot de berekening van de coördinaten of vergelijkingen van de onbekende punten of lijnen, als die van de gegevene bekend zijn. Er bestaat een belangrijk verband tussen de oplosbaarheid van beide problemen:

Stelling. De synthetische constructie is dan en slechts dan met de lineaal alleen (dus door toepassing van $L_1 \dots L_4$) oplosbaar, als het bijbehorende analytische probleem slechts aanleiding geeft tot vergelijkingen van de eerste graad.

Bewijs. We brengen eerst $L_1 \dots L_4$ in analytische vorm; we gebruiken projectieve of driehoekscoördinaten.

Zijn A en B twee gegeven punten met coördinaten (a_0, a_1, a_2) en (b_0, b_1, b_2), dan zal de rechte lijn $p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 = 0$ door beide punten gaan als

$$\begin{cases} p_0a_0 + p_1a_1 + p_2a_2 = 0 \\ p_0b_0 + p_1b_1 + p_2b_2 = 0 \end{cases}$$

De verhouding der onbekenden (p_0, p_1, p_2) volgt uit dit stelsel lineaire vergelijkingen.

Zijn l en m twee gegeven rechten met vergelijkingen $l_0x_0 + l_1x_1 + l_2x_2 = 0$ en $m_0x_0 + m_1x_1 + m_2x_2 = 0$, dan zullen de coördinaten van het snijpunt S moeten voldoen aan

$$\left.\begin{array}{l} l_0s_0 + l_1s_1 + l_2s_2 = 0 \\ m_0s_0 + m_1s_1 + m_2s_2 = 0 \end{array}\right\}$$

zodat (s_0, s_1, s_2) uit dit stelsel lineaire vergelijkingen volgt.

Lossen we bovenstaande stelsels lineaire vergelijkingen op, dan zijn de onbekenden steeds veeltermen in de bekende grootheden met geheeltallige coëfficiënten.

Passen wij L_3 of L_4 toe, dan worden de gegevens uitgebreid met (willekeurige) constanten, die slechts voldoen aan de eis, dat bepaalde ongelijkheden gelden. Is het eindresultaat van de keuze der hulppunten en -lijnen onafhankelijk, dan komen in de coördinaten van het te construeren punt deze willekeurige constanten niet meer voor.

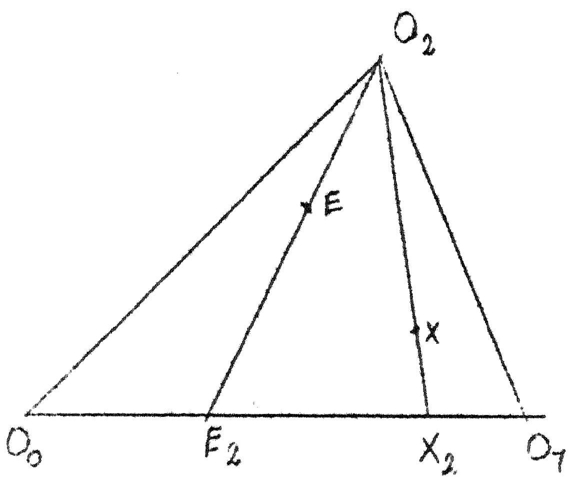
Door de gehele synthetische constructie analytisch te "vertalen", wordt een analytische berekening gevonden, geheel berustend op het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad. De helft van de stelling is hiermee bewezen; Is de constructie met de lineaal alleen uitvoerbaar, dan is de analytische berekening uit te voeren slechts door het oplossen van lineaire vergelijkingen.

We zagen reeds, dat door éénmaal toepassen van L_1 en L_2 de coördinaten van de dan geconstrueerde punten en lijnen geheeltallige veeltermen zijn in de coördinaten der gegeven punten en lijnen. Dat dit ook na volledige inductie: Is in totaal L_1 en L_2 samen n maal toegepast, dan zijn de coördinaten van alle in de figuur voorkomende punten en lijnen geheeltallige veeltermen in de gegeven coördinaten (inductieonderstelling). Dit is dan ook bij de $(n+1)^e$ toepassing nog juist, omdat een geheeltallige veelterm in geheeltallige veeltermen weer een geheeltallige veelterm is.

Voor eenduidig oplosbare lineaire vergelijkingen in homogene veranderlijken geldt zeker, dat de onbekenden geheeltallige veeltermen van de coëfficiënten zijn. Onze stelling is nu geheel bewezen, zodra we aantonen dat een punt of lijn, welks coördinaten geheeltallige veeltermen zijn van de coördinaten van gegeven punten en lijnen, met de lineaal alleen construeerbaar is.

De verhouding van twee coördinaten van eenpunt is meetkundig als dubbelverhouding te interpreteren:

$$\frac{x_1}{x_0} = (X_2E_2O_0O_1).$$



We behoeven dus slechts te bewijzen dat het punt X_2 met de lineaal alleen construeerbaar is, als bovenstaande dubbelverhouding een geheeltallige rationale functie is van een aantal gegeven dubbelverhoudingen. Daar dergelijke rationale functies ontstaan door op de gegevens een eindig aantal malen de bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen uit te voeren, is het voldoende te laten zien, hoe we een dubbelverhouding kunnen construeren, gelijk aan som, verschil, product of quotiënt van twee gegeven dubbelverhoudingen. Wij zijn hierbij aan de vaste punten O_0, O_1, E_2 niet gebonden, omdat door een <u>lineaalconstructie</u> bij drie collineaire punten A, B, C altijd een punt Y te construeren is met $(X_2E_2O_0O_1) = (YABC)$ (pag. 46).

Is $(ABCD) = \lambda$, dan is $(BACD) = \frac{1}{\lambda}$ en $(ACBD) = 1-\lambda$

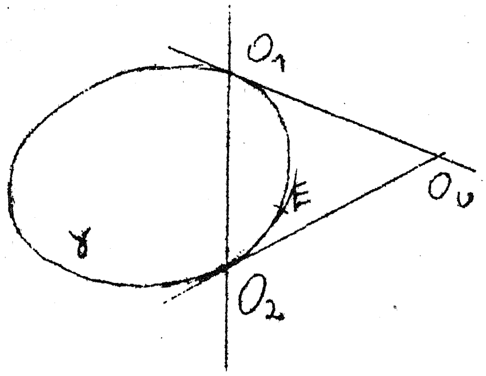
Is μ een tweede DV, dan is μ te schrijven als (ABDE). In dat geval is $(ABCE) = \lambda\mu$ (formule (15) pag. 30). Het <u>product</u> van twee dubbelverhoudingen is dus contrueerbaar. Dan is ook $\frac{1}{\lambda} . \mu = \frac{\mu}{\lambda}$ te construeren, dus het <u>quotiënt</u>. Uit $\frac{\mu}{\lambda}$ volgt $1 - \frac{\mu}{\lambda}$, hieruit bepaalt men $\lambda(1 - \frac{\mu}{\lambda}) = \lambda-\mu$. Ook het <u>verschil</u> is dan geconstrueerd. De DV-1 is met de lineaal construeerbaar, dus naast $\lambda - \mu$ ook $\lambda+\mu$, dus de <u>som</u>.

Uitgaande van de uitkomst van een analytische berekening is op deze wijze een lineaalconstructie afgeleid, waarmee onze stelling geheel bewezen is.

<u>Stelling</u>. Een synthetische constructie is dan en slechts dan met passer en lineaal oplosbaar (d.w.z. door toepassing van $L_1 \ldots L_4$, K_1, K_2), als het bijbehorende analytische probleem voert tot vergelijkingen van niet <u>hogere dan de tweede graad</u>.

Bewijs. De analytische "vertaling" van een constructie m.b.v. de postulaten $L_1 \ldots L_4$, K_1, K_2 levert onmiddellijk stelsels vergelijkingen van de eerste of de tweede graad, waarmee de eerste helft van de stelling bewezen is.

Om de tweede helft van de stelling te bewijzen, kiezen wij een coördinatendriehoek met twee hoekpunten op γ ; het derde hoekpunt is de pool van de overstaande zijde. Bovendien kiezen wij het eenheidpunt E op γ . De vergelijking van γ wordt dan $x_1 x_2 = x_0^2$. We moeten aantonen, dat m.b.v. K_1 en K_2 iedere vierkantsvergelijking oplosbaar is, waarvan de verhoudingen der coëfficiënten gegeven dubbelverhoudingen zijn. (Waarom juist dubbelverhoudingen?) Laat $at^2 + bt + c = 0$ een dergelijke VKV zijn. Zij l de rechte lijn (b,c,a), dus met vergelijking $bx_0 + cx_1 + ax_2 = 0$; deze lijn is met de lineaal alleen te construeren. Snijden we l met γ , dan vinden wij door eliminatie van x_2:



$ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 = 0$, zodat de $\frac{x_0}{x_1}$ van de snijpunten de wortels van de VKV voorstellen. Hiermee is de stelling bewezen.

Als we van reële gegevens uitgaan, zullen de m.b.v. lineaalconstructies bepaalde punten en lijnen ook alle reëel zijn. Dit is niet meer het geval als we ook K_1 toelaten. De twee snijpunten van l met γ kunnen dan toegevoegd complex worden: op een vel tekenpapier bestaat geen beeld van deze complexe punten. Met het oog op de praktijk van het tekenen vervingen wij K reeds eerder door het gelijkwaardige postulaat: de snijpunten te bepalen van een gegeven rechte met een gegeven kegelsnede (die dan als cirkel getekend werd). Nu beperken we dit als volgt: de snijpunten te bepalen van een gegeven reële rechte met een gegeven reële kegelsnede, mits deze snijpunten reëel zijn (K_1^*). Complexe punten worden daarbij nooit geconstrueerd; de gehele constructie blijft reëel, dus op papier te verwezenlijken.
Toegevoegd complexe punten worden daarbij op geschikte wijze bepaald door reële punten; bijvoorbeeld als dubbelpunten van een elliptische involutie, waarvan twee reële paren gegeven zijn.

Als voorbeeld enige constructies, waarin complexe elementen gemeden zijn.

1. Een kegelsnede γ gaat door de drie reële punten P,Q,R en door de twee (complexe) dubbelpunten van een elliptische involutie op een rechte l, die door twee elkaar scheidende puntenparen (A_1,A_2) en (B_1,B_2) gegeven is. Men vraagt enige reële punten van γ te construeren.
Oplossing. Laat QR, PR en PQ de lijn l resp. in de punten P_1, Q_1, R_1 snijden. Men bepaalt de punten P_2, Q_2, R_2, die aan deze punten toegevoegd zijn in de gegeven involutie op l (lineaalconstructie!). Als D_1 en D_2

de complexe dubbelpunten van deze involutie zijn, dan is dus $(D_1D_2P_1P_2) = (D_1D_2Q_1Q_2) = (D_1D_2R_1R_2) = -1$. De vierstralen $Q(D_1D_2P_1P_2)$ en $P(D_1D_2Q_1Q_2)$ zijn dan projectief, zodat de punten P, Q, R, D_1, D_2 op één kegelsnede liggen met het snijpunt R' van QP_2 en PQ_2. Zo vinden wij op γ dus drie reële punten: $P' = (QR_2, RQ_2)$, $Q' = (PR_2, RP_2)$ en $R' = (QP_2, PQ_2)$. Dit is een constructie met de lineaal alleen.

2. Op de rechten l en m zijn twee elliptische involuties gegeven, waarvan de dubbelpunten resp. L_1, L_2 en M_1, M_2 zijn. Gevraagd wordt het snijpunt S te bepalen van L_1M_1 met L_2M_2 en het snijpunt T van L_1M_2 met L_2M_1. Beide snijpunten zijn reëel. (Waarom?)

Oplossing. Projecteren wij de involutie op l vanuit S of T op m, dan ontstaat de gegeven involutie op m; S en T zijn de enige projectiecentra met deze eigenschap. Het snijpunt A van l en m blijft bij deze projectie invariant. Het met A corresponderende punt van de twee involuties duiden wij resp. met A_l en A_m aan; deze punten zijn met de lineaal alleen construeerbaar. De recht A_lA_m bevat de gevraagde punten S en T. Er is op l juist één paar van de involutie, dat harmonisch ligt met A, A_l. Dit paar P_1, P_2 is m.b.v. een kwadratische constructie te bepalen en is altijd reëel. Op dezelfde wijze bepalen wij het paar Q_1, Q_2 van de involutie op m, dat harmonisch ligt met A, A_m. Dan gaan P_1Q_1 en P_2Q_2 door S en P_1Q_2 en P_2Q_1 door T.

3. Een kegelsnede γ gaat door het reële punt P en door de dubbelpunten D_1, D_2 en E_1, E_2 van twee gegeven elliptische involuties resp. op de rechten l en m. Enige reële punten van γ worden gevraagd.

Oplossing, Snijden l en m elkaar in A, dan is volgens vorige constructie de diagonaaldriehoek STA van de volledige vierhoek D_1, D_2, E_1, E_2 te bepalen. Op elk der lijnen PS, PT, PA is het tweede punt van γ te bepalen, omdat STA pooldriehoek is. Zo ontstaan 4 reële punten van γ; meer punten zijn m.b.v. voorbeeld 1 te construeren.

4. Van twee kegelsneden γ en δ zijn twee reële snijpunten S, T gegeven; van beide kegelsneden zijn nog drie extra punten bekend. Men vraagt de verbindingslijn der twee overige snijpunten.

Oplossing. Snijd γ en δ met een willekeurige lijn l en pas de stelling van Desargues toe. De gevraagde lijn snijdt l in een punt, dat direct construeerbaar is. Kiezen wij voor l een lijn, die door reeds bekende punten van γ en δ gaat, dan is dit zelfs een lineaalconstructie, ook al zijn de twee onbekende snijpunten complex.

Tot slot bewijzen wij de stelling:

Zijn van een kwadratische constructie-opgave alle gegevens reëel en zijn de te construeren lijnen en punten eveneens reëel, dan is de constructie uit te voeren m.b.v. $L_1 \ldots L_4$ en K_1^*.

Bewijs. Analytisch zijn de coördinaten van de te construeren punten en

Affiene meetkunde.

Definitie. Onder het affiene vlak verstaan we het projectieve vlak, waaruit een (reële) rechte is weggelaten. Door toevoeging van deze rechte is omgekeerd uit het affiene vlak het projectieve vlak te verkrijgen.

De weggelaten rechte l_∞ heet de oneigenlijke rechte; punten van l_∞ heten oneigenlijke punten, of richtingen.

Twee rechten, die elkaar op l_∞ snijden, hebben geen snijpunt in het affiene vlak; we noemen deze rechten evenwijdig. Twee evenwijdige rechten hebben hetzelfde oneigenlijke punt. Door een punt buiten een lijn bestaat altijd juist één lijn, die met de gegevene evenwijdig is. Een projectieve transformatie S tussen de affiene vlakken V en V' zal niet altijd de oneigenlijke lijn l_∞ van V in de oneigenlijke lijn l'_∞ van V' overvoeren. Is $Sl_\infty = l'_\infty$, dan heet S een affiene transformatie van V op V'. De affiene transformatie van V op zichzelf vormen een groep (de affiene groep), die alle projectieve transformaties bevat, die l_∞ tot dekrechte hebben. Een affien begrip is een begrip dat invariant is tegenover affiene transformaties; de affiene meetkunde houdt zich alleen met affiene begrippen en stellingen bezig. De begrippen parallelogram en trapezium zijn affiene begrippen, evenals het begrip "tussen" (van reële punten op een rechte).

Definitie. Een affiene transformatie, die alle oneigenlijke punten invariant laat en geen eigenlijk dekpunt bezit heet een translatie. Ook de identiteit nemen we in de verzameling translaties op.

Is T een translatie en is TA = A', $(A \neq A')$, en is P het oneigenlijke punt van AA', dan is TP = P, dus T(AP) = A'P. Elk punt van AP wordt dus in een (ander) punt van AP overgevoerd. Ligt B niet op AP, is TB = B' en is Q het oneigenlijke punt van BB', dan is T(BQ) = B'Q. Snijden AP en BQ elkaar in S, dan is blijkbaar TS = S, zodat S op l_∞ moet liggen. Daar verder het oneigenlijke punt van AB invariant is, dus eveneens op A'B' ligt blijkt:

Een translatie is een quasi perspectiviteit, waarvan centrum en as beide oneigenlijk zijn (zie de vroegere def. pag. 19).

De translatie, die A in A' overvoert, duiden we, evenals vroeger aan met $T_{AA'}$. We beschouwen in het volgende geordende puntenparen van het affiene vlak. We definiëren: $(A,A') \backsim (B,B')$ (spreek uit: aequivalent) als $T_{AA'}B = B'$.

We mogen dit eerst een aequivalentie noemen, als bewezen is, dat aan de eisen, die aan de aequivalentie-relatie gesteld worden (zie Analyse pag. 11), is voldaan.

OPGAVEN.

1. Bewijs dat bovenstaande aequivalentie-relatie reflexief, symmetrisch en transitief is.
2. Liggen A, A', B niet op een rechte en is $(A,A') \sim (B,B')$ dan is $AA'B'B$ een parallelogram.

Definitie. De verzameling van alle onderling aequivalente geordende puntenparen noemen we een vector.
Vectoren geven we aan door $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$, enz. Behoort het puntenpaar (A,A') tot de aequivalentieklasse $\underline{a}$, dan zeggen we ook kortheidshalve dat (A,A') gelijk is aan de vector $\underline{a}$.

De verzameling translaties is eeneenduidig af te beelden op de verzameling vectoren: aan $T_{AA'}$ is de vector $\underline{a}$ toegevoegd als $(A,A') = \underline{a}$.
Op pag. 20 is bewezen, dat de translaties een commutatieve groep vormen.

Definitie. Is $T_{AA'} \cdot T_{BB'} = T_{CC'}$, en is

$$\left.\begin{array}{l}(A,A') = \underline{a}\\(B,B') = \underline{b}\\(C,C') = \underline{c}\end{array}\right\} \text{, dan zeggen we } \underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$$

Aan de identieke transformatie voegen we de nulvector $\underline{0}$ toe: $(A,A) = \underline{0}$.

OPGAVEN.

1. Bewijs: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
   $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$
   $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$
2. Bewijs: Als $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$ en $\underline{a} + \underline{y} = \underline{b}$, dan is $\underline{x} = \underline{y}$. Deze vector $\underline{x}$ is het verschil van $\underline{a}$ en $\underline{b}$; we schrijven $\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}$. Voor $\underline{0} - \underline{a}$ schrijven we $-\underline{a}$ (tegengestelde).
3. Bewijs: $\underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{a} - \underline{b}$
   $-(-\underline{b}) = \underline{b}$
   $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$
   $-\underline{0} = \underline{0}$
4. Bewijs: Is $(A,B) = \underline{a}$ en $(B,C) = \underline{b}$, dan is $(A,C) = \underline{a} + \underline{b}$.
5. Is $ABCD$ een parallelogram, dan is $(A,C) = (A,B) + (A,D)$.

Definitie. Een affiene transformatie, die alle oneigenlijke punten invariant laat en bovendien nog een eigenlijk dekpunt O heeft, heet een dilatatie met centrum O (verg. pag. 20). Vroeger is bewezen: de dilataties met eenzelfde centrum vormen een commutatieve groep.

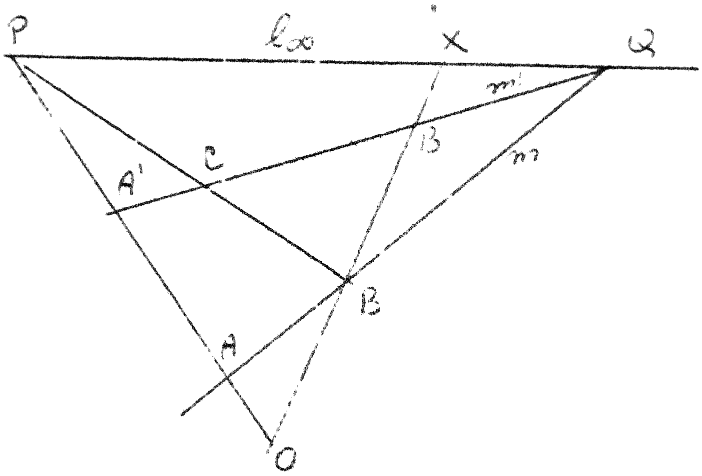
Aan elke dilatatie wordt een getal toegevoegd (de factor van de dilatatie), die gedefinieerd wordt als de D.V. $(OPA'A)$, als O het centrum, A en A' een paar toegevoegde punten en P het oneigenlijke punt van AA' is.

Opgave. Bewijs dat k niet van het puntenpaar A, A' afhangt.
De identieke transformatie geven we de factor 1.

Voert de dilatatie D met factor k het puntenpaar (A,B) op m over in het puntenpaar (A',B') op m', dan is $m // m'$. We schrijven dan $(A',B') = k(A,B)$

<u>Opgave</u>. Bewijs dat $(A',B') = k(A,B)$ gelijkwaardig is met $(A,B) = \frac{1}{k}(A',B')$ en met $(B',A') = k(B,A)$.

Zij Q het oneigenlijke punt van m en m'. Is $m \neq m'$, dus $P \neq Q$, dan snijdt BP de lijn m' in een punt C.



Nu is $k = (OPA'A) = (OXB'B) = \underset{P}{=} (A'QB'C)$ of $(A',B') = k(A',C)$

Dit betekent: Is $(A',B') = k(A,B)$ en is (A',C) is (A,B), dan is ook $(A',B') = k(A',C)$...... .....(I)

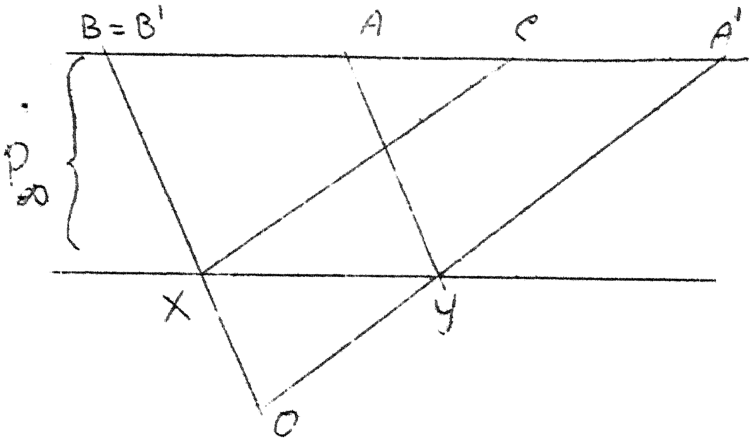
Ook het omgekeerde van I is geldig.

Dit bewijs geldt alleen, als m' niet met m samenvalt.

Als $m = m'$, is de stelling voor $k = 1$ triviaal.

Voor $k \neq 1$ onderscheiden we drie gevallen.

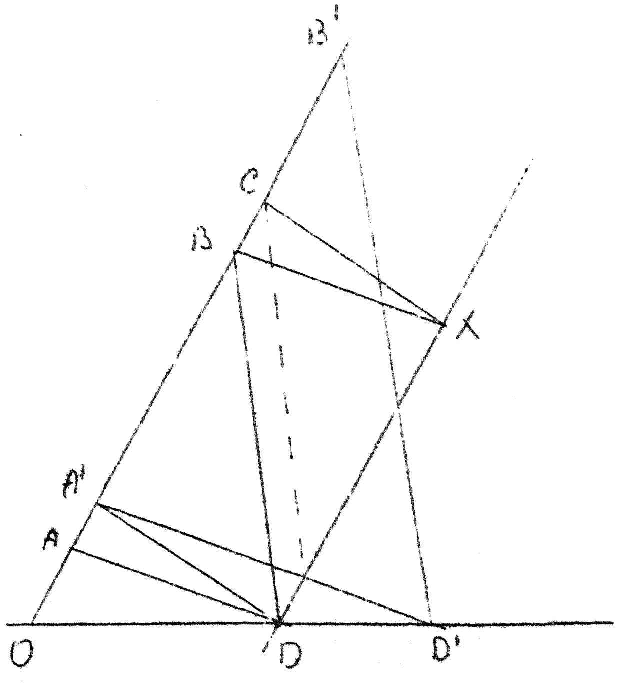
1. het centrum is A. De stelling is triviaal.
2. het centrum is B.



Uit $(A',B') = k(A,B)$ volgt $(B',A') = k(B,A)$.

Wegens $(B,A) \sim (X,Y)$ is dan $(B',A') = k(X,Y)$ (volgens het omgekeerde van I) of $(A',B') = = k(Y,X)$, zodat volgens I $(A',B') = k(A,C)$

3. het centrum valt niet in A of B. Uit A,A' en B wordt B' geconstrueerd door eerst bij een willekeurig punt D het toegevoegde D' te bepalen AD//A'D', dan B'D'//BD.



Maak $(A,B) \sim (D,X)$ en dan $(D,X) \sim (A',C)$ door parallelogramconstructies. Volgens Pappus $\binom{A'BC}{XYD}$ is CY//BD.

Uit $(A',B') = k(A,B)$ volgt nu $(A',D') = k(A,D)$ en dus $(A',D') = k(A'Y)$ volgens I. Hieruit volgt echter $(A',B') = k(A'C)$.

Hiermee is bewezen dat I <u>algemeen</u> geldt.

Opgave. Bewijs zelf de omgekeerden van I volledig.

Stelling. Is $(A,B) = k(P,Q)$ en is $(X,Y) \backsim (P,Q)$ dan is $(A,B) = k(X,Y)$.

Bewijs. Construeer een punt R op AB, zodat $(P,Q) \backsim (A,R)$, dan is $(A,B) = k(A,R)$. Omdat ook $(A,R) \backsim (X,Y)$ is dan tevens $(A,B) = k(X,Y)$.

Stelling: Is $(A,B) = k(P,Q)$ en is $(C,D) \backsim (A,B)$, dan is $(C,D) = k(P,Q)$
Het bewijs volgt uit het voorgaande door op te merken dat $(A,B) = k(P,Q)$ gelijkwaardig is met $(P,Q) = \frac{1}{k}(A,B)$.
Blijkbaar mogen we beide puntenparen door aequivalenten vervangen, zodat we met een betrekking tussen vectoren te doen hebben. We schrijven $\underline{a} = k\underline{b}$, als dit voor representerende puntenparen geldt.

Voor alle getallen $k \neq 0$ is het product van een vector met k nu gedefiniëerd; we definiëren apart: $0\underline{b} = \underline{0}$ voor alle $\underline{b}$.

Opgaven.

1. Bewijs:
$$\begin{cases} k(l\underline{a}) = (kl)\underline{a} \\ (k+l)\underline{a} = k\underline{a} + l\underline{a} \\ k(\underline{a}+\underline{b}) = k\underline{a} + k\underline{b} \\ k\underline{0} = \underline{0} \\ 1.\underline{a} = \underline{a} \\ (-k)\underline{a} = -(k\underline{a}) = k(-\underline{a}) \end{cases}$$
(vergelijk hiermee pag. 23).

2. Bewijs: Is $k\underline{a} = \underline{0}$, dan is $k = 0$ of $\underline{a} = \underline{0}$.

3. Bewijs: Is $k\underline{a} = k\underline{b}$ $(k \neq 0)$, dan is $\underline{a} = \underline{b}$
Is $k\underline{a} = l\underline{a}$ $(\underline{a} \neq \underline{0})$, dan is $k = l$.

Definitie. Is $(A,M) = (M,B)$, dan heet M het midden van (A,B). Is P het oneigenlijke punt van AB, dan geldt blijkbaar $H(MP,AB)$.

Opgaven.

1. Bewijs dit.
2. Bewijs: De "diagonalen" van een parallelogram hebben hetzelfde midden.
Bewijs ook het omgekeerde.

De relatie $\underline{a} = k\underline{b}$ kan dan en slechts dan bestaan, als de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ evenwijdig zijn. k heet de verhouding $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Nemen we een bepaalde vector in een gegeven richting als eenheidsvector aan, dan kan aan elke vector $\underline{a}$ in dezelfde richting een getal k worden toegevoegd, dat de verhouding aangeeft tot de eenheidsvector. Dit getal k noemen we de maat van vector $\underline{a}$ en we schrijven $k = \mu(\underline{a})$. Slechts bij vectoren in deze vaste richting kunnen we van maat spreken. Hiervoor geldt: $\mu(\underline{0}) = 0$, $\mu(k\underline{a}) = k\mu(\underline{a})$, $\mu(\underline{a} + \underline{b}) = \mu(\underline{a}) + \mu(\underline{b})$. Willen we aan elke vector een maat toekennen, dan zullen we met elke richting (dus met elk punt van l_∞) een eenheidsvector moeten laten corresponderen. We mogen deze in elke richting opnieuw weer willekeurig kiezen. De verhouding van vectoren of puntenparen (d.w.z. gerichte lijnstukken) in <u>verschillende</u> richting heeft geen zin; de formule $\mu(\underline{a} + \underline{b}) = \mu(\underline{a}) + \mu(\underline{b})$ geldt niet als $\underline{a} \nparallel \underline{b}$. Voorts kunnen alleen die formules zin hebben, waarin de μ -symbolen <u>homogeen</u> voorkomen, omdat deze onafhankelijk zijn van de keuze van de eenheidsvector.

<u>Stelling</u>. Voor 4 punten op een rechte l geldt:

$$\text{D.V.}(ABCD) = \frac{\mu(A,C)}{\mu(A,D)} : \frac{\mu(B,C)}{\mu(B,D)}.$$

<u>Bewijs</u>. Zij X het oneigenlijke punt van l. Neem $\mu(A,B) = 1$.
Dan is bij definitie

$$\mu(A,C) = \text{D.V.}\ (AXCB)$$
$$\mu(A,D) = \text{D.V.}\ (AXDB)$$
$$\mu(B,C) = -\text{D.V.}(BXCA)$$
$$\mu(B,D) = -\text{D.V.}(BXDA)$$

Dus: $\dfrac{\mu(A,C)}{\mu(A,D)} = (AXCB)(AXBD) = (AXCD)$

en

$$\frac{\mu(B,C)}{\mu(B,D)} = (BXCA)(BXAD) = (BXCD),$$

zodat inderdaad de verhouding van deze twee gelijk is aan

$$(AXCD)(XBCD) = (ABCD).$$

<u>Stelling</u>. Is M het midden van (A,B) en geldt H(AB,CD) dan is

$$\mu(M,C).\mu(M,D) = \mu^2(M,B)$$

<u>Bewijs</u>. Volgens het gegeven is $\mu(AM) = \mu(M,B)$ en $(ABCD) = -1$
of $\quad \mu(A,C).\mu(B,D) + \mu(A,D).\mu(B,C) = 0.$
Substitueren we hierin:

$$\mu(A,C) = \mu(A,M) + \mu(M,C) = \mu(M,C) + \mu(M,B)$$
$$\mu(B,D) = \mu(B,M) + \mu(M,D) = \mu(M,D) - \mu(M,B)$$
$$\mu(A,D) = \mu(A,M) + \mu(M,D) = \mu(M,D) + \mu(M,B)$$
$$\mu(B,C) = \mu(B,M) + \mu(M,C) = \mu(M,C) - \mu(M,B)$$

dan ontstaat het gevraagde.

Zijn speciaal A en C de dubbelpunten van een involutie, dan geldt voor elk paar X,X' van de involutie: $\mu(MX)\mu(MX') = \text{constant}$.
Deze constante (die nog van de eenheidsvector langs l afhangt) heet de <u>macht</u> van de involutie; M heet het middelpunt van de <u>involutie</u>. Een involutie is reëel, als middelpunt en macht reëel zijn; de involutie is elliptisch of hyperbolisch al naar gelang de macht < 0 of > 0 is.
<u>Opgave</u>. Hoe groot is de macht voor parabolische involuties? Valt één dubbelpunt van een involutie op l_∞, dan bestaat de involutie uit alle puntenparen met een vast midden.

Opgave. Als H(AB,CD), bewijs dan
$$\frac{2}{\mu(AB)} = \frac{1}{\mu(AC)} + \frac{1}{\mu(AD)} .$$

Definitie. De pool van l_∞ t.o.v. een kegelsnede γ heet het middelpunt van γ. Een lijn door het middelpunt M van γ heet een middellijn van γ; hiervan ligt de pool op l_∞. Twee punten op l_∞, die geconjugeerd zijn t.o.v. γ heten geconjugeerde of toegevoegde richtingen van γ

Opgave. Bewijs: een middellijn van γ halveert alle koorden in de toegevoegde richting.

Definitie. Een kegelsnede, die aan de oneigenlijke rechte raakt, heet een parabool; het middelpunt heet de asrichting.

Definitie. Is de poolinvolutie op l_∞ t.o.v. een reële kegelsnede γ elliptisch, hyperbolisch of parabolisch, dan heet γ een ellips, hyperbool, resp. parabool.

Opgave. Toon aan dat deze definitie van parabool met de vorige overeenkomt. De raaklijnen aan γ in de oneigenlijke punten van γ heten de asymptoten van γ. Een hyperbool heeft twee reële asymptoten; deze gaan door het middelpunt.

Opgaven.

1. Het middelpunt van een ellips ligt binnen de kegelsnede, dat van een hyperbool erbuiten.
2. Een koorde door het middelpunt M van een kegelsnede wordt in dat punt gehalveerd.
3. We noemen de puntreeksen (A,B,...) en (A',B',...) op de dragers m en m' gelijkvormig, als er op m een eenheidsvector e en op m' een eenheidsvector e' te vinden is, zodat $\mu(P,Q) = \mu'(P'Q')$ voor alle punten P en Q. Bewijs dat de lijnen PP' in dat geval alle aan een parabool raken of alle door één punt gaan.

Opgaven.

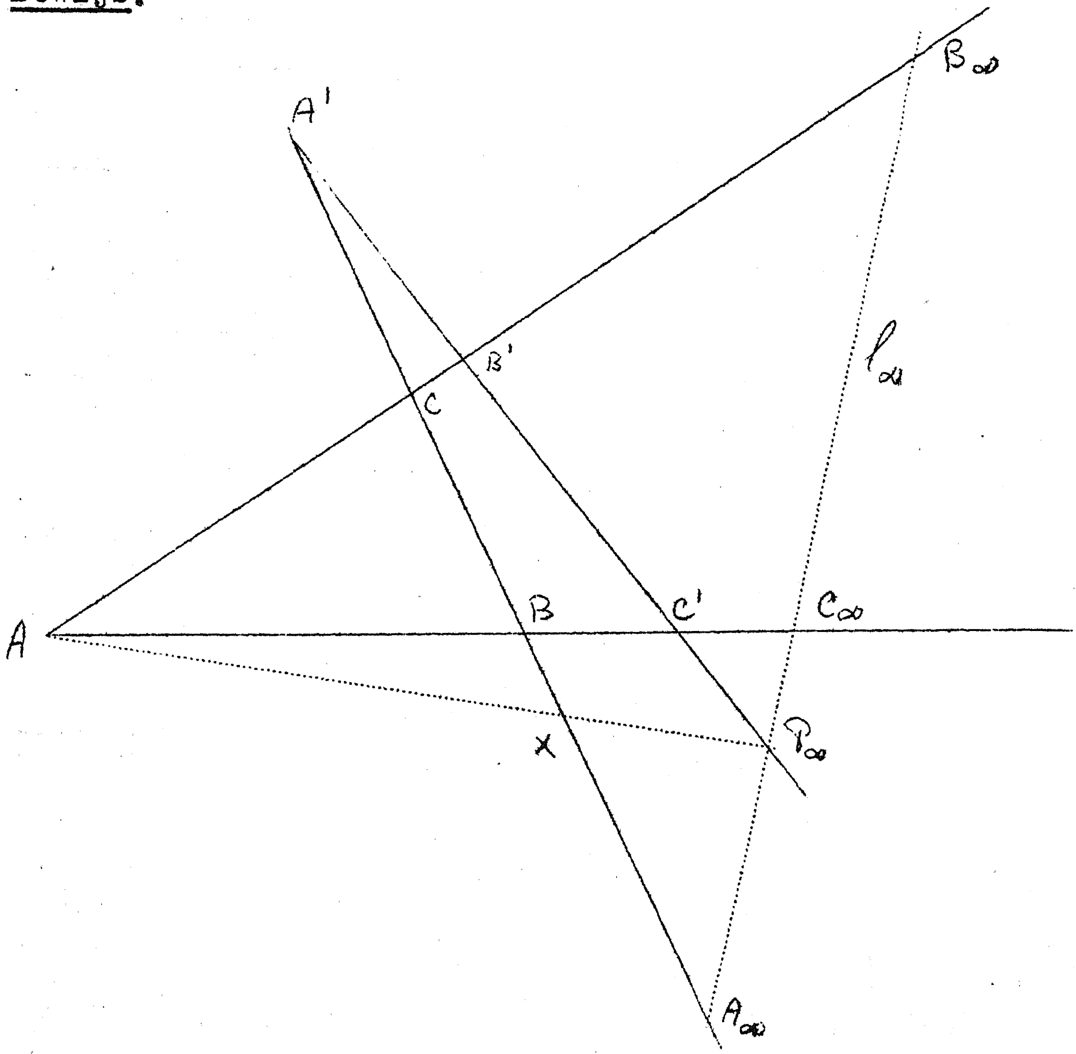
1. Bewijs dat de meetkundige plaats der middelpunten van alle kegelsneden, die aan de zijden van een volledige vierzijde raken, een rechte is, die gaat door de middens der drie diagonalen.
2. De meetkundige plaats der middelpunten van alle kegelsneden, die door de hoekpunten van een volledige vierhoek gaan, is een kegelsnede, die door de 6 middens der zijden van deze vierhoek gaat en waarvan de asymptoten middellijnen zijn van de twee parabolen uit de kegelsnedenverzameling.

Stelling van Menelaüs.

Drie punten A',B',C' op de zijden BC, CA, AB van een driehoek zijn dan en slechts dan colineair als

$$\frac{\mu(A'B)}{\mu(A'C)} \times \frac{\mu'(B'C)}{\mu'(B'A)} \times \frac{\mu''(C'A)}{\mu''(C'B)} = 1$$

Bewijs.



$$\frac{\mu(A'B)}{\mu(A'C)} = (A'A_\infty BC)$$

$$\frac{\mu'(B'C)}{\mu'(B'A)} = (B'B_\infty CA) \overset{P_\infty}{=} (A'A_\infty CX)$$

$$\frac{\mu''(C'A)}{\mu''(C'B)} = (C'C_\infty AB) \overset{P_\infty}{=} (A'A_\infty XB)$$

Het product der rechterleden is inderdaad 1.

Opgave   Bewijs zelf het omgekeerde.

Stelling van Ceva. De drie punten A',B',C' op de zijden BC, CA, AB van een driehoek hebben dan en slechts dan de eigenschap dat de lijnen AA', BB',CC' door één punt gaan, als

$$\frac{\mu(A'B)}{\mu(A'C)} \times \frac{\mu'(B'C)}{\mu'(B'A)} \times \frac{\mu''(C'A)}{\mu''(C'B)} = -1.$$

Bewijs: Laat A'B' de zijde AB in C" snijden. Volgens de constructie geldt dan

$H(AB, C'C")$, zodat $\frac{\mu"(C'A)}{\mu"(C'B)} = -\frac{\mu"(C"A)}{\mu"(C"B)}$.

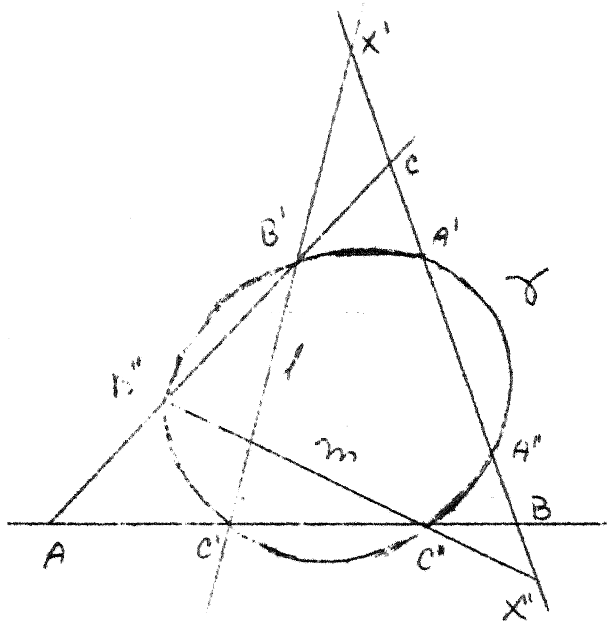
Na toepassing van Menelaüs volgt hieruit onmiddellijk het gestelde.

Stelling van Carnot.

De drie puntenparen A',A"; B',B" en C',C" resp. op de zijden BC, CA, AB van een driehoek, liggen dan en slechts dan op een kegelsnede γ, als

$$\frac{\mu(A'B)}{\mu(A'C)} \times \frac{\mu'(B'C)}{\mu'(B'A)} \times \frac{\mu"(C'A)}{\mu"(C'B)} \times \frac{\mu(A"B)}{\mu(A"C)} \times \frac{\mu'(B"C)}{\mu'(B"A)} \times \frac{\mu"(C"A)}{\mu"(C"B)} = 1.$$

Bewijs. Is de kegelsnede in twee rechten ontaard, dan volgt het ondertelde uit de stelling van Menelaüs. We onderstellen dus nu dat γ niet ontaard is.



Voor het lijnenpaar B'C' = l en B"C" = m geldt de stelling reeds. Volgens de stelling van Desargues, toegepast op γ en de vierpunt B',B", C',C" vormen de puntenparen (A',A"),(X'X") en (B,C) een involutie. Dus

(A'X'BC)=(A"X"CB)=(X"A"BC), of

$$\frac{\mu(A'B)}{\mu(A'C)} : \frac{\mu(X'B)}{\mu(X'C)} = \frac{\mu(X"B)}{\mu(X"C)} : \frac{\mu(A"B)}{\mu(A"C)}$$

zodat

$$\frac{\mu(A'B)}{\mu(A'C)} \times \frac{\mu(A"B)}{\mu(A"C)} = \frac{\mu(X'B)}{\mu(X'C)} \times \frac{\mu(X"B)}{\mu(X"C)}$$

De stelling van Carnot geldt dus ook voor γ.

Opgaven.

1. Bewijs zelf het omgekeerde.
2. Bewijs de stelling van de Brianchon voor een in een driehoek beschreven kegelsnede met behulp van de stellingen van Menelaüs, Ceva en Carnot.
3. Bewijs dat de kegelsnede, die de zijden van een driehoek in de middens raakt, het zwaartepunt tot middelpunt heeft (ingeschreven ellips van Steiner van de driehoek).
4. Bewijs dat de kegelsnede, die om een driehoek beschreven is en l_∞ tot rechte van Pascal heeft, het zwaartepunt tot middelpunt heeft (omgeschreven ellips van Steiner van de driehoek).
5. Bewijs dat de ellipsen van no. 3 en 4 dezelfde (complexe) asymptoten hebben

Affiene constructies.

In het affiene vlak laten we dezelfde constructiepostulaten toe als in het projectieve vlak. Omdat l_∞ een bijzondere rol speelt, moet deze (ontoegankelijke!) rechte op de een of andere manier gegeven zijn. We kunnen dit bereiken door het volgende affiene postulaat:

A1. Door een punt P buiten een lijn l een lijn te trekken //l. We hoeven slechts te eisen, dat A1 twee maal uitvoerbaar is; l_∞ is dan als ontoegankelijke rechte voldoende gegeven. We kunnen l_∞ dus ook bepalen, door een parallelogram te geven. Ook door van de vaste kegelsnede γ het middelpunt te geven wordt l_∞ als de pool hiervan ondubbelzinnig vastgelegd. Dit laatste is minder bevredigend, omdat dan voor lineaire constructies, waarin l_∞ optreedt, kwadratische postulaten moeten worden gebruikt.

Opgaven.

1. Construeer het midden van (A,B)
   a. als A1 gebruikt wordt
   b. als een parallelogram gegeven is
   c. als γ met zijn middelpunt gegeven is.
2. Construeer onder onbeperkt gebruikmaking van A1 van een parabool die door 4 raaklijnen gegeven is
   a. de asrichting
   b. de raaklijn in een gegeven richting
   c. het raakpunt hiervan.

Zijn kwadratische postulaten hiervoor nodig?

3. Van een hyperbool γ zijn de asymptoten m_1 en m_2 gegeven, alsmede een punt C. Construeer het tweede snijpunt D van γ met een rechte l door C.
4. Bewijs aan de hand van bovenstaande constructie, dat als C' en D' de snijpunten zijn van l met m_1 en m_2 geldt:
$$\mu(C,C') = -\mu(D,D') \text{ en } \mu(C,D') = -\mu(D,C')$$
5. Construeer het middelpunt van een hyperbool, als 3 punten en de asymptootrichtingen gegeven zijn.
6. Construeer de 2^e asymptoot van een hyperbool, waarvan 4 punten en de richting van de 1^e asymptoot gegeven is.
7. Construeer (zonder de dubbelpunten te bepalen) het middelpunt van een involutie, die door twee puntenparen gegeven is. (Lineaalconstructie!)
8. Construeer het nog ontbrekende snijpunt van twee hyperbolen δ_1 en δ_2, die dezelfde gegeven asymptootrichtingen hebben en waarvan δ_1 nog door S,A_1,B_1 en δ_2 nog door S,A_2,B_2 gaat. (lineaalconstructie).

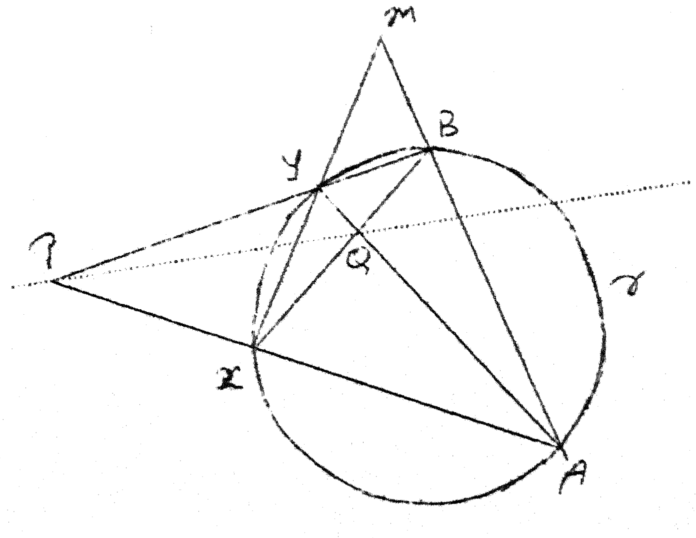
Metrische (Euclidische) meetkunde.

In de affiene meetkunde treden reeds bekende begrippen uit de gewone meetkunde op, zoals evenwijdigheid, midden, zwaartepunt, middelpunt van kegelsneden, parabool. De verhouding van lijnstukken in dezelfde richting is gedefiniëerd. Het heeft echter nog geen zin te spreken van de verhouding van lijnstukken in verschillende richting. Ook komen in de affiene meetkunde begrippen als: loodrechte stand van twee lijnen, de grootte van een hoek, cirkels, brandpunten van een kegelsnede, nog niet voor. Dit zijn alle begrippen uit de metrische meetkunde. We voeren het begrip loodrecht bij definitie in; de overige worden hieruit afgeleid.

Definities. Onder het Euclidische vlak verstaan we het affiene vlak, waarin een elliptische involutie op de oneigenlijke rechte is vastgelegd. Deze involutie noemen we de orthogonale involutie; twee lijnen, waarvan de oneigenlijke punten paren in deze involutie zijn, noemen we loodrecht of orthogonaal. De complexe dubbelpunten van de orthogonale involutie heten de isotrope punten of cirkelpunten van het vlak en worden aangeduid met J_1 en J_2.

Door in het projectieve vlak twee punten als cirkelpunten aan te wijzen, is een Euclidisch vlak ondubbelzinnig vastgelegd. Volgens def. geldt onmiddellijk: is $l \perp m$ en $l // l'$, $m // m'$, dan is ook $l' \perp m'$. Lijnen door de isotrope punten heten isotrope lijnen. Deze staan loodrecht op zichzelf.

Definitie. Een kegelsnede door de cirkelpunten heet een cirkel. De poolinvolutie t.o.v. cirkel op l_∞ is dus de orthogonale involutie. Anders gezegd: Toegevoegde middellijnen van een cirkel staan altijd loodrecht op elkaar.



Is ABXY een in een kegelsnede γ beschreven vierhoek, dan is de diagonaaldriehoek PQM een pooldriehoek van γ. Kiezen we voor PQ de oneigenlijke rechte en voor γ een cirkel, dan wordt M het middelpunt, dus A en B een paar diametraalpunten van γ. Dit levert de stelling: Zijn A en B twee diametraalpunten van een cirkel γ, dan is voor elk punt X van γ : $AX \perp BX$. We kunnen dit ook als cirkeldefinitie nemen en er de oude definitie uit afleiden.

Opgave. Werk dit uit.

Daar in de affiene meetkunde de raaklijnen in de uiteinden van een middellijn van een kegelsnede de toegevoegde richting hebben, geldt voor cirkels speciaal: Een raaklijn staat loodrecht op de verbindingslijn van het raakpunt met het middelpunt. Een cirkel is door 3 punten of door 1 punt en het middelpunt volkomen bepaald.

Een koorde AB van een cirkel γ met middelpunt M wordt gehalveerd door de toegevoegde middellijn; deze staat volgens definitie loodrecht op AB. In $\triangle$ MAB is de hoogtelijn uit M tevens zwaartelijn; $\triangle$ MAB noemen we in dat geval gelijkbenig.

Opgave. Bewijs het omgekeerde. Is MAB een gelijkbenige driehoek, dan is er een cirkel met M als middelpunt, die door A en B gaat.

Definitie. Is MAB een gelijkbenige driehoek, dan zeggen we $(M,A) \equiv (M,B)$.

De relatie $(M,A) \equiv (M,B)$ betekent, dat A en B punten zijn van een cirkel, die M tot middelpunt heeft. Daaruit volgt, dat we met een aequivalentie te doen hebben: de relatie is reflexief, symmetrisch en transitief.

Stelling. Is $(M,A) \backsim (N,C)$
$(M,B) \backsim (N,D)$
en is $(M,A) \equiv (M,B)$, dan is $(N,C) \equiv (N,D)$

Bewijs. De translatie T_{MN}, die MAB in NCD overvoert, voert middens in middens en loodrechte lijnen in loodrechte lijnen over.

Stelling. Is $(M,A) = k.(N,C)$ $\quad (k \neq 0;1)$
$(M,B) = k.(N,D)$
en is $(M,A) \equiv (M,B)$, dan is $(N,C) \equiv (N,D)$.

Bewijs. De dilatatie met factor $\frac{1}{k}$, die M in N overvoert, voert MAB in NCD over en voert cirkels in cirkels, middelpunten in middelpunten over.

We nemen nu een vast reëel punt O aan en definiëren:
$(P,Q) \equiv (R,S)$ als er twee puntenparen (O,A) en (O,B) bestaan, zodanig dat $(P,Q) \backsim (O,A)$, $(R,S) \backsim (O,B)$ en $(OA) \equiv (OB)$.

Opgaven.

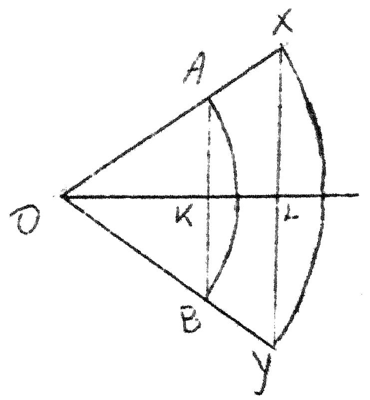
1. Bewijs dat dit een uitbreiding is van de oude congruentiedefinitie.
2. Bewijs dat de uitgebreide congruentierelatie reflexief, symmetrisch en transitief is. Bewijs dat ze niet van O afhangt.
3. Bewijs: $(P,Q) \equiv (Q,P)$.

We hebben nu alle puntenparen verdeeld in klassen van congruente paren. Aan elk dezer klassen gaan we nu een getal toevoegen op de volgende wijze: We nemen een vaste reële cirkel, die O tot middelpunt heeft aan als eenheidscirkel γ . Is (P,Q) een gegeven puntenpaar, dan trek ik door O de lijn $l \,//\, PQ$, die γ in A en B snijdt. Een van deze punten wordt uitgekozen, bv. A, het puntenpaar (O,A) kies ik dan als eenheidsvector in de richting van l. Zo is dus $\mu(OA) = 1$, $\mu(OB) = -1$.

Ik definiëer nu het <u>kwadraat van de afstand</u> van P en Q als het getal $\rho^2(P,Q) = \mu^2(P,Q)$, dus het kwadraat van de maat van (P,Q).

<u>Stelling</u>. Is $(P,Q) \equiv (R,S)$, dan is $\rho^2(P,Q) = \rho^2(R,S)$.

<u>Bewijs</u>. Stel $(P,Q) \backsim (O,X)$ en $(R,S) \backsim (O,Y)$, dan is $(OX) \equiv (OY)$.



Is L het midden van XY, dan is dus $OL \perp XY$. Stel de eenheidscirkel snijdt OX ergens in A, zij AB//XY. Uit $OL \perp XY$ volgt dan $OK \perp AB$. Ook is $\frac{\mu(XL)}{\mu(AK)} = \frac{\mu(OX)}{\mu(OA)} = \frac{\mu(OY)}{\mu(OB)} = $
$= \frac{\mu(LY)}{\mu(KB)}$.
Hieruit blijkt tenslotte dat K het midden is van AB, dus ook B op de eenheidscirkel ligt, terwijl $\mu(OX) = \mu(OY)$, dus $\rho^2(P,Q) = \rho^2(R,S)$.

<u>Opgave</u>. Bewijs omgekeerd dat $\rho^2(P,Q) = \rho^2(R,S)$ alleen als $(P,Q) \equiv (R,S)$
Voor reële lijnstukken is $\rho^2(P,Q)$ steeds positief en alleen nul als $P = Q$. De positieve vierkantswortel uit dit getal, $\rho(P,Q)$, noemen we dan de <u>afstand</u> van P en Q; deze is eenduidig bepaald als de eenheidscirkel gegeven is. Is $\rho^2(P,Q)$ complex, dan kunnen we elk der vierkantswortels hieruit de afstand $\rho(P,Q)$ noemen; een tekenafspraak wordt niet verder gemaakt.

<u>Stelling</u>. Is $(P,Q) = k(R,S)$, dan is $\rho^2(P,Q) = k^2 . \rho^2(R,S)$.

<u>Opgave</u>. Bewijs dit.

<u>Stelling</u>. Is de lijn PQ isotroop, dan is $\rho^2(P,Q) = 0$.

<u>Bewijs</u>. Stel $(O,X) \backsim (P,Q)$, dan is $\rho^2(P,Q) = \dfrac{\mu^2(O,X)}{\mu^2(O,A)}$,

waarin A het snijpunt is van de lijn door O//PQ met de eenheidscirkel. A is dus één der cirkelpunten J, zodat

$$\frac{\mu(O,X)}{\mu(O,A)} = (OJXJ) = 0$$

<u>Definitie</u>. Is Q de orthogonale projectie van het middelpunt M van een cirkel γ op de poollijn p van P, dan heten P en Q <u>invers</u> t.o.v. γ.

<u>Stelling</u>. Is r de straal van γ, dan geldt: $\mu(M,P) . \mu(M,Q) = r^2$.

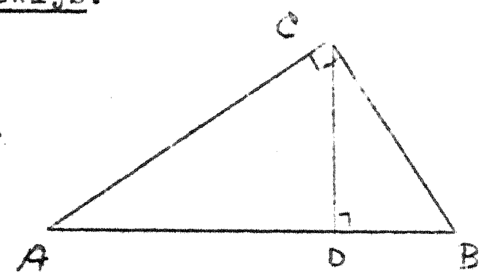
<u>Bewijs</u>: De poollijn van het oneigenlijke punt van p is MP = l. Daar dit de toegevoegde middellijn is van de richting van p is $l \perp p$, zodat Q het snijpunt van l met p is. P en Q behoren dus tot de poolinvolutie t.o.v. γ op l; daar M het middelpunt van deze involutie is, is de stelling hiermee bewezen.

Opmerking. Met behulp van elementaire analytische meetkunde is eenvoudig te bewijzen, dat inversie t.o.v. een cirkel γ een Cremona-transformatie (birationale eeneenduidige transformatie) is van de graad 2, die rechte lijnen in cirkels overvoert.

Stelling. Is ABC een driehoek, waarin $AC \perp BC$, en is $CD \perp AB$, dan geldt:

$$\rho^2(A,C) = \mu(A,D)\cdot\mu(A,B).$$

Bewijs:



De cirkel γ', die A tot middelpunt heeft en door C gaat, heeft CB tot raaklijn. De poollijn van het oneigenlijke punt van CD is AB, zodat B de pool is van CD. Daar D en B blijkbaar inverse punten zijn is het gestelde bewezen.

Stelling van Pythagoras:

In bovenstaande driehoek geldt:

$$\rho^2(A,C) + \rho^2(B,C) = \rho^2(A,B).$$

Bewijs.

$$\rho^2(A,C) = \mu(A,D)\,\mu(A,B)$$

$$\rho^2(B,C) = \mu(B,D)\,\mu(B,A) = \mu(D,B)\,\mu(A,B)$$

Wegens $\mu(A,D) + \mu(D,B) = \mu(A,B)$ volgt het gestelde door optelling.

Is ABC een reële, willekeurige driehoek, en stellen we $\rho(B,C) = a$, $\rho(A,C) = b$, $\rho(A,B) = c$, dan is volgens afspraak $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. De hoogtelijn CD is dan eenvoudig m.b.v. Pythagoras als in de elementaire meetkunde te berekenen. Men vindt:

$$\rho^2(C,D) = \frac{1}{4c^2}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Daar het rechterlid positief moet zijn, is blijkbaar het product $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ positief. Is bijvoorbeeld a de grootste der drie zijden, dus $a \geq b$, $a \geq c$, dan zijn de laatste twee factoren reeds positief, zodat dan ook $-a+b+c > 0$. In een reële driehoek is de som van twee zijden dus groter dan de derde zijde. Volgens deze driehoeksongelijkheid is het reële Euclidische vlak dus een metrische ruimte.

Stelling. Is d de afstand van een punt P tot het middelpunt M van een cirkel γ met straal r en snijdt een rechte door P γ in de punten A en B, dan is

$$\mu(P,A).\mu(P,B) = d^2 - r^2.$$

Bewijs. Zij L het midden van (A,B), zodat $ML \perp AB$, dan is $\mu(P,A).\mu(P,B)$
$= [\mu(P,L) + \mu(L,A)]\,[\mu(P,L) - \mu(L,A)] = \rho^2(P,L) - \rho^2(L,A) =$
$= d^2 - [\rho^2(M,L) + \rho^2(L,A)] = d^2 - r^2.$

Dit getal heet de macht van P t.o.v. γ.

Een <u>cirkelbundel</u> bestaat uit alle cirkels door 2 punten S_1 en S_2; het is een kegelsnedenbundel met S_1, S_2, J_1, J_2 tot basispunten. De lijn $c = S_1S_2$ vormt met $l_\infty = J_1J_2$ een ontaarding uit de bundel.
Een rechte m snijdt de bundel volgens puntenparen in involutie. Het snijpunt P van m met c is het middelpunt van deze involutie; de macht van deze involutie is de macht van P t.o.v. alle cirkels uit de bundel. Dus:
de meetkundige plaats der punten met gelijke macht t.o.v. twee cirkels is de koorde c van deze cirkels; deze lijn heet de <u>machtlijn</u>. Alle cirkels van een bundel hebben dezelfde machtlijn.

<u>Hoeken</u>.
Zij A en B de oneigenlijke punten van de rechten l en m, dan definiëren we de hoek φ tussen l en m door de formule

$$\varphi = \frac{1}{2i} \log (J_1J_2AB).$$

We scrijven $\varphi = \angle(l,m)$.
Daar log z op veelvouden van $2\pi i$ na bepaald is, is $\angle(l,m)$ op veelvouden van π na bepaald.
Als de lijnen l en m reëel zijn, is $\angle(l,m)$ reëel. Immers, stellen we $z = (J_1, J_2AB)$, dan is $\frac{1}{z} = (J_2, J_1, A, B) = \overline{z}$ (toegevoegd complexe), zodat $|z| = 1$.
Volgens formule (25,17)(Analyse pag. 95) is dan $\log z = \log|z| + i \arg z =$
$= i \arg z$, zodat $\varphi = \frac{1}{2} \arg z$.
Daar $\log(-1) = i\pi \pmod{2\pi i}$, is $\angle(l,m) = \frac{1}{2}\pi$ dan en slechts dan als $l \perp m$.

<u>Stellingen</u>.

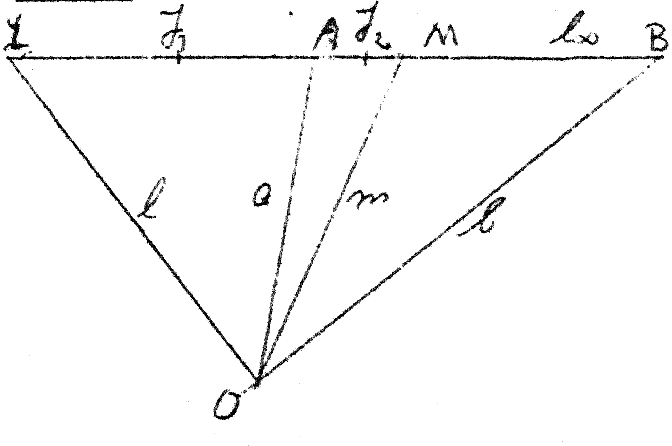
$\angle(l,m) = -\angle(m,l)$

$\angle(l,l) = 0$

$\angle(l,m) + \angle(m,n) = \angle(l,n)$

Is $l // l'$ en $m // m'$, dan is $\angle(l,m) = \angle(l',m')$

<u>Opgave</u>. Bewijs deze stellingen.



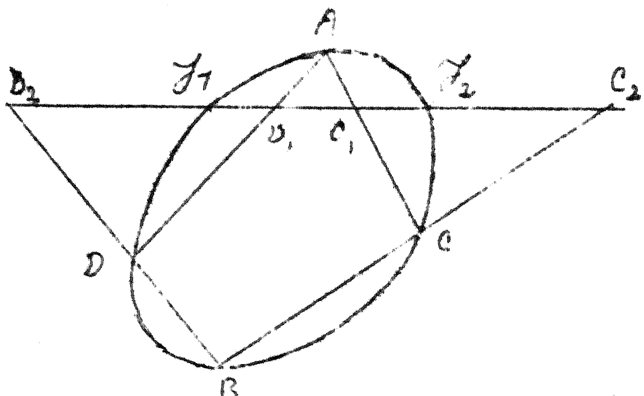
<u>Definitie</u>. De lijn a heet een <u>bissectrice</u> van het lijnenpaar (l,m), als $\angle(l,a) = \angle(a,m)$.
Blijkbaar is dan $(J_1J_2LA) = (J_1J_2AM)$. Daar het product van deze dubbelverhoudingen $(J_1J_2LM) = z$ is is elk $\pm\sqrt{z}$. Er bestaan dus twee bissectrices a en b, zodat $(J_1J_2LA) = -(J_1J_2LB)$. Blijkbaar is dan $(J_1J_2AB) = (J_1J_2AL)(J_1J_2LB) = -1$, zodat $a \perp b$. De punten A en B worden op l_∞ zowel harmonisch verdeeld door L, M, als door J_1, J_2; zij worden hierdoor tevens ondubbelzinnig bepaald.

Stelling. De hoogtelijn (tevens zwaartelijn) uit de top van een gelijkbenige driehoek is tevens bissectrice.

Bewijs. Is in de gelijkbenige driehoek MAB het punt K het midden van AB, dan is $MK \perp AB$.

Is L het oneigenlijke punt van AB, dan geldt $M(KLAB) = -1$. Daar verder $MK \perp ML$ is inderdaad MK en ML het paar bissectrices.

Stelling. Zijn A,B,C,D vier punten van een cirkel γ, dan is $\angle(CA,CB) = \angle(DA,DB)$.



Bewijs: Volgens de stelling van Desargues vormen de puntenparen $(J_1,J_2),(C_1,D_2),(C_2,D_1)$ een involutie, zodat

$$(J_1J_2C_1C_2)=(J_2J_1D_2D_1)=(J_1J_2D_1D_2)$$

Definitie. Een projectieve transformatie, die J_1 en J_2 tot dekpunten heeft, heet een (directe) gelijkvormigheidstransformatie. Deze vormen een groep. Translaties en dilataties zijn voorbeelden van gelijkvormigheidstransformaties. Daar alle metrische begrippen m.b.v. J_1 en J_2 gedefiniëerd zijn, zijn zij tegenover gelijkvormigheidstransformaties invariant. Cirkels worden in cirkels overgevoegd, hoeken in gelijke hoeken, enz. Verhoudingen van afstanden zijn eveneens invariant:

$$\rho^2(P,Q) : \rho^2(R,S) = \rho^2(P',Q') : \rho^2(R',S'),$$

zodat

$$\frac{\rho^2(P',Q')}{\rho^2(P,Q)} = \frac{\rho^2(R',S')}{\rho^2(R,S)} = k^2.$$

Elk der getallen k heet de factor van de gelijkvormigheidstransformatie.

Opgaven.

1. Bewijs dat een dilatatie met factor k een gelijkvormigheidstransformatie is met factor k.
2. Bewijs dat er in het algemeen precies één gelijkvormigheidstransformatie is, die twee gegeven punten A,B in twee gegeven punten A',B' overvoert. Wat betekent hier de uitdrukking "in het algemeen"?

Een gelijkvormigheidstransformatie met factor ± 1 heet een congruentie of verplaatsing of beweging.

Opgave, Bewijs dat de bewegingen een groep vormen,

Een projectieve transformatie, die J_1 en J_2 verwisselt, heet een tegengestelde gelijkvormigheidstransformatie.

Opgaven.

1. Vormen deze een groep?
2. Bewijs dat hoeken in hun tegengestelden worden overgevoerd.
3. Bewijs dat ook deze transformaties een factor k hebben.

Metrische eigenschappen der kegelsneden.

Definitie. Een as (symmetrieas) van een kegelsnede γ is een middellijn die de loodrecht erop staande koorden halveert. Anders gezegd: een middellijn, die loodrecht op de toegevoegde richting staat.

Een middelpuntskegelsnede γ (dus geen parabool), die geen cirkel is, heeft twee assen. Deze gaan door de oneigenlijke punten, die zowel door de asymptootrichtingen als door de cirkelpunten harmonisch worden gescheiden. De assen zijn dus de bissectrices van de asymptoten. Is de kegelsnede γ reëel, dan is de poolinvolutie op de oneigenlijke rechte reëel. Projecteren we deze involutie vanuit een willekeurig punt P op een cirkel door dat punt, dan ontstaat een reële involutie op deze cirkel. Het centrum C van deze involutie is een reëel punt (binnen de cirkel als γ een ellips is en erbuiten, als γ een hyperbool is.)
Het centrum van de involutie, die J_1 en J_2 tot dubbelpunten heeft is het middelpunt M van de cirkel. De lijn MC snijdt de cirkel in twee reële punten, waarvan de verbindingslijnen met P de asrichtingen van γ leveren. Een reële middelpuntskegelsnede heeft dus twee reële assen.

Een parabool, die in O aan l_∞ raakt, heeft slechts één as; dit is de poollijn van het punt van l_∞ in de richting $\perp$ die van O.

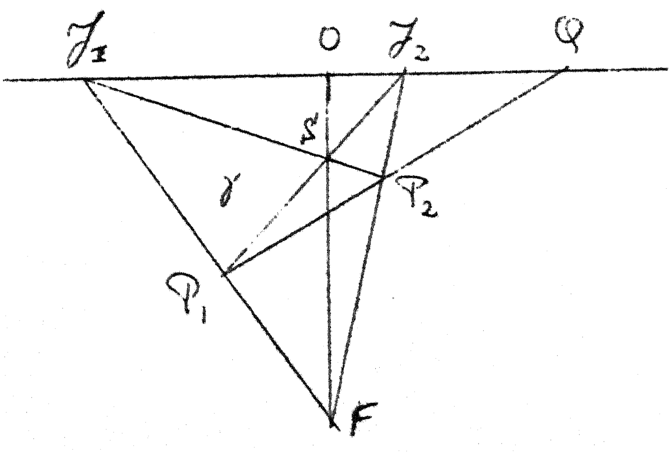
Het snijpunt van een kegelsnede met een as heet een top van een kegelsnede.

Opgave. Bewijs dat alle middellijnen van een cirkel assen zijn.

Definitie. Is de involutie van geconjugeerde lijnen door een punt F orthogonaal, dan heet F een brandpunt van de kegelsnede γ. F is een punt, waaruit de raaklijnen aan γ isotroop zijn.

Stelling. Een parabool heeft één brandpunt; dit ligt op de as.

Bewijs.



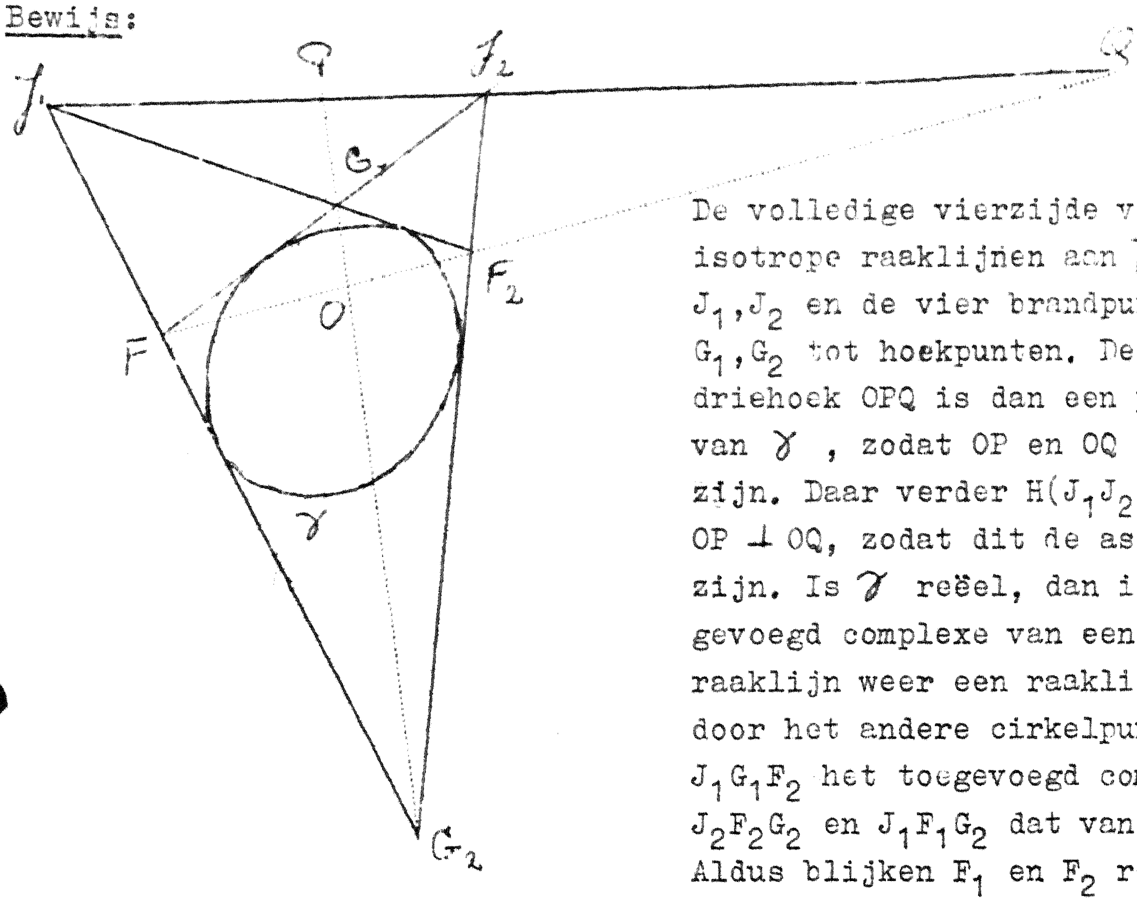
De raaklijnen J_1P_1 en J_2P_2 snijden elkaar in F. Volgens Brianchon voor ΔJ_1J_2F gaan J_1P_2, J_2P_1 en OF door één punt S. Volgens constructie is $H(J_1J_2, OQ)$, zodat OF de poollijn van Q, dus de as is.

Stelling. Van een cirkel is het middelpunt het enige brandpunt.

Opgave. Bewijs dit.

Stelling Een middelpuntskegelsnede (geen cirkel) heeft 4 brandpunten, twee op elke as.

Bewijs:



De volledige vierzijde van de vier isotrope raaklijnen aan γ heeft J_1, J_2 en de vier brandpunten F_1, F_2, G_1, G_2 tot hoekpunten. De diagonaaldriehoek OPQ is dan een pooldriehoek van γ, zodat OP en OQ geconjugeerd zijn. Daar verder $H(J_1J_2, PQ)$, is $OP \perp OQ$, zodat dit de assen van γ zijn. Is γ reëel, dan is het toegevoegd complexe van een isotrope raaklijn weer een raaklijn, echter door het andere cirkelpunt. Zo is b.v. $J_1G_1F_2$ het toegevoegd complexe van $J_2F_2G_2$ en $J_1F_1G_2$ dat van $J_2F_1G_2$. Aldus blijken F_1 en F_2 reëel zijn; G_1 en G_2 zijn toegevoegd complex.

Definitie. De poollijn van een brandpunt heet een richtlijn.

Stelling. Ligt het brandpunt F op de as a, dan staat de bij F behorende richtlijn $r \perp a$.

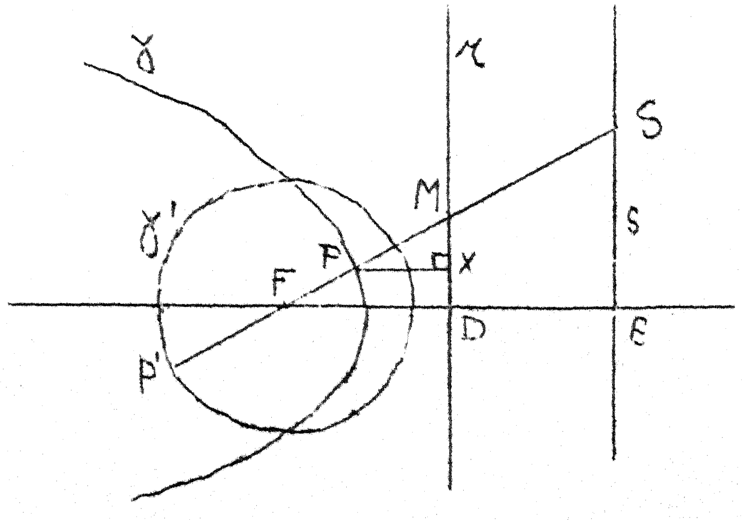
Opgaven.

1. Bewijs deze stelling voor een parabool.
2. Bewijs de stelling voor een middelpuntskegelsnede.

Stelling. Is X de orthogonale projectie van een punt P van een kegelsnede γ op de richtlijn r, en is F hetbbij r behorende brandpunt F, dan geldt $\rho^2(P,F) : \rho^2(P,X) = \text{constant}$.

De wortel uit deze constante heet de excentriciteit van γ.

Bewijs:



Zij s de lijn //r, die zo aangebracht is, dat D het midden is van (F,E). We passen een involutorische quasi-perspectiviteit π toe met F als centrum en s als as. Wordt P daarbij in P' overgevoerd, dan geldt H(PP',FS). De kegelsnede γ wordt overgevoerd in een kegelsnede γ'. De raaklijnen uit F aan γ zijn isotroop, de raakpunten liggen op r. Daar $\pi r = l_\infty$ volgt hieruit: de raaklijnen aan γ' zijn isotroop en de raakpunten liggen op l_∞, dus zijn de cirkelpunten. γ' is dus een cirkel. Langs FM en FD leggen we nu twee eenheidsvectoren, zodat een puntenpaar langs FM een maat μ en een puntenpaar langs FD een maat μ' heeft.

We stellen verder: $\mu(F,P) = x$, $\mu(F,P') = a$,

$\mu(M,P) = z$ en $\mu'(P,X) = J$, $\mu'(F,D) = b$,

Daar M het midden is van (F,S) geldt:

$\mu(M,P) . \mu(M,P') = \mu^2(M,F)$, of $z(x + a) = x^2$.

Verder is $\dfrac{\mu(M,P)}{\mu(M,F)} = \dfrac{\mu'(P,X)}{\mu'(F,D)}$, of $z(y - b) = xy$

Eliminatie van z levert $ay = - bx$, of $\dfrac{x}{y} = - \dfrac{a}{b}$.

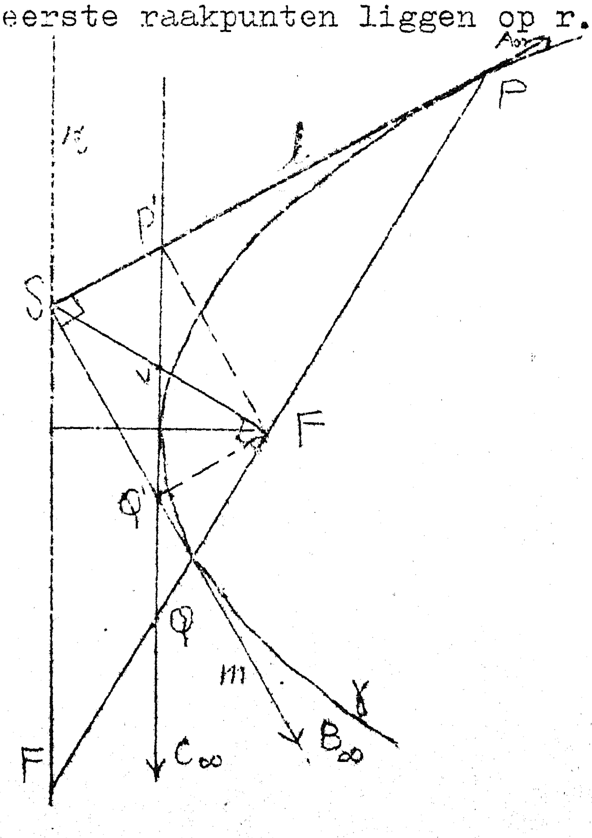
Daar a en b van de ligging van P onafhankelijke constanten zijn, is het gestelde bewezen.

Bevat γ het oneigenlijke punt van de as FD, dan bevat γ het midden van FD. Een parabool heeft dus de excentriciteit 1.

We behandelen nog enige stellingen voor parabolen.

Stelling. Twee loodrechte raaklijnen van een parabool snijden elkaar op de richtlijn r.

Bewijs. Zijn A en B de oneigenlijke punten van de raaklijnen l en m, dan is $l \perp m$ gelijkwaardig met $(J_1J_2AB) = -1$. Daar l_∞ zelf raaklijn is, zijn de vier raakpunten van de raaklijnen FJ_1, FJ_2, l, m eveneens harmonisch. De twee eerste raakpunten liggen op r. De involutie op γ met P en Q als dubbelpunten heeft S tot centrum; paren van deze involutie ontstaan door γ te snijden met lijnen door S. Inderdaad gaat r dus door S.



Stelling. De projectie van F op een raaklijn l ligt op de topraaklijn van γ.

Bewijs. Is $FP' \perp l$ en $FQ' \perp m$, dan is in rechthoek SP'FQ' het punt V het midden van P'Q', of H(VC,P'Q'). Daar ook H(FT,PQ) en deze viertallen onderling perspectivisch zijn, gaat TS door C. Daar V het midden is van SF is P'Q' de topraaklijn.

Constructies

Voor Euclidische constructies kunnen de oude projectieve constructiepostulaten gebruikt worden de orthogonale involutie op l∞ moet echter op de een of andere wijze gegeven zijn. Hiervoor bestaan verschillende methoden.

1. Een vierkant ABCD is gegeven. Nu wordt l∞ bepaald als verbindingslijn der snijpunten van de overstaande zijden AB, CD en AD, BC. Verder is AB ⊥ BC en AC ⊥ BD, zodat op l∞ twee paren van de orhtogonale involutie gegeven zijn.

Opgave. Construeer op deze wijze de middelloodlijn van een gegeven puntenpaar (P,Q) (Lineaalconstructie !).

2. Aannemen van een nieuw Euclidisch constructiepostulaat E1: Door een gegeven punt P een loodlijn m te construeren op een gegeven lijn l. Daar iedere lijn ⊥ m vanzelf // l is, is hiermee postulaat A1 uitvoerbaar geworden. Omdat door twee stel evenwijdige lijnen l∞ bepaald is en door twee paar onderling loodrechte lijnen J_1 en J_2, zijn lineaire Euclidische constructies uitvoerbaar, wanneer toepasbaarheid van E1 slechts een beperkt aantal malen ondersteld wordt.

Opgave. Construeer m b.v. E1 het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek ABC.

3. De cirkelpunten kunnen ook gegeven worden, door een cirkel γ te geven met zijn middelpunt. We kunnen dit in de vorm van twee postulaten geven:

E2. Een cirkel γ te construeren.

E3. Het middelpunt van een gegeven cirkel te construeren.

Wanneer we in het postulaat K1 voor de kegelsnede γ de zojuist gepostuleerde cirkel kiezen, dan behoeven we slechts te veronderstellen , dat E2 en E3 éénmaal uitvoerbaar zijn; alle lineaire en kwadratische Euclidische constructies zijn dan uitvoerbaar in b.v. L1, L2, L3, E2, E3, K1.

Daar l∞ en de orthogonale involutie nu niet met de lineaal alleen kunnen worden geconstrueerd, worden na invoering van E2 en E3 sommige lineaire Euclidische constructies eerst uitvoerbaar met lineaal en passer. Ditzelfde is uiteraard het geval, als we onbeperkte toepasbaarheid toelaten van de "gewone" postulaten.

E_2^*. Met een gegeven middelpunt een cirkel te beschrijven, waarvan de straal (als de afstand van een gegeven puntenpaar) gegeven is.

K_1^*. De snijpunten te bepalen van een gegeven rechte met een gegeven cirkel.

4. Een methode om lineaire constructies uit te voeren zonder van de passer gebruik te maken of van te voren figuren in het vlak te geven, bestaat in het aannemen van een nieuw hulpmiddel: de dubbellineaal. Dit instrument stelt ons in staat twee evenwijdige lijnen te construeren op een constante afstand δ , de breedte van de lineaal. We noemen zo'n lijnenpaar kortheidshalve δ-distante lijnen.

Postulaten: D1. Construeer twee δ-distante lijnen, waarvan de één door twee gegeven punten gaat (2 oplossingen).

D2. Construeer twee δ-distante lijnen, waarvan elk door een gegen punt gaat (2 oplossingen).

In verband met Pythagoras is D2 slechts reëel uitvoerbaar als de afstand der gegeven punten $\geqslant \delta$ is.

Opgaven. 1. Bewijs dit volledig.

2. Bewijs dat lineaire Euclidische constructies kunnen worden uitgevoerd in b.v. L2, L3, D1.

3. Construeer een vierkant in b.v. L2, L3, D1.

4. Construeer door een punt P een lijn evenwijdig aan een lijn l in b.v. L2, L4, D1.

Op de hierboven gelegde grondslagen kan de gehele Euclidische meetkunde op de bekende wijze worden afgeleid. We geven nu enige Euclidische specialisaties van vroeger afgeleide projectieve stellingen.

Definitie. Een orthogonale of gelijkzijdige hyperbool is een hyperbool met twee loodrechte asymptoten.

Stelling. Bevat een kegelsnedenbundel een cirkel, dan hebben alle exemplaren dezelfde asrichtingen.

Bewijs. Zijn P_1, P_2 de dubbelpunten van de door de bundel op $l\infty$ uitgesneden involutie, dan geldt $H(J_1J_2, P_1P_2)$. Zijn A_1, A_2 de oneigenlijke punten van een andere kegelsneden uit de bundel, dan geldt dus tevens $H(A_1A_2, P_1P_2)$, zodat P_1, P_2 de asrichtingen voorstellen van de gekozen bundelkegelsnede. Het zijn tevens de richtingen van de assen van de parabolen van de bundel.

Stelling. Bevat een kegelsnedenbundel twee orthogonale hyperbolen, dan zijn alle exemplaren orthogonale hyperbolen.

Bewijs. De op $l\infty$ ingesneden bundelinvolutie heeft met de orthogonale involutie twee puntenparen gemeen, dus valt er geheel mee samen.

Is H het snijpunt van de hoogtelijnen AH en BH van driehoek ABC, dan bestaat volgens de vorige stelling de kegelsnedenbundel, die A, B, C, H tot basispunten en dus AH, BC en BH, AC tot twee ontaardingen heeft, geheel uit orthogonale hyperbolen. Ook de derde ontaarding is dus een orthogonale hyperbool, zodat geldt: De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

De meetkundige plaats der middelpunten van de orthogonale hyperbolen door A, B, C, H is de elfpuntskegelsnede van $l\infty$. Deze gaat door de dubbelpunten van de op $l\infty$ ingesneden involutie en is dus een cirkel. Deze negenpuntscirkel bevat de middens van AB, BC, CA, AH, BH, CH en de diagonaalpunten van de volledige vierhoek ABCH. Daar blijkbaar de negenpuntscirkel de beeldfiguur is van de omgeschreven cirkel bij een dilatatie met H als centrum en factor $\frac{1}{2}$ is het middelpunt F het midden van (M,H) als M het middelpunt van de omgeschreven cirkel is.

Opgaven. 1. De negenpuntscirkel is beeldfiguur van de omgeschreven cirkel bij een dilatatie met het zwaartepunt Z van ABC als centrum en factor $-\frac{1}{2}$.

2. De punten M Z F H liggen in deze volgorde op één rechte lijn (rechte van Euler) en wel geldt

$$\mu(M,Z) : \mu(Z,F) : \mu(F,H) = 2 : 1 : 3.$$

3. Zijn A,B,C,D vier willekeurige punten, dan gaan de negenpuntscirkels van de driehoeken BCD, ACD, ABD en ABC door één punt.

Stelling. Is een parabool γ in driehoek ABC beschreven, dan ligt het brandpunt F van γ op de omgeschreven cirkel van de driehoek.

Bewijs. ABC en FJ_1J_2 zijn twee omgeschreven driehoeken van γ, dus A,B, C,F zijn vier punten van eenzelfde cirkel.

De athyonale projecties van F op de zijden van driehoek ABC liggen op één rechte (n.l. de topraaklijn van γ). Deze rechte draagt de naam: rechte van Simson of rechte van Wallace van F.

Stelling. Is een parabool γ in driehoek ABC beschreven, dan gaat de richtlijn r van γ door het hoogtepunt H van de driehoek.

Bewijs. De in driehoek ABC beschreven parabolen vormen een schaar met $l\infty$ als vierde basisrechte. De raaklijnen vanuit H aan de exemplaren van deze schaar vormen een straleninvolutie. Hiertoe behoren de lijnenparen, die H verbinden met de diagonaalpunten van de volledige vierzijden der basisrechten. Daar dit drie paar loodrechte lijnen zijn, is de involutie orthogonaal, zodat ook de raaklijnen vanuit H aan γ loodrecht op elkaar staan, dus H op r ligt.

Opgave. Bewijs: de rechte van Simson van een punt F op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC gaat door het midden van (H,F). Dit midden ligt op de negenpuntscirkel.

Is X het middelpunt van een poolcirkel van driehoek ABC, dan moet AX loodrecht staan op de poollijn BC van A enz. X moet dus met het hoogtepunt H samenvallen. Inderdaad heeft iedere driehoek een poolcirkel.

Opgave. Is ρ de straal van de poolcirkel, bewijs dan, dat ρ^2 gelijk is aan de helft van de macht van H t.o.v. de omgeschreven cirkel.

Is O het middelpunt van een orthogonale hyperbool γ, dan is OJ_1J_2 een pooldriehoek van γ, zodat iedere cirkel door O harmonisch om γ beschreven is. Anders gezegd: de omgeschreven cirkel van een driehoek is de meetkundige plaats der middelpunten van de orthogonale poolhyperbolen van die driehoek.

Elke cirkel door het middelpunt van een orthogonale hyperbool γ is harmonisch beschreven om γ. γ is dan harmonisch in ieder van deze cirkels beschreven. Hieruit volgt: de poolcirkel van een driehoek is de meetkundige plaats der middelpunten van de ingeschreven orthogonale hyperbolen van die driehoek.

Opgaven. 1. Bewijs met behulp van elementaire meetkundige methoden de volgende stellingen:

a). Een cirkel Γ (middelpunt M, straal R) en een cirkel γ (middelpunt I, straal r) vormen een poristisch stelsel, als $\rho^2(I,M) = R^2 \pm 2Rr$ (het plusteken staat als γ een aangeschreven cirkel en het minteken als γ de ingeschreven cirkel is).

b). Een cirkel Γ (middelpunt M, Straal R) is harmonisch beschreven om de cirkel α (middelpunt H, straal ρ), als $\rho^2(M,H) = R^2 + 2\rho^2$.

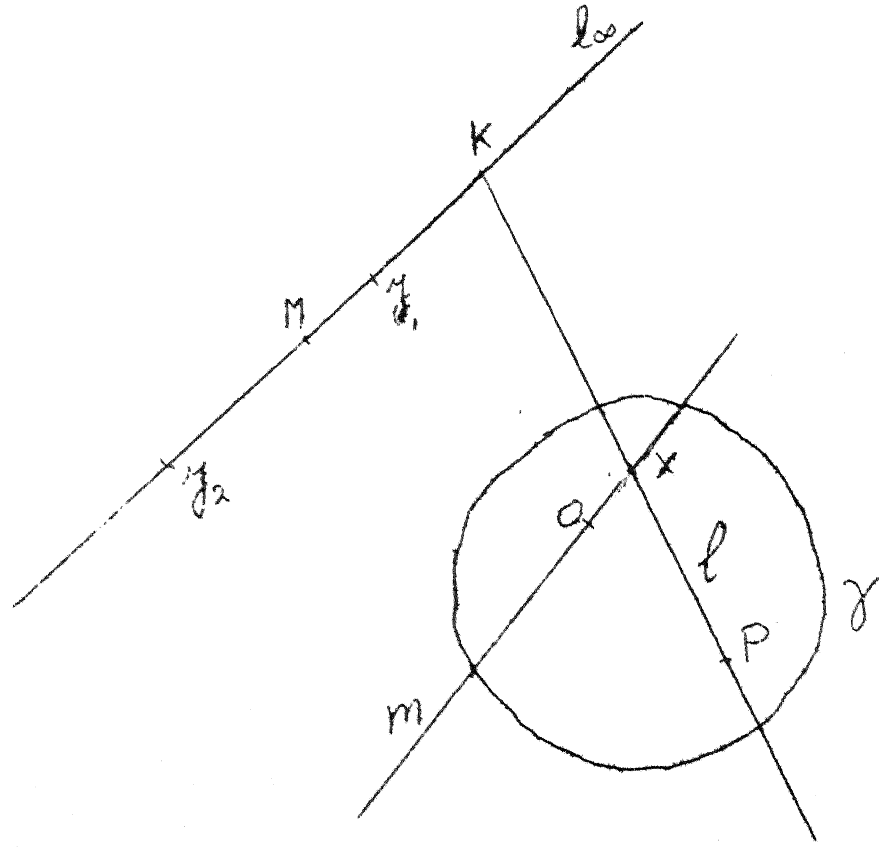
c). Een cirkel α (middelpunt I, straal r) is harmonisch beschreven in de cirkel α (middelpunt H, straal ρ), als $\rho^2(H,I) = \rho^2 + 2r^2$.

2. Bewijs onder gebruikmaking van opgave 1 door toepassing van de zwaartelijnformule in driehoek MHI: de negenpuntscirkel van een driehoek raakt aan de in- en aangeschreven cirkels van de driehoek (stelling van Feuerbach).

3. Is P een vast punt op een kegelsnede γ en zijn A_1 en A_2 twee veranderlijke punten van γ, die zo gekozen zijn, dat $PA_1 \perp PA_2$, dan gaat A_1A_2 door een vast punt Q (het punt van Frégier van P). Bewijs dit !

Zij P een niet op de kegelsnede γ gelegen punt. Door P trekt men een variabele rechte l. Zij M de richting $\perp$ l; de poollijn m van M snijdt l in een punt X.

We vragen naar de meetkundige plaats van X.



Is K het oneigenlijke punt van l, dan is H(KM, J_1J_2). De poollijn m van van M gaat door het middelpunt O van γ. Draait l om P, dan geldt: $l \barwedge K \barwedge M \barwedge m$. l en m doorlopen dus projectieve stralenbundels; het snijpunt X beschrijft dus een kegelsnede Γ met O en P als fundamentaalpunten.

De poollijn x van X gaat door M, zodat $x \perp l$. Hieruit volgt: Γ is de meetkundige plaats der punten X, waarvan de poollijn loodrecht staat op PX. De oneindig verre punten en de assen van γ behoren tot Γ, immers de poollijnen hiervan vallen met de andere as samen. Γ is dus een gelijkzijdige hyperbool, de hyperbool van Apollonius. Deze gaat door P, en door O; de asymptoten zijn evenwijdig aan de assen van γ. Is Q een snijpunt van γ en Γ, dan staat de raaklijn in Q loodrehct op PQ, m.a.w. PQ is een normaal van de kegelsnede γ. Door een punt P gaan dus vier normalen; deze zijn niet noodzakelijk alle reëel en niet met passer en lineaal construeerbaar.

De projectieve meetkunde van de ruimte.

Voor de projectieve meetkunde in de driedimensionale ruimte stellen we de volgende axioma's op

a) Door twee verschillende punten gaat één lijn.
b) Door drie verschillende punten, die niet op eenzelfde lijn liggen, gaat één vlak.
c) Ligt een punt op een lijn en deze lijn in een vlak, dan ligt het punt in dat vlak.
d) Liggen twee verschillende punten van een lijn in een vlak, dan ligt de lijn zelf in dat vlak
e) Bij een lijn en een vlak bestaat altijd ten minste een punt dat op beide ligt.
f) Op elke lijn liggen ten minste 3 verschillende punten.
g) In elk vlak liggen ten minste 4 verschillende punten waarvan er geen 3 op een lijn liggen.
h) Er bestaat een vlak en een punt dat niet in dat vlak ligt.

(vergelijk de axioma's van pag. 6)

Grondbegrippen zijn dus: punten (aangeduid met A,B,...P,...), lijnen (aangeduid met a,b,...l,...) en vlakken (aangeduid door α, β, γ,...), benevens het incidentiebegrip. In feite hebben we met drie verschillende incidenties te maken: punt incident met lijn, punt incident met vlak, lijn incident met vlak. We gebruiken voor deze drie begrippen hetzelfde woord incident en dezelfde uitdrukking "liggen in" of "gaan door".

In het platte vlak bestond een zekere dualiteit: door in de vlakke axioma's de woorden "punt" en "lijn" te verwisselen ontstonden uit de oude axioma's afleidbare stellingen. In de plaats van dit vlakke dualiteitsbeginsel treedt hier een ruimtelijk dualiteitsbeginsel: de stellingen, die uit de axioma's a...h kunnen worden afgeleid door de woorden "punt" en "vlak" te verwisselen, zijn uit die axioma's bewijsbaar.

Opmerking. Voor we die verwisselingen uitvoeren vervangen we eerst alle uitdrukkingen "liggen op", "liggen in" en "gaan door" door "incident zijn met". Het woord "lijn" laten we staan.

Bewijs van het ruimtelijk dualiteitsbeginsel:

a') Twee verschillende vlakken α en β hebben altijd een lijn gemeen.
Immers: volgens b kunnen α en β geen drie niet op één lijn gelegen punten gemeen hebben. Volgens g) bestaan in α vier punten, waarvan geen drie op een rechte liggen. De 6 zijden van de door deze punten bepaalde volledige vierhoek snijden volgens e) alle het vlak β .
Daar de 6 snijpunten niet alle kunnen verschillen hebben α en β tenminste twee verschillende punten, dus volgens a) en d) een rechte gemeen.

b') Drie verschillende vlakken α , β , γ , die niet door eenzelfde lijn gaan, hebben één punt gemeen.
Immers: De snijlijn (α , β) snijdt γ in één punt.

c') Gaat een vlak α door een lijn l en gaat l door een punt P, dan gaat α door P.
Dit is het oude axioma c).

d') Gaan de twee verschillende vlakken α en β , die een lijn l gemeen hebben beide door een punt P, dan ligt P op l.
Immers de vlakken α en β hebben l tot snijlijn en hebben buiten l geen punten gemeen (volgens b) en f)).

e') Bij een lijn l en een punt P bestaat altijd tenminste één vlak dat door beide gaat.
Ligt P niet op l, dan is er volgens b) en f) juist één zo'n vlak. Ligt P op l, dan voldoet volgens d) elk vlak door l).

f') Door elke lijn l gaan tenminste drie verschillende vlakken.

g') Door elk punt gaan ten minste 4 vlakken, waarvan geen drie door een lijn gaan.
De bewijzen hiervan verlopen door een redenering uit het ongerijmde.

h') Zelfde als h).

Opdat de ruimte-meetkunde een uitbreiding is van de vlakke meetkunde, is het nodig een bewijs te geven van de volgende.

Stelling: In ieder vlak α van de ruimte gelden de vroeger opgestelde vlakke axioma's. (pag. 6).

Bewijs: A is hetzelfde als a)

A': zijn l en m twee rechten in het vlak α, dan bestaat er een punt P buiten α. Het vlak β door P en l snijdt α volgens l, en m volgens een punt S, dan blijkbaar op l ligt.

B is hetzelfde als f).

B': in α liggen 4 punten volgens g), zodat door 2 hiervan te verbinden een lijn in α ontstaat en nog 2 niet op deze lijn gelegen punten.

C is het axioma van Desargues. Ook dit is met behulp van de ruimtelijke axioma's te bewijzen.

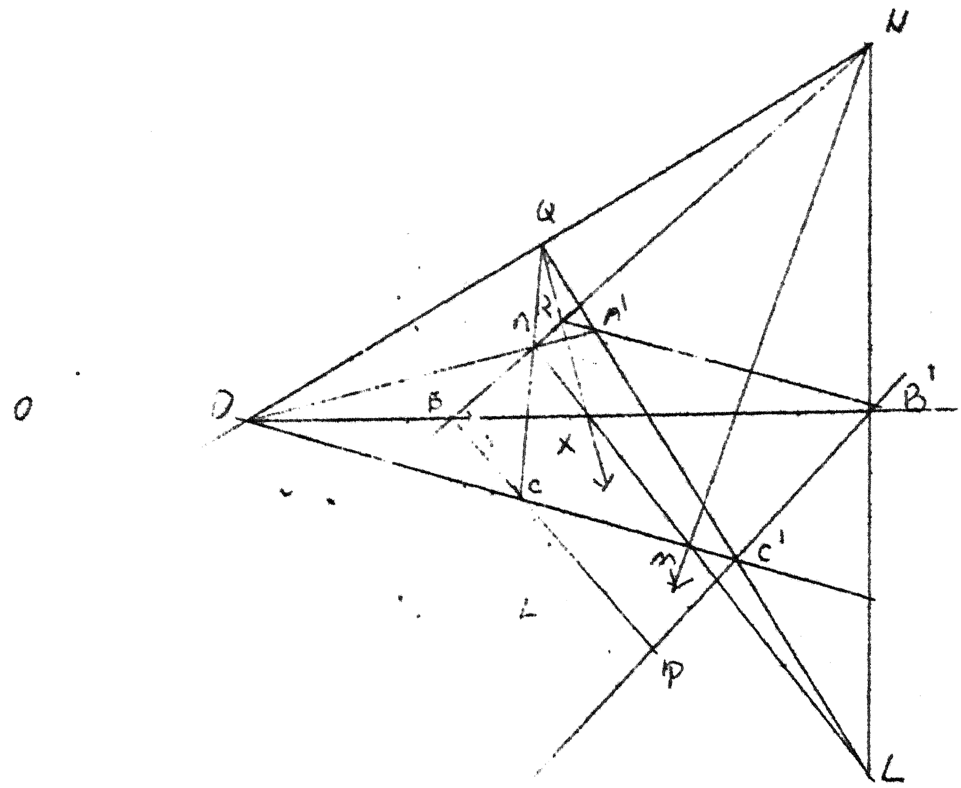
Zijn n.l. ABC en A'B'C' de gegeven puntperspectieve driehoeken in α, zodat AA',BB',CC' alle door O gaan, dan kiezen we een punt S buiten α en een punt S', eveneens buiten α, zodat OSS' een rechte lijn is. De lijnen SA en S'A' liggen beide in het vlak door OSS' en OAA', dus snijden elkaar ergens in A", niet in α gelegen. Zo bestaan ook de punten B"(snijpunt van SB en S'B') en C"(snijpunt van SC en S'C'). Stel het vlak β door A"B"C" snijdt α volgens de lijn l.

A"B" ligt met AB in het vlak SAB, dus snijdt AB in een punt R van l. Zo snijdt A"B" ook A'B' in een punt R' van l. Daar R het enige punt van l is dat op A"B" ligt, is R = R', zodat AB en A'B' elkaar op l snijden. Om dezelfde reden snijden ook AC en A'C', evenals BC en B'C' elkaar op l.

Het op pag. 8 ingevoerde axioma D nemen we ongewijzigd over; dit axioma hebben we nodig om van het te construeren grondlichaam te bewijzen dat de karakteristiek $\neq 2$ is.

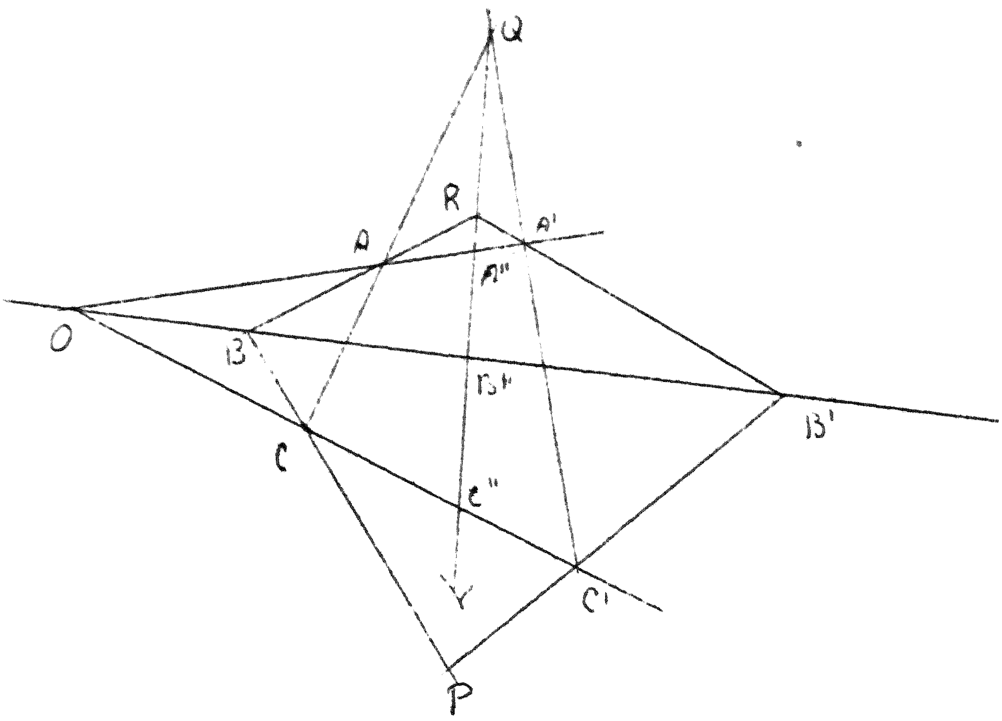
Ook in de ruimtemeetkunde noemen we de verzameling van alle punten van een lijn een puntreeks; de lijn heet de drager. Snijden de lijnen l en m elkaar, dan kunnen we vanuit een punt C van het door l en m bepaalde vlak de puntreeks van l projecteren op m. Twee op deze wijze samenhangende puntreeksen staan in perspectief verband tot elkaar. We noemen de puntreeksen op twee dragers l en m (in het algemeen kruisend!) projectief, wanneer een aantal puntreeksen met dragers $x_1, x_2, \dots x_n$ bestaat, zodat $l = x_1$ en $m = x_n$, terwijl x_i met x_{i+1} perspectief is voor elke $i=1\dots n-1$. We nemen in de ruimte het axioma E^* van de vlakke meetkunde over (vgl. pg. 18): Hebben twee collocale projectieve puntreeksen drie punten gemeen, dan vallen ze geheel samen. Het axioma E, dat in het platte vlak niet gebruikt wordt nemen we in de ruimte niet over, we hebben aan het minder eisende axioma E^* genoeg. (In de reële vlakke projectieve meetkunde is E tegelijk met E^* geldig; in de complexe vlakke projectieve meetkunde geldt E^* wel, doch E niet, zodat hieruit volgt dat E geen consequentie van E^* is!). Axioma E^* kunnen we ook in de volgende vorm brengen: Voert een projectieve transformatie π de puntreeks van l over in de puntreeks van l' en worden daarbij de punten A,B,C van l op de punten A',B',C' van l' afgebeeld, dan is π de enige projectieve transformatie met deze eigenschap. Immers, stel dat π_1 en π_2 beide voldeden, dan was $\pi_2^{-1}\pi_1$ een projectieve transformatie van l op zichzelf, die A,B,C tot dekpunten heeft en dus volgens E^* de identiteit is. $\pi_2^{-1}\pi_1=1$ betekent $\pi_2=\pi_1$. Volgens de redenering van pag. 47 blijkt dat de stelling van Pappus in het platte vlak een gevolg is van E^*.

In de vlakke meetkunde geldt verder (<u>Hessenberg</u>):
Het axioma van Desargues is te bewijzen met behulp van de stelling van Pappus.
<u>Bewijs.</u>



Laat ABC en A'B'C' de puntperspectieve driehoeken zijn met centrum O. Is P het snijpunt van BC en B'C', Q dat van AC en A'C' en R dat van AB en A'B', dan moet bewezen worden dat P,Q,R op één lijn liggen.
Laat X het snijpunt zijn van QR met OBB'; AX snijdt A'C' in L, LB' snijdt AB in N. Uit Pappus $\binom{AA'O}{B'NL}$ volgt dat ON door Q gaat. Beschouwen we nu de Pappus stellingen $\binom{ABN}{OMC}$ en $\binom{LB'N}{OMC'}$, dan blijken zowel BC als B'C' door het snijpunt van QR met MN te gaan. Hiermee is de stelling bewezen.

Een eenvoudig direct bewijs dat het axioma van Desargues uit E^* af te leiden is, zonder tussenkomst van de stelling van Pappus, is het volgende:



Het puntviertal OBB'B" wordt in OCC'C" overgevoerd door eerst vanuit R te projecteren op OAA'A" en dan vanuit Q op OCC'C". De viertallen zijn dus projectief. De projectie uit P voert reeds OBB' in OCC' over en valt dus met de vorige projectiviteit samen, zodat B"C" door P gaat. In het platte vlak kunnen we na invoering van het axioma E^* het axioma van Desargues blijkbaar missen; in de ruimte is Desargues ook zonder E^* afleidbaar.

In de ruimtemeetkunde zijn grondbegrippen: punt, lijn, vlak (nulde trap). We definieren verder:

1) puntreeks (alle punten van een lijn) 2) stralenwaaier (alle lijnen in een vlak en door een punt) 3) vlakkenwaaier (alle vlakken door een lijn)	figuren van de eerste trap
4) puntveld (alle punten van een vlak) 5) stralenschoof (alle lijnen door een punt) 6) stralenveld (alle lijnen in een vlak) 7) vlakkenschoof(alle vlakken door een punt)	figuren van de tweede trap
8) puntruimte (alle punten van de ruimte) 9) vlakkenruimte (alle vlakken van de ruimte)	figuren van de derde trap

Tengevolge van het ruimtelijk dualiteitsbeginsel staan deze verzamelingen paarsgewijze duaal tegenover elkaar.

Opgave. Geef deze toevoeging aan.

In de ruimte staat naast het vlakke dualiteitsbeginsel in elk vlak het schoofdualiteitsbeginsel in elk punt. Dit ontstaat door eerst het ruimtelijke, dan het vlakke en dan weer het ruimtelijke dualiteitsbeginsel toe te passen.

Opgave. Laat zien dat 5) en 7) schoofduale begrippen zijn. De belangrijkste bewerkingen in de projectieve meetkunde zijn: verbinden en snijden. Verbinden met een punt en snijden met een vlak zijn duale bewerkingen. Verbinden met een lijn en snijden met een lijn zijn eveneens duaal. Door bovenstaande verzamelingen 1)...9) te verbinden of te snijden met een punt, een rechte lijn of een plat vlak, ontstaat weer één der verzamelingen.

Opgaven.

1. Wat krijgen we achtereenvolgens als we een puntveld verbinden met een punt en dan snijden met een vlak?
2. En wat als we een puntreeks verbinden met een lijn, vervolgens snijden met een vlak en nogmaals snijden met een vlak?

Daar in ieder vlak de vroegere axioma's gelden, bezit ook de ruimtelijke projectieve meetkunde een grondlichaam, waarvoor we weer het lichaam der complexe getallen nemen.
Het begrip "dubbelverhouding van vier punten" wordt op dezelfde manier ingevoerd als in het platte vlak. Door een viertal punten A_1, A_2, A_3, A_4 van een lijn s te verbinden met een punt P ontstaat een viertal lijnen l_1, l_2, l_3, l_4; door deze nogmaals te verbinden met een punt Q ontstaat een viertal vlakken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. We definieren nu:

$$DV(l_1 l_2 l_3 l_4) = DV(A_1 A_2 A_3 A_4)$$

en

$$DV(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = DV(A_1 A_2 A_3 A_4).$$

We spreken dus ook van de DV van vier stralen van een waaier (evenals in het platte vlak) en van vier vlakken van een waaier. Dat de $DV(l_1 l_2 l_3 l_4)$ niet van s afhangt, is vroeger opgemerkt (zie pag. 30 regel 8 v.o.).
Opgave. Bewijs dat de $DV(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ alleen van de vier vlakken en niet van s afhangt.
Definitie. Onder een projectieve transformatie van de ruimte verstaan we een eeneenduidige transformatie, die punten in punten, rechten in rechten en vlakken in vlakken overvoert, en die elke puntreeks in een daarmee projectieve puntreeks overvoert.
Stelling. De dubbelverhouding van vier punten van een puntreeks, van vier lijnen van een waaier en van vier vlakken van een waaier is invariant tegenover projectieve transformatie van de ruimte.
Opgave. Bewijs dit.

Vroeger hebben we een projectiviteit gedefinieerd tussen twee vlakken α en β ; dit is een projectiviteit tussen twee puntvelden en tussen twee stralenvelden. Ook is gedefinieerd een correlatie tussen een puntveld en een stralenveld. Op dezelfde wijze kunnen we een projectieve betrekking definiëren tussen twee willekeurige figuren van de tweede trap; zijn dit verschillende figuren, dan noemt men dit algemeen een correlatie.

Duaal tegenover de projectieve transformatie van de ruimte staat de ruimtelijke correlatie tussen een puntruimte en een vlakkenruimte, waarover later meer.

Opgaven.

1. Definieer de correlatie tussen een stralenschoof met top S en een vlakkenschoof met top T. Bewijs dat deze een correlatie induceert tussen de vlakkenschoof S en de stralenschoof T (vgl. pag. 66).
2. Definieer de correlatie tussen het puntveld van het vlak α en de vlakkenschoof door het punt S. Welke correlatie wordt hierdoor geïnduceerd ?

Een kegelsnede γ in een vlak α kan opgevat worden als kromme van de tweede graad (puntenkegelsnede) en als kromme van de tweede klasse (lijnenkegelsnede). In de ruimte komt er nog bij de beschouwing van γ als vlakkenkegelsnede: elk vlak door een raaklijn γ noemen we een raakvlak aan γ.

Puntenkegelsnede en lijnenkegelsnede zijn duaal in het vlakke dualiteitsbeginsel. Krachtens het ruimtelijk dualiteitsbeginsel staat duaal tegenover een puntenkegelsnede een vlakkenkegel , tegenover een lijnenkegelsnede een lijnenkegel en tegenover een vlakkenkegelsnede een puntenkegel.

Opgaven.

1. Definieer de vlakkenkegel, lijnenkegel en puntenkegel.
2. Hoe luidt de stelling van Pascal resp. Brianchon voor kegels ?
3. Bewijs dat vlakkenkegel en lijnenkegel schoofduaal zijn.
4. Beschrijf de poolverwantschap t.o.v. kegels (het duale van de vlakke poolverwantschap). Wat is een pooldrievlakshoek ?

Een ruimtelijke correlatie is een eeneenduidige afbeelding φ van een puntruimte op een vlakkenruimte met de volgende eigenschappen (vgl. pag. 66):

a) aan elk punt P is een vlak φP toegevoegd.

b) zijn A, B, C en D vier punten, door een lijn l, dan gaan de vier vlakken φA, φB, φC, φD door één lijn (die we met φl aanduiden), en wel is $(ABCD) = (\varphi A, \varphi B, \varphi C, \varphi D)$.

Uit deze definitie volgt: de lijn φl is door de punten A en B van l reeds ondubbelzinnig bepaald, n.l. als de snijlijn van φA en φB. Voor twee andere punten C en D van l valt de snijlijn van φC en φD met die van φA en φB samen. Dus:

c) aan elke lijn l is eenduidig een lijn φl toegevoegd. Hebben l en m nu een punt P gemeen, dan liggen zowel φl als φm in het vlak φP. Anders gezegd, liggen l en m in een vlak α, dan gaan φl en φm door een punt , dat we met $\varphi \alpha$ aanduiden. Zijn l,m,p,q vier vrij gelegen lijnen van vlak α , dan zijn φl, φm, φp, φq vier lijnen, die elkaar alle twee aan twee snijden. Ze kunnen niet alle in een vlak φX liggen, daar dan immers l,m,p,q door X zouden moeten gaan. Dus φl, φm, φp, φq gaan door één punt $\varphi \alpha$. Daar het snijpunt van φl en φm dit punt reeds bepaalt, geldt:

d) aan elk vlak α is eenduidig een punt $\varphi\alpha$ toegevoegd.

Een correlatie is blijkbaar een afbeelding, die aan elk grondelement van de ruimte het ruimtelijk duale toevoegt· daar incidenties behouden blijven, geldt dit tevens voor figuren van de eerste, tweede en derde trap. De eigenschap, analoog aan b) geldt ook voor vier stralen van een waaier en voor vier vlakken van een waaier.

<u>Opgave</u>. Bewijs dit.

Het begrip correlatie is dus met zichzelf duaal.

De inverse van een correlatie is weer een correlatie; de correlatie heet <u>involutorisch</u>, als $\varphi = \varphi^{-1}$. We beschouwen in het volgende uitsluitend <u>involutorische correlaties</u>.

Een involutorische correlatie φ , met de eigenschap dat elk punt P in zijn eigen beeldvlak φP ligt, heet een <u>nulcorrelatie</u>. We onderstellen, dat in het volgende φ geen nulcorrelaties is, dus dat ten minste één punt bestaat, dat niet met zijn beeldvlak incident is.

Ligt Q in het vlak φP, dan heet Q met P geconjugeerd. Dan is φQ met $\varphi\varphi P = P$ incident, zodat dan ook P met Q geconjugeerd is. Deze relatie is dus <u>symmetrisch</u>. Alle punten, die met P geconjugeerd zijn, vormen het puntveld in φP. De punten, die geconjugeerd zijn met <u>alle</u> punten van een lijn l, vormen de lijn φl. Er is slechts één punt geconjugeerd met <u>alle</u> punten van een vlak α , n.l. het punt $\varphi\alpha$.

Gaat α door het punt $\varphi\beta$, dan heten α en β geconjugeerd; dit is een symmetrische relatie tussen vlakken. De vlakken, die geconjugeerd zijn met een gegeven vlak α gaan alle door het punt $\varphi\alpha$; de vlakken, die geconjugeerd zijn met <u>alle</u> vlakken door een lijn l, gaan door de lijn φl; er is juist één vlak geconjugeerd met <u>alle</u> vlakken door een punt P, n.l. het vlak φP.

Snijdt l de lijn φm, dan heten l en m geconjugeerd. Ook dit is een symmetrische relatie. De lijnen, die geconjugeerd zijn met <u>alle</u> lijnen door een punt P liggen in het vlak φP; de lijnen, die geconjugeerd zijn met <u>alle</u> lijnen van een vlak α , gaan door het punt $\varphi\alpha$.

De involutorische ruimtelijke correlatie φ (die geen nulcorrelatie is !) gebruiken we om ruimtelijke figuren te definiëren, analoog aan de kegelsneden in het platte vlak (vgl. pag. 67, regel 13 v.o.) . φ bepaalt n.l. een kwadriek Γ', die als volgt gedefinieerd wordt:

een <u>punt</u> van Γ' is een zelfgeconjugeerd punt van φ
een <u>raaklijn</u> van Γ' is een zelfgeconjugeerde lijn van φ
een <u>raakvlak</u> van Γ' is een zelfgeconjugeerd vlak van φ

We spreken resp. van Γ' als <u>puntenkwadriek</u>, <u>lijnenkwadriek</u> en <u>vlakkenkwadriek</u>; φ heet de <u>poolcorrelatie</u> t.o.v. Γ'.

Is α geen raakvlak van Γ', dan is aan <u>elk</u> punt P van α een vlak $\varphi P \neq \alpha$ toegevoegd, dat α volgens een lijn $\varphi^\alpha P$ snijdt. $\varphi^\alpha P$ bevat alle in α liggende en met P geconjugeerde punten. Blijkbaar is φ^α in α een vlakke involutorische correlatie; de zelfgeconjugeerde punten van φ^α (die ook zelfgeconjugeerd zijn voor φ) vormen een kegelsnede γ^α. Dit levert de volgende

<u>Stelling</u>. Elk vlak α dat Γ' niet raakt, heeft met de puntenkwadriek een kegelsnede γ^α gemeen.

Een raaklijn l aan γ^α is een zelfgeconjugeerde lijn in de vlakke correlatie φ^α. Is P het raakpunt, dan is $l = \varphi^\alpha P$, zodat het vlak φP door l gaat. Hieruit volgt, dat φl door P gaat, dus l snijdt en bijgevolg zelfgeconjugeerd is. Dit is de

<u>Stelling</u>. Elk vlak α dat Γ niet raakt, heeft met de lijnenkwadriek de lijnenkegelsnede γ^α gemeen.

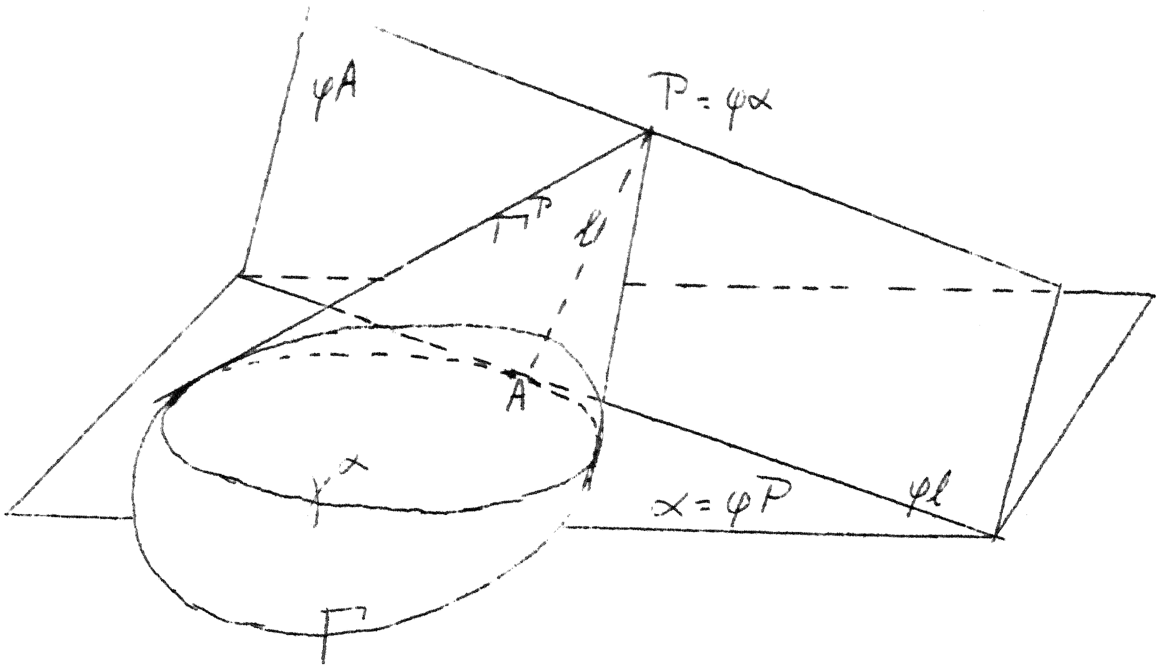
Door toepassing van het ruimtelijk dualiteitsbeginsel ontstaan uit bovenstaande stellingen:

Een vlakkenschoof, waarvan de top P niet op Γ' ligt, heeft met de vlakkenkwadriek een vlakkenkegel Γ^P gemeen;

Een lijnenschoof, waarvan de top P niet op P ligt, heeft met de lijnenkwadriek een lijnenkegel Γ^P gemeen.

Anders gezegd, de raakvlakken, uit een punt P aan een kwadriek aangebracht, vormen tevens de raakvlakken aan een kegel met P als top; de beschrijvenden van deze kegel zijn de raaklijnen uit P.

Is l een raaklijn aan Γ', dan is l zelfgeconjugeerd, m.a.w. l snijdt φl. Is A het snijpunt, dan zal het vlak φA door l en φl gaan, dus tevens A bevatten. A is dus een punt van Γ en φA een raakvlak. A is het enige punt van Γ', dat op l ligt. Immers bevatte l nog een tweede zelfgeconjugeerd punt B, dan ging φB door B en door φl, zodat φB het vlak door l en φl was, dus met φA samenviel, hetgeen niet kan. Een raaklijn bevat dus slechts één punt van Γ'; door elke raaklijn gaat slechts één raakvlak van γ. De lijnen l, die geheel met φl samenvallen, hebben we tot nu toe buiten beschouwing gelaten.



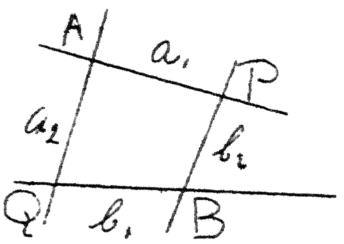
Op elke lijn m in α die geen raaklijn is wordt door de vlakke correlatie φ^α een involutie van geconjugeerde punten bepaald, die de twee snijpunten van m met γ^α tot dubbelpunten heeft. Deze involutie bevat ook de paren punten, die geconjugeerd zijn <u>ten opzichte van de ruimtelijke correlatie φ</u>. De lijn m snijdt Γ dus in twee punten, die samenvallen als m raaklijn is; de geconjugeerde punten van m vormen een involutie die deze snijpunten tot dubbelpunten heeft. Duaal: door elke lijn gaan twee raakvlakken aan Γ, die samenvallen als de lijn raaklijn is; de geconjugeerde vlakken door m vormen een vlakkeninvolutie, die deze raakvlakken tot dubbelvlakken heeft.

Als een lijn l met φ l samenvalt, dan noemen we l een <u>beschrijvende</u> van Γ. Is X een punt van l, dan gaat φ X door φl, dus door X, zodat X zelfgeconjugeerd is. Alle punten van een beschrijvende zijn dus punten van Γ. Duaal: alle vlakken door een beschrijvende zijn raakvlakken van Γ.

Zij α een raakvlak aan Γ; het punt A = $\varphi\alpha$ ligt in α. Is l een lijn van α, niet door A, dan is φ l een lijn door A, niet in α. Het beeldvlak φ P van een punt P van l gaat door φ l en snijdt α volgens een lijn p door A. De toevoeging p = φ^α P is nu een <u>ontaarde correlatie</u>, omdat de beeldlijn p van <u>elk</u> van A verschillend punt P steeds door A gaat. Stel p snijdt l in P'. Als P de lijn l doorloopt, draait φ P om φ l, dus p om A, zodat ook P' de lijn l doorloopt. Hierbij is P $\overline{\wedge}$ φ P $\overline{\wedge}$ p $\overline{\wedge}$ P', zodat op l twee collocale projectieve puntreeksen ontstaan, met twee dekpunten S en T. De lijn SA = s is nu een beschrijvende van Γ, immers φ s is de snijlijn van φ S met φ A = α, waarbij φ S het vlak door s en l is. **Elk raakvlak bevat dus twee beschrijvenden.**

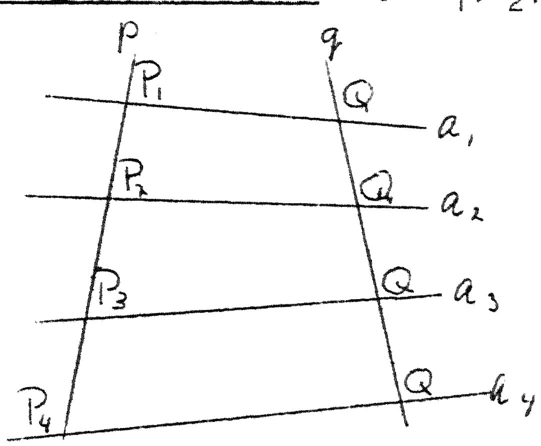
Duaal: door elk punt van Γ gaan twee beschrijvenden. Het vlak α door twee elkaar snijdende beschrijvenden is een raakvlak, hun snijpunt A is een punt van Γ. $A = \varphi\alpha$ heet het raakpunt van α ; $\alpha = \varphi A$ heet het raakvlak in A.

Het raakvlak α in een punt A van Γ snijdt Γ volgens twee beschrijvenden a_1, a_2. Is B een niet in α gelegen punt van Γ, dan snijdt het raakvlak β in B Γ volgens twee beschrijvenden b_1, b_2. De poollijn φl van de lijn $l = AB$ snijdt Γ in de punten P en Q. Daar l door A en B gaat, is φl de snijlijn van α en β, zodat P en Q beide op (a_1, a_2) en op (b_1, b_2) liggen. Stel P is het snijpunt van a_1 en b_2, dan kan Q niet op a_1 liggen, daar anders het vlak APQB de twee raakpunten P en Q zou moeten bezitten. Om dezelfde reden ligt Q niet op b_2, zodat Q het snijpunt is van a_2 en b_1. De 4 punten A,B,P,Q liggen zeker niet in één vlak, daar dit vlak dan elk der 6 hoekpunten van de gevormde volledige vierhoek tot raakpunten zou moeten hebben. Dus: de beschrijvenden a_1, b_1 kruisen elkaar, evenals a_2, b_2. Door het punt B over Γ te variëren blijkt:



door elk punt van Γ gaat één beschrijvende die a_2 snijdt en a_1 kruist en één beschrijvende die a_1 snijdt en a_2 kruist. Zo ontstaan twee stelsels van beschrijvenden of regelscharen. Twee lijnen van eenzelfde stelsel kruisen elkaar; lijnen van verschillende stelsels snijden elkaar.

Een regelschaar wordt door drie (elkaar kruisende) beschrijvenden vastgelegd. De andere regelschaar bestaat uit de transversalen van de drie gegeven lijnen. Zijn a_1, a_2, a_3, a_4 vier lijnen van een regelschaar en p en q twee lijnen van de andere regelschaar van dezelfde kwadriek, dan is het vlak door p en a_i het poolvlak van P_i, zodat de waaier van raakvlakken door p projectief is met de puntreeks der raakpunten op p. De lijn q snijdt het raakvlak van P_i in het punt Q_i, zodat $(P_1P_2P_3P_4) = (Q_1Q_2Q_3Q_4)$. Dus: Een regelschaar bestaat uit alle lijnen, die corresponderende punten verbinden van projectieve puntreeksen op kruisende dragers.



Duaal:

Een regelschaar bestaat uit de snijlijnen van corresponderende vlakken uit projectieve vlakkenwaaiers met kruisende dragers.

Een rechte lijn, die meer dan twee punten met een kwadriek Γ gemeen heeft, ligt geheel op Γ en is een beschrijvende. Een lijn, die geen beschrijvende van Γ is heeft twee punten met Γ gemeen, die samenvallen als de lijn raaklijn is.

Als Γ reële punten, raakvlakken en raaklijnen bezit, zijn de beschrijvenden van Γ niet noodzakelijk reëel. Bevat Γ reële regelscharen dan noemen we Γ een hyperbolische kwadriek, anders een elliptische (of ovale) kwadriek. Een kegel is te beschouwen als een parabolische (punten-)kwadriek met twee samenvallende (ontaarde) regelscharen; een kegelsnede is een (vlakken-)kwadriek met twee samenvallende (ontaarde) regelscharen.

Opgave. De vier hoogtelijnen van een viervlak zijn vier beschrijvenden van een regelschaar. De vier lijnen, door de hoogtepunten der zijvlakken loodrecht op die zijvlakken opgericht, behoren tot de toegevoegde regelschaar.

Elk vlak snijdt een kwadriek volgens een (eventueel ontaarde) puntkegelsnede. Ook het omgekeerde geldt: wordt een oppervlak Γ door elk vlak volgens een kegelsnede gesneden, dan is dit oppervlak een kwadriek.

Bewijs. Een lijn l snijdt Γ i.h.a. in 2 verschillende punten (Waarom?); de punten A en A' van l heten geconjugeerd t.o.v. Γ als A en A' behoren tot de involutie, die de snijpunten van l met Γ tot dubbelpunten heeft. Alle met A geconjugeerde punten liggen in een vlak φA, dat de poollijnen bevat van A t.o.v. de kegelsneden, volgens welke de vlakken door A Γ snijden.

Zijn verder A,B,C,D vier punten van een lijn l, en snijden de vlakken φA en φB elkaar volgens de lijn m, dan gaat het poolvlak φP van een variabel punt P van m zowel door A als door B, dus door l. Elk punt van m is dus geconjugeerd met elk punt van l, m.a.w. de poolvlakken van C en D gaan eveneens door m. Snijden de poolvlakken van A,B,C,D de lijn l resp. in A',B',C',D', dan zijn deze punten aan A,B,C,D toegevoegd in de poolinvolutie op l. Dan geldt: $(\varphi A, \varphi B, \varphi C, \varphi D) = (A',B',C',D',) =$
$= (A,B,C,D)$.

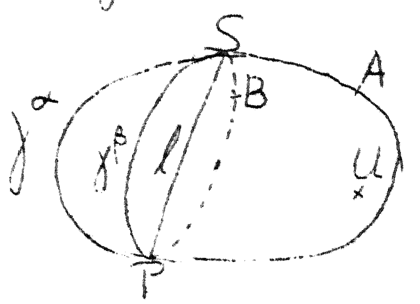
Aan de definitie van pag. 115 is voldaan, zodat φ een correlatie is. Daar verder de voorwaarde voor geconjugeerde ligging van twee punten symmetrisch in die punten is, is φ involutorisch, zodat φ een kwadriek bepaalt, welke met Γ samenvalt. Het gestelde is hiermee bewezen.

Stelling. De meetkundige plaats Γ der snijpunten van de lijnen van een lijnenschoof (met top S) en de corresponderende vlakken van een daarme correlatieve vlakkenschoof (met top T) is een kwadriek door S en T(de fundamentaalpunten).

Bewijs. We bewijzen allereerst dat elk vlak α door S het oppervlak volgens een kegelsnede snijdt. Een vlak α door S correspondeert in de correlatie nl. met een lijn a door T, die α in een punt P snijdt. De stralenwaaier in α met S als top correspondeert met de vlakkenwaaier door a; deze snijdt α volgens een lijnenwaaier met P als top. Beide waaiers zijn onderling projectief, zodat een kegelsnede wordt voortgebracht, die door S en P gaat.

Uit het bovenstaande volgt nog, dat de door de gegeven correlatie geïnduceerde correlatie tussen de vlakkenschoof S en de lijnenschoof T hetzelfde oppervlak voortbrengt. Ook elk vlak door T snijdt Γ dus volgens een kegelsnede. De stelling zal bewezen zijn, als we aantonen dat hetzelfde oppervlak Γ verkregen wordt, als we T door een willekeurig ander punt van Γ vervangen, mits we de vlakkenschoof goed aanbrengen.

Laat U een van S en T verschillend punt van Γ zijn. We brengen door S twee vlakken α en β aan (niet door U en T), die 1 tot snijlijn hebben en Γ volgens de (niet ontaarde) kegelsneden γ^{α} en γ^{β} snijden; zij P het tweede snijpunt van 1 en Γ. Een willekeurig vlak door U en P snijdt γ^{α} nogmaals in een punt A en γ^{β} in een punt B. De correlatie tussen de lijnenschoof S en de vlakkenschoof U construeren we nu als volgt:



Is X een variabel punt van γ^{α}, dan voegen we aan de lijn SX toe het vlak UAX; is Y een variabel punt van γ^{β}, dan voegen we aan de lijn SY toe het vlak UBY. Aan SP wordt blijkbaar het vlak UAB toegevoegd. Daar zeker van vier "vrij gelegen" lijnen uit S de beeldvlakken door U gegeven zijn, wordt hierdoor inderdaad een correlatie bepaald. Deze brengt een oppervlak Γ' voort door de fundamentaalpunten S en U, dat door elk vlak dat door S of U gaat volgens een kegelsnede gesneden wordt. Γ heeft met Γ' de kegelsneden α en β gemeen en het punt U. We zullen tenslotte aantonen dat $\Gamma = \Gamma'$. Zij daartoe Q een willekeurig punt van Γ. Het vlak δ = UTQ snijdt Γ zowel als Γ' volgens een kegelsnede. Daar deze kegelsneden behalve U nog de snijpunten van δ met γ^{α} en γ^{β} gemeen hebben vallen ze geheel samen, zodat Q op Γ' ligt.

Elk punt van Γ is dus als fundamentaalpunt te kiezen, zodat elk vlak Γ volgens een kegelsnede snijdt en Γ een kwadriek is.

Tevens is hiermee bewezen: elke kwadriek kan op ∞^{7} manieren voortgebracht worden door twee correlatieve schoven.

De duale stelling luidt:

Een vlakkenkwadriek bestaat uit alle vlakken die een punt van een puntveld α verbinden met de corresponderende lijn uit het correlatieve lijnenveld β ; de vlakken α en β zijn zelf raakvlakken. De geinduceerde correlatie tussen het lijnenveld α en het puntveld β brengt dezelfde vlakkenkwadriek voort.

Stelling. Wordt de kwadriek Γ door de correlatieve schoven S en T voortgebracht, dan is het raakvlak in T het vlak dat in de schoof T overeenkomt met de lijn ST van de schoof S.

Bewijs: Het raakvlak in T is dat vlak α dat Γ volgens een ontaarde puntkegelsnede snijdt. De snijkromme γ^{α} wordt voortgebracht door twee projectieve stralenwaaiers in α , waarvan T de ene top is en waarvan de andere top A gevormd wordt door het snijpunt van α met de corresponderende lijn a door S. Kiezen we voor a de lijn ST, dan is A = T, zodat de twee projectieve stralenwaaiers dezelfde top hebben (collocaal zijn). De twee dubbelstralen behoren dan geheel tot Γ , zodat α inderdaad raakvlak is.

We geven nu het bewijs van Gergonne voor de stelling van Pascal, gebruik makende van de eigenschappen van regelscharen.

Zij γ een kegelsnede, gelegen in een vlak ε en waarin een zeshoek $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ beschreven is. We kunnen γ ontstaan denken als product van twee projectieve lijnenwaaiers in ε . Brengen we door de fundamentaalpunten twee (niet in ε liggende) kruisende lijnen, dan worden deze projectieve lijnenwaaiers door deze lijnen geprojecteerd in projectieve vlakkenwaaiers, die een kwadriek Γ voortbrengen. Γ wordt door ε volgens γ gesneden.

Door de punten A_i brengen we de lijn a_i aan, behorende tot de eerste regelschaar van Γ en door B_i de lijn b_i van de tweede regelschaar. Elke a_i snijdt elke b_k; speciaal beschouwen we de snijpunten voor $i \neq k$, die een zeshoek op Γ vormen. Laat α_1 het vlak zijn door a_2 en b_3, β_1 dat door a_3 en b_2, zij verder s_1 de snijlijn van α_1 en β_1. De lijn s_1 snijdt a_2 en b_2 beide. Onderstel, dat s_1 in het vlak door a_2 en b_2 ligt. Zeker is $s_1 \neq a_2$, omdat s_1 ook a_3 snijdt. Het vlak door s_1 en a_2 zou dan zowel b_2 als b_3 bevatten, hetgeen uitgesloten is. De onderstelling is dus onjuist, zodat s_1 niet in het vlak door a_2 en b_2 ligt, m.a.w. door hun snijpunt gaat. Op dezelfde manier (s_2 en s_3 ontstaan door in de definitie van s_1 de indices 1, 2, 3 cyclisch te permuteren) bewijst men:

s_1 gaat door het snijpunt P_2 van a_2 met b_2 en door het snijpunt P_3 van a_3 met b_3
s_2 " " " " P_3 " a_3 " b_3 " " " " P_1 " a_1 " b_1
s_3 " " " " P_1 " a_1 " b_1 " " " " P_2 " a_2 " b_2

De drie punten P_1, P_2, P_3 zijn twee aan twee verschillend: $P_2 \neq P_3$, omdat a_2 en a_3 elkaar kruisen. Door P_1, P_2, P_3 gaat zeker een vlak δ, dat ε volgens een lijn p snijdt. p bevat de drie snijpunten S_i van s_i met α. Daar s_1 de snijlijn was van de vlakken α_1 en β_1, zal S_1 het snijpunt zijn van de lijnen A_2B_3 en A_3B_2. Dat de drie punten S_1, S_2, S_3

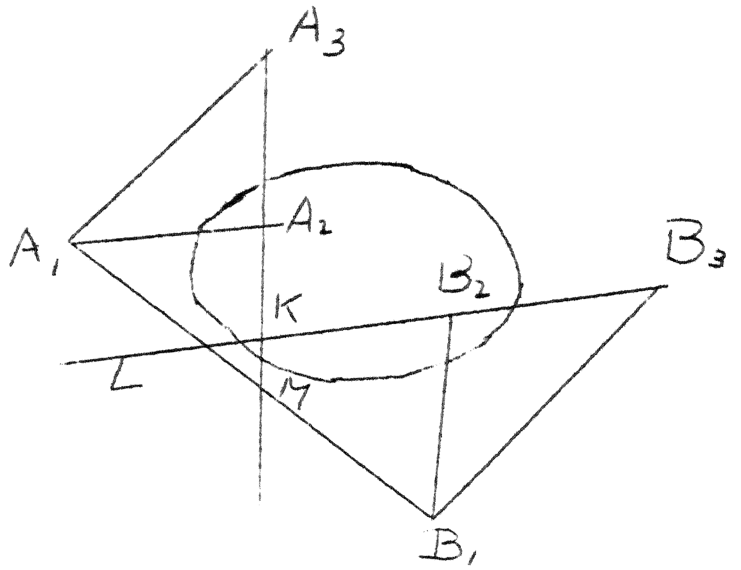
op één lijn p liggen, bewijst de stelling van Pascal aangegeven door $\binom{A_1A_2A_3}{B_1B_2B_3}$.

In het platte vlak ontstond een involutie van puntenparen op een kegelsnede γ, door vanuit een vast punt van drie kegelsneden een involutie van puntenparen van een rechte te projecteren op γ. De paren punten van een involutie op γ liggen dan steeds op één lijn met een vast punt, het <u>centrum</u> van de involutie (zie pag. 79).

In de ruimte geldt een analoge stelling: Is in een vlak Σ een kegelsnede ω gegeven, en projecteren we de hoekpunten van een variabele pooldriehoek $A_1A_2A_3$ van ω vanuit een vast punt S op een kwadriek Γ door S, dan gaat het vlak, dat door de drie beeldpunten wordt bepaald, door een vast punt, het <u>centrum</u> van het pooldriehoekenstelsel.

<u>Bewijs</u>: De projectie vanuit S op Γ van een punt P van ε noemen we $\bar{P}$. Op de lijn $a_1 = A_2A_3$ wordt door ω een poolinvolutie vastgelegd; door deze involutie vanuit S op Γ te projecteren, ontstaat een involutie van puntenparen op de kegelsnede γ_1, die de doorsnijding is van Γ met het vlak SA_2A_3. Is Q_1 het centrum van deze involutie, dan wordt Q_1 (gelegen in het vlak $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$) reeds door A_1 alleen bepaald.

Het raakvlak in S aan Γ snijdt ε volgens een lijn s, zij T de pool van s t.o.v. ω en S_1 het snijpunt van s en a_1. Laat P_1 het snijpunt van A_1T en a_1 zijn. De poollijn van S_1 t.o.v. ω is de lijn A_1P_1T, zodat P_1, S_1 puntenparen zijn in de involutie op a_1. Dit betekent, dat $\bar{P}_1\bar{S}_1$ door Q_1 gaat; omdat SS_1 raaklijn aan Γ is, is $\bar{S}_1 = S$, zodat $\bar{P}_1\bar{S}_1$ met SP_1 samenvalt. De lijn $\bar{A}_1Q_1$ ligt in vlak $S\bar{A}_1Q_1P_1$ en snijdt dus ST, zeg in X. Daar S niet in vlak $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ ligt, is dit punt X het snijpunt van ST met $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. Het snijpunt van ST met vlak $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ is dus gevonden door $\bar{A}_1$ te verbinden met het centrum van de kegelsnede-involutie in het vlak $S\bar{A}_2\bar{A}_3$. Als we de pooldriehoek $A_1A_2A_3$ van ω dus zo laten veranderen, dat het hoekpunt A_1 vast blijft en A_2, A_3 de poolinvolutie op a_1 doorlopen, dan blijft het punt X vast. Twee pooldriehoeken $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ van ω kunnen echter altijd in elkaar worden overgevoerd door achtereenvolgende veranderingen, waarbij een hoekpunt vast blijft. Het punt is dus <u>voor alle pooldriehoeken dezelfde</u>. Dat inderdaad twee pooldriehoeken $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ op bovenstaande wijze in elkaar kunnen worden overgevoerd, blijkt uit de volgende figuur.



$$A_1A_2A_3 \xrightarrow{A_1 \text{ vast}} A_1KM \xrightarrow{K \text{ vast}} B_1KL \xrightarrow{B_1 \text{ vast}} B_1B_2B_3$$

<u>Doorsnijding van twee kwadrieken.</u>

De punten, die twee kwadrieken Γ en Δ gemeen hebben, vormen de <u>snijkromme</u> van Γ en Δ. Een plat vlak α snijdt Γ en Δ volgens twee kegelsneden γ^α en δ^α, die in het algemeen vier punten gemeen hebben. De snijkromme heeft dus vier punten in elk vlak; het is een <u>ruimtekromme van de vierde graad</u>. Onderzoeken we eerst, welke verschillende gevallen zich kunnen voordoen.

<u>Geval A)</u> Γ en Δ hebben twee kruisende beschrijvenden a_1 en a_2 gemeen.

Is S een verder gemeenschappelijk punt van Γ en Δ, dan heeft de lijn door S, die a_1 en a_2 snijdt, zowel met Γ als met Δ drie punten gemeen, dus ligt geheel op Γ en op Δ. In dit geval valt de snijkromme uiteen in <u>vier lijnen</u>, die een scheve vierhoek vormen; twee beschrijvenden van elk stelsel. Γ en Δ raken elkaar in de hoekpunten van de scheve vierhoek. De vier lijnen, waarin de snijkromme kan ontaarden, kunnen ook gedeeltelijk samenvallen; dit kan uiteraard slechts het geval zijn met twee beschrijvenden, die tot hetzelfde stelsel behoren. De kwadrieken <u>raccorderen</u> elkaar dan volgens de betreffende beschrijvende. Geval A valt dus uiteen in de volgende typen:

<u>A 1.</u> vier lijnen a_1, a_2, b_1, b_2,

<u>A 2.</u> dubbellijn en twee enkellijnen a_1, a_1, b_1, b_2,

<u>A 3.</u> twee dubbellijnen a_1, a_1, b_1, b_1.

<u>Geval B)</u> Γ en Δ hebbeb twee (snijdende) beschrijvenden a en b gemeen en geen verdere lijnen. Zijn P, Q en R nog drie verdere gemeenschappelijke punten van Γ en Δ, dan heeft het vlak PQR met Γ en met Δ dezelfde vijf punten gemeen, nl. P, Q, R en de twee snijpunten met a en b. Door deze 5 punten wordt één kegelsnede bepaald, die blijkbaar zowel op Γ als op Δ ligt. De snijkromme ontaardt in een kegel-

snede met twee snijdende beschrijvenden. Γ en Δ raken in drie punten.

Geval C) Γ en Δ hebben een kegelsnede gemeen. Om dezelfde reden als boven is de restdoorsnijding eveneens een kegelsnede.

C 1. De snijkromme ontaardt in twee verschillende kegelsneden, die twee punten gemeen hebben. Γ en Δ raken elkaar in die twee punten.

C 2. Twee samenvallende kegelsneden. Γ en Δ raccorderen elkaar hierlangs.

Geval D) Γ en Δ hebben één rechte a gemeen en geen verdere rechten of kegelsneden. De restdoorsnijding is een kubische ruimtekromme. Elk vlak door a is raakvlak aan Γ en aan Δ ; de raakpunten zijn in het algemeen verschillende punten van a. Draait het vlak om a, dan doorlopen de raakpunten twee collocale projectieve puntreeksen op a met twee dubbelpunten. In deze punten raken Γ en Δ aan elkaar; het zijn tevens de punten, die a met de restdoorsnijding gemeen heeft.

Geval E) Γ en Δ hebben geen rechte of kegelsnede gemeen. De doorsnijding is een niet-ontaarde bikwadratische ruimtekromme. Deze heeft hoogstens één dubbelpunt: in dat geval raken Γ en Δ elkaar in dat punt.

Bundels kwadrieken.

Definitie. Zijn Γ en Δ twee kwadrieken, dan vormen alle kwadrieken, die met Γ dezelfde snijkromme hebben als Δ en Γ een bundel. De snijkromme heet de basiskromme.

Stelling. Een plat vlak α snijdt de kwadrieken van een bundel in een bundel kegelsneden.

Bewijs: De doorsnijding is een verzameling kegelsneden, die alle γ^{α} in dezelfde punten (en met dezelfde multipliciteit) snijden als δ^{α}.

Hieruit volgt: elke rechte lijn snijdt de kwadrieken van een bundel volgens puntenparen van een involutie. Evenals in het platte vlak geldt: Door elke punt buiten de basiskromme gaat juist één exemplaar van de bundel.

Opgaven. 1. Bewijs dit volledig voor het geval A 1.

2. Eveneens voor het geval A 2.

3. Eveneens voor het geval C 1(vgl. hiervoor pag. 121).

In een vlak α wordt door de kwadriekenbundel een kegelsnedenbundel uitgesneden, met drie ontaardingen. De ontaardingen zijn de doorsneden van α met kwadrieken, die aan α raken. Dus: aan een willekeurig vlak raken i.h.a. drie kwadrieken van de bundel.

Opgave. Aan een rechte lijn raken i.h,a. twee exemplaren van de bundel. Bewijs dit.

Het bovenstaande kan geheel worden gedualiseerd: het begrip kwadriek is daarbij met zichzelf duaal.

Opgaven. 1. Duaal tegenover de snijkromme van twee kwadrieken, staat de omhullings-torsus van twee kwadrieken (een torsus is een verzameling van ∞^1 vlakken). Onderzoek de verschillende gevallen, die zich bij de omhullings-torsus voordoen.

2. Definieer een schaar kwadrieken (duaal tegenover bundel). Hoeveel schaarexemplaren gaan er door een gegeven punt; hoeveel raken er aan een gegeven vlak en hoeveel aan een gegeven lijn?

De dubbelpunten van de involutie, die op een lijn l door een kwadriekenbundel wordt uitgesneden, zijn geconjugeerd t.o.v. alle exemplaren van de bundel. Anders gezegd: als twee punten geconjugeerd zijn t.o.v. twee exemplaren Γ en Δ van een bundel kwadrieken, dan zijn zij geconjugeerd t.o.v. alle exemplaren. De poolvlakken van een punt P t.o.v. Γ en Δ hebben een lijn p gemeen, die de punten bevat, die geconjugeerd zijn met P zowel t.o.v. Γ als t.o.v. Δ. Dit levert de stelling:
De poolvlakken van een punt P t.o.v. alle exemplaren van een bundel kwadrieken, vormen een vlakkenwaaier. De drager p van deze waaier noemen we de poollijn van P t.o.v. de bundel.

Opgave. Formuleer en bewijs de duale stelling.

Stelling. De poollijnen van alle punten van een lijn t.o.v. een bundel kwadrieken vormen een regelschaar. De poollijnen van l t.o.v. alle exemplaren van de bundel vormen eveneens een regelschaar; dit zijn de twee regelscharen van eenzelfde kwadriek.

Bewijs. De bundel is door twee exemplaren Γ_1 en Γ_2 bepaald. Is π_i het poolvlak van het punt P van l t.o.v. Γ_i, dan zal, als P de lijn l doorloopt, π_i om de poollijn l_i van l t.o.v. Γ_i draaien. Daar tevens $\pi_i \barwedge P$, vormen de vlakken π_1 en π_2 twee projectieve waaiers. De snijlijn p van π_1 en π_2 doorloopt een regelschaar; deze snijlijn is juist de poollijn van p t.o.v. de bundel.
De poollijnen van l t.o.v. Γ_1 en Γ_2 zijn de lijnen l_1 en l_2, de dragers van de projectieve vlakkenwaaiers, die bovenstaande regelschaar voortbrengen. l_1 en l_2 behoren dus tot de toegevoegde regelschaar.

Onderzoeken wij of er punten zijn, waarvan de poolvlakken t.o.v. alle exemplaren van de bundel samenvallen. Is φ_1 de poolcorrelatie t.o.v. Γ_1 en φ_2 die t.o.v. Γ_2, dan is $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ een projectiviteit. Is X een punt met de eigenschap dat $\varphi_1 X = \varphi_2 X$, dan is blijkbaar $\varphi_2^{-1}\varphi_1 X = X$. De gevraagde punten zijn dus de dekpunten van de projectieve transformatie $\varphi_2^{-1}\varphi_1$. Een projectieve transformatie op de rechte lijn heeft i.h.a. 2, in het platte vlak 3 en in de ruimte 4 dekpunten. Er zijn dus i.h.a. vier punten, waarvan de poolvlakken voor alle bundelexemplaren dezelfde zijn.

De lijn, die twee dezer punten verbindt, snijdt de kwadriekenbundel volgens een involutie, die deze punten tot dubbelpunten heeft. Elk tweetal der bedoelde 4 dekpunten is dus geconjugeerd: we hebben met een poolviervlak te doen. Zij Γ^X de kwadriek uit de bundel, die door het hoekpunt X van ons poolviervlak gaat. Elk vlak α door X snijdt de kwadriekenbundel volgens een kegelsnedenbundel. De poollijn van X t.o.v. alle exemplaren van de bundel is de snijlijn van α met het tegenover X liggende zijvlak van het poolviervlak. Daar X dezelfde poollijn heeft t.o.v. alle exemplaren van de kegelsnedenbundel is X het dubbelpunt van een ontaarding (zie pag. 69). Elk vlak α door X snijdt de kwadriek Γ^x volgens een lijnenpaar. Γ^x is een kegel met X tot top. Een bundel kwadrieken bevat i.h.a. dus vier kegels; de basiskromme kan ook gevonden worden als doorsnijding van twee kegels uit de bundel.

Kubische ruimtekrommen.

Een kubische ruimtekromme k is gedefinieerd als de restdoorsnijding van twee kwadrieken Γ_1 en Γ_2, die een beschrijvende a gemeen hebben. Zij b een beschrijvende van Γ_1 die a kruist, evenzo c één van Γ_2 die a kruist. Γ_1 wordt voortgebracht door twee projectieve vlakkenwaaiers door a en b, Γ_2 door projectieve vlakkenwaaiers door a en c. De gemeenschappelijke, niet op a gelegen punten vormen de kromme k. Dus

Een kubische ruimtekromme is de meetk. plaats der snijpunten van corresponderende vlakken uit drie projectieve waaiers.

We beschouwen nu twee projectieve vlakkenschoven met toppen S_1 en S_2. De snijlijnen van corresponderende vlakken uit de schoven vormen een verzameling van ∞^2 lijnen, een zg. lijnencongruentie. (Een verzameling van ∞^3 lijnen heet een lijnencomplex). S_1 en S_2 zijn de fundamentaalpunten van de congruentie.

Door een willekeurig punt A gaat i.h.a. één lijn van de congruentie. Immers de vlakken door AS_1 vormen een waaier, die overeenkomt met een vlakkenwaaier in de schoof S_2. Er is i.h.a. juist een vlak α_2 van laatstgenoemde waaier, dat A bevat; het corresponderende vlak α_1 is ondubbelzinnig bepaald, dus ook hun snijlijn door A. Slechts als de dragers van bovenstaande vlakkenwaaiers beide door A gaan, gaan door A oneindig vele lijnen van de congruentie. Dit zijn dan de snijlijnen van twee projectieve vlakkenwaaiers met snijdende dragers, dus de beschrijvendenvan een kegel met A als top.

Definitie. Een punt, waardoor méér dan één lijn van de congruentie gaat, heet een singulier punt van de congruentie. Volgens het bovenstaande is een singulier punt blijkbaar snijpunt van twee elkaar snijdende corresponderende lijnen van de twee schoven. De meetk. plaats der singuliere punten noemen we de singuliere kromme k van de congruentie.

Stelling. Elke lijn van de congruentie bevat twee (al of niet verschillende) singuliere punten.

Bewijs. Is l een lijn van de congruentie, dan zijn de vlakken $\alpha_1 = lS_1$ en $\alpha_2 = lS_2$ corresponderend. De stralenwaaier in α_1 met S_1 als top is projectief toegevoegd aan de stralenwaaier in α_2 met S_2 als top. Deze twee waaiers snijden op l projectieve puntreeksen uit. De zo ontstaande collocale projectieve puntreeksen hebben twee dekpunten, waarmee de stelling bewezen is.

Elke lijn l van de congruentie is blijkbaar een bisecant van k; vallen de twee snijpunten van l met k samen, dan heet l een raaklijn, anders een koorde.

Het omgekeerde geldt ook: Elke bisecant van k is een lijn van de congruentie. Verbindt men l nl. met de singuliere punten A en B, dan is S_1A aan S_2A en S_1B aan S_2B toegevoegd, zodat blijkbaar het vlak S_1AB met het vlak S_2AB correspondeert. Een lijn behoort dus dan en slechts dan tot de congruentie, als het een bisecant is van k.

De projectieve schoven snijden uit een willekeurig vlak, dat niet door S_1 of S_2 gaat twee collocale projectieve puntvelden uit. Deze hebben i.h.a. drie dekpunten, m.a.w. k snijdt elk vlak in 3 punten. De verbindingslijnen van deze 3 punten zijn koorden, zodat elk vlak 3 lijnen van de congruentie bevat. We zeggen dat de congruentie de veldgraad 3 en de schoofgraad 1 heeft; we schrijven dit als de congruentie (1,3)

S_1 en S_2 liggen op k. Immers met de lijn S_1S_2 van de schoof S_1 komt een bepaalde lijn uit de schoof S_2 overeen, zodat S_2 singulier punt is. Uit een limietovergang blijkt de lijn uit de schoof S_2 raaklijn aan k te zijn.

Door elk punt van k gaan oneindig veel lijnen van de congruentie: deze vormen een kegel, de projecterende kegel van k. Twee projecterende kegels van k, die twee verschillende punten A en B van k tot top hebben, zijn beide geheel uit congruentiestralen opgebouwd. De beschrijvende AB hebben zij gemeen, dus hun restdoorsnijding is een kubische ruimtekromme. Is C een verder gemeenschappelijk punt van de twee kegels, dan gaan door C de twee verschillende congruentiestralen CA en CB. Dit kan alleen als C een singulier punt van de congruentie is. Dus;

De singuliere kromme van een congruentie (1,3) is een kubische ruimtekromme.

Stelling. Zijn l en m twee bisecanten van k, dan bestaat er een kwadriek door k, waarvan l en m twee beschrijvenden (van eenzelfde regelschaar) zijn.

Bewijs. Stel α_1 = vlak S_1l, α_2 = vlak S_2l,

β_1 = vlak S_1m, β_2 = vlak S_2m.

De snijlijn van α_1 en β_1 stellen we door a_1, die van α_2 en β_2 door a_2 voor. De lijn a_i gaat door S_i, omdat α_i en β_i beide door S_i gaan. Daar verder in de twee schoven S_1 en S_2 de vlakken α_1 en α_2, evenals β_1 en β_2 aan elkaar zijn toegevoegd, is a_1 aan a_2 toegevoegd. De vlakkenwaaier om a_1 is dus toegevoegd aan de vlakkenwaaier om a_2; deze projectieve vlakkenwaaiers brengen een regelschaar voort van een kwadriek Γ. Deze regelschaar bevat blijkbaar l eh m. Is P een willekeurig punt van k, dan is PS_1 toegevoegd aan PS_2 dus het vlak Pa_1 aan het vlak Pa_2, zodat door P juist één tot de congruentie behorende beschrijvende van Γ gaat. Het ene stel beschrijvenden van Γ bestaat dus uit bisecanten van k. De andere regelschaar van Γ bestaat zeker niet uit bisecanten, immers, dan zou elk punt van Γ, als snijpunt van twee congruentiestralen, singulier moeten zijn. k snijdt elk raakvlak aan Γ in drie punten. Een der beschrijvenden in dit raakvlak is een congruentiestraal en bevat dus twee van de drie snijpunten, zodat het derde op de andere beschrijvende ligt. Resumerend:

Een kwadriek door k en de twee bisecanten l en m heeft twee stelsels beschrijvenden. Het ene stelsel bestaat uit bisecanten van k (hiertoe behoren l en m); de beschrijvenden van het andere stelsel hebben één punt met k gemeen.(unisecanten).

Alle kwadrieken door l en k vormen een bundel; l en k vormen samen de basiskromme.

Van een kubische ruimtekromme hebben we dus de volgende definities gehad.

1. restdoorsnijding van twee kwadrieken met gemeenschappelijke beschrijvende.
2. product van drie projectieve vlakkenwaaiers
3. singuliere kromme van een lijnencongruentie (1,3), voortgebracht door twee projectieve vlakkenschoven.

We hebben reeds laten zien dat uit def. 3 def. 1 volgt en dat def. 2 uit def. 1 kan worden afgeleid. Blijft over te bewijzen, dat elke kubische ruimtekromme, die verkregen wordt als product van drie projectieve vlakkenwaaiers, tevens de singuliere kromme is van een geschikt geconstrueerde lijnencongruentie, behorende bij twee projectieve vlakkenschoven. We zullen tevens bewijzen, dat de twee fundamentaalpunten willekeurig op k gekozen kunnen worden.

Bewijs. Denk k gegeven door de drie projectieve vlakkenwaaiers met dragers l,l',l". De vlakkenwaaiers door l en l' brengen een kwadriek Γ' voort, die door l en l" een kwadriek Γ''. Γ' en Γ'' hebben l gemeen en k tot restdoorsnijding (d.w.z. uit def. 2 volgt def. 1). Laat S_1 en S_2 twee willekeurige vaste punten van k zijn. We bewijzen allereerst, dat k restdoorsnijding is van twee kegels, die S_1 en S_2 tot top en S_1S_2 tot gemeenschappelijke beschrijvende hebben. Door het punt S_i gaat een beschrijvende s_i'

van Γ', die tot hetzelfde stelsel behoort als l en l'; ook gaat door S_i een beschrijvende s_i'' van Γ'', die tot hezelfde stelsel behoort als l en l".

Doorloopt P het oppervlak Γ', dan geldt:

$$\text{vlak }(Pl) \;\overline{\wedge}\; \text{vlak }(Pl') \;\overline{\wedge}\; \text{vlak }(Ps_i'),$$

doorloopt P het oppervlak Γ'', dan geldt:

$$\text{vlak }(Pl) \;\overline{\wedge}\; \text{vlak }(Pl'') \;\overline{\wedge}\; \text{vlak }(Ps_i'').$$

Als P dus de doorsnijding k van Γ' en Γ'' doorloopt, dan geldt: vlak (Ps_i') $\overline{\wedge}$ vlak (Ps_i''). Deze twee vlakkenwaaiers met snijdende dragers (beide door S_i) brengen een kegel voort, die k geheel bevat. Dit is de projecterende kegel met S_i als top; de twee kegels (i=1,2) hebben de beschrijvende S_1S_2 gemeen en k tot restdoorsnijding.

Een vlak α, dat niet door S_1 en S_2 gaat, snijdt S_1S_2 in een punt L en de projecterende kegels in de kegelsneden γ_1, γ_2. Is P een variabel punt van k, dan snijden de lijnen S_1P, S_2P het vlak α resp. in de punten Q_1, Q_2 van γ_1, γ_2, die op een lijn liggen met L. Doorloopt P de kromme k, dan lopen Q_1 en Q_2 resp. over γ_1 en γ_2 en wel op projectieve wijze (zie pag. 77). Het projectieve verband tussen de kegelsneden γ_1 en γ_2 is uit te breiden tot een projectiviteit over het gehele vlak (stelling onderaan pag. 77). Projectie uit S_1 en S_2 levert twee projectieve schoven die een congruentie (1,3) voortbrengen. De punten van k zijn daarbij snijpunten van corresponderende snijdende stralen, dus singuliere punten.

Opmerking. γ_1 en γ_2 hebben vier punten gemeen, waarvan één in T valt. De drie andere snijpunten zijn de punten, die α met k gemeen heeft.

Stelling. Een kubische ruimtekromme wordt door 6 punten i.h.a. eenduidig bepaald.

Bewijs. Twee der gegeven punten maken we tot fundamentaalpunten S_1, S_2. Zijn A_1, A_2, A_3, A_4 de vier overige punten, dan zijn van de projecterende kegels uit S_1 en S_2 elk 5 beschrijvenden gegeven, nl. S_1S_2 en S_1A_i resp. S_2S_1 en S_2A_i (i=1,2,3,4). De kegels, en daarmee hun restdoorsnijding zijn hiermee ondubbelzinnig vastgelegd.

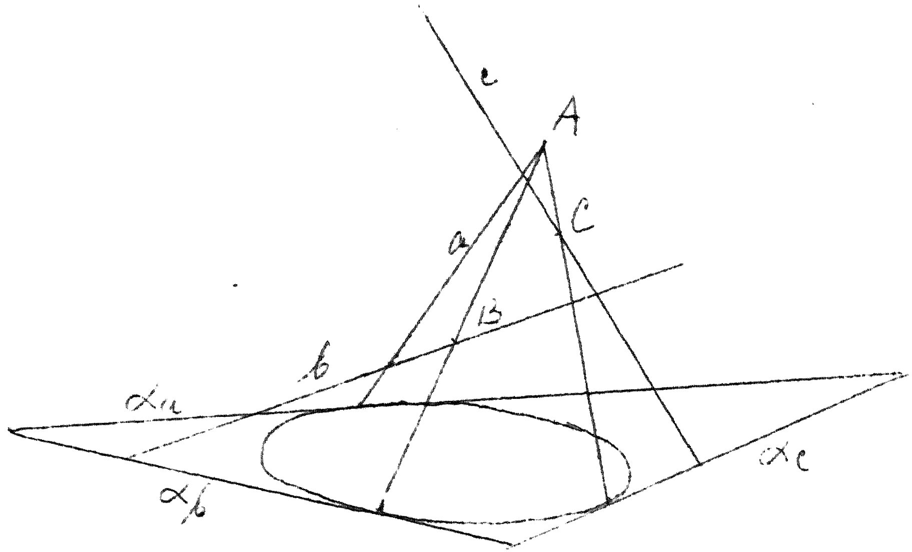
Is A een willekeurig punt van de kubische ruimtekromme k, dan kunnen we de raaklijn is A als volgt vinden: met een vast punt S van k als top brengen we de projecterende kegel van k aan. SA is een beschrijvende van deze kegel; het raakvlak aan de kegel langs deze beschrijvende bevat de gevraagde raaklijn a in A. Door S over k te laten lopen ontstaat een vlakkenwaaier van raakvlakken, die de gezochte raaklijn tot drager heeft. Elk vlak door a noemen we een raakvlak van k.

Een raakvlak in A heeft met k twee samenvallende snijpunten A en nog een derde snijpunt S. Door A en S elkaar te laten naderen blijkt, dat in A één raakvlak bestaat, dat k in drie samenvallende punten snijdt, het osculatievlak in A. Dit verkrijgen we door de projecterende kegel aan te brengen die A als top heeft en door de raaklijn in A aan k (die een beschrijvende van de kegel is) het raakvlak aan deze kegel aan te brengen.

Stelling. Zijn A,B,C drie punten van k, dan gaan de osculatievlakken in deze punten door één punt van vlak ABC.

Bewijs. We brengen de projecterende kegels Γ^A, Γ^B, Γ^C van k aan, die resp. A,B,C tot top hebben. Zijn a,b,c de raaklijnen in A,B,C aan k, dan is a een beschrijvende van Γ^A en een raaklijn aan Γ^B en Γ^C, analoog voor b en c. De osculatievlakken in A,B,C noemen we resp. α_a, α_b, α_c; χ_a is het raakvlak aan Γ^A door a, enz. Het vlak door A en b noemen we α_b, dat door A en c is α_c. Zo gaat er een vlak β_a door B en a, β_c door B en c, γ_a door C en a, γ_b door C en b. Het vlak α_b is het raakvlak aan Γ^A langs AB, analoog voor de andere vlakken. De lijn AB is snijlijn van de vlakken α_b en ${}_a$. Zij verder ε het vlak door A,B en C.

De drie vlakken α_a, α_b, α_c raken aan Γ^A volgens de beschrijvenden a,AB,AC. Volgens de stelling van Pascal voor kegels liggen dan de drie snijlijnen van elk dezer raakvlakken met het vlak door de twee niet daarin liggende beschrijvenden in één vlak. De eerste dezer lijnen is de snijlijn van α_a met het vlak door AB en AC, d.w.z. de lijn $\alpha_a x\ \varepsilon$. De tweede lijn is de snijlijn van α_b met het vlak door a en AC. Nu is echter



a de snijlijn van β_a en γ_a en AC die van α_c en γ_a. Het vlak door a en AC is dus het vlak γ_a, zodat de tweede lijn is $\alpha_b x\, \gamma_a$. Op dezelfde wijze blijkt de derde lijn te zijn $\alpha_c x\ \beta_a$. Op analoge wijze kunnen we de stelling van Pascal toepassen op de andere kegels Γ^B en Γ^C. We krijgen dan steeds drie lijnen, die in een zelfde vlak liggen, nl.

$\alpha_a x\,\varepsilon$, $\alpha_b x\,\gamma_a$, $\alpha_c x\,\beta_a$ in vlak ε_a

$\beta_b x\,\varepsilon$, $\beta_c x\,\alpha_b$, $\beta_a x\,\alpha_b$ in vlak ε_b

$\gamma_c x\,\varepsilon$, $\gamma_a x\,\beta_c$, $\gamma_b x\,\beta_c$ in vlak ε_c.

Nu hebben de drie vlakken α_b, β_c, γ_a één punt P en de drie vlakken

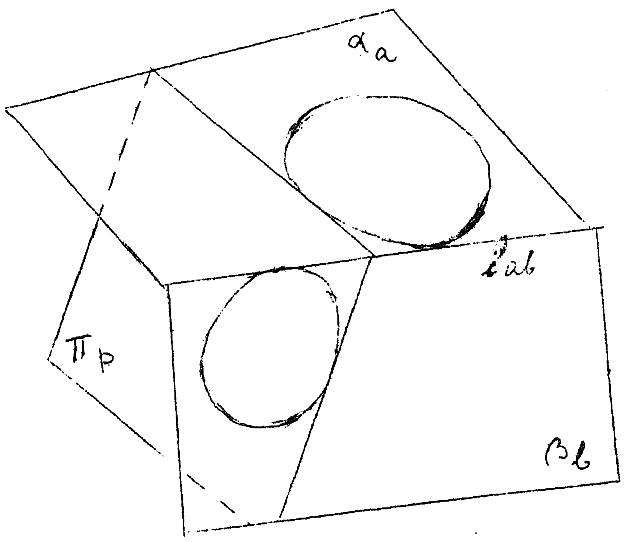
α_c, β_a, γ_b één punt Q gemeen. P en Q leggen beide in elk der drie vlakken ε_a, ε_b, ε_c, zodat deze drie vlakken tot een waaier behoren met PQ als drager. Is S het snijpunt van PQ met ε, dan ligt ook S op ε_a, ε_b en ε_c, d.w.z. S ligt op de drie osculatievlakken α_a, α_b, α_c.

Zijn A, B en C nu drie vaste punten van k en laten we een punt P over k lopen, dan passen we bovenstaande toe op de vlakken ABP en ACP. Als P varieert, vormen deze vlakken twee waaiers, die de bisecanten AB en AC tot dragers hebben. Deze waaiers brengen dus een kegel voort, nl. de projecterende kegel Γ^A.

De osculatievlakken α_a, β_b, γ_c liggen vast, dus ook hun snijlijnen, die we l_{ab}, l_{ac} en l_{bc} noemen. De vlakkenwaaier door AB snijdt op l_{ab} een daarmee perspectieve puntreeks uit, hetzelfde geldt voor de waaier door AC en de lijn l_{ac}. Het osculatievlak in P snijdt l_{ab} en l_{ac} blijkbaar in projectieve puntreeksen. In het vlak α_a, dat l_{ab} en l_{ac} beide bevat, vormen de verbindingslijnen van corresponderende punten dezer puntreeksen een lijnenkegelsnede. Deze kegelsnede, die raakt aan l_{ab} en l_{ac} heeft de doorsnijdingen van a_α met het osculatievlak π_p in het variabele punt P tot raaklijnen. Dit betekent: De osculatievlakken van een kubische ruimtekromme k snijden een vast osculatievlak volgens een lijnenkegelsnede.

Snijden we de osculatievlakken van k met twee osculatievlakken α_a en β_b, dan ontstaan in beide vlakken lijnenkegelsneden, die de raaklijn l_{ab} gemeen hebben. Dit levert de

Stelling: De osculatievlakkentorsus van k bestaat uit alle vlakken, die α_a en β_b snijden volgens raaklijnen aan vaste kegelsneden, die beide aan l_{ab} raken.



Een belangrijke conclusie uit het bovenstaande is: de verzameling van osculatievlakken aan een kubische ruimtekromme is duaal met de verzameling punten van een kubische ruimtekromme. Immers: om de punten van k te verkrijgen, nemen we twee kegels S_1 en S_2 waarvan de verbindingslijn der toppen voor beide een beschrijvende is. Wanneer twee beschrijvenden van de kegels elkaar snijden, dan is het snijpunt een punt van k. Voor de duale constructie gaan we uit van twee kegelsneden, gelegen in de vlakken α en β, die zodanig gelegen zijn, dat de snijlijn der vlakken een raaklijn is aan beide kegelsneden. Als twee raaklijnen aan de kegelsneden elkaar snijden, dan is het vlak erdoor een <u>osculatievlak</u> aan k.

Bij een kubische ruimtekromme staat dus duaal tegenover elkaar:

punt ----- osculatievlak
raaklijn --- raaklijn
bisecant --- snijlijn van 2 osculatievlakken.

De bisecanten-congruentie is van het type (1,3); de snijlijnen van telkens 2 osculatievlakken vormen blijkbaar een congruentie (3,1).

<u>Opmerking</u>. Een plat vlak α snijdt k in drie punten; de osculatievlakken aan k in deze punten gaan door één punt A van α. De afbeelding $A = \varphi\alpha$ van vlakken op punten is een correlatie. Het punt $\varphi\alpha$ ligt altijd in α. We hebben hier met een z.g. nulcorrelatie te doen (vgl. pag. 116).

<u>Stelling</u>. De meetkundige plaats der polen van een vlak α t.o.v. de kwadrieken van een bundel is een kubische ruimtekromme k.

<u>Bewijs</u>. De pool van α is het snijpunt van de poolvlakken van drie punten P,Q,R van α. Doorloopt de kwadriek de bundel, dan doorlopen deze poolvlakken projectieve waaiers, waarvan de dragers de poollijnen zijn van P,Q,R t.o.v. de bundel. Hieruit volgt het gestelde, doch tevens dat de poollijnen van de punten van het puntveld α de bisecantencongruentie van k vormen. Volgens pag. 127 is aan elke rechte van α door deze bundelpoolverwantschap een regelschaar toegevoegd. Met alle rechte lijnen van α komen dus kwadrieken overeen, die alle door k gaan.

<u>Netten kwadrieken</u>.

Twee kwadrieken hebben een (al of niet ontaarde) bikwadratische ruimtekromme gemeen. Deze ruimtekromme snijdt een derde kwadriek, die niet tot de door de eerste twee bepaalde bundel behoort, i.h.a. volgens 8 punten.

<u>Definitie</u>. Als drie kwadrieken $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ niet tot één bundel behoren, dan vormen alle kwadrieken, die de snijkromme van Γ_1 en Γ_2 in dezelfde punten snijden als Γ_3, een <u>kwadriekennet</u> (Een exacte definitie is analytisch eenvoudig te geven).

Een kwadriekennet heeft dus i.h.a. 8 <u>basispunten</u>.

Er kan zich echter ook een ander geval voordoen, nl. dat de doorsnijdingskromme van Γ_1 en Γ_2 ontaardt, waarbij Γ_3 door een deel van deze ontaarding gaat, zonder tot de door Γ_1 en Γ_2 bepaalde bundel te behoren. In dat geval heeft het net een <u>basiskromme</u>. Zo vormen b.v. alle kwadrieken door een gegeven kubische ruimtekromme een net. Met elk paar bisectanten is de kromme aan te vullen tot een kwadriek van het net.

Analytisch blijkt eenvoudig: Door 9 punten gaat i.h.a. één kwadriek. Door 8 punten gaat i.h.a. een bundel kwadrieken; door 7 punten gaar i.h.a. een net kwadrieken. Een 4^e-graads ruimtekromme wordt dus door 8 punten bepaald; liggen 7 hiervan op een kubische ruimtekromme, dan is deze een deel van de kromme. De rest bestaat dan uit de bisecant door het 8^e punt. Door 7 punten gaat een kwadriekennet; dit heeft echter i.h.a. nog een 8^e basispunt, dat uit de andere 7 volgt. We noemen de 8 basispunten van een net daarom 8 geassocieerde punten. Door 7 van de 8 punten is het laatste i.h.a. ondubbelzinnig vastgelegd; behoren de 7 punten echter tot een kubische ruimtekromme k, dan is het 8^e een onbepaald punt van k.

Het duale van een net heet een weefsel. Alle kwadrieken, die aan 7 vlakken raken, vormen een weefsel; zij raken alle nog aan een achtste vlak, dat met het vorige geassocieerd is.

Stelling. Is Γ een kwadriek, gaande door de hoekpunten A_1, A_2, A_3, A_4 van een poolviervlak van de kwadriek Δ, dan is elk punt van Γ hoekpunt van oneindig veel poolviervlakken van Δ, die alle in Γ beschreven zijn.

Bewijs. Vlak $A_2A_3A_4$ snijdt Γ en Δ resp. volgens de kegelsneden γ en δ; γ is beschreven om de pooldriehoek $A_2A_3A_4$ van δ, d.w.z. harmonisch beschreven om δ. Is B_1 nu een willekeurig punt van Γ, dan snijden we vlak $A_2A_3A_4$ met het poolvlak van B_1 t.o.v. Δ; één der snijpunten van deze snijlijn met γ noemen we B_2. Er bestaat dan een in γ beschreven pooldriehoek B_2PQ van δ. A_1B_2PQ is dan een poolviervlak van Δ, beschreven in Γ.

Vlak PQA_1 is het poolvlak van B_2 t.o.v. Δ. Daar B_1 en B_2 geconjugeerd zijn t.o.v. Δ gaat vlak PQA_1 door B_1. Dit vlak snijdt Γ volgens een kegelsnede γ' en Δ volgens δ', zodanig dat γ' weer harmonisch om δ' beschreven is. Er bestaat dan een pooldriehoek $B_1B_3B_4$ van δ', waarvan B_1 een hoekpunt is, beschreven in γ'. $B_1B_2B_3B_4$ is dan een in Γ beschreven poolviervlak van Δ. Houden we het hoekpunt B_1 vast, dan kunnen we in vlak $B_2B_3B_4$ nog oneindig veel pooldriehoeken vinden, waarvan de hoekpunten op Γ liggen, waarmee de stelling bewezen is.

Definitie. De kwadriek Γ heet harmonisch beschreven om Δ. De duale stelling luidt: Is Φ een kwadriek, rakende aan de zijvlakken van een poolviervlak van de kwadriek Δ, dan is elk raakvlak van Φ zijvlak van oneindig veel poolviervlakken van Δ, die om Φ beschreven zijn. In dat geval heet Φ harmonisch beschreven in Δ.

Uit het bovenstaande blijkt: Zijn $A_1A_2A_3A_4$ en $B_1B_2B_3B_4$ twee poolviervlakken van eenzelfde kwadriek Δ, dan gaat elke kwadriek, die door 7 der 8 hoekpunten gaat, eveneens door het 8^e hoekpunt.

Bewijs. Elke kwadriek Γ door $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3$ is harmonisch om Δ beschreven. Het poolvlak $B_2B_3B_4$ van B_1 t.o.v. Δ snijdt Γ en Δ volgens de kegelsneden γ en δ, zodanig dat γ harmonisch om δ beschreven is. De poollijn B_3B_4 van B_1 t.o.v. δ snijdt γ volgens twee punten, die geconjugeerd zijn t.o.v. δ. Daar B_3 het ene snijpunt is, moet B_4 het andere zijn, m.a.w. B_4 ligt op Γ.

Daar alle kwadrieken door 7 punten een net vormen, kunnen we deze stelling als volgt formuleren:

De Hoekpunten van twee poolviervlakken van eenzelfde kwadriek zijn 8 geassocieerde punten.

Stelling. Gaat een kubische ruimtekromme k door de hoekpunten A_1, A_2, A_3, A_4 van een poolviervlak van een kwadriek Δ, dan is elk punt van k hoekpunt van een poolviervlak van Δ.

Bewijs. Het poolvlak van een willekeurig punt B_1 van k t.o.v. Δ snijdt k nog in drie punten B_2, B_3, B_4. Alle kwadrieken door k vormen een net, waarvan alle kwadrieken harmonisch om Δ beschreven zijn. Deze kwadrieken snijden vlak $B_2B_3B_4$ volgens alle kegelsneden (een net) door B_2, B_3, B_4; Δ wordt gesneden volgens de kegelsnede δ. Alle kegelsneden van het net zijn harmonisch om δ beschreven. B_2 is een hoekpunt van pooldriehoeken t.o.v. δ, die elk in een kegelsnede van het net beschreven zijn. Valt de poollijn l van B_2 t.o.v. δ niet met B_3B_4 samen, dan zouden de parensnijpunten van l met de exemplaren van het net de poolinvolutie op deze lijn moeten vormen. Daar echter door elk paar punten van l een exemplaar van het net gaat, is dit onmogelijk. $B_2B_3B_4$ is dus een pooldriehoek van δ, dus $B_1B_2B_3B_4$ een poolviervlak van Δ.

Definitie. k heet harmonisch beschreven om Δ.

Opgaven. 1) Formuleer de duale stelling.

2) De poolvlakken van de punten van een kubische ruimtekromme k t.o.v. een kwadriek Δ vormen de osculatievlakken van een kubische ruimtekromme k'. Bewijs dit. k' heet de poolfiguur van k t.o.v. Δ.

3) Bewijs dat omgekeerd ook k de poolfiguur van k' is.

4) Bewijs: Is k harmonisch beschreven om Δ, dan is k' harmonisch beschreven in Δ en omgekeerd.

Stelling. Als van twee viervlakken de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door eenzelfde punt O gaan, dan liggen de snijlijnen van corresponderende zijvlakken in eenzelfde vlak α.

Bewijs. We duiden de twee gegeven viervlakken aan met $A_1A_2A_3A_4$ (zijvlakken $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$) en B_1, B_2, B_3, B_4 (zijvlakken $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$). Elke lijn A_iB_i gaat door O. Zij l_i de snijlijn van α_i met β_i. Daar A_1B_1 en A_2B_2 beide door O gaan, liggen ze in één vlak, zodat A_1A_2 en B_1B_2 elkaar snijden in een punt P_{12}. Dit punt ligt op A_1A_2 (snijlijn van α_3 en α_4) en op B_1B_2 (snijlijn van β_3 en β_4), dus in ieder der vlakken α_3, α_4, β_3, β_4, zodat P_{12} ook op l_3 en l_4 ligt. Op dezelfde wijze blijkt dat elk der lijnen l_i elk der andere snijdt. Daar ze niet alle door een punt gaan (waarom niet?) liggen ze in een vlak.

Definitie. Twee viervlakken, die bovenbedoelde ligging t.o.v. elkaar hebben, noemen we perspectief; dit begrip is met zichzelf duaal.

Twee perspectieve viervlakken hebben dus de volgende eigenschappen:

a) Verbindingslijnen van corresponderende hoekpunten gaan door één punt O.

b) Snijlijnen van corresponderende zijvlakken liggen in één vlak α.

c) Snijpunten van corresponderende ribben liggen in α.

d) Verbindingsvlakken van corresponderende ribben gaan door O.

Uit elk der 4 eigenschappen (die twee aan twee duaal zijn) volgen de drie overige.

Stelling. Als van twee viervlakken de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten tot eenzelfde regelschaar behoren, dan behoren de snijlijnen van overeenkomstige zijvlakken eveneens tot eenzelfde regelschaar.

Bewijs. Laat $A_1A_2A_3A_4$ en $B_1B_2B_3B_4$ weer de gegeven viervlakken zijn met zijvlakken $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ en $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$. l_i is weer de snijlijn van α_i en β_i, m_i is de lijn A_iB_i $(i = 1..4)$.

We beschouwen de driehoek $A_1A_2A_3$ en de driehoek, die ontstaat door α_4 te snijden met $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Stel dus C_1^4 is het snijpunt van $\alpha_4, \beta_2, \beta_3$,

C_2^4 " " " " $\alpha_4, \beta_3, \beta_1$,

C_3^4 " " " " $\alpha_4, \beta_1, \beta_2$.

(Op analoge wijze definieren we C_k^k algemeen.)

We zullen allereerst bewijzen dat uit het gegeven (m_1,m_2,m_3,m_4 behoren tot een regelschaar) volgt, dat de driehoeken $A_1A_2A_3$ en $C_1^4\ C_2^4\ C_3^4$ perspectief zijn. Laat $A_2C_2^4$ en $A_3C_3^4$ elkaar in P_4 snijden. De lijn B_4P_4 snijdt m_4 in B_4. De lijnen $B_2B_4C_2^4$ en $A_2P_4C_2^4$ snijden elkaar in C_2^4, zodat B_4P_4 met $A_2B_2 = m_2$ in één vlak ligt en m_2 dus snijdt. Op dezelfde wijze blijkt dat B_4P_4 ook m_3 snijdt. Daar de lijn B_4P_4 de drie lijnen m_2,m_3,m_4 van de gegeven regelschaar snijdt, zal B_4P_4 ook m_1 moeten snijden. Het vlak door deze snijdende lijnen bevat dus B_4,P_4,A_1,B_1, zodat ook A_1P_4 en B_1B_4 elkaar snijden. De lijn A_1P_4 ligt echter in α_4, welk vlak met B_1B_4 slechts het punt C_1^4 gemeen heeft, zodat A_1P_4 door C_1^4 gaat. De perspectieve ligging der driehoeken $A_1A_2A_3$ en $C_1^4\ C_2^4\ C_3^4$ is hiermee aangetoond.

Het perspectiefcentrum van deze driehoeken hebben we P_4 genoemd; de perspectiefas stellen we door p_4 voor (op analoge wijze zijn P_i en p_i algemeen te definiëren). p_4 snijdt l_4 omdat beide lijnen in α_4 liggen. Het snijpunt van A_2A_3 met $C_2^4C_3^4$ is een punt van p_4. Daar A_2A_3 de snijlijn is van α_1 en α_4 en $C_2^4C_3^4$ die van β_1 en α_4, ligt dit punt in de vlakken $\alpha_1, \alpha_4, \beta_1$, dus op de snijlijn van α_1 en β_1, d.w.z. op l_1. Op deze wijze bewijst men dat p_4 elk der lijnen l_1,l_2,l_3,l_4 snijdt. Daar hetzelfde geldt voor p_1,p_2,p_3 blijkt dat $l_1..l_4$ tot eenzelfde regelschaar behoren.

Definitie. Twee viervlakken die bovenbedoelde ligging t.o.v. elkaar hebben, zullen we pseudo-perspectief noemen. Ook dit begrip is met zichzelf duaal.

Stelling. Twee viervlakken, die elkaars reciproke poolfiguren zijn t.o.v. een kwadriek Γ, zijn pseudo-perspectief.

Bewijs. In dezelfde notatie als boven is nu β_i het poolvlak van A_i en α_i dat van B_i. Het vlak α_4 snijdt Γ volgens een kegelsnede γ_4.

De pool van A_2A_3 t.o.v. γ_4 is het snijpunt van α_4 met de poollijn B_1B_4 van A_2A_3 t.o.v. Γ. Dit punt is blijkbaar C_1^4. De driehoeken $A_1A_2A_3$ en $C_1^4C_2^4C_3^4$ zijn dus reciprook polaire driehoeken t.o.v. γ_4, dus volgens pag. 65 perspectief. In dat geval zijn echter de twee viervlakken volgens de vorige bewijsvoering pseudo-perspectief.

Affiene ruimtemeetkunde

Definities. Onder de affiene ruimte verstaan we de projectieve ruimte, waaruit een vlak α_∞ wordt weggelaten. α_∞ heet het oneigenlijke vlak; punten van α_∞ heten oneigenlijke punten of richtingen, lijnen van α_∞ heten oneigenlijke lijnen of stellingen.

Lijnen met dezelfde richting en vlakken met dezelfde stelling heten evenwijdig. Een lijn l, heet evenwijdig met β, als de richting van l ligt op de stelling van β.

Opgaven. 1) Zijn de snijdende lijnen l en m evenwijdig aan de lijnen l' en m' van een vlak β, dan is het vlak door l en m evenwijdig met β.

2) Alle vlakken door een punt P en evenwijdig met een lijn l gaan door een lijn l' // l door P.

3) De snijlijnen van twee evenwijdige vlakken met een derde vlak zijn evenwijdig.

Ook in de ruimte kunnen we het vectorbegrip invoeren. Twee geordende puntenparen (A,A') en (B,B') noemen we aequivalent, als deze vier punten in één vlak β liggen, terwijl de puntenparen in β aequivalent zijn.

Opgave. Bewijs dat dit ruimtelijke aequivalentiebegrip reflexief, symmetrisch en transitief is.

De verzameling van alle puntenparen, die met een gegeven paar aequivalent zijn, noemen we weer een vector. We definiëren: $\underline{a} = k\underline{b}$ geldt dan en slechts dan als de dragers van $\underline{a}$ en $\underline{b}$ evenwijdig zijn en als deze relatie geldt in een plat vlak dat van elk der vectoren een representerend puntenpaar bevat. Op de nadere uitwerking van deze begrippen en op de definitie van de vectorsom $\underline{a} + \underline{b}$ gaan we niet verder in.

Definitie. De pool van α_∞ t.o.v. een kwadriek heet het middelpunt van die kwadriek.

Klassificatie der reële puntenkwadrieken

I) Algemene kwadrieken (geen dubbelpunten).

A) Γ raakt niet aan α_∞: middelpuntskwadriek.

1) De doorsnede met α_∞ bevat geen reële punten. De kwadriek is een ellipsoïde. Deze bevat geen reële rechten (waarom niet?).

2) De doorsnede met α_∞ is een kegelsnede met reële punten. De kwadriek is een hyperboloïde. Bevat deze geen reële rechte, dan spreken we van een tweebladige of elliptische hyperboloïde (twee-

blad), bevat deze wel reële rechten, dan spreken we van een hyperbolische of eenbladige hyperboloïde (halsvlak).

B) Γ raakt aan α_∞: paraboloïde.

Het raakpunt is de asrichting.

1) De doorsnede met α_∞ bestaat uit twee toegevoegd imaginaire lijnen. De kwadriek is een elliptische paraboloïde (vaas), die geen reële rechten bevat.

2) De doorsnede met α_∞ bestaat uit twee reële lijnen. De kwadriek is een hyperbolische paraboloïde (zadelvlak), die 2 stelsels reële beschrijvenden heeft.

II) Kwadrieken met één dubbelpunt (kegels).

A) Het dubbelpunt van Γ ligt niet in α_∞. We hebben dan met een echte kegel te doen. Hiervan bestaat slechts één soort!

B) De top van de kegel ligt in α_∞: cylinder.

1) α_∞ snijdt de cylinder volgens twee toegevoegd imaginaire beschrijvenden. De kwadriek is een elliptische cylinder.

2) α_∞ snijdt de cylinder volgens twee verschillende reële beschrijvenden. De kwadriek is een hyperbolische cylinder.

3) α_∞ raakt de cylinder volgens een beschrijvende. De kwadriek is een parabolische cylinder.

III) Kwadrieken met een rechte lijn van dubbelpunten. Γ bestaat uit 2 vlakken, waarvan de snijlijn l uit dubbelpunten bestaat.

A) l ligt niet in α_∞. Twee snijdende vlakken.

B) l ligt in α_∞. Twee evenwijdige vlakken.

IV) Kwadriek met een plat vlak van dubbelpunten. Γ is een dubbeltellend vlak.

Definitie. Een reëel punt P ligt binnen de kwadriek Γ, als iedere reële rechte door P twee reële punten met Γ gemeen heeft. P ligt buiten Γ, als P niet op en niet binnen Γ ligt.

Opgaven. 1) P ligt dan en slechts dan binnen Γ, als P ligt binnen iedere kegelsnede, die ontstaat door te snijden met een vlak door P.

2) Ligt P binnen Γ, dan heeft het poolvlak van P geen reële punten met Γ gemeen. Bewijs deze stelling en het omgekeerde.

3) Elk niet op een hyperbolische kwadriek Γ gelegen punt ligt buiten Γ.

4) Een vlak dat evenwijdig is aan de asrichting snijdt een zadelvlak Γ volgens een parabool; elk ander vlak heeft met Γ een hyperbool gemeen.

5) De doorsnijding van een echte kegel met een plat vlak kan een ellips, een hyperbool en een parabool zijn. Hoe moet het snijvlak in deze gevallen worden aangebracht?

6) Een vlak, niet evenwijdig met de richting der beschrijvenden snijdt een elliptische, hyperbolische, parabolische cylinder resp. vol-

gens een ellips, hyperbool, parabool.

7) De beschrijvenden van een zadelvlak zijn evenwijdig aan één van twee vlakken (de richtvlakken).

Evenals in het platte vlak bij kegelsneden, kunnen we in de ruimte bij kwadrieken van toegevoegde middellijnen enz. spreken.

Opgaven 1) Definieer toegevoegde middellijnen bij een middelpuntskwadriek.

2) definieer evenzo toegevoegde middelvlakken.

3) definieer het toegevoegde middelvlak van een middellijn en de toegevoegde middellijn van een middelvlak.

Klassificatie der reële kubische ruimtekrommen

I) k heeft drie verschillende oneigenlijke punten.

A) Alle drie reëel. Kubische hyperbool (drie reële asymptoten en drie reële asymptotische osculatievlakken).

B) Twee toegevoegd imaginair, de derde reëel. Kubische ellips (een reële asymptoot, een reëel asymptotisch osculatievlak).

II) k raakt α_∞ in een punt en snijdt α_∞ nog in een ander punt. Kubische hyperbolische parabool (een reële asymptoot, twee reële asymptotische osculatievlakken en een extra asymptotische richting).

III) k raakt α_∞ in drie samenvallende punten. Kubische parabool (alleen een asymptotische richting). α_∞ is osculatievlak.

Metrische (Euclidische) meetkunde

De Euclidische ruimte wordt zo ingevoerd, dat in elk reëel vlak van de ruimte de vlakke Euclidische meetkunde ontstaat. Op elke reële oneigenlijke lijn moet dus een elliptische involutie gegeven worden, of de (toegevoegd complexe) dubbelpunten van deze involutie. We denken ons in het vlak α_∞ een kegelsnede ω gegeven, waarvan de poolinvolutie reëel is, doch die geen enkel reëel punt bevat (een dergelijke kegelsnede heet nuldelig). Deze kegelsnede noemen we de absolute kegelsnede of de bol - cirkel. Punten en raaklijnen van ω (die dus alle oneigenlijk en complex zijn) noemen we isotroop.

Definitie. Onder de Euclidische ruimte verstaan we de affiene ruitme, waarin de nuldelige kegelsnede ω is vastgelegd.

Twee lijnen, waarvan de richtingen poolverwant zijn t.o.v. ω heten orthogonaal. Twee vlakken, waarvan de stellingen poolverwant zijn t.o.v. ω heten eveneens orthogonaal. Is de stelling van vlak β de poollijn van de richting van de lijn b, dan heet b de normaal van β of $b \perp \beta$.

Opgaven. 1) Zijn l en m twee snijdende lijnen in een vlak α en is $a \perp l$ en $a \perp m$, dan is $a \perp \alpha$. Ligt verder n in α, dan is ook $a \perp n$.

2) Uit $a \perp \alpha$, $b \perp \beta$ en $\alpha \perp \beta$ volgt $a \perp b$. Welke omgekeerde(n) heeft deze stelling?

3) Is $a \perp \alpha$ en $\beta // a$, dan is $\alpha \perp \beta$.

Definitie. Een kegelsnede, die de absolute kegelsnede bevat, heet een bol.

Opgaven. 1) Bewijs dat elk vlak de bol volgens een cirkel snijdt.

2) Een raakvlak aan de bol snijdt de bol volgens de isotrope lijnen door het raakpunt.

3) Twee toegevoegde middellijnen en twee toegevoegde middelvlakken van de bol zijn orthogonaal. Een middellijn is de normaal van zijn toegevoegd middelvlak.

Met behulp van de bol kunnen puntenparen ingedeeld worden in klassen van onderling congruente paren. We gaan hier niet verder op in.

Metrische eigenschappen van kwadrieken.

Definitie. Een middelvlak dat loodrecht staat op de toegevoegde richting heet een symmetrievlak van de kwadriek. Een middellijn die loodrecht staat op de toegevoegde stelling heet een as van de kwadriek.

Opgaven. 1) Een symmetrievlak halveert alle koorden van de kwadriek, die er loodrecht op staan.

2) Een as bevat de middelpunten van de kegelsneden, die de doorsnijding zijn van de kwadriek met alle vlakken, die de as tot normaal hebben.

3) Alle lijnen, die een gegeven lijn l snijden en een lijn m loodrecht snijden vormen een regelschaar van een zadelvlak.

Een paraboloïde Γ, waaraan O de asrichting is, heeft één as. Deze wordt verkregen door van O eerst de poollijn t.o.v. ω te beschouwen (dit is de normaalvlakkenstelling) en van deze lijn de poollijn t.o.v. Γ te nemen.

Een middelpuntskwadriek snijdt α_∞ volgens een niet ontaarde kegelsnede γ. Is P een asrichting, dan is de poollijn van P t.o.v. γ de toegevoegde stelling. Daar deze loodrecht op de richting P moet staan, moet dit tevens de poollijn van P t.o.v. ω zijn. P is dus een punt, waarvan de poollijnen t.o.v. γ en ω samenvallen, d.w.z. het dubbelpunt van één der ontaardingen in de door γ en ω bepaalde bundel. Een middelpuntskwadriek heeft dus i.h.a. 3 assen, die twee aan twee orthogonaal zijn. De vlakken door twee der assen zijn de symmetrievlakken.

Metrische specialisatie van projectieve stellingen uit de ruimtemeetkunde

Bevat een kegel Γ drie onderling loodrechte beschrijvenden, dan is de oneigenlijke kegelsnede harmonisch beschreven om ω, zodat deze kegelsnede beschreven is om oneindig veel pooldriehoeken van ω. Dus: Bevat de kegel Γ drie onderling loodrechte beschrijvenden, dan bevat Γ oneindig veel van zulke orthogonale drietallen (Γ heet dan gelijkzijdig).

Opgaven. 1) Bevat de kegel Γ drie onderling loodrechte raakvlakken, dan bevat Γ oneindig veel van zulke orthogonale drietallen.

2) Bewijs de twee voorgaande stellingen ook in het geval, dat een hyperboloïde is.

Een metrische specialisering van de stelling van pag. 123 luidt: Trekt men door een vast punt S van een kwadriek Γ drie onderling loodrechte lijnen, die de kwadriek nogmaals in A,B,C snijden, dan gaat het vlak ABC door een vast punt X, het punt van Frégier van S (vgl. opgave 3, pag 108), gelegen op de normaal in S aan Γ.

Opgaven. 1) Bewijs bovenstaande stelling.

2) Leid uit de duale projectieve stelling af: de meetkundige plaats der toppen van de gelijkzijdige omhullingskegels van een paraboloïde Γ is een vlak, loodrecht op de as van Γ (orthoptisch vlak van Γ).

Is Γ een bol met middelpunt M en is α het poolvlak van een punt A, dan is $AM \perp \alpha$. Immers A is de pool van α en M is de pool van α_∞, zodat AM de poollijn is van de oneigenlijke rechte van α. Het oneigenlijke punt van AM is dus de pool van deze oneigenlijke rechte, zodat $AM \perp \alpha$.

Als een viervlak ABCD poolviervlak is t.o.v. een bol Γ (middelpunt M), dan is $AM \perp BCD$ enz. We hebben dan te doen met een viervlak, waarvan de hoogtelijnen elkaar snijden (orthocentrisch viervlak); het hoogtepunt is het middelpunt van de poolbol. De punten A,B,C,D,M vormen een zg. orthocentrisch vijfpunt: elk punt is het hoogtepunt van het viervlak, gevormd door de vier andere.

Zij Δ een kwadriek, gaande door de 5 punten A,B,C,D,M; Δ is dan harmonisch beschreven om Γ. Elk punt van Δ is dan hoekpunt van oneindig veel poolviervlakken van Γ, die in Δ beschreven zijn. Nemen we M als één dier hoekpunten, dan snijdt het poolvlak t.o.v. Γ van M, nl. α_∞, de kwadriek Δ volgens een kegelsnede δ, die beschreven is om oneindig veel pooldriehoeken van ω. Dit betekent dat δ harmonisch beschreven is om ω, dus Δ is gelijkzijdig. Elke kwadriek, gaande door de hoekpunten en het hoogtepunt van een orthocentrisch viervlak is dus gelijkzijdig.

Een analoge redenering geldt voor een kubische ruimtekromme k, gaande door A,B,C,D,M, dus harmonisch beschreven om de poolbol Γ. Elk punt van k is nu hoekpunt van precies één in k beschreven poolviervlak van Γ. Nemen we hiervoor weer M, dan zijn de drie oneigenlijke punten van k blijkbaar de hoekpunten van een pooldriehoek van Γ. k is dus een kubische ruimtekromme waarvan de asymptoten loodrecht op elkaar staan, een zg. kubische gelijkzijdige (of orthogonale) hyperbool. Elke kubische ruimtekromme, gaande door de hoekpunten en het hoogtepunt van een orthocentrisch viervlak is dus een gelijkzijdige kubische hyperbool.

De meetkundige plaats der middelpunten van de kwadrieken van een bundel is een kubische ruimtekromme k. Deze gaat blijkbaar door de toppen van de vier kegels uit de bundel. De oneigenlijke punten van k zijn de punten, waarin de paraboloïden van de bundel aan α_∞ raken.

Een speciaal geval doet zich voor als de kwadriekenbundel een bol bevat. α_∞ snijdt de bundel dan volgens een bundel kegelsneden, die ω bevat, zodat de dubbelpunten van de ontaardingen van deze kegelsnedenbundel de hoekpunten zijn van een pooldriehoek t.o.v. ω. k is dan blijkbaar een kubische orthogonale hyperbool. De kwadrieken uit de bundel hebben de oneigenlijke punten van k tot gemeenschappelijke asrichting. Dus:

Bevat een kwadriekenbundel een bol, dan zijn van alle exemplaren de assen evenwijdig; evenwijdig hieraan zijn ook de asymptoten van de kubische orthogonale hyperbool k, die de meetkundige plaats is van de middelpunten van de kwadrieken van de bundel.

Elk punt P van k is middelpunt van een kwadriek uit de bundel. De poollijn van P t.o.v. de bundel ligt dus in α_∞. Beschouwen we speciaal de bol uit de bundel (middelpunt M) en het exemplaar Δ dat door P gaat, dan zijn dus de poolvlakken van P t.o.v. deze twee exemplaren evenwijdig, zodat beide loodrecht op PM staan. PM is dus de normaal in P aan Δ. k is dus tevens de meetkundige plaats der voetpunten der normalen, die vanuit M op de kwadrieken van de bundel kunnen worden neergelaten. Is Γ een willekeurig vast exemplaar van de bundel, dan kunnen we dit ook als volgt formuleren: k is de meetkundige plaats der punten P, waarvan het poolvlak t.o.v. Γ loodrecht staat op PM. We noemen daarom k de kubische orthogonale hyperbool van Apollonius voor M en Γ (vgl. pag 109). Daar k en Γ 6 punten gemeen hebben, gaan door een gegeven punt M blijkbaar 6 normalen aan Γ. Deze liggen uiteraard alle op de projecterende kegel van k met M als top; deze kegel is eveneens gelijkzijdig.