STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 19

Colloquim over theta-functies.

1951-52.

ZC 19

Colloquium over theta-functies.

1951/52

Blij F van der	Inleiding.	p 1 - 5
Duparc H J A	Periodieke functies.	p 6 - 10
Herk C G G	Enkele speciale functies.	p 11 - 43
Berghuis J	Enige beginformules. Enige relaties met theta-functies. De differentiaalvergelijking. Weer enige relaties. Enige pro-memorie posten. Fourierreeksen voor verscheidene functies. Differentiatie naar de andere parameters. Enige formules met Bernouilli-getallen.	p 44 - 56
Peremans W	De modulaire groep.	p 57 - 71
Lekkerkerker C G	Het gedrag van theta-functies bij willekeurige modulaire substituties. Kwadraatresten. Symbool van Legendre. Berekening van $S\left(\frac{2}{\gamma}\right)$. Afhankelijkheid van α. Berekening van $S\left(\frac{2}{\gamma}\right)$ voor γ oneven. Voltooiing van de berekening. De kwadratische reciprociteitswet. Verband tussen theta-functies en modulaire vormen.	p 72 - 86
Wijngaarden A van	Arithmetische aspecten van de theta-functies.	p 87 - 103
Blij F van der	Theta-functies en sommen van kwadraten, 1-2.	p 104 - 115

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
A M S T E R D A M .

Colloquium over theta-functies.

Inleiding door Dr F. van der Blij.

14 November 1951/52

§1. Wat is een theta-functie ?

Het eenvoudigste voorbeeld is wel $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2}$. We merken even op, dat $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n}$ triviaal is, en $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^3}$ erg moeilijk, immers $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau x^3} dx$ is niet te berekenen, terwijl $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau x^2} dx = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}}$.

Behalve met integralen hangen de oneindige reeksen van de theta-functies ook nog samen met de eindige sommen $\sum_{n \bmod q} e^{\pi i \frac{p}{q} n^2}$, de z.g. sommen van Gausz, die voor gegeven waarden van p en q te berekenen zijn.

De eenvoudigste manier om theta-functies in de getallentheorie te gebruiken, is wel de triviale relatie $\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2}\right)^s = \sum_{0}^{\infty} r_s(N) e^{\pi i \tau N}$, waarin $r_s(N)$ het aantal oplossingen van de Diophantische vergelijking $n_1^2 + n_2^2 + \ldots n_s^2 = N$ voorstelt.

We gaan nu voortaan beschouwen:

$$\vartheta(z|\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i z n}, \tag{1.1.1}$$

deze reeks is absoluut convergent voor $\mathrm{Im}\,\tau > 0$. We onderzoeken deze functie van z en τ.

§2. Het gedrag als functie van z.

Uit de definitie volgt direct, dat :

$$\vartheta(z+1|\tau) = \vartheta(z|\tau)$$
$$\vartheta(z+\tau|\tau) = e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z} \vartheta(z|\tau).$$

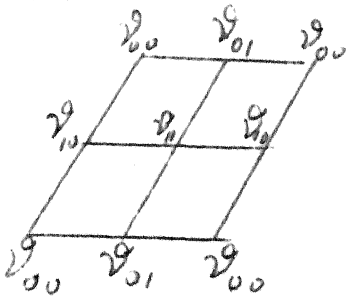
De functie ϑ is als functie van z een kwasi-dubbelperiodieke. Als we denken aan het gedrag van enkelperiodieke functies als sin z, dan begrijpen we, dat er analoge, andere functies kunnen ontstaan als we z vermeerderen met een halve periode. We onderzoeken dus

$$\vartheta(z+\tfrac{1}{2}|\tau) = \sum (-1)^n e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i z n}$$

$$\vartheta(z+\tfrac{1}{2}\tau|\tau) = e^{-\frac{1}{4}\pi i\tau} e^{-\pi i z} \sum e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i z (n+\frac{1}{2})}$$

$$\vartheta(z+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau|\tau) = e^{-\frac{1}{4}\pi i\tau} e^{-\pi i z} \sum (-1)^n e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i z (n+\frac{1}{2})}$$

Voortaan werken we met vier verschillende theta-functies.



(1.2.1) $$\vartheta_{00}(z|\tau) = \sum e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i z n}$$

(1.2.2) $$\vartheta_{01}(z|\tau) = \sum (-1)^n e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i z n}$$

(1.2.3) $$\vartheta_{10}(z|\tau) = \sum e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i z (n+\frac{1}{2})}$$

(1.2.4) $$\vartheta_{11}(z|\tau) = \sum (-1)^n e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i z (n+\frac{1}{2})}$$

Als z een reëel getal is, heeft het soms zin de reeksen als volgt te schrijven: $e^{\pi i \tau} = q$.

(1.2.5) $$\vartheta_{00}(z|\tau) = 1+2q\cos 2\pi z+2q^4\cos 4\pi z+2q^9\cos 6\pi z+ \ldots$$

(1.2.6) $$\vartheta_{01}(z|\tau) = 1-2q\cos 2\pi z + 2q^4\cos 4\pi z - 2q^9\cos 6\pi z +\ldots$$

(1.2.7) $$\vartheta_{10}(z|\tau) = 2q^{\frac{1}{4}}(\cos \pi z + q^{1\cdot 2}\cos 3\pi z + q^{2\cdot 3}\cos 5\pi z + \ldots$$

(1.2.8) $$\vartheta_{11}(z|\tau) = 2iq^{\frac{1}{4}}(\sin \pi z - q^{1\cdot 2}\sin 3\pi z + q^{2\cdot 3}\sin 5\pi z- \ldots$$

We vergelijken deze notatie met die gevolgd in Whittaker-Watson:

(1.2.9) $$\vartheta_{00}(z|\tau) = \vartheta_3(\pi z,q) \qquad \vartheta_{10}(z|\tau) = \vartheta_2(\pi z,q)$$
$$\vartheta_{01}(z|\tau) = \vartheta_4(\pi z,q) \qquad \vartheta_{11}(z|\tau) = i\vartheta_1(\pi z,q) .$$

Wij definiëren zelfs algemeen de functie:

(1.2.10) $$\vartheta_{gh}(z|\tau) = \sum (-1)^{nh} e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2}g)^2} e^{2\pi i z (n+\frac{1}{2}g)} .$$

Uit deze definitie volgt direct:

(1.2.11) $$\vartheta_{g+2l,h+2m}(z|\tau) = (-1)^{hl}\vartheta_{gh}(z|\tau).$$

Volledigheidshalve geven we nog de algemene transformatieformules bij verschuiving over hele of halve perioden.

(1.2.12) $$\vartheta_{gh}(z+\tfrac{1}{2}\lambda\tau+\tfrac{1}{2}\mu|\tau) = e^{\frac{1}{2}\pi i g\mu} e^{-\frac{1}{4}\pi i\tau\lambda^2} e^{-\pi i z\lambda}\vartheta_{g+\lambda,h+\mu}(z|\tau)$$

(1.2.13) $$\vartheta_{gh}(z+\lambda\tau+\mu|\tau) = (-1)^{g\mu+h\lambda} e^{-\pi i\tau\lambda^2} e^{-2\pi i z\lambda}\vartheta_{gh}(z|\tau).$$

§3. Het gedrag als functie van τ.

Het ligt voor de hand, dat we die transformaties van τ onderzoeken, die het halfvlak $\Im\tau>0$ in zichzelf overvoeren. Dit zijn de lineaire transformaties $\tau \to \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ met $\alpha\delta-\beta\gamma > 0$. De transformaties met $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$ worden voortgebracht door $\tau \to \tau+1$ en $\tau \to \frac{-1}{\tau}$. We onderzoeken nu

$$\vartheta_{00}(z|\tau+1) = \sum (-1)^n e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i n\tau} = \vartheta_{01}(z|\tau).$$

Algemeen geldt

(1.3.1) $$\vartheta_{gh}(z\,|\,\tau+1) = e^{\frac{1}{4}\pi i g^2}\,\vartheta_{g,g+h+1}(z|\tau).$$

De transformatie $\tau \to \frac{-1}{\tau}$ berekenen we alleen voor $\vartheta_{oo}(z|\tau)$.
We gebruiken de bekende formule

$$\sum_n f(n) = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x} f(x)\,dx.$$

We vinden dan

$$\begin{aligned}
\vartheta_{oo}\left(\tfrac{z}{\tau}\,\middle|\,\tfrac{-1}{\tau}\right) &= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x}\, e^{-\frac{\pi i x^2}{\tau}}\, e^{\frac{2\pi i z x}{\tau}}\,dx \\
&= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i x^2}{\tau}}\, e^{\frac{2\pi i x}{\tau}(z+n\tau)}\,dx \\
&= \sum_n e^{\frac{\pi i}{\tau}(z+n\tau)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}(x-z-n\tau)^2}\,dx \\
&= \sqrt{-i\tau}\; e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}} \sum_n e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i z n}
\end{aligned}$$

De gezochte transformatie formule luidt:

(1.3.2) $$\vartheta_{oo}\left(\tfrac{z}{\tau}\,\middle|\,\tfrac{-1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\; e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\,\vartheta_{oo}(z|\tau) \qquad R(\sqrt{-i\tau}) > 0.$$

Uit deze transformatie formule voor ϑ_{oo} is die voor ϑ_{gh} direct af te leiden, door over een geschikt gekozen aantal halve perioden van z op te schuiven.

Natuurlijk kan men ook direct met de sommatie formule van Poisson werken. We vinden dan

(1.3.3) $$\vartheta_{gh}\left(\tfrac{z}{\tau}\,\middle|\,\tfrac{-1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\; e^{\frac{1}{2}\pi i g k}\; e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\,\vartheta_{hg}(z|\tau).$$

We merken nog even extra op, dat

(1.3.4) $$\begin{cases} \vartheta_{11}(z\,|\,\tau+1) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\vartheta_{11}(z\,|\,\tau) \\ \vartheta_{11}\left(\tfrac{z}{\tau}\,\middle|\,\tfrac{-1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\; e^{-\frac{1}{2}\pi i}\, e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\,\vartheta_{11}(z|\tau) \end{cases}$$

§4 Nulpunten voor $\vartheta(z)$.

We gaan uit van de formule (1.2.13) en differentiëren deze logarithmisch naar z. We vinden dan:

$$\frac{\vartheta'_{gh}(z+\lambda\tau+\mu|\tau)}{\vartheta_{gh}(z+\lambda\tau+\mu|\tau)} = -2\pi i\lambda + \frac{\vartheta'_{gh}(z|\tau)}{\vartheta_{gh}(z|\tau)}$$

We berekenen nu het aantal nulpunten van z binnen een periode par. met hoekpunten $(\zeta\,,\ \zeta+1,\ \zeta+1+\tau\,,\ \zeta+\tau)$. Dit aantal is gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\,dz = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\zeta}^{\zeta+1}\left\{\frac{\vartheta'_{gh}(z+\tau)}{\vartheta_{gh}(z+\tau)} - \frac{\vartheta'_{gh}(z)}{\vartheta_{gh}(z)}\right\}dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta}^{\zeta+\tau}\left\{\frac{\vartheta'_{gh}(z)}{\vartheta_{gh}(z)}-\frac{\vartheta'_{gh}(z+1)}{\vartheta_{gh}(z+1)}\right\}dz = 1$$

Er is dus één nulpunt per periode par.

Het is uit de formule (1.2.8) direct duidelijk, dat $\vartheta_{11}(0\,|\tau)=0$. De nulpunten liggen dus voor

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{11}(z|\tau) \text{ congruent met } z = 0,\\
&\vartheta_{01}(z|\tau) \text{ congruent met } z = \tfrac{1}{2}\tau,\\
&\vartheta_{10}(z|\tau) \text{ congruent met } z = \tfrac{1}{2},\\
&\vartheta_{00}(z|\tau) \text{ congruent met } z = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau.
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

§5. Voorbeeld van productontwikkelingen.

Wanneer we van een functie alle nulpunten kennen, kunnen we volgens Weierstrass de functie voorstellen in de vorm van een oneindig product. We proberen nu langs slinkse wegen zo eenvoudig mogelijk een convergent oneindig product voor $\vartheta_{11}(z|\tau)$ op te stellen. We zullen dit zo doen, dat we eerst wat knoeien op heuristische wijze en later bewijzen dat het tenslotte toch goed is gekomen. (Dit is trouwens een geliefde methode bij dit soort problemen).

We beschouwen

$$f(s) = \vartheta_{11}\left(\frac{\log s}{2\pi i}\,|\tau\right).$$

Nulpunten van f(s) zijn de waarden $s = e^{2\pi i n\tau}$ (n willekeurig geheel). We beschouwen nu het product

$$\prod\left(1-\frac{s}{e^{2\pi i n\tau}}\right)$$

Dit is alleen convergent als $n \to -\infty$. We beschouwen nu eerst

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i m\tau}s\right).$$

Voor de overige waarden van n convergeert het product

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{e^{2\pi i m\tau}}{s}\right).$$

In het product $\prod_{1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i m\tau}s\right)\left(1-e^{2\pi i m\tau}s^{-1}\right)$ zitten alle wortels behalve $s = 1$ verwerkt. Deze verwerken we zo symmetrisch mogelijk door een factor $(s^{\frac{1}{2}} - s^{-\frac{1}{2}})$ bij te voegen. Alles tesamen vinden we, dat $\vartheta_{11}(z|\tau)$ en

$$\varphi(z|\tau) = \left(e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}\right)\prod_{1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i n\tau}e^{2\pi i z}\right)\left(1-e^{2\pi i n\tau}e^{-2\pi i z}\right) \tag{1.5.1}$$

dezelfde nulpunten hebben. Hieruit volgt dat de functie $\dfrac{\vartheta_{11}(z|\tau)}{\varphi(z|\tau)}$ geen nulpunten en geen polen heeft. We berekenen nu

$$\frac{\vartheta_{11}(z+1|\tau)}{\varphi(z+1|\tau)} = \frac{-\vartheta_{11}(z|\tau)}{-\varphi(z|\tau)} = \frac{\vartheta_{11}(z|\tau)}{\varphi(z|\tau)} .$$

$$\frac{\vartheta_{11}(z+\tau|\tau)}{\varphi(z+\tau|\tau)} = \frac{-e^{-\pi i\tau}\, e^{-2\pi iz}\, \vartheta_{11}(z|\tau)}{-e^{-\pi i\tau}\, e^{-2\pi iz}\, \varphi(z|\tau)} = \frac{\vartheta_{11}(z|\tau)}{\varphi(z|\tau)} .$$

Het quotient is dus een zuiver dubbel periodieke functie, daar hij geen polen heeft, is de functie wegens de periodiciteit begrensd en dus constant. Dat wil zeggen

$$(1.5.2) \qquad \vartheta_{11}(z|\tau) = G(\tau)(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}) \prod_{1}^{\infty} (1-e^{2\pi i n\tau}\, e^{2\pi iz})(1-e^{2\pi i n\tau}\, e^{-2\pi iz}).$$

Met behulp van wat rekenwerk met elliptische functies kan men bewijzen dat $G(\tau) = e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \prod_{1}^{\infty} (1-e^{2\pi i n\tau})$, zodat dus geldt:

$$(1.5.3) \qquad \vartheta_{11}(z|\tau) = e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \prod_{1}^{\infty} (1-e^{2\pi i n\tau})(1-e^{2\pi i n\tau}\, e^{2\pi iz})(1-e^{2\pi i n\tau}\, e^{-2\pi iz}).$$

Voor de andere ϑ functies bestaan analoge productontwikkelingen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
A M S T E R D A M .

Colloquium over theta-functies.
Voordracht door H.J.A. Duparc.

28 November 1951.

Hoofdstuk II. Periodieke functies.

§ 1. Algemene eigenschappen.

Een getal ω heet een periode van een functie f(z), als voor iedere z, waarvoor f(z) gedefinieerd is, ook f(z + ω) en f(z - ω) gedefinieerd zijn en als voor iedere z, waarvoor f(z) gedefinieerd is, geldt f(z + ω) = f(z).

Als ω en ω' perioden van een functie f(z) zijn, is dat ook het geval met kω + k'ω' (k, k' willekeurig geheel).

Van een niet-constante eenwaardige analytische functie bezit de verzameling der perioden geen verdichtingspunt. Immers, was dat wel het geval, dan was in iedere omgeving van dat verdichtingspunt d een punt te vinden, waar de beschouwde functie f(z) gelijk was aan f(d), zodat de reeksontwikkeling van f(z) in de omgeving van d slechts één term, n.l. de constante term, zou bevatten en f(z) derhalve zelfs in het gehele complexe z-vlak constant zou zijn, in strijd met de veronderstelling.

Wij onderzoeken nu hoe de perioden van een niet-constante eenwaardige analytische functie f(z) kunnen liggen.

Allereerst is 0 een periode van zo'n (trouwens van iedere) functie. Onderstel dat de functie verder een periode ω bezit. Alle punten nω (n geheel) der rechte zijn dan ook perioden van f(z). Omdat niet in iedere omgeving van 0 een punt ligt, dat als periode optreedt, is er een punt ω, dat het dichtste bij 0 ligt en periode van f(z) is. Ook het punt -ω, heeft deze eigenschap. Alle op de rechte 0ω_1 gelegen punten, die perioden van f(z) zijn, zijn dus van de gedaante kω_1 (k geheel). Het getal ω_1 noemen wij DE fundamentele periode van f(z).

Er zijn nu twee gevallen mogelijk:

1e. Onze functie bezit behalve de hierboven gevonden getallen kω_1 geen verdere perioden. Men noemt haar dan (enkel)periodiek met periode ω_1.

2e. Onze functie bezit ten minste één niet op 0ω_1 gelegen periode ω. Zij nu ω_2 het punt met minimale modulus, dat periode is van f(z), dat niet op 0ω_1 ligt. Onze functie heet dan dubbelperiodiek met DE

fundamentele perioden ω_1 en ω_2. Ieder getal $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ (k_1, k_2 geheel) is dan een periode van f(z). Daar ieder punt binnen driehoek $0\ \omega_1\ \omega_2$ een afstand tot de oorsprong bezit, die $< \omega_2$ is, is afgezien van de hoekpunten, geen punt van die driehoek, een periode van f(z). Hetzelfde geldt voor de driehoek met hoekpunten 0, $-\omega_1$, $-\omega_2$, dus wegens de periodiciteit voor de driehoek met hoekpunten $\omega_1 + \omega_2$, ω_2, ω_1, zodat afgezien van de 4 hoekpunten geen punt van het parallelogram 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, ω_2 een periode van f(z) is. Een zodanig parallelogram heet een fundamenteel periodeparallelogram van f(z). Onze functie f(z) heet in dit geval dubbelperiodiek. Alle punten van de gedaante $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ (en ook geen andere) zijn dan perioden van f(z).

§2. Enkelperiodieke functies.

Wij beschouwen thans een willekeurige enkelperiodieke functie, waarvan wij mogen aannemen dat DE periode gelijk is aan 1, omdat dit, als het nog niet het geval is, door een dilatatie in het z-vlak te bereiken is. Stel nu $\zeta = e^{2\pi i z}$; dan is $\zeta_1 = \zeta_2$ als $z_1 \equiv z_2 \pmod 1$ en omgekeerd. Bij gevolg is de beschouwde periodieke functie f(z) een eenwaardige functie van ζ. Dit is dus b.v. het geval met de goniometrische functies sin $2\pi z$, cos $2\pi z$, tg πz en cot πz.

Beschouw thans een enkelperiodieke analytische functie f(z) met DE periode 1, die slechts geïsoleerde singulariteiten bezit. Er bestaat dan een rechthoek, waarvan de basis evenwijdig loopt met de reële as en een lengte 1 bezit, waarbinnen geen singulariteiten van f(z) liggen. Laat de basis (bovenlijn) de ordinaat y_1 (resp. y_2) bezitten. Dan heeft de functie, beschouwd als functie van ζ, geen singulariteiten in het gebied $e^{-2\pi y_2} < |\zeta| < e^{-2\pi y_1}$ een Laurentontwikkeling van de gedaante $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n$ en geldt dus binnen de genoemde rechthoek de Fourierontwikkeling

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

De coëfficiënten der Laurentontwikkeling, dus die der Fourierontwikkeling zijn eenduidig vastgelegd. In het geval, dat f(z) = sin $2\pi z$ is f(z) rationaal uit te drukken in ζ. Voor dergelijke functies geldt een belangrijke eigenschap; iedere dergelijke functie f(z) bezit n.l. een algebraïsch additietheorema, d.w.z. voor iedere keuze van u en v bestaat er een algebraïsche relatie tussen f(u + v), f(u) en f(v). Stel n.l. $\zeta = e^{2\pi i u}$, $\zeta' = e^{2\pi i v}$, dus $\zeta\zeta' = e^{2\pi i(u+v)}$. Wij weten, dat de functie f(u) een rationale functie is van ζ, evenzo f(v) van ζ' en f(u+v) van $\zeta\zeta'$. Dus

$$f(u) = F(\zeta);\ f(v) = F(\zeta');\ f(u+v) = F(\zeta\zeta').$$

Door eliminatie van ζ en ζ' uit deze 3 relaties vindt men de gewenste algebraïsche relatie tussen f(u), f(v) en f(u+v). Verder geldt: Tussen ieder tweetal enkelperiodieke functies f(z) en g(z) van het speciale beschouwde type bestaat een algebraïsche relatie. Immers, men heeft, als men $\zeta = e^{2\pi iz}$ stelt,

$$f(z) = F(\zeta);\ g(z) = G(\zeta),$$

waarin F en G rationale functies zijn van ζ. Eliminatie van ζ voert tot het gewenste algebraïsche verband tussen f(z) en g(z).

Aangezien de afgeleide van een periodieke functie iedere periode bezit, die de functie zelf bezit, bestaat er dus eveneens een algebraïsche relatie tussen zo'n functie en zijn afgeleide.

§3. Dubbelperiodieke functies.

Wij beschouwen nu een dubbelperiodieke functie f(z). Zoals wij zagen, bezit zo'n functie een fundamenteel periodeparallelogram. Een parallelogram, dat hieruit door verschuiving ontstaat over een afstand $\neq k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ (k_1, k_2 geheel), noemen wij een periodeparallelogram of cel. Men is gewoon een deel van de rand van de cel mee te rekenen bij de cel en wel één hoekpunt en de twee daar uitkomende zijden. Een periodeparallelogram van twee dubbelperiodieke functies is ook periodeparallelogram voor hun som, verschil, product en quotiënt en de afgeleide van elk hunner.

1e Stelling van Liouville: Een geheel dubbelperiodieke functie is constant. Immers de functie is geheel en bezit dus in het fundamentele periodeparallelogram geen polen; zij is daar en wegens de periodiciteit dus zelfs in het gehele complexe z-vlak begrensd. Een gehele begrensde functie is echter constant. Iedere niet-constante dubbelperiodieke functie bezit dus in elk periodeparallelogram, dus in elke cel ten minste één singulariteit.

Definitie: Een analytische functie, die in het gehele z-vlak slechts reguliere punten of polen bezit (een meromorphe functie dus) en die dubbelperiodiek is en niet constant, noemt men een elliptische functie. Onder de orde van een elliptische functie verstaat men de som der multipliciteiten der in een cel gelegen polen. Deze som is kennelijk onafhankelijk van de keuze der cel. Hebben twee dubbelperiodieke functies hetzelfde periodeparallelogram, dezelfde polen en in die polen dezelfde hoofddelen, dan is hun verschil een gehele dubbelperiodieke functie, dus constant. De oorspronkelijke functies zijn dus op een constante na gelijk.

2e Stelling van Liouville: De som der residuen van een elliptische functie in een periodeparallelogram is nul. Beschouw n.l. de integraal $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$, genomen over de rand van het parallelogram. Liggen

er polen op de rand, dan integreren men over een zodanige cel, die geen polen op zijn rand heeft liggen. Zo'n cel bestaat en is steeds te vinden. Aangezien in corresponderende punten der overstaande zijden de functie f(z) dezelfde waarde aanneemt, is de som der bijdragen van twee overstaande zijden tot de contourintegraal nul, waarmede de stelling bewezen is.

Als gevolg hiervan bestaat er geen elliptische functie van de orde 1, want zo'n functie bezat in iedere cel 1 pool van de eerste orde, waarvan het residu echter niet gelijk kan zijn aan 0. Een elliptische functie van de orde 2 kan hetzij 1 pool van de 2e orde hebben, hetzij 2 polen van de 1e orde met tegengesteld residu.

3e Stelling van Liouville: Het aantal binnen een cel C gelegen punten, waar een elliptische functie f(z) een gegeven waarde c aanneemt, is gelijk aan de orde der functie.

Immers, beschouw de elliptische functie $g(z) = f(z) - c$. Het aantal der gezochten punten is gelijk aan het aantal nulpunten van g(z), dus gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz,$$

waarbij weer over de rand van C wordt geintegreerd. Nu is zowel g(z) als g'(z), dus ook $\frac{g'(z)}{g(z)}$ elliptisch, derhalve is de genoemde integraal volgens de 2e stelling van Liouville gelijk aan nul. De nulsom van g(z) ten aanzien van C is dus gelijk aan de poolsom, dat is de orde van g(z), dus de orde van f(z).

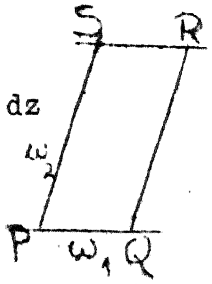
Bes houw verder de in een periodeparallelogram gelegen punten, waarin een dubbelperiodieke functie f(x) een gegeven waarde c aanneemt. De som dezer punten is, zoals wij gaan aantonen, afgezien van gehele veelvouden der perioden ω_1 en ω_2, gelijk aan de som der polen.

Men heeft nl. volgens de residuenstelling dat het verschil dier sommen gelijk is aan $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{zf'(z)}{f(z)-c}\,dz$. Deze contourintegraal is weer de som van 4 rechtlijnige integralen.

Beschouw allereerst:

$$\int_{PQ} + \int_{RS} = \int_P^Q \left(\frac{zf'(z)}{f(z)-c} - \frac{(z+\omega_2)f'(z)}{f(z)-c}\right)dz = -\omega_2 \int_P^Q \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz$$

$$= -\omega_2 \log \frac{f(Q)-c}{f(P)-c}.$$



Omdat f(Q) = f(P) is de logarithme van het laatste quotient een geheel getal m_2, dus $\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{PQ} + \int_{RS}\right) = m_2\omega_2$;

evenzo ziet men in dat er een geheel getal m_1 bestaat zodanig dat de som der andere twee beschouwde rechtlijnige integralen gelijk is aan $2\pi i\, m_1\omega_1$, waaruit tenslotte volgt dat de som der nulpunten van f(z)-c en der polen van f(z) een verschil heeft van de gedaante $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$.

Stelling. Hebben twee dubbelperiodieke functies $f(z)$ en $g(z)$ dezelfde perioden, in een periodeparallelogram dezelfde nulpunten en polen (en dezelfde multipliciteit in ieder dier nulpunten resp. polen) dan is hun verhouding een constante. Immers hun quotient $\frac{f(z)}{g(z)}$ is eveneens een dubbelperiodieke functie, die nergens in een periodeparallelogram polen bezit en dus volgens de 1^e stelling van Liouville een constante moet zijn.

Ten slotte vragen wij ons af of een niet constante analytische functie meer dan twee perioden kan hebben. Wij laten zien dat als zo'n functie drie perioden ω_1, ω_2 en ω_3 (alle $\neq 0$) bezit, er getallen n_1, n_2, n_3 (niet alle nul) bestaan, zodanig dat

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3 = 0$$

is.

Immers omdat de beschouwde niet constante functie perioden bezit, bezit zij zoals boven werd aangetoond, een"kleinste"periode Ω_1. Is iedere andere periode van de gedaante $n\Omega_1$ (n geheel), dan geldt uiteraard een betrekking van het gewenste type tussen elk drietal (zelfs elk tweetal) perioden. Bezit de functie buiten de rechte $0\Omega_1$ nog perioden dan is er zoals wij boven zagen een getal Ω_2 met minimale modulus, niet op $0\Omega_1$ gelegen, dat periode is van de functie, die verder binnen het parallelogram met hoekpunten $0, \Omega_1, \Omega_1 + \Omega_2, \Omega_2$ geen enkele periode heeft liggen. Is nu ω_1 een willekeurige periode van de functie dan moet ω_1 van de gedaante $a_1\Omega_1 + b_1\Omega_2$ (a_1, b_1 geheel) zijn, want anders bezat de functie toch een periode binnen het genoemde parallelogram. Voor twee willekeurige perioden ω_2 resp ω_3 van de functie bestaan er evenzo gehele getallen a_2, b_2, a_3, b_3 met

$$\omega_2 = a_2\Omega_1 + b_2\Omega_2; \quad \omega_3 = a_3\Omega_1 + b_3\Omega_2.$$

Eliminatie van Ω_1 en Ω_2 levert

$$\omega_1(ab)_{23} + \omega_2(ab)_{31} + \omega_3(ab)_{12} = 0,$$

waarbij opgemerkt zij dat als een der coëff.bv. $(ab)_{12}$ in de laatste trekking nul is, reeds een eenvoudiger betrekking van het gewenste type in casu $b_1\omega_1 - a_1\omega_2 = 0$ of $b_2\omega_1 - a_2\omega_2 = 0$ geldt, waarbij dan in een der beide betrekkingen beide coëfficiënten van nul verschillen, want anders was een der gegeven perioden ω_1 of ω_2 zelf nul.

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49
A m s t e r d a m O.

Colloquium over theta-functies.

Voordracht door C.G.G.van Herk.

12 December 1951.

Enkele speciale Functies.

(Motto: elliptische functies ← → thetafuncties).

1. Definitie van de functies [illegible].

De trigonometrische functies staan in nauw verband met het ééndimensionale rooster, dat gevormd wordt door de punten $n\pi$ (n geheel). Zij kunnen worden afgeleid uit één gehele functie die deze roosterpunten tot enkelvoudige nulpunten heeft, nl. uit sin z . Immers

$$\cos z = \sin(z+\tfrac{\pi}{2}), \quad \cot z = \frac{d \log \sin z}{dz}.$$

Bij de functie cot z zijn de roosterpunten polen van de eerste orde geworden.

Het ligt voor de hand naar een tweedimensionaal analogon te zoeken, in de eerste plaats dus naar een gehele functie waarvoor de nulpunten enkelvoudig zijn en samenvallen met de verschillende roosterpunten

(3.1.1) $$w = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \qquad (n_1, n_2 \text{ geheel}).$$

We weten nu immers dat het tweedimensionale rooster van fundamenteel belang is voor de theorie van de elliptische functies (Liouville 1847).

Om een reden die aanstonds zal blijken wordt de onafhankelijke complexe veranderlijke bij een aantal functies niet door z , maar door de letter u voorgesteld. De symbolen $\prod'$ en $\sum'$ zullen aangeven dat een product resp. een som loopt over alle waardeparen $(n_1,n_2) \neq (0,0)$; $\sum$ zal over alle paren (n_1,n_2) lopen. Gesteld wordt nog

(3.1.2) $$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \operatorname{Im} \tau > 0,$$

het laatste in overeenstemming met de beschouwingen over thetafuncties, waarbij ook alleen waarden in het bovenste halfvlak voor τ waren toegelaten.

Stelt men

(3.1.3) $$\sigma(u) = \sigma(u; \omega_1, \omega_2) = u \prod' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u}{2w^2}}$$

dan is het product in het rechter lid volgens een bekende stelling van Weierstrass (waarover aanstonds nog nader) in ieder eindig afgesloten gebied van het u-vlak gelijkmatig convergent; $\sigma(u)$ is dus geheel, heeft de roosterpunten w tot enkelvoudige nulpunten en is overal elders van nul verschillend.

Stelt men

(3.1.4) $\qquad \zeta(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du}, \qquad \wp(u) = -\zeta'(u)$

dan is dus, alweer volgens Weierstrass,

(3.1.5) $\qquad \zeta(u) = \zeta(u|\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$

(3.1.6) $\qquad \wp(u) = \wp(u|\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right),$

(3.1.7) $\qquad \wp'(u) = \wp'(u|\omega_1, \omega_2) = -2 \sum' \frac{1}{(u-w)^3},$

terwijl de reeksen in de rechter leden in ieder eindig afgesloten gebied van het u-vlak, dat geen roosterpunt w bevat, gelijkmatig convergeren. [Scherper: deze reeksen convergeren gelijkmatig in ieder eindig afgesloten gebied A, als de (eindig vele) termen die in A oneindig worden buiten beschouwing blijven].

Omdat de nulpunten van $\sigma(u)$ enkelvoudig zijn en met de roosterpunten w samenvallen zijn deze roosterpunten wegens (3.1.4) polen van de eerste orde van $\zeta(u)$, van de tweede orde van $\wp(u)$ en van de derde orde van $\wp'(u)$, zoals ook direct uit de reeksontwikkelingen blijkt. Andere singulariteiten van ζ, p of p' zijn niet mogelijk en deze functies zijn dus meromorf.

Uit (3.1.7) volgt direct

(3.1.8) $\qquad \wp'(u+\omega_j) = \wp'(u) \qquad (j=1,2),$

zodat $\wp'(u|\omega_1, \omega_2)$ een elliptische functie is met de perioden ω_1 en ω_2, en dan van de derde orde (namen we ω_1 en $2\omega_2$ als perioden, dan was $\wp'$ weer elliptisch, maar dan van de zesde orde enz.) Aan de andere kant is $\zeta(u|\omega_1, \omega_2)$ zeker niet elliptisch. Immers in iedere pool $u=w$ heeft $\zeta(u)$ volgens (3.1.5) een constant résidu 1, zodat de som van de résiduen in een parallelogram, dat ten minste één pool bevat, steeds van nul verschilt, hoe dit parallelogram verder ook wordt gekozen. De naam "elliptische zetafunctie" (b.v. bij Bieberbach, Funktionentheorie I, 274) is dus enigszins misleidend.

Wegens (3.1.3) is σ een oneven functie van u. Immers in het product Π' beantwoordt de primaire factor, die van een zekere w afhangt, eenduidig aan de primaire factor die van $-w$ afhangt, en het product

$$\left(1 - \frac{u^2}{w^2}\right) \exp\left(\frac{u}{w}\right)^2$$

van deze beide factoren is een gehele functie van u^2. Bijgevolg is $\sigma'(u)$ even, en $\zeta(u)$ volgens (3.1.4) oneven, $\wp(u)$ even en $\wp'(u)$ weer oneven.

Verder volgt uit (3.1.3)

(3.1.9) $\qquad \sigma(\lambda u|\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda\,\sigma(u|\omega_1, \omega_2),$

zodat σ een homogene functie is van u, ω_1 en ω_2 voor het gewicht 1. Evenzo zijn ζ, $\wp$ en $\wp'$ homogene functies van u, ω_1 en ω_2, resp. van de gewichten -1, -2 en -3.

Stelt men

(3.1.10) $$z = \frac{u}{\omega_1}$$

dan is in het bijzonder, met het oog op (3.1.2),

(3.1.11) $$\sigma(u,\omega_1,\omega_2) = \omega_1 \sigma(z|1,\tau).$$

In het vervolg zullen dus steeds homogene trivariabele functies, zoals σ, ζ, $\wp$ en $\wp'$ naast inhomogene bivariabele functies in z en τ, zoals de thetafuncties, kunnen worden beschouwd. De vermindering van het aantal variabelen in de inhomogene gedaante gaat natuurlijk ten koste van een zeker verlies aan symmetrie in de diverse formules.

Op dezelfde wijze kunnen naast de <u>modulaire vormen</u>, die homogeen zijn in ω_1 en ω_2 (en waarover aanstonds nader), de <u>modulaire functies</u> worden gesteld die uitsluitend van τ afhangen. Is $F(\omega_1,\omega_2)$ een modulaire vorm van het gewicht g, dan is

(3.1.12) $$F(\omega_1,\omega_2) = \omega_1^g f(\tau)$$

waarbij f een modulaire functie is. De sommen

(3.1.13) $$G_k(\omega_1,\omega_2) = \sum{}' \frac{1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^{2k}} \qquad (k \geq 1)$$

leveren een voorbeeld van modulaire vormen, waarmee we ons nog uitvoerig hebben bezig te houden.

Van de vier functies die hierboven werden vastgelegd schrijft men σ, $\wp$ en $\wp'$ toe aan Weierstrass, ζ aan Halphen. Het schijnt niet geheel duidelijk te zijn wanneer de $\wp$-functie door Weierstrass werd gevonden. Waarschijnlijk is dit na 1860 en zeker vóór 1881 gebeurd; in dit laatste jaar werd nl. met het uitgeven van de colleges van Weierstrass begonnen.

In tegenstelling tot de oudere elliptische functies van Abel en Jacobi is $\wp(u)$ de moderne elliptische functie bij uitstek; wie de $\wp$-functie beheerst doorgrondt tot op zekere hoogte het gehele gebied der elliptische functies. Tussen de oudere periode (1825-'30) en de nieuwere (1860-'70) ligt de ontwikkeling van de complexe functietheorie. Niet dat problemen op het terrein van de elliptische functies deze ontwikkeling in bijzondere mate hebben gestimuleerd; andere onderwerpen (potentiaaltheorie, Abelse integralen) waren in dit opzicht werkzamer. Maar wel heeft de functietheorie gemaakt dat de uitvoerige berekeningen over elliptische functies geleidelijk vervangen werden door algemenere beschouwingen van grotere draagkracht.

Tegenwoordig gaat men meestal uit van de functie $\wp'$. Hiervan wordt dan bewezen dat deze een elliptische functie van de derde orde is, en met behulp van een drietal integraties worden achtereenvolgens $\wp$, ζ en σ verkregen en hun eigenschappen afgeleid.

Een dergelijke afleiding is natuurlijk, volkomen in de haak, en toch kan men er een zeker bezwaar tegen hebben. Eigenlijk is $\sigma(u)$ als gehele functie eenvoudiger dan de meromorfe functies $\wp'$, $\wp$ en ζ; men zou daarom van σ willen uitgaan.

Overigens is dit sinds de onderzoekingen van R.Nevanlinna ook al weer twijfelachtig geworden. Nevanlinna merkt op (l.c. p.100) dat de eenvoudigste meromorfe functies, die geen uitzonderingswaarden bezitten, juist de dubbelperiodieke zijn. Het ordebegrip van een elliptische functie b.v. is aan geen enkele speciale functiewaarde gebonden. De zienswijze die ∞ en de eindige complexe grootheden als aequivalent beschouwt vereist echter, dat men zich eerst tot de verre van elementaire inzichten van Nevanlinna opwerkt .

Bovendien zijn ook de thetafuncties geheel: men mag dus een eenvoudig verband tussen $\sigma(u)$ en de verschillende theta's verwachten. Om dit verband op eenvoudige wijze te kunnen leggen zullen eerst enkele begrippen en eigenschappen uit de theorie van de gehele functies worden besproken.

2. Toepassing van de theorie der gehele functies. De σ-functie van Weierstrass.

Laat z een complexe veranderlijke zijn en $f(z)$ een gehele functie met een aftelbaar aantal (van nul verschillende) nulpunten $z_1, z_2, \ldots$ (meervoudige meervoudig geteld). Zonder beperking van de algemeenheid kan

$$0 < |z_1|, \quad |z_n| \leq |z_{n+1}| \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.2.1}$$

worden genomen. Indien ook $z=0$ een nulpunt van f is zal de multipliciteit hiervan worden aangegeven door ν.

De theorie van de gehele functies is eigenlijk in 1876 begonnen met een onderzoek van Weierstrass naar de mogelijkheid, een gehele functie $f(z)$ op soortgelijke wijze in factoren te ontbinden, als waarop dit met een veelterm kan gebeuren. Weierstrass bewees ongeveer:

Stelling: Laat f aan de hierboven gestelde voorwaarden voldoen. laten de niet-negatieve gehele getallen k_n voldoen aan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_n}\right|^{k_n} = \infty \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_n}\right|^{k_n+1} < \infty, \ k_n \leq k_{n+1}, \tag{3.2.2}$$

(wat steeds mogelijk is, b.v. door $k_n = n$ te nemen), en zij

$$P_k(z)=(1-z)\exp\left(\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^k}{k}\right). \tag{3.2.3}$$

Dan is

$$f(z)= e^{g(z)}.z^{\nu}.\prod_{n=1}^{\infty} P_{k_n}\left(\frac{z}{z_n}\right), \tag{3.2.4}$$

waarbij $g(z)$ een nieuwe gehele functie is en het product in het rechter lid gelijkmatig convergeert in ieder eindig afgesloten gebied van het z-vlak.

De uitdrukking (3.2.3) is door Weierstrass een <u>primaire factor</u>, door Laguerre een primaire factor van het <u>geslacht</u> k genoemd. Ziet men af van de factor exp g(z), dan heet de uitdrukking in het rechterlid van (3.2.4) een <u>kanoniek product</u>. De verdere theorie gaat in de eerste plaats over die functies f, waarbij g een veelterm is en de grootheden k_n een zeker natuurlijk getal q niet overschrijden; dit zijn de functies van eindig geslacht. Drie begrippen moeten hier worden ingevoerd: de grensexponent, het geslacht en de orde.

<u>Definitie I</u>. De <u>grensexponent</u> (<u>ordre réel</u>) van de rij $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ is het getal $\rho \geq 0$, dat voor iedere $\varepsilon > 0$ voldoet aan

$$(3.2.5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\rho-\varepsilon}} = \infty , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty .$$

De grensexponent kan <u>convergentie</u>- of <u>divergentieëxponent</u> zijn, al naar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\rho}}$$

convergeert of divergeert.

Indien de rij $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ een eindige grensexponent heeft, bestaat er een geheel getal $q \geq 0$ met de eigenschap

$$(3.2.6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q}} = \infty , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} < \infty ,$$

zodat

$$(3.2.7) \qquad q \leq \rho \leq q + 1.$$

Indien ρ niet geheel is, is $q = [\rho]$; is ρ geheel, dan is óf $q = \rho - 1$ óf $q = \rho$, al naar ρ convergentie- dan wel divergentieëxponent is. Voor $\rho < \infty$ kan (3.2.4) tot de eenvoudiger vorm

$$(3.2.8) \qquad f(z) = e^{g(z)} \, z^{\nu} \prod_{n=1}^{\infty} P_q\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

worden herleid. Definiëren we het geslacht van een kanoniek product, dat aan de normering (3.2.2) voldoet, als de bovengrens voor de geslachten der primaire factoren, dan heeft het kanonieke bestanddeel van het rechterlid in (3.2.8) het geslacht q. Deze bovengrens van de getallen k_n in (3.2.4) is ∞ als $\rho = \infty$; we stellen dan $q = \infty$, hoewel een ontwikkeling (3.2.8) dan natuurlijk niet geldt.

<u>Voorbeeld I</u>. Laat van de functie f(z) = sin πz bekend zijn, dat deze geheel is en behalve de enkelvoudige nulpunten z = 0, $\pm$ =, $\pm$ 2, ... geen andere nulpunten bezit. Dan heeft de rij $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de grensexponent 1, die tevens divergentieëxponent is: dus q = 1. Volgens (3,2,8) is dan

$$\sin \pi z = e^{g(z)} \, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}},$$

en, omdat aan een nulpunt $z_{2m-1} = m$ eeneenduidig het nulpunt $z_{2m} = -m$

kan worden toegevoegd,

$$(3.2.9)\qquad \sin \pi z = e^{g(z)}\, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right).$$

Voorbeeld II. Van de gehele functie

$$(1.2.4)\qquad \vartheta_{11}(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-)^n\, e^{\pi i \tau (n+\frac{1}{2})^2}\, e^{2\pi i z(n+\frac{1}{2})}$$

is bewezen, dat deze de enkelvoudige nulpunten

$$w^* = \frac{w}{\omega_1} = n_1 + n_2\tau \qquad (n_1,\ n_2 \text{ geheel}),$$

en geen andere nulpunten bezit. De grensexponent (tevens divergentieëxponent) van deze verzameling nulpunten is $\rho = 2$, dus $q = 2$. Wegens (3.1.1), (3.1.2), (3.1.10) is dan

$$\vartheta_{11}(z|\tau) = e^{g^*(z)}\, z \prod{}'\left(1 - \frac{z}{w^*}\right) e^{\frac{z}{w^*} + \frac{z^2}{2w^{*2}}}$$

$$= \omega_1^{-1}\, e^{g^*(z)}\, u \prod{}'\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}}$$

of

$$(3.2.10)\qquad \vartheta_{11}(z|\tau) = e^{g(u)}\, \sigma(u|\omega_1, \omega_2),$$

waarbij $g(u)$ weer geheel is.

Voorlopig weten we van de gehele functie g in (3.2.9) en (3.2.10) niets af, en een eerste indruk zou kunnen zijn, dat er met dit soort beschouwingen slechts weinig te winnen valt. De theorie gaat echter veel dieper, zelfs reeds in de vorm, die deze in de negentiende eeuw heeft aangenomen door de onderzoekingen van Laguerre en Poincaré (1880 - 1890), en vooral door die van Hadamard (1893 - 1897). Laguerre, die als eerste het werk van Weierstrass op dit gebied voortzette, voerde in 1882 het geslacht in:

Definitie II. Indien in (3.2.4) de gehele functie $g(z)$ de graad $[g]$ heeft (waarbij we $[g] = \infty$ stellen als $g(z)$ transcendent is), en het kanonieke bestanddeel van het rechterlid het geslacht q heeft (waarbij $q = \infty$ niet is uitgesloten), heet

$$p = \max([g], q)$$

het geslacht (genre) van f.

Dit begrip, dat op het eerste gezicht iets gekunstelds heeft, is later zeer vruchtbaar gebleken. Zo kunnen functies van het geslacht nul practisch als polynomen worden behandeld. Het volgende resultaat kan ons bij de beschouwingen over thetafuncties nog van dienst zijn:

Stelling. Het geslacht p' van de afgeleide $f'(z)$ van een functie van eindig geslacht p voldoet aan $p' \leq p$.

Daarbij is in het algemeen $p' = p$; men kent echter voorbeelden van functies, waarbij $p' = p - 1$; het is n.l. mogelijk, dat het toevoe-

gen van een constante het geslacht met 1 doet toenemen (Wiman 1903).

Definitie III. De orde (ordre apparent) van een gehele functie f is het getal $\varrho \geq 0$ dat voor alle $\varepsilon > 0$ en voor voldoend grote $|z| = r$ voldoet aan

$$|f(z)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}},$$

terwijl er een rij onbepaald aangroeiende waarden r is waarvoor

$$\max_{|z|=r} |f(z)| > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Men kan dus korter schrijven

$$\varrho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

als

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| .$$

Stelling. $\varrho \leq p+1$. (Poincaré 1883)

Stelling. Voor kanonieke producten is $\varrho \leq \varrho_1$ (Borel 1897; ook direct uit Poincaré 1883 af te leiden).

Alle functies van eindig geslacht zijn dus van eindige orde. Maar is ook het omgekeerde waar? Op deze moeilijke vraag heeft Hadamard een antwoord gegeven:

Stelling. $\varrho_1 \leq \varrho$. (Voor kanonieke producten is dus $\varrho_1 = \varrho$).

Stelling. Voor niet-gehele ϱ is $\varrho_1 = \varrho$.

Alleen voor gehele ϱ kan dus $\varrho_1 < \varrho$ zijn; b.v. voor $f(z) = e^z$ is $\varrho_1 = 0$, $\varrho = 1$ (hier is $f = 0$ een uitzonderingswaarde van Picard!) Men kan gemakkelijk inzien dat iedere waarde $\varrho_1 < \varrho$ kan voorkomen. Ten slotte:

Stelling. $p \leq \varrho$.

[en wel is $p = [\varrho]$ voor niet gehele ϱ, wegens $\varrho \leq p+1$; is ϱ geheel dan is óf $p = \varrho$ óf $p = \varrho - 1$.]

Met behulp van de laatste stelling is het nu mogelijk de gehele functies g(z) in (3.2.9) en (3.2.10) aan vergaande restricties te onderwerpen.

Voorbeeld I. De functie $z^{-1}\sin \pi z$ is geheel; men heeft

$$\frac{\sin \pi z}{z} = O(e^{|z|}),$$

dus de orde is ten hoogste 1 (en inderdaad 1). Nu is deze functie even; stelt men

(3.2.11) $$\frac{\sin \pi z}{z} = h(z^2)$$

dan is h wéér een gehele functie, nu echter van de orde $\frac{1}{2}$, dus van het geslacht 0.

Volgens (3.2.9 heeft h(w) de nulpunten $w = m^2 (m = 1,2,\ldots)$, zodat

$$h(w) = c \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \frac{w}{m^2})$$

waarbij c een constante is. Voor $w = z^2$ volgt hieruit met behulp van (3.2.9) en (3.2.11)

$$\sin \pi z = cz \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{m^2}),$$

zodat de gehele functie g(z) in (3,2.9) een constante is. Door de limietovergang $z \to 0$ te beschouwen verkrijgt men ten slotte

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{m^2}).$$

Voorbeeld II. Met behulp van de reeks (1.2.4) kan de orde van $\vartheta_{11}(z)$ naar boven worden geschat. Zij

(3.2.12) $$\tau = x + iy \qquad (y > 0).$$

Dan is

$$|\vartheta_{11}(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi y(n+\frac{1}{2})^2} \cdot e^{(2n+1)\pi |z|} =$$

$$= O\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y(t+\frac{1}{2})^2 + \pi|z|(2t+1)} dt \right) =$$

$$= e^{\frac{\pi|z|^2}{y}} O\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y(t+\frac{1}{2}-\frac{|z|}{y})^2} dt \right) = e^{\frac{\pi|z|^2}{y}} O(1).$$

Dus is $\vartheta_{11}(z)$ ten hoogste van de orde 2, en van een geslacht $p \leq 2$. Dit houdt echter volgens Hadamard in dat g(u) in (3.2.10) ten hoogste van de tweede graad kan zijn:

$$\vartheta_{11}(z|\tau) = e^{a+bu+cu^2} \sigma(u|\omega_1,\omega_2).$$

Aangezien ϑ_{11} en σ beide oneven functies zijn is b = 0; we mogen dus schrijven

$$\vartheta_{11}(z|\tau) = A\, e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma(u|\omega_1,\omega_2),$$

omdat ω_1 eindig en van nul verschillend is; daarbij is η_1 een grootheid die alleen van ω_1 en ω_2 afhangt. De uitdrukking in het rechter lid moet homogeen zijn van het gewicht nul; dit geeft

$$\vartheta_{11}(z|\tau) = \omega_1^{-1} \Phi(\tau)\, e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma(u|\omega_1,\omega_2),$$

waarbij η_1 een homogene functie van (ω_1,ω_2) moet zijn van het gewicht -1. Volgens (3.1.10),(3.1.11) kan dan worden geschreven

$$\frac{\vartheta_{11}(z|\tau)}{z} = \Phi(\tau)\, e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2} z^2} \frac{\sigma(z|1,\tau)}{z},$$

waaruit voor $z \to 0$ volgt

$$\vartheta'_{11}(0|\tau) = \Phi(\tau),$$

zodat ten slotte

$$\frac{\vartheta_{11}(z|\tau)}{\vartheta'_{11}(0|\tau)} = \omega_1^{-1} e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma(u|\omega_1,\omega_2),$$

waarmee een betrekking tussen de functies ϑ_{11} en σ is verkregen.

Opgemerkt kan worden dat de afleiding van (3.2.13) nauwelijks rekenwerk heeft vereist, en dat (schijnbaar) slechts weinig gegevens over ϑ_{11} werden gebruikt, nl.:

(a) ϑ_{11} is geheel;

(b) de nulpunten van ϑ_{11} zijn enkelvoudig en vallen samen met de roosterpunten $n_1 + n_2\tau$;

(c) de reeks (1.2.4) voor ϑ_{11} laat de schatting

$$\vartheta_{11}(z) = O(e^{\alpha|z|^2})$$

toe, waarbij α niet van z afhangt;

(d) ϑ_{11} is oneven.

In werkelijkheid vergt de combinatie van deze vier eigenschappen zó veel, dat ϑ_{11} hierdoor op een exponentiële factor na is bepaald.

In (3.2.13) heeft de exponentiële uitdrukking een exponent van de graad 2; het kanonieke product voor $\sigma(u)$ is volgens (3.1.3) van het geslacht 2. Volgens de definitie van Laguerre is dan ook $\vartheta_{11}(z|\tau)$ van het geslacht 2.

§ 3. De grootheden η_i. Primitieve periodenparen.

Volgens Liouville kan de niet-constante gehele functie $\sigma(u)$ niet dubbelperiodiek zijn. Zoals aanstonds zal blijken is σ in het algemeen zelfs niet enkelvoudig periodiek. De parallel met de trigonometrische functies gaat hier enigszins mank, want sin z is wél periodiek. Ook wordt het analogon van de periodieke meromorfe functie

$$\cot z = \frac{d \log \sin z}{dz} = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+\pi m} + \frac{1}{z-\pi m}\right)$$

minder door $\zeta(u)$ als wel door de elliptische functie $\wp(u)$ gevormd; deze laatste ontstaat echter eerst door <u>twee</u> differentiatieprocessen uit $\sigma(u)$.

Wel kan uit $\sigma(u)$ blijkens (3.2.13) een enkelvoudig periodieke functie worden afgeleid door σ van een geschikt gekozen factor te voorzien. In het algemeen kan (3,2,13) dienen om het gedrag van $\sigma(u)$ t.o.v. de transformaties $u \to u + \omega_1$ en $u \to u + \omega_2$ na te gaan; immers deze transformaties beantwoorden in het inhomogene gebied aan $z \to z + 1$ resp. $z \to z + \tau$. Door een eenvoudige berekening volgt uit (1.2.13) en (3.2.13)

(3.3.1) $$\sigma(u+\omega_j) = -e^{\eta_j(u+\frac{\omega_j}{2})}\,\sigma(u)$$

voor j = 1,2, waarbij η_2 bepaald is door

(3.3.2) $$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i.$$

Evenals de thetafuncties is $\sigma(u)$ dus "quasidubbelperiodiek", of, volgens de terminologie van Hermite, een <u>elliptische functie van de derde soort</u>.

Ofschoon Legendre onder "fonctions elliptiques" de integralen verstond en niet wat tegenwoordig elliptische functies worden genoemd, staat (3.3.2) bekend als de <u>betrekking van Legendre</u>; (3.3.2) is nl. aequivalent met de relatie

(3.3.3) $$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$

uit de "Traité des fonctions elliptiques" (1825-'28). Daarbij stellen K en E complete integralen voor van de eerste resp. van de tweede soort:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt,$$

terwijl K' en E' de overeenkomstige complete integralen zijn van de complementaire modulus $k'(k^2+k'^2=1)$. Zoals later bewezen wordt, kunnen de grootheden ω_j en η_j nl. in complete integralen van de eerste resp. van de tweede soort worden uitgedrukt.

Laat een derde paar grootheden (ω_3,η_3) bepaald zijn door

(3.3.4) $$\omega_1+\omega_2+\omega_3 = 0, \qquad \eta_1+\eta_2+\eta_3 = 0.$$

Uit (3.3.1), (3.3.2) volgt dan direct

$$\sigma(u+\omega_3) = -e^{\eta_3(u+\frac{\omega_3}{2})}\,\sigma(u),$$

zodat (3.3.1) algemeen geldt voor j = 1,2,3. Evenzo kan de betrekking van Legendre worden uitgebreid tot

(3.3.5) $$\begin{vmatrix} \eta_j, & \eta_{j+1} \\ \omega_j, & \omega_{j+1} \end{vmatrix} = 2\pi i \qquad (j = 1,2,3)$$

als de indices zo nodig modulo 3 worden gereduceerd. Er kunnen dus geen twee grootheden η_j tegelijk nul zijn. Wel is het in bijzondere gevallen mogelijk, dat één grootheid η_j verdwijnt. Zoals later zal worden bewezen, heeft men nl.

(4.6.7) $$\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{3}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,q^{2n}}{1-q^{2n}}\right),$$

waarbij

$$q = e^{\pi i\tau}.$$

Indien τ zuiver imaginair wordt gekozen is $0 < q < 1$, en men kan q

iedere waarde tussen 0 en 1 laten aannemen. Is q nu voldoende klein, dan is het rechter lid van (4.6.7) positief; is 1-q voldoende klein, dan wordt dit lid negatief. Er is dus een waarde q waarvoor $\eta_1\omega_1 = 0$, dus waarvoor $\eta_1 = 0$. Volgens (3.3.1) is $\sigma(u)$ dan enkelvoudig periodiek. De algemene formule (3.3.5) geldt, blijkens de afleiding, zodra $\omega_2 : \omega_1$ in het bovenste halfvlak ligt.

De invoering van een derde periode ω_3 is allerminst analytische "Spielerei". Zoals weldra zal blijken beantwoordt een drietal perioden aan een zeer wezenlijke trek van de theorie. Misschien is het daarom goed hier op de vroegere beschouwingen over het periodenparallelogram terug te komen en deze enigszins uit te breiden.

In veel gevallen zijn de drie perioden ω_j formeel gelijkwaardig; dit was b.v. in (3.3.1), (3.3.4) en (3.3.5) het geval: deze betrekkingen veranderden niet als hetzij de grootheden ω_j, hetzij de grootheden ω_j en de grootheden η_j cyclisch werden verwisseld. Brengt men een homogene functie, zoals $\wp$, ζ of σ, die o.m. van twee onafhankelijke "perioden" ω_j, ω_k afhangt, in de inhomogene gedaante, dan treedt noodzakelijk een periodenquotiënt $\omega_j : \omega_k$ als nieuwe veranderlijke op. Een eerste vraag is dus hoe de 6 thans beschikbare periodenquotiënten van elkaar afhangen. Volgens (3.1.2), (3.3.4) is

$$(3.3.6) \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau, \quad \frac{\omega_3}{\omega_2} = -1 - \frac{1}{\tau}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{1}{1+\tau},$$

zodat een periodenquotiënt door cyclische verwisseling van de indices in hetzelfde (i.c. bovenste) halfvlak blijft. Ook hierin zijn de drie perioden ω_j dus formeel aequivalent. Men kan de vectoren $\vec{\omega}_j$ van de oorsprong af uitzetten, en in positieve zin om de oorsprong lopen. De volgorde, waarin deze vectoren worden aangetroffen komt dan overeen met een even permutatie van de indices 1,2,3. De reciproken van de quotiënten (3.3.6), die in het onderste halfvlak liggen, zijn voor ons eigenlijk niet van belang.

De negatieve quotiënten

$$-\frac{\omega_j}{\omega_k} \quad (j \neq k)$$

zijn gelijk aan de 6 mogelijke waarden

$$(3.3.7) \qquad d, \ \frac{1}{d}, \ 1 - \frac{1}{d}, \ \frac{d}{d-1}, \ \frac{1}{1-d}, \ 1 - d$$

van de complexe dubbelverhouding $(\omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3, \omega_3 - \omega_1, \infty)$. Hoewel het hier eigenlijk niet ter zake doet, is het toch enigszins irritant.

(3.3.8) $$(J-1)J\frac{\partial^2\omega_j}{\partial J^2}+\frac{7J-4}{6}\frac{\partial\omega_j}{\partial J}+\frac{\omega_j}{144}=0 \qquad (j=1,2,3),$$

waarbij de "absolute invariant" J door (3.5.21) bepaald is. De 24 integralen die Kummer van een dergelijke diff. verg. gaf, verkrijgt men door juist de onafhankelijke veranderlijke J, en niet ω_j, aan de 6 transformaties te onderwerpen, die met de waarden (3.3.7) overeenkomen.

Overigens voldoen ook de grootheden η_j aan een hypergeometrische diff. verg., die sterk met (3.3.8) overeenkomt. In veel opzichten zijn de grootheden η_j gelijkwaardige partners van de perioden ω_j. Zie (3.3.4), (3.3.5) en de voorstelbaarheid door complete integralen.

Laat nu een elliptische functie $f(u|\omega_1,\omega_2)$ de onafhankelijke perioden (ω_1,ω_2) bezitten en laat de volgorde van deze perioden weer zo gekozen zijn, dat

(3.1.2) $$\operatorname{Im}\tau=\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1}>0.$$

Als dan de getallen a,... d geheel zijn en

(3.3.9) $$n=ad-bc\neq 0$$

zijn ook

(3.3.10) $$\omega_1'=a\omega_1+b\omega_2,\quad \omega_2'=c\omega_1+d\omega_2$$

twee onafhankelijke perioden van f, en de functie

(3.3.11) $$g(u|\omega_1',\omega_2')=f(u|\omega_1,\omega_2)$$

is weer elliptisch, nu met de perioden ω_1', ω_2'. Voor $n>0$ (waaraan bij een geschikte volgorde van ω_1', ω_2' steeds kan worden voldaan) geldt dan

(3.3.12) $$\tau'=\frac{\omega_2'}{\omega_1'}=\frac{c+d\tau}{a+b\tau},\quad \operatorname{Im}\tau'>0,$$

zodat voor het nieuwe periodenquotiënt τ' van g dezelfde normering geldt als voor τ. De <u>transformatie</u> (3.3.10) van de perioden (ω_1,ω_2) kan symbolisch worden voorgesteld door

(3.3.13) $$T=\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}.$$

Is

$$\omega_1''=a'\omega_1'+b'\omega_2',\quad \omega_2''=c'\omega_1'+d'\omega_2'$$

een tweede transformatie T', dan is

$$\omega_1''=(a'a+b'c)\omega_1+(a'b+b'd)\omega_2,$$

$$\omega_2''=(c'a+d'c)\omega_1+(c'b+d'd)\omega_2,$$

of

(3.3.14) $$T'T=\begin{pmatrix}a'b'\\ c'd'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'a+b'c, & a'b+b'd\\ c'a+d'c, & c'b+d'd\end{pmatrix},$$

zodat twee transformaties steeds en eenduidig componeerbaar zijn volgens het schema van de matrixvermenigvuldiging. Deze compositie is associatief maar in het algemeen niet commutatief. De identieke transformatie

(3.3.15) $\quad E = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$

gedraagt zich als eenheidselement:

(3.3.16) $\quad ET = TE = T.$

De determinant $n = ad - bc$ heet de graad van de transformatie (3.3.13). Is T van de graad n en T' van de graad n', dan is T'T van de graad nn'. Een transformatie van de graad 1 heet unimodulair, zodat het product van twee unimodulaire transformaties weer unimodulair is. Is

$$T = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

unimodulair, dan bezit T een inverse transformatie

(3.3.17) $\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{pmatrix}$

met de eigenschap

(3.3.18) $\quad T^{-1}T = TT^{-1} = E.$

De unimodulaire transformaties vormen dus een groep, de z.g. modulaire groep. Aangezien de transformaties

$$\begin{pmatrix} 1, & n \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

unimodulair zijn, is de modulaire groep aftelbaar.

De transformaties van hogere graad bezitten geen inverse met gehele coëfficiënten, en vormen dus geen groep.

Stel nu weer, dat het periodenpaar (ω_1', ω_2') uit (ω_1, ω_2) ontstaat door een transformatie van de graad n. Dan is het door (ω_1', ω_2') beschreven parallelogram n maal zo groot als het door (ω_1, ω_2) beschrevene. Onder de oneindig vele periodenparallelogrammen, die een elliptische functie bezit, zijn er nu met een kleinste oppervlak. Zulke parallelogrammen, en ook de bijbehorende periodenparen, heten primitief.

Om het bestaan van primitieve periodenparen te bewijzen, gaan we uit van een paar (Ω_1, Ω_2) dat voldoet aan

(a) $\Omega_1 \neq 0$, $|\Omega_1|$ minimaal;

(b) $\Omega_2 \neq n\,\Omega_1$, n geheel; $|\Omega_2|$ minimaal.

Vroeger is bewezen, dat er een dergelijk fundamenteel paar bestaat, en ook dat iedere periode ω de gedaante $n_1\Omega_1 + n_2\Omega_2$ bezit, waarbij n_1 en n_2 geheel zijn. Een willekeurig periodenpaar (ω_1, ω_2) kan dus worden voorgesteld door

(3.3.19) $\quad \omega_1 = a\Omega_1 + b\Omega_2, \quad \omega_2 = c\Omega_1 + d\Omega_2,$

waarbij a,...,d geheel zijn. Nu is het door (ω_1, ω_2) beschreven parallelogram $n = ad - bc$ maal zo groot als het door (Ω_1, Ω_2) beschrevene, m.a.w. dit laatste parallelogram is een kleinste. De fundamentele perioden (Ω_1, Ω_2) vormen dus een primitief paar.

Uit onze definities volgt, dat een primitief periodenpaar door een unimodulaire transformatie weer in een primitief paar overgaat; immers de beschreven parallelogrammen vóór en na de transformatie zijn gelijk. Omgekeerd kunnen twee primitieve periodenparen (ω_1,ω_2) en (ω_1',ω_2') steeds unimodulair in elkaar worden getransformeerd. Immers, ω_1 en ω_2 kunnen door middel van (3.3.19) in een fundamenteel paar (Ω_1,Ω_2) worden uitgedrukt, en omdat (ω_1,ω_2) een primitief paar is, is deze transformatie unimodulair. Hetzelfde geldt voor de transformatie die (Ω_1,Ω_2) in (ω_1',ω_2') overvoert. De unimodulaire transformaties vormen echter een groep, m.a.w. het paar (ω_1,ω_2) kan unimodulair in (ω_1',ω_2') worden getransformeerd. Hier volgt tevens uit, dat iedere periode homogeen lineair, en met gehele coëfficiënten, in de perioden van een willekeurig primitief paar kan worden uitgedrukt.

Als voorbeeld zij (ω_1,ω_2) een primitief periodenpaar en

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0.$$

Dan zijn ook (ω_2,ω_3) en (ω_3,ω_1) primitieve paren, immers

$$\begin{aligned}(\omega_2,\omega_3) &= \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & -1\end{pmatrix}(\omega_1,\omega_2),\\ (\omega_3,\omega_1) &= \begin{pmatrix}-1, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}(\omega_1,\omega_2).\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Door cyclische verwisseling van de indices blijft een primitief periodenpaar (ω_j,ω_{j+1}) dus primitief.

In het bovenstaande was het essentiël dat van een fundamenteel periodenparallelogram gebruik kon worden gemaakt. Het begrip "fundamenteel parallelogram" heeft echter ook in ander opzicht betekenis, nl. voor het uitvoeren van numerieke berekeningen.

Verschillende grootheden in de theorie der elliptische functies kunnen worden ontwikkeld in reeksen waarvan de termen afhangen van

$$q = e^{\pi i\tau}, \tag{3.3.21}$$

welke grootheid ook reeds in de thetareeksen optrad. Het kan dan van belang zijn, b.v. in het geval van machtreeksen naar q, om het bedrag

$$|q| = e^{-\pi \operatorname{Im}\tau}$$

zo klein mogelijk, dus $\operatorname{Im}\tau$ zo groot mogelijk te kiezen. Zij

$$\omega_j = \alpha_j + i\beta_j \qquad (j=1,2),$$

dan is

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\bar{\omega}_1\omega_2}{|\omega_1|^2}$$

en

(3.3.22) $$\operatorname{Im}\tau = \frac{\operatorname{Im}\{(\alpha_1 - i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)\}}{|\omega_1|^2} = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{|\omega_1|^2}.$$

Wegens $\operatorname{Im}\tau > 0$ is de determinant in de teller van het rechter lid positief. Omdat deze determinant gelijk is aan het oppervlak O van het door (ω_1, ω_2) beschreven parallelogram kan dan voor (3.3.22) worden geschreven

(3.3.23) $$\operatorname{Im}\tau = \frac{O}{|\omega_1|^2}.$$

Schematisch gesproken zijn er nu twee wegen om $\operatorname{Im}\tau$ zo groot mogelijk te maken. Ten eerste kan men $|\omega_1|$ constant laten en het oppervlak O vergroten, wat door een transformatie van hogere graad kan worden bereikt. Dit verklaart de betekenis van de transformatietheorie voor numerieke doeleinden. De oudst bekende transformatie, - van Landen (1775) -, liende inderdaad voor de berekening van elliptische integralen; ze komt overeen met een transformatie van de tweede graad volgens de hier gebruikte terminologie.

Het kan echter zijn, dat men de berekeningen, die aan een transformatie verbonden zijn, wil vermijden. Een tweede weg is dan O constant te houden en $|\omega_1|$ minimaal te maken. Aan de eerste eis wordt voldaan door alleen primitieve periodenparen toe te laten; aan de tweede door (ω_1, ω_2) gelijk te nemen aan de hierboven gedefinieerde perioden (Ω_1, Ω_2) van een fundamenteel paar. Tegelijk kan dan zo een ondergrens voor $\operatorname{Im}\tau$, en daarmee een bovengrens voor $|q|$ worden verkregen.

Immers, zij α de hoek tussen de in de oorsprong aangrijpende vectoren $\vec{\omega}_1$ en $\vec{\omega}_2$; dan is

$$O = |\omega_1\omega_2| \sin\alpha ,$$

dus volgens (3.3.23)

$$\operatorname{Im}\tau = \left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| \sin\alpha .$$

Omdat (ω_1, ω_2) een fundamenteel paar is, heeft men

(a) $\omega_1 \neq 0$, $|\omega_1|$ minimaal,

(b) $\omega_2 \neq n\omega_1$, $|\omega_2|$ minimaal,

dus

$$\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| \geq 1$$

en

(3.3.24) $$\operatorname{Im}\tau \geq \sin\alpha .$$

In de driehoek, die ontstaat door een punt achtereenvolgens de vectoren $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$ en $-\vec{\omega}_2$ te laten beschrijven, is α de hoek tegenover de zijde $\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$. Wegens $|\omega_2 - \omega_1| \geq |\omega_2|$ is α een grootste hoek van

leze driehoek, dus $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$. Voor het geval α niet stomp is, geldt dan

(3.3.25) $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Is α daarentegen stomp, dan is $\pi - \alpha$ een hoek van de driehoek, die ontstaat door een punt achtereenvolgens de vectoren $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ en $\vec{\omega}_3$ te laten beschrijven; $\pi - \alpha$ ligt dan tegenover de zijde $\vec{\omega}_3$. Wegens $|\omega_3| \geq |\omega_2|$ is nu $\pi - \alpha$ een grootste hoek, dus

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{2\pi}{3},$$

zodat (3.3.25) ook in dit geval geldt. Uit (3.3.24) en (3.3.25) volgt dan

(3.3.26) $\operatorname{Im} \tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$

of

(3.3.27) $|q| \leq \exp\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\right) = 0{,}0658\ldots,$

zodat opklimmende machten van q snel tot nul naderen in absolute waarde.

Afwijkend van de hierboven gegeven definitie kan een fundamenteel periodentripel $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ zó worden gekozen, dat

(a) $\omega_1 \neq 0$, $|\omega_1|$ minimaal,

(b) $\omega_2 \neq n\omega_1$ (n geheel), $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, $\arg \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} \geq \frac{\pi}{2}$ $(j=1,2,3)$,

(c) ten minste één der grootheden $|\omega_2|, |\omega_3|$ minimaal.

Zoals direct kan worden ingezien is het bij ieder rooster mogelijk een dergelijke tripel aan te geven. De driehoek met zijden $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ is dan scherphoekig. Aan de eis dat $|\omega_2|$ minimaal is, als $\omega_2 \neq n\omega_1$, kan echter niet steeds worden voldaan. Voor bepaalde vragen heeft een dergelijk fundamenteel tripel echter voordelen (vgl. Jordan, Cours d'Analyse II p. 421).

Laten ω_1, ω_2 en f door de transformaties (3.3.10) en (3.3.11) in ω_1', ω_2' en g worden overgevoerd. Als f de orde m heeft, heeft g de orde mn; het door (ω_1', ω_2') beschreven parallelogram is immers n maal het door (ω_1, ω_2) beschrevene. Hier wordt het ordebegrip dus <u>niet</u> per se op een primitief periodenpaar betrokken, en het verdient ook geen aanbeveling dit te doen. Deed men dit nl. toch, dan zouden in verschillende stellingen uitzonderingsgevallen moeten worden opgenomen. B.v. zou de orde van het product van twee elliptische functies $f_1(u|\omega_1, \omega_2)$ en $f_2(u|\omega_1, \omega_2)$ wel in het algemeen, maar niet steeds gelijk zijn aan de som der orden van f_1 en f_2. Als b.v. (ω_1, ω_2) een primitief periodenpaar was van een functie f van de orde n, zou

$$g(u) = f(u)\, f\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)$$

eveneens de orde n (en niet de orde 2n) bezitten, omdat $(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2)$ een

primitief periodenpaar van g zou zijn.

De orde van een elliptische functie is dus invariant voor unimodulaire transformaties van het periodenpaar.

Door een unimodulaire transformatie (3.3.10) gaat de verzameling der roosterpunten

$$w = n_1\omega_1 + n_2\omega_2, \quad (n_1 n_2) \neq (0,0),$$

in zichzelf over. Wegens (3.1.3), (3.1.5), ...,(3.1.7) heeft men dus

$$\begin{aligned} \sigma(u|\omega_1',\omega_2') &= \sigma(u|\omega_1,\omega_2), \\ \zeta(u|\omega_1',\omega_2') &= \zeta(u|\omega_1,\omega_2), \\ \wp(u|\omega_1',\omega_2') &= \wp(u|\omega_1,\omega_2), \\ \wp'(u|\omega_1',\omega_2') &= \wp'(u|\omega_1,\omega_2). \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Hiervan kan een toepassing worden gemaakt bij het onderzoek van de parameters η_j. Volgens (3.2.1) is

$$\sigma(u+\omega_1|\omega_1,\omega_2) = -e^{\eta_1(u+\frac{\omega_1}{2})}\sigma(u|\omega_1,\omega_2),$$

waarbij

$$\eta_1 = H(\omega_1,\omega_2) \tag{3.3.29}$$

een homogene functie is van ω_1 en ω_2 van het gewicht -1, zoals hierboven is bewezen. Cyclische verwisseling van de perioden geeft

$$\sigma(u+\omega_2|\omega_2,\omega_3) = -e^{H(\omega_2,\omega_3)(u+\frac{\omega_2}{2})}\sigma(u|\omega_2,\omega_3).$$

Nu is de transformatie $(\omega_1,\omega_2) \to (\omega_2,\omega_3)$ volgens (3.3.20) unimodulair; uit (3.3.28) volgt dus

$$\sigma(u+\omega_2) = -e^{H(\omega_2,\omega_3)(u+\frac{\omega_2}{2})}\sigma(u)$$

als we de σ-functie weer stilzwijgend van de oude perioden (ω_1,ω_2) laten afhangen. Wegens (3.2.1) is dan

$$\eta_2 = H(\omega_2,\omega_3). \tag{3.3.30}$$

Door cyclische verwisseling van de grootheden ω_j worden dus ook de grootheden η_j cyclisch verwisseld.

Het is mogelijk de grootheden η_j op grond van deze eigenschap in een zeer eenvoudig geval, het z.g. aequianharmonische geval, te berekenen. Hierbij is

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \varepsilon, \quad \omega_3 = \varepsilon^2 \tag{3.3.31}$$

waarbij

$$\varepsilon = \exp(\tfrac{2\pi i}{3}) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}. \tag{3.3.32}$$

Wegens (3.3.29), (3.3.30) is dan

$$\eta_1 = H(1,\varepsilon), \quad \eta_2 = H(\varepsilon,\varepsilon^2),$$

en omdat H homogeen van het gewicht -1 is,

$$\eta_2 = \varepsilon^{-1}H(1,\varepsilon) = \varepsilon^2\eta_1.$$

Met behulp van de betrekking (3.3.2) van Legendre levert dit

$$(3.3.33)\qquad \eta_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},\quad \eta_2 = \frac{2\pi\varepsilon^2}{\sqrt{3}},\quad \eta_3 = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

§ 4. De functies σ en σ_j van Weierstrass.

Naast de sigmafunctie, die door het kanonieke product (3.1.3) wordt voorgesteld, heeft Weierstrass drie "sigmafuncties met index" ingevoerd:

$$(3.4.1)\qquad \sigma_j(u) = \sigma_j(u|\omega_1,\omega_2) = -e^{\frac{\eta_j u}{2}}\,\frac{\sigma(u-\frac{\omega_j}{2})}{\sigma(\frac{\omega_j}{2})}\qquad (j=1,2,3).$$

Men zou desnoods deze functie kunnen ontberen en met het functieteken σ kunnen volstaan, evenals men desnoods de functie cos zou kunnen missen en alleen de sinus gebruiken. Zowel in het ene als in het andere geval rechtvaardigt én een kortere notatie én een verheldering van het inzicht de invoering van functietekens, die van een formeel standpunt bezien misschien overtollig zijn.

Omdat $\sigma(u)$ geheel is, zijn ook de functies $\sigma_j(u)$ geheel. Omdat $\sigma(u|\omega_1,\omega_2)$ homogeen is in zijn argumenten geldt dit ook voor iedere $\sigma_j(u|\omega_1,\omega_2)$. Im tegenstelling tot σ is σ_j echter van het gewicht nul tengevolge van de noemer $\sigma(\frac{\omega_j}{2})$ in (3.4.1). Verder is

$$(3.4.2)\qquad \sigma_j(-u) = -e^{-\frac{\eta_j u}{2}}\,\frac{\sigma(-u-\frac{\omega_j}{2})}{\sigma(\frac{\omega_j}{2})} = e^{-\frac{\eta_j u}{2}}\,\frac{\sigma(u+\frac{\omega_j}{2})}{\sigma(\frac{\omega_j}{2})}$$

Door u in (3.3.1) te vervangen door $u - \frac{\omega_j}{2}$ verkrijgt men

$$\sigma(u+\tfrac{\omega_j}{2}) = -\,e^{\eta_j u}\,\sigma(u-\tfrac{\omega_j}{2}),$$

wat ingezet in (3.4.2) geeft

$$(3.4.3)\qquad \sigma_j(-u) = -e^{\frac{\eta_j u}{2}}\,\frac{\sigma(u-\frac{\omega_j}{2})}{\sigma(\frac{\omega_j}{2})} = \sigma_j(u).$$

De sigmafuncties met index zijn dus even. Uit (3.4.1) volgt nog

$$(3.4.4)\qquad \sigma_j(0) = 1.$$

Analoog aan (3.3.1) heeft mende transformatieformules

$$(3.4.5)\qquad \sigma_j(u+\omega_k) = (-)^{\delta_{jk}}\,e^{\eta_k(u+\frac{\omega_k}{2})}\,\sigma_j(u)\qquad (j,k=1,2,3)$$

waarbij δ_{jk} het symbool van Kronecker voorstelt:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{voor } j = k \\ 0 & \text{voor } j \neq k \end{cases}.$$

Aangezien $\sigma(u)$ de punten $w = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ van het rooster (w) als (enkelvoudige) nulpunten bezit, heeft $\sigma_j(u)$, voor een bepaalde waarde van j, de enkelvoudige nulpunten

$$w_j = w + \frac{\omega_j}{2}.$$

Deze vormen een nieuw rooster, dat kortheidshalve door (w_j) zal worden voorgesteld. Het rooster (w_j) ontstaat door (w) aan een translatie $\frac{\omega_j}{2}$ te onderwerpen, en is dus met (w) congruent. Ieder punt van (w_j) ligt halverwege twee roosterpunten van (w), zonder dat (w) en (w_j) punten gemeen hebben. Door de tweedimensionaliteit van (w) zijn er drie roosters (w_j) met deze eigenschap. Het is vooral dit eenvoudige meetkundige feit, dat de invoering van drie perioden ω_1, ω_2 en ω_3 rechtvaardigt.

In het ééndimensionale analogon is er slechts één rooster, dat de intervallen tussen de opeenvolgende punten van het rooster $(n\pi)$ halveert. Dit maakt dat aan de oneven functie $\sin z$, met de nulpunten $n\pi$, slechts één even functie $\cos z$ beantwoordt, waarvan de nulpunten met het "halverende" rooster samenvallen. In ons tweedimensionale geval beantwoordt de oneven functie $\sigma(u)$ aan het fundamentele rooster (w), maar er zijn nu drie halverende roosters (w_j), die met de drie even functies $\sigma_j(u)$ corresponderen. Het volgende schema geeft hiervan rekenschap.

Aantal dimensies:	1	2
Oneven functies:	$\sin z$	$\sigma(u)$
Even functies:	$\cos z$	$\sigma_j(u)$ $(j=1,2,3)$

Omdat $\sigma(u)$ ten hoogste van de orde 2 is, geldt dit wegens (3.4.1) ook voor de functie $\sigma_j(u)$; σ_j is dus ten hoogste van het geslacht 2. Omgekeerd vormen de nulpunten van σ_j een tweedimensionaal rooster, zodat het geslacht van σ_j ten minste 2 is. De sigmafuncties met index hebben dus het geslacht 2.

Wegens (1.2.12), (3.2.13) correspondeert met iedere σ_j een ϑ_{kl} op zodanige wijze, dat de nulpunten van elk functiepaar homothetische roosters vormen. Deze correspondentie kan als volgt worden voorgesteld:

(3.4.6)
$$\begin{cases} \text{Oneven functies:} & \vartheta_{11} \sim \sigma; \\ \text{Even functies:} & \vartheta_{10} \sim \sigma_1,\ \vartheta_{01} \sim \sigma_2,\ \vartheta_{00} \sim \sigma_3. \end{cases}$$

Tot op zekere hoogte maakt dit schema duidelijk <u>waarom</u> er vier thetafuncties zijn. Wil men één bepaalde theta uit het viertal onderscheiden, dan is het redelijk hiervoor ϑ_{11} te nemen. Jacobi koos ϑ_{01} als fundamentele theta (waarom?), en in dit opzicht werd zijn notatie gevolgd door Weierstrass, Halphen, Briot en Bouquet e.a. Jordan indiceerde de theta's als de corresponderende sigmafuncties:

$$\vartheta_{11} = i\vartheta,\ \vartheta_{10} = \vartheta_1,\ \vartheta_{01} = \vartheta_2,\ \vartheta_{00} = \vartheta_3,$$

wat eveneens een logische notatie geeft.

Het verband tussen de indices in (3.4.6) kan voor de even functies worden weergegeven door

(3.4.7) $$\vartheta_{k,l} \sim \sigma_h, \quad h \equiv k + 2l(3).$$

[Vgl. (4.2.2), waar dezelfde betrekking enigszins anders wordt geformuleerd.] Overigens kan de wiskundige waarde van (3.4.7) worden betwijfeld

De exacte betrekkingen tussen de sigmafuncties met index en de even theta's volgen direct uit (1.2.12), (3.2.13), 3,3,2) en (3.3.4):

$$(3.4.8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_{10}(z)}{\vartheta_{11}'(0)} = \omega_1^{-1}\sigma(\dfrac{\omega_1}{2})e^{-\frac{\pi i}{2}-\frac{\eta_1\omega_1}{8}-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_1(u), \\ \dfrac{\vartheta_{01}(z)}{\vartheta_{11}'(0)} = \omega_1^{-1}\sigma(\dfrac{\omega_2}{2})e^{-\pi i-\frac{\eta_2\omega_2}{8}-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_2(u), \\ \dfrac{\vartheta_{00}(z)}{\vartheta_{11}'(0)} = \omega_1^{-1}\sigma(\dfrac{\omega_3}{2})e^{\frac{\pi i}{4}-\frac{\eta_3\omega_3}{8}-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_3(u). \end{cases}$$

Deze formules zijn niet geheel symmetrisch, blijkbaar omdat de theta's behalve van z ook nog afhangen van τ, wat het periodenpaar (ω_1,ω_2) in een uitzonderlijke positie plaatst. Nu is reeds bewezen, dat de grootheden η_j tegelijk met de grootheden ω_j cyclisch worden verwisseld. Dit toegepast op (3.2.13) en (3.4.8) levert een twaalftal formules, die weer tot een tweetal kunnen worden samengevat, nl. één betrekking voor de even en één voor de oneven functies:

$$\ldots\qquad (3.4.9)\begin{cases} \dfrac{\vartheta_{11}(z_j|\tau_j)}{\vartheta_{11}'(0|\tau_j)} = \omega_j^{-1}\, e^{-\frac{\eta_j u^2}{2\omega_j}}\sigma(u), \\ \dfrac{\vartheta_{k,l}(z_j|\tau_j)}{\vartheta_{11}'(0|\tau_j)} = \varepsilon_{k,l}\omega_j^{-1}\, e^{-\frac{\eta_j u^2}{2\omega_j}}\sigma^*_{j+h-1}(u) \qquad (j=1,2,3). \end{cases}$$

Hier moeten de indices van de σ^*-functies zo nodig modulo 3 worden gereduceerd; h is door (3.4.7) bepaald, en verder werd geschreven

$$(3.4.10)\qquad z_j = \frac{u}{\omega_j},\quad \tau_j = \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} \qquad (j=1,2,3),$$

$$(3.4.11)\quad \sigma^*_j(u) = \sigma(\frac{\omega_j}{2})\, e^{-\frac{\eta_j\omega_j}{8}}\sigma_j(u) = -e^{\frac{\eta_j}{2}(u-\frac{\omega_j}{4})}\sigma(u-\frac{\omega_j}{2}) \quad (j=1,2,3)$$

$$(3.4.12)\qquad \varepsilon_{10} = -i,\ \varepsilon_{01} = -1,\ \varepsilon_{00} = e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Afgezien van de numerieke factoren ε_{kl} is de symmetrie in deze betrekkingen bevredigend.

De functies $\sigma^*_j(u)$ die hier op ongedwongen wijze voor de dag komem verschillen van de functies $\sigma_j(u)$ alleen door een andere normering: i.p.v. (3.4.4) heeft men

$$(3.4.13)\qquad U_j = \sigma^*_j(0) = e^{-\frac{\eta_j\omega_j}{8}}\sigma(\frac{\omega_j}{2}).$$

Evenals de functies $\sigma_j(u)$ zijn ze geheel, even, en homogeen in de argumenten, maar nu van het gewicht 1, zodat ze zich in dit opzicht geheel als $\sigma(u)$ gedragen. De transformatieformules waarbij het argument met een gehele periode wordt vermeerderd, zijn natuurlijk dezelfde als welke voor $\sigma_j(u)$ gelden [zie (3.4.5)]. Wordt het argument echter met een halve periode vermeerderd, dan verkrijgt men eenvoudiger betrekkingen dan bij de functies σ_j het geval is:

$$(3.4.14)\begin{cases} \sigma^*_j(u+\frac{\omega_j}{2}) = -e^{\frac{\eta_j}{2}(u+\frac{\omega_j}{4})}\sigma(u), \\ \sigma^*_j(u+\frac{\omega_{j+1}}{2}) = -e^{-\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{\eta_{j+1}}{2}(u+\frac{\omega_{j+1}}{4})}\sigma^*_{j+2}(u), \\ \sigma^*_j(u+\frac{\omega_{j+2}}{2}) = -e^{\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{\eta_{j+2}}{2}(u+\frac{\omega_{j+2}}{4})}\sigma^*_{j+1}(u). \end{cases}$$

Stelling. Iedere elliptische functie $f(u\,|\omega_1,\omega_2)$ kan door een quotiënt van twee sigmaproducten worden voorgesteld.

Bewijs. Laat f van de orde n zijn (dus $n \geq 2$, zoals vroeger werd bewezen), en laat f in het door $(\vec{\omega}_1,\vec{\omega}_2)$ beschreven parallelogram de nulpunten $a_1,a_2,\ldots,a_n$ en de polen $b_1,b_2,\ldots,b_n$ bezitten (meervoudige meervoudig geteld). Dan is (vgl. T.F. 9):

$$(3.4.15)\quad \sum_{k=1}^{n} a_k \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad (\omega_1,\omega_2).$$

Men kan dus óók een stel nulpunten $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ en polen $\beta_1,\ldots,\beta_n$ kiezen zó dat

$$(3.4.16)\quad \sum_{1}^{n} \alpha_k = \sum_{1}^{n} \beta_k.$$

Dan heeft de meromorphe functie

$$g(u) = \prod_{u=1}^{n} \frac{\sigma(u-\alpha_k)}{\sigma(u-\beta_k)}$$

dezelfde nulpunten en polen als f(u), met dezelfde multipliciteiten. Bovendien is g(u) elliptisch, immers wegens (3.4.16) is

$$g(u+\omega_j) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sigma(u+\omega_j-\alpha_k)}{\sigma(u+\omega_j-\beta_k)} = \frac{\exp \sum_{k=1}^{n} \eta_j(u-\alpha_k+\frac{\omega_j}{2})}{\exp \sum_{k=1}^{n} \eta_j(u-\beta_k+\frac{\omega_j}{2})} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sigma(u-\alpha_k)}{\sigma(u-\beta_k)} = g(u)$$

voor j = 1,2. Volgens de eerste stelling van Liouville is het quotiënt van f en g dus een constante, q.e.d.

Omgekeerd volgt uit dit bewijs de existentie van elliptische functies voor iedere orde $n \geq 2$, zelfs met willekeurig voorgeschreven nulpunten en polen, voor zo ver deze aan de betrekking (3.4.15) voldoen. Bij gegeven orde n kan men dus 2n-1 polen en nulpunten willekeurig kie-

zen (meervoudige meervoudig geteld).

In de verkregen ontwikkeling

$$(3.4.17)\qquad f(u) = c \prod_{k=1}^{n} \frac{\sigma(u-\alpha_k)}{\sigma(u-\beta_k)},$$

waarbij c een constante is, is de elliptische functie f door een quotiënt van twee gehele functies voorgesteld. Dergelijke voorstellingen komen al bij Gauss en Jacobi voor; Jacobi definieerde de elliptische functies eerst als omkeerfuncties van elliptische integralen, later als quotiënten van thetafuncties. Uit (3.4.9) en (3.4.17) kan onmiddellijk een dergelijke voorstelling van f als thetaquotiënt worden verkregen.

§ 5. De functies ζ en $\wp$.

Uit (3.1.4) en (3.3.1) wordt onmiddellijk de transformatieformule van de zetafunctie verkregen:

$$(3.5.1)\qquad \zeta(u+\omega_j) = \zeta(u) + \eta_j. \qquad (j = 1,2,3).$$

Omdat $\zeta(u)$ oneven is, volgt hieruit voor $u = -\frac{\omega_j}{2}$:

$$(3.5.2)\qquad \eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \qquad (j = 1,2,3).$$

Wegens (3.1.5) is dus

$$\eta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{4}{\omega_1} + \sum{}' \left\{ \frac{2}{\frac{\omega_1}{2} - n_1\omega_1 - n_2\omega_2} + \frac{2}{n_1\omega_1+n_2\omega_2} + \frac{\omega_1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2} \right\}.$$

Splitst men deze absoluut convergente reeks volgens het schema

$$\sum{}' = \sum_{\substack{n_2=0 \\ n_1\neq 0}} + \sum_{n_2\neq 0} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}$$

dan geeft dit

$$\eta_1 = \frac{4}{\omega_1} + \lim_{N\to\infty} \sum_{0<|n_1|\leq N} \left\{ -\frac{4}{(2n_1-1)\omega_1} + \frac{2}{n_1\omega_1} + \frac{\omega_1}{(n_1\omega_1)^2} \right\} +$$

$$+ \lim_{N\to\infty} \sum_{0<|n_2|\leq N} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{4}{(2n_1-1)\omega_1+n_2\omega_2} + \frac{2}{n_1\omega_1+n_2\omega_2} + \frac{\omega_1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2} \right\} =$$

$$= \sum_{n_1\neq 0}^{(-\infty,\infty)} \frac{\omega_1}{(n_1\omega_1)^2} - 4 \lim_{N\to\infty} \sum_{0<|n_2|\leq N} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n_1-1)\omega_1+n_2\omega_2} +$$

$$+ \lim_{N\to\infty} \sum_{0<|n_2|\leq N} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2},$$

of, omdat de tweede som in het laatste lid verdwijnt,

$$(3.5.3)\qquad \eta_1 = \omega_1 \lim_{N\to\infty} \sum_{|n_2|\leq N} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2},$$

waarmee een expliciete voorstelling van η_1 is verkregen.

Voor de juistheid van (3.5.3) is het nodig, - er moge nog eens aan

worden herinnerd -, dat

$$\operatorname{Im} \tau = \operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0.$$

Het is ongeoorloofd de volgorde van de sommaties in (3.5.3) te verwisselen; deed men dit toch dan zou een andere uitkomst worden verkregen. Dit kan als volgt worden ingezien: de grootheden η_j worden tegelijk met de grootheden ω_j cyclisch verwisseld, zodat volgens (3.5.3)

$$(3.5.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\eta_2}{\omega_2} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|n_1|\le N} \sum\limits_{n_2=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{1}{(n_2\omega_2+n_1\omega_3)^2} = \\ = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|n_1|\le N} \sum\limits_{n_2=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{1}{\{n_1\omega_1 + (n_1 - n_2)\omega_2\}^2} = \\ = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|n_1|\le N} \sum\limits_{n_2=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2}. \end{cases}$$

Uit de betrekking van Legendre volgt echter

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} \neq \frac{\eta_2}{\omega_2}.$$

Zij (ω_1', ω_2') een primitief periodenpaar, dat uit (ω_1, ω_2) ontstaat door de transformatie

$$(3.3.10)\quad \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2,\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \qquad (ad - bc = 1),$$

en waaraan de constanten (η_1', η_2') beantwoorden. Volgens (3.5.1) is dan

$$(3.5.5)\quad \zeta(u+\omega_j' \mid \omega_1', \omega_2') = \zeta(u \mid \omega_1', \omega_2') + \eta_j' \qquad (j = 1,2,3),$$

terwijl volgens (3.3.28) voor <u>unimodulaire</u> transformaties:

$$\zeta(u \mid \omega_1', \omega_2') = \zeta(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Voor (3.5. 5) kan dan worden geschreven

$$(3.5.6)\quad \zeta(u+a\omega_1+b\omega_2) = \zeta(u) + \eta_1',\ \zeta(u+c\omega_1+d\omega_2) = \zeta(u) + \eta_2'.$$

Door inductie naar n_1 en n_2 volgt uit (3.5.1)

$$(3.5.7)\quad \zeta(u+n_1\omega_1+n_2\omega_2) = \zeta(u) + n_1\eta_1 + n_2\eta_2,$$

zodat wegens (3.5.6)

$$(3.5.8)\quad \eta_1' = a\eta_1 + b\eta_2,\ \eta_2' = c\eta_1 + d\eta_2.$$

Bij unimodulaire transformaties worden de grootheden (η_1, η_2) dus cogrediënt aan (ω_1, ω_2) getransformeerd. Met een bijzonder geval van unimodulaire transformatie hebben wij reeds kennis gemaakt, nl. met de cyclische verwisseling. De stelling dat de grootheden (η_j) tegelijk met de grootheden (ω_j) cyclisch worden verwisseld, is een bijzonder geval van de nu bewezen stelling.

Uit het feit dat de paren (ω_1, ω_2) en (η_1, η_2) unimodulair covariant zijn, volgt onmiddellijk dat de beide differentiaalprocessen

(3.5.9) $D = -2(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}), \quad D^* = -2(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \eta_2})$

voor unimodulaire transformaties invariant zijn. Deze processen zijn niet onafhankelijk van elkaar. Gaat men van de onafhankelijke variabelen (ω_1, ω_2) over op (η_1, η_2) dan heeft men

$$D(f) = D(\eta_1)\frac{\partial f}{\partial \eta_1} + D(\eta_2)\frac{\partial f}{\partial \eta_2},$$

en volgens Th.F. 4,11:

(3.5.10) $D(f) = \frac{g_2}{12} D^*(f).$

Voor transformaties van hogere graad zal de operator D echter in het algemeen niet <u>invariant</u> zijn.

Na al deze voorbereidingen is het onderzoek van de $\wp$-functie niet moeilijk meer. Differentiatie van (3.5.1) levert, wegens (3.1.4),

(3.5.11) $\wp(u+\omega_j) = \wp(u) \qquad (j = 1,2,3),$

en omdat $\wp$ meromorf is, is $\wp(u|\omega_1,\omega_2)$ een elliptische functie met de perioden (ω_1, ω_2). Eerst moeten we aantonen dat (ω_1,ω_2) ook een primitief periodenpaar is, zowel van $\wp$ als van $\wp'$. Dit volgt echter direct uit het feit dat zowel $\wp$ als $\wp'$ in een door $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ beschreven parallelogram, wegens (3.1.6) en (3.1.7), slechts één pool (van hogere orde) hebben, nl. u = 0. Men kan het ook langs een min of meer getallentheoretische weg inzien, nl. met behulp van de volgende

<u>Stelling</u>. Als een elliptische functie $f(u|\omega_1,\omega_2)$ de orde p bezit, waarbij p priem, dan is (ω_1,ω_2) een primitief periodenpaar.

Immers, de orde n van f in een <u>kleiner</u> parallelogram zou, volgens het vroeger bewezene, een echte deler van p, dus gelijk 1 moeten zijn, wat onmogelijk is.

Volgens (3.1.6) en (3.1.7) is de totale multipliciteit van de polen van $\wp$ resp. $\wp'$ in een door $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ beschreven parallelogram 2 resp. 3, waaruit de bewering volgt. In een primitief periodenparallelogram is $\wp$ dus van de orde 2, $\wp'$ van de orde 3.

Aangezien $\wp'(u)$ oneven is, heeft men

(3.5.12) $\wp'(\frac{\omega_j}{2}) = 0 \qquad (j = 1,2,3),$

en omdat $\wp'$ van de derde orde is, zijn de nulpunten $\frac{\omega_j}{2}$ de enige nulpunten van $\wp'$ in het door $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ beschreven parallelogram. Stel

(3.5.13) $\wp(\frac{\omega_j}{2}) = e_j \qquad (j = 1,2,3).$

Wegens (3.5.12) wordt de waarde e_j voor $u = \frac{\omega_j}{2}$ ten minste tweemaal door $\wp$ aangenomen; maar omdat p de orde 2 heeft wordt de waarde e_j ten hoogste tweemaal, dus ook precies tweemaal aangenomen. De grootheden e_j moeten dus onderling verschillend zijn:

(3.5.14) $e_j \neq e_k \qquad (j \neq k).$

Wegens (3.1.6) zijn de grootheden e_j homogene functies van ω_1, ω_2 van het gewicht -2.

In (eindige of oneindige) grootheid α heet een <u>volledig multipele waarde</u> van een functie f(u), als alle wortels van de vergelijking $f(u) = \alpha$ multipel zijn. Door Nevanlinna (l.c. p. 102) is bewezen dat een meromorfe functie f(u) ten hoogste 4 volledig multipele waarden bezit. Uit het bovenstaande volgt dat de $\wp$-functie precies 4 volledig multipele waarden heeft, nl. (e_1, e_2, e_3, ∞). De grens 4 van Nevanlinna kan dus niet door een kleinere worden vervangen.

Voor $|u| < |w|$ geldt

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \ldots,$$

dus, volgens (3.1.6),

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \ldots\right)$$

of

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum{}' \frac{1}{w^4} + 5u^4 \sum{}' \frac{1}{w^6} + \ldots .$$

Deze reeks is absoluut convergent binnen de cirkel om de oorsprong, die gaat door het (c.q. een) dichtst bij de oorsprong gelegen roosterpunt $w \neq 0$. De coëfficiënten zijn op een constante factor na de vroeger ingevoerde modulaire vormen. Met behulp van de notatie (3.1.13) kan geschreven worden

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3G_2u^2 + 5G_3u^4 + 7G_4u^6 + \ldots . \tag{3.5.15}$$

Differentiatie geeft

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + 6G_2u + 20G_3u^3 + 42G_4u^5 + \ldots$$

en een eenvoudige berekening levert

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + 60G_2\wp(u) + 140G_3 = u^2\mathcal{R}(u^2),$$

waarbij $\mathcal{R}(u^2)$ een machtreeks in u^2 voorstelt. Het linkerlid van deze betrekking is een elliptische functie die alleen de roosterpunten w tot polen heeft. Uit de uitdrukking in het rechterlid blijkt evenwel dat $u = 0$ een regulair punt is, m.a.w. de beschouwde elliptische functie is overal holomorf, en dus identiek gelijk aan een constante. Dit levert

$$\wp'^2(u) - 4\wp^3(u) + 60G_2\wp(u) + 140G_3 = 0.$$

Stelt men

$$g_2 = 60G_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140G_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}, \tag{3.5.16}$$

dan is hiermee de differentiaalvergelijking

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 \tag{3.5.17}$$

voor de $\wp$-functie verkregen.

De grootheden g_2 en g_3 heten de <u>invarianten</u> van $\wp$. Omdat het rooster

$\{w\}$ voor unimodulaire transformaties invariant is, zijn g_2 en ig_3 wegens (3.5.16) unimodulair invariant. Verder is g_2 van het gewicht -4, g_3 van het gewicht -6 in de perioden.

Voor $u = \frac{\omega_j}{2}$ gaat (3.5.17), wegens (3.5.12) en (3.5.13) over in

$$4e_j^3 - g_2 e_j - g_3 = 0 \qquad (j = 1,2,3),$$

zodat de onderling verschillende grootheden e_j de wortels zijn van de vergelijking

(3.5.18) $$4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

Men heeft dus ook

(3.5.19) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}.$$

Volgens (3.5.14) moet de discriminant Δ van (3.5.18) van nul verschillen:

(3.5.20) $$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

De discriminant is dus een homogene functie van de perioden van het gewicht -12, die invariant is voor unimodulaire transformaties.

Zij tenslotte

(3.5.21) $$J = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Omdat zowel de teller als de noemer van het rechterlid unimodulaire invarianten zijn, is dit ook met J het geval. Maar bovendien zijn deze teller en noemer beide homogeen van het gewicht -12 in de perioden (ω_1,ω_2), m.a.w. J is een unimodulaire invariant van het gewicht nul, de zgn. <u>absolute invariant</u>. Bijgevolg is J een functie van τ alléén, die voldoet aan

(3.5.22) $$J(\tau') = J(\tau) \qquad \left(\tau' = \frac{d\tau+c}{b\tau+a}, \ ad-bc=1\right).$$

Twee punten (τ, τ') die door een unimodulaire transformatie (3.3.10) in elkaar overgaan heten <u>aequivalent</u> (Hurwitz 1904). Blijkbaar behoort er bij ieder punt τ uit het bovenste halfvlak een aftelbare verzameling $\{\tau_n\}$ van met τ aequivalente punten.

Een functie $f(\tau)$ heet een <u>modulaire functie</u> als:

(a) f in het bovenste halfvlak eenduidig en op geïsoleerde singulariteiten na analytisch is;

(b) f slechts eindig veel waarden aanneemt wanneer τ een verzameling $\{\tau_n\}$ van aequivalente punten doorloopt.

$J(\tau)$ is dus een modulaire functie; zelfs kan $J(\tau)$ tot op zekere hoogte als de standaardvorm van de modulaire functies worden beschouwd, zoals $p(u)$ dit voor de elliptische functies is.

Een homogene bivariabele functie $F(\omega_1,\omega_2)$ heet een <u>modulaire vorm</u> als:

(a) F voor alle waardeparen (ω_1,ω_2), waarvoor $\mathrm{Im}\,\tau > 0$, op geïsoleerde singulariteiten na analytisch is;

(b) F voor unimodulaire transformaties van (ω_1,ω_2) slechts eindig veel waarden aanneemt.

Het quotient van twee modulaire vormen van hetzelfde gewicht in ω_1 en ω_2 is dus in ieder geval een modulaire functie, als beide vormen voor dezelfde transformaties invariant zijn. Zoals we zagen doet een dergelijk geval zich voor bij de modulaire vormen g_2^3 en Δ.

De volgende (belangrijke!) problemen zullen later worden behandeld:

(a) $J(\tau)$ is een holomorfe functie van q voor $0<|q|<1$. Gevraagd wordt de aard van de singulariteit van J voor q=0 aan te geven. (De singulariteit is een pool van de eerste orde.)

(b) Bij ieder periodenpaar (ω_1,ω_2) behoort een elliptische functie $p(u|\omega_1,\omega_2)$ met een tweetal invarianten g_2,g_3. Gevraagd wordt of omgekeerd voor ieder paar (g_2,g_3) (waarvoor $\Delta\neq 0$) een elliptische functie $p(u|\omega_1,\omega_2)$ bestaat die dit paar tot invarianten heeft (het antwoord is bevestigend).

Met het oog op de tabellering van $\wp(u)$ gaan we nog na in welke gevallen $\wp(u)$ reëel is voor reële waarden van u. Zij ω een willekeurige periode van $\wp$. Uit

$$\wp(u+\omega)=\wp(u)$$

volgt dan

$$\wp(u+\overline{\omega})=\wp(u),$$

m.a.w. tegelijk met ω moet de toegevoegd complexe grootheid $\overline{\omega}$ eveneens een periode zijn. Dan zijn ook $\omega+\overline{\omega}$ en $\omega-\overline{\omega}$ perioden, m.a.w. $\wp$ bezit zowel een reële als een zuiver imaginaire periode.

Laten ω_1 en ω_2 de absoluut kleinste reële resp. zuiver imaginaire periode zijn van $\wp$ (waarbij b.v. $\omega_1>0$, Im $\omega_2>0$). Beschouw de door $(\vec{\omega}_1,\vec{\omega}_2)$ beschreven rechthoek. De hoekpunten van deze rechthoek zijn perioden; op de zijden liggen volgens deze afspraak geen andere perioden. Is ω een periode uit het inwendige van de rechthoek, dan moet $\omega+\overline{\omega}$ een geheel veelvoud zijn van ω_1 en $\omega-\overline{\omega}$ een geheel veelvoud van ω_2. Blijkbaar is dit alleen mogelijk als $\omega=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$. Er zijn dus twee gevallen mogelijk:

(a) het zgn. <u>rechthoekige geval</u>; in het inwendige van de rechthoek (ω_1,ω_2) ligt geen periode, en deze rechthoek vormt een primitief periodenparallelogram;

(b) het zgn. <u>rhombische geval</u>; behalve ω_1 en ω_2 is ook $\omega=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ een periode; de door $(\vec{\omega},\vec{\overline{\omega}})$ beschreven ruit vormt een primitief periodenparallelogram.

Is omgekeerd aan de voorwaarde voldaan, dat tegelijk met een primitief periodenpaar (ω_1,ω_2) ook $(\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2)$ een perioden paar is (waarbij uiteraard de mogelijkheid $\omega_2=\overline{\omega}_1$ niet is uitgesloten, zoals het rhombische geval leert), dan zijn volgens (3.1.13) alle modulaire vormen G_k reëel, en is dus ook $\wp(u)$ wegens (3.5.15) reëel.

Volgens de laatste stelling van § 4 kan de functie $\wp(u)-\wp(v)$, die voor eindige waarden van $\wp(v)$, dus voor

$$v \not\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2},$$

beschouwd kan worden als een elliptische functie van u, worden voorgesteld door een quotient van sigmafuncties. Deze functie heeft het punt $u=0$ als dubbeltellende pool, terwijl de punten $u_1=v$ en $u_2=-v$ nulpunten zijn. Wegens $u_1+u_2=0$ heeft men dan de voorstelling

$$\wp(u)-\wp(v)=C\,\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)} \tag{3.5.23}$$

waarbij C een van u onafhankelijke grootheid is (vgl. het bewijs van de hier gebruikte stelling!). Ontwikkelt men beide leden van (3.5.23) naar opklimmende machten van u, en vergelijkt men de coëfficienten van de termen die u^{-2} bevatten, dan blijkt

$$C=\frac{1}{\sigma(v)\sigma(-v)}=-\frac{1}{\sigma^2(v)}$$

zodat

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}\,. \tag{3.5.24}$$

Voor $v=\frac{\omega_j}{2}$ volgt hieruit volgens (3.4.1), (3.4.2),(3.5.13):

$$\wp(u)-e_j=\frac{\sigma_j^2(u)}{\sigma^2(u)}\,,$$

en men kan de wortel uit deze uitdrukkingen zo normeren dat

$$\sqrt{\wp(u)-e_j}=\frac{\sigma_j(u)}{\sigma(u)} \qquad (j=1,2,3); \tag{3.5.25}$$

in het u-vlak is het linkerlid van (3.5.25) dan een eenwaardige functie.

Wegens (3.5.13),(3.5.17) heeft men

$$\wp'^2(u)=4\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}\,,$$

zodat uit (3.5.25) volgt

$$\wp'^2(u)=\frac{4\,\sigma_1^2(u)\,\sigma_2^2(u)\,\sigma_3^2(u)}{\sigma^6(u)}$$

of

$$\wp'(u)=\pm 2\,\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}\,.$$

Om het teken te bepalen worden beide leden weer in de omgeving van $u=0$ naar opklimmende machten van u ontwikkeld, en de coëfficienten van de termen in u^{-3} vergeleken. Rekening houdend met (3.4.4) blijkt dan

$$\wp'(u)=-2\,\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}\,, \tag{3.5.26}$$

of, wegens (3.5.25),

$$\wp'(u)=-2\sqrt{\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}}\,.$$

Met behulp van de in (3.5.25) ingevoerde normering van de wortels levert dit

$$(3.5.27) \qquad u-u_0 = -\tfrac{1}{2}\int_{\wp(u_0)}^{\wp(u)} \frac{ds}{\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}},$$

zodat de inverse van de $\wp$-functie een elliptische integraal is van de eerste soort met variabele bovengrens. Om het omgekeerde te kunnen bewijzen moet eerst aangetoond worden dat bij ieder invariantenpaar (g_2,g_3) een $\wp$-functie behoort (zie probleem (b) hierboven).

Uit (3.5.24) kan het optellingstheorema van de $\wp$-functie worden afgeleid. Logarithmische differentiatie naar u levert

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)} = \zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u).$$

Verwisseling van u en v hierin geeft

$$-\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)} = \zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta(v),$$

zodat ook

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = \zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v).$$

Differentieert men opnieuw naar u dan wordt het optellingstheorema in statu nascendi verkregen:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\wp''(u)}{\wp(u)-\wp(v)} - \frac{\wp'(u)(\wp'(u)-\wp'(v))}{(\wp(u)-\wp(v))^2}\right\} = -\wp(u+v)+\wp(u).$$

Om er een handiger gedaante aan te geven wordt eerst weer u met v verwisseld:

$$\tfrac{1}{2}\left[-\frac{\wp''(v)}{\wp(u)-\wp(v)} + \frac{\wp'(v)\{\wp'(u)-\wp'(v)\}}{\{\wp(u)-\wp(v)\}^2}\right] = -\wp(u+v)+\wp(v)$$

zodat

$$(3.5.28) \quad \tfrac{1}{2}\left[\frac{\wp''(u)-\wp''(v)}{\wp(u)-\wp(v)} - \left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}^2\right] = -2\wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v).$$

Nu volgt uit (3.5.17) door differentiatie:

$$\wp''(u)=6\wp^2(u)-\tfrac{1}{2}g_2,$$

zodat

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\wp''(u)-\wp''(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = 3\{\wp(u)+\wp(v)\}$$

wat ingezet in (3.5.28) geeft

$$(3.5.29) \quad \wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}^2.$$

Stelling. Een even elliptische functie f(u) kan rationaal worden uitgedrukt in de $\wp$-functie $\wp(u)$ met dezelfde primitieve perioden.

Bewijs. Beschouw eerst de nulpunten van f in het door $(\vec{\omega}_1,\vec{\omega}_2)$ beschreven parallelogram, en hiervan weer eerst die nulpunten die van hele of halve perioden verschillen. Is α een dergelijk nulpunt, dan is er een

ander dergelijk nulpunt α_1 met de eigenschap

$$\alpha_1 \equiv -\alpha \pmod{\omega_1, \omega_2}.$$

Men kan deze nulpunten dus in paren groeperen, en van elk paar één representant nemen.

Vervolgens: is een nulpunt een halve periode, zeg $\frac{\omega_j}{2}$, dan is

$$f(u+\tfrac{\omega_j}{2}) = f(-u+\tfrac{\omega_j}{2}),$$

zodat een ontwikkeling van $f(u+\frac{\omega_j}{2})$ in een machtreeks naar u met een even macht van u begint. Een dergelijk nulpunt heeft dus een even multipliciteit.

Men kan dus de helft van alle nulpunten $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, die niet aan een periode gelijk zijn, zó kiezen dat de andere helft congruent $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$ modulis perioden is (meervoudige nulpunten meervoudig geteld!). Voor de polen geldt m.m. hetzelfde als voor de nulpunten; zij $(\beta_1 \ldots \beta_m)$ een analoge helft van de polen (dat m=n blijkt aanstonds). Dan is de functie

$$F(u) = f(u)\,\frac{\prod_1^m \{\wp(u)-\wp(\beta_k)\}}{\prod_1^n \{\wp(u)-\wp(\alpha_k)\}}$$

elliptisch. In het gehele door $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ beschreven primitieve periodenparallelogram, met uitzondering misschien van die waarden van u, die gelijk zijn aan een periode, d.w.z. met uitzondering misschien van de waarden u=0, heeft F noch een pool, noch een nulpunt. Dit is echter alleen mogelijk als F een constante is (en m=n volgens Lionville). Dus is

$$f(u) = C \prod_1^n \frac{\wp(u)-\wp(\alpha_k)}{\wp(u)-\wp(\beta_k)}.$$

<u>Stelling</u>. Iedere elliptische functie f(u) kan rationaal worden uitgedrukt in de functies $\wp$ en $\wp'$ met dezelfde perioden.

<u>Bewijs</u>. Men kan f(u) splitsen in een even en een oneven functie f_1 resp. f_2. Dan is

$$f_2(u)/\wp'(u)$$

even; volgens de vorige stelling is dus

$$f(u) = R_1\{\wp(u)\} + \wp'(u) R_2\{\wp(u)\}$$

waarbij R_1 en R_2 rationale functies zijn.

De functie $\wp(mu)$, waarbij m geheel rationaal, heeft in elk geval de perioden ω_1 en ω_2, en is bovendien even; men kan dus $\wp(mu)$ rationaal in $\wp(u)$ uitdrukken. De expliciete formules kunnen b.v. met behulp van het optellingstheorema worden gevonden.

Zijn er nog andere multiplicatoren m, waarbij $\wp(mu)$ rationaal van $\wp(u)$ afhangt? Deze vraag is door Abel ("Recherches sur les fonctions elliptiques" 1827) bevestigend beantwoord; m moet dan tot een quadratisch

imaginair getallenlichaam behoren. Een voorbeeld van deze complexe vermenigvuldiging, aan een practisch probleem ontleend, zal nog in het kort behandeld.

Zij

(3.5.30) $\omega_1=1\ ,\ \omega_2=\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\ ,\ \wp(u|1,\varepsilon)=\wp(u),$

zodat ε een primitieve derde eenheidswortel is:

(3.5.31) $$\varepsilon^3=1,\quad \varepsilon^2+\varepsilon+1=0\ .$$

De homogeniteit van de $\wp$ -functie levert

(3.5.32) $$\wp(\varepsilon u,\varepsilon,\varepsilon^2)=\varepsilon^{-2}\wp(u|1,\varepsilon)=\varepsilon\,\wp(u).$$

Daarnaast heeft men

(3.5.33) $$\wp(\varepsilon u|\varepsilon,\varepsilon^2)=\wp(\varepsilon u|\varepsilon,-1-\varepsilon)=\wp(\varepsilon u|1,\varepsilon)=\wp(\varepsilon u),$$

omdat de $\wp$ -functie invariant is voor unimodulaire transformatie van de perioden. Uit (3.5.32) en (3.5.33) volgt dan

(3.5.34) $$\wp(\varepsilon u)=\varepsilon\,\wp(u)$$

waaruit blijkt dat ε een complexe multiplicator is.

Er moge nog even nader op dit zgn. aequianharmonische geval van de $\wp$ -functie worden ingegaan. Stelt men

(3.5.35) $$\alpha_1=\frac{2+\varepsilon}{3}\ ,\quad \alpha_2=\frac{1+2\varepsilon}{3}$$

dan is

$$\alpha_1+\alpha_2\equiv 0 \pmod{(1,\varepsilon)}$$

zodat uit het even karakter van $\wp(u)$ volgt

(3.5.36) $$\wp(\alpha_1)=\wp(\alpha_2).$$

Verder is wegens (3.5.30), (3.5.35),

$$\varepsilon\alpha_1\equiv\alpha_1 \pmod{(1,\varepsilon)}$$

dus ook

$$\wp(\varepsilon\alpha_1)=\wp(\alpha_1)$$

en volgens (3.5.34)

$$\varepsilon\,\wp(\alpha_1)=\wp(\alpha_1)$$

zodat

(3.5.37) $$\wp(\alpha_1)=\wp(\alpha_2)=0.$$

In het door $(1,\varepsilon)$ beschreven parallelogram heeft $\wp(u)$ dus de enkelvoudige nulpunten α_1 en α_2. Wegens

$$\overline{\varepsilon}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-1-\varepsilon$$

is ook de toegevoegd complexe waarde $\overline{\varepsilon}$ een periode van $\wp$. Volgens het vroeger bewezene is dus $\wp(u)$ reëel voor reële u; in het bijzonder zijn g_2 en g_3 dus reëel.

Differentiatie van (3.5.34) geeft

$$\wp'(\varepsilon u)=\wp'(u). \tag{3.5.38}$$

Met behulp van de differentiaalvergelijking van de $\wp$ -functie verkrijgt men dan

$$\wp'^2(u)=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3 = 4\wp^3(\varepsilon u)-g_2\wp(\varepsilon u)-g_3 ,$$

waaruit wegens (3.5.34) volgt

$$g_2=0 . \tag{3.5.39}$$

De differentiaalvergelijking wordt dus

$$\wp'^2(u)=4\wp^3(u)-g_3 . \tag{3.5.40}$$

Voor u positief en voldoende klein is $\wp(u)$ wegens (3.5.15) positief; omdat $\wp(u)$ op de rand van het door $(1,\varepsilon)$ beschreven parallelogram geen nulpunten heeft, is $\wp(u)$ in het gehele interval $0<u<1$ dus positief. Aan de andere kant is volgens (3.5.12)

$$\wp'(\tfrac{1}{2})=0 ,$$

zodat wegens (3.5.40)

$$\wp^3(\tfrac{1}{2})=\frac{g_3}{4} . \tag{3.5.41}$$

Bijgevolg moet g_3 positief zijn:

$$g_3>0 . \tag{3.5.42}$$

Tenslotte zoeken we nog een uitdrukking voor $\wp(\frac{1}{3})$. Uit het even karakter van $\wp$, resp. het oneven karakter van $\wp'$ volgt allereerst

$$\wp(\tfrac{2}{3})=\wp(\tfrac{1}{3}) , \quad \wp'(\tfrac{2}{3})=-\wp'(\tfrac{1}{3}) . \tag{3.5.43}$$

Het optellingstheorema (3.5.29) levert

$$\wp(\tfrac{1}{3})+\wp(\tfrac{2\varepsilon}{3})+\wp(\tfrac{1+2\varepsilon}{3})=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(\frac{1}{3})-\wp'(\frac{2\varepsilon}{3})}{\wp(\frac{1}{3})-\wp(\frac{2\varepsilon}{3})}\right\}^2 . \tag{3.5.44}$$

Volgens (3.5.34), (3.5.37), (3.5.38) en (3.5.43) heeft men

$$\wp(\tfrac{1+2\varepsilon}{3})=0 , \ \wp(\tfrac{2\varepsilon}{3})=\varepsilon\,\wp(\tfrac{2}{3})=\varepsilon\wp(\tfrac{1}{3}) , \ \wp'(\tfrac{2\varepsilon}{3})=\wp'(\tfrac{2}{3})=-\wp'(\tfrac{1}{3}),$$

wat ingezet in (3.5.44) geeft

$$(1+\varepsilon)\wp(\tfrac{1}{3})=\left\{\frac{\wp'(\frac{1}{3})}{(1-\varepsilon)\wp(\frac{1}{3})}\right\}^2 .$$

Substitutie van (3.5.40) geeft dan

$$\wp^3(\tfrac{1}{3})=g_3 . \tag{3.5.45}$$

Uit (3.5.41) en (3.5.45) volgt nog

$$\wp^3(\tfrac{1}{3})=4\wp^3(\tfrac{1}{2})$$

of

(3.5.46) $$\sqrt[3]{4} = \frac{\wp(\frac{1}{3})}{\wp(\frac{1}{2})} .$$

Het is dus mogelijk de algebraïsche grootheid $\sqrt[3]{4}$ te berekenen, als men een tabel van de $\wp$-functie voor het aequianharmonische geval ter beschikking heeft (en deze tabel bestaat). Niemand zal er over denken de wortels van de algebraïsche vergelijking

$$x^3 - 4 = 0$$

te gaan berekenen met behulp van elliptische functies. Het is echter duidelijk dat bij ingewikkelder vergelijkingen de theorie van de elliptische functies van grote waarde kan zijn.

Opmerkingen en verbeteringen.

p. 14, al. 2: Zie R.Nevaulinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (1929).

p. 14, al. 6: Het is juister de definities van de functies van eindige en oneindige orde afzonderlijk te geven. Aan de voorwaarden (3.2.2) kan nl. niet steeds gelijktijdig worden voldaan (opmerking Prof. Korevaar).

p. 34: Omdat p(u) drie gelijkwaardige perioden ω_j heeft en slechts twee nulpunten in een periodenparallelogram is het niet mogelijk de ligging van deze nulpunten op eenvoudige wijze aan te geven.

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49
A m s t e r d a m O.

Colloquium over theta-functies.

Voordracht door J. Berghuis

23 Januari 1952.

1. Enige beginformules.

Mijn voorgangers hebben reeds enige formules afgeleid, welke wij thans zullen gebruiken.

Uit ( ) valt af te leiden

$$\wp(u)-e_j = e^{-\eta_j u}\,\frac{\sigma^2(u+\frac{\omega_j}{2})}{\sigma^2(u)\sigma^2(\frac{\omega_j}{2})}\,. \tag{4.1.1}$$

Een kleine omzetting geeft dus

$$\wp(u+\tfrac{\omega_j}{2})-e_j = e^{\eta_j(u+\frac{\omega_j}{2})}\,\frac{\sigma^2(u)}{\sigma^2(u+\frac{\omega_j}{2})\sigma^2(\frac{\omega_j}{2})}\,. \tag{4.1.2}$$

Stelt men nu gemakshalve

$$U_j = e^{-\frac{1}{8}\eta_j\omega_j}\,\sigma(\tfrac{\omega_j}{2}),$$

dan geldt

$$\left[\wp(u+\tfrac{\omega_j}{2})-e_j\right]\left[\wp(u)-e_j\right] = \frac{1}{U_j^4} \tag{4.1.3}$$

en in 't bijzonder

$$(e_i-e_j)(e_k-e_j)=\frac{1}{U_j^4}\,. \tag{4.1.4}$$

Stellen we tenslotte in (4.1.1) $u=\frac{\omega_k}{2}$, dan vinden we

$$e_k-e_j = e^{-\eta_j\frac{\omega_k}{2}}\,\frac{\sigma^2(\frac{\omega_i}{2})}{\sigma^2(\frac{\omega_k}{2})\sigma^2(\frac{\omega_j}{2})} = \frac{U_i^2}{U_k^2\,U_j^2}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\eta_j\omega_k+\tfrac{1}{4}(\eta_i\omega_i-\eta_j\omega_j-\eta_k\omega_k)\right]$$

De exponent is nu gelijk aan

$$\tfrac{1}{4}\left[-2\eta_j\omega_k+(\eta_i+\eta_j)(\omega_j+\omega_k)-\eta_j\omega_j-\eta_k\omega_k\right]=\tfrac{1}{4}(\eta_k\omega_j-\eta_j\omega_k)=-\left[jk\right]\frac{\pi i}{2}\,,$$

waaruit dus volgt:

$$e_k-e_j = \exp\left\{-\left[j\,k\right]\frac{\pi i}{2}\right\}\frac{U_i^4}{U_i^2\,U_j^2\,U_k^2}\,.$$

Door cyclische verwisseling van de indices kan men 3 gelijkwaardige betrekkingen afleiden en optelling dezer betrekkingen geeft dan de

nieuwe:

$$U_i^4 + U_j^4 + U_k^4 = 0 \ . \qquad (4.1.5)$$

Een andere uitdrukking voor de e_j is gemakkelijk uit

$$3\, e_j = e_j - e_k + (e_j - e_i)$$

af te leiden:

$$e_j = \frac{1}{3}\, \frac{U_k^4 - U_i^4}{U_i^2\, U_j^2\, U_k^2}\, \exp\left\{ - \left[jk\right] \frac{\pi i}{2} \right\} . \qquad (4.1.6)$$

2. Enige relaties met theta-functies.

Het zij mij nu vergund, nadat we zovele malen - op dit colloquium theta-functies - in hoofdzaak de elliptische functies voorgeschoteld kregen, weer eens als hoofdgerecht de theta-functies te mogen opdienen.

We voeren nog even wat symbolen in:

$$z = \frac{u}{\omega_1} \ , \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \ , \ q = e^{\pi i \tau} . \qquad (4.2.1)$$

Reeds bewees mijn voorganger (zie no.( )) het verband tussen de sigma- en de theta-functies:

$$\sigma(u) = \omega_1 \frac{\vartheta_{11}(z)}{\vartheta'_{11}(0)}\, \exp\left(\frac{\eta_1\, \omega_1\, z^2}{2}\right), \qquad (4.2.2)$$

$$\sigma_j(u) = \frac{\vartheta_{cj}(z)}{\vartheta_{cj}(0)}\, \exp\left(\frac{\eta_1\, \omega_1\, z^2}{2}\right).$$

Hierin betekent cj de binaire representatie van het complement van j t.o.v. 3.

Uit de eerste gelijkheid van (4.2.2) vinden wij door te ontwikkelen naar z de relatie

$$\eta_1\, \omega_1 = - \frac{1}{3} \frac{\vartheta'''_{11}(0)}{\vartheta'_{11}(0)} \ . \qquad (4.2.3)$$

Het is nu eenvoudig om de elliptische functies om te zetten in uitdrukkingen, welke thetafuncties bevatten en zo is volledigheidshalve

$$\zeta(u) = \frac{1}{\omega_1}\, \frac{d \log \sigma(u)}{dz} = \frac{1}{\omega_1}\left[\eta_1 \omega_1 z + \frac{\vartheta'_{11}(z)}{\vartheta_{11}(z)} \right] , \qquad (4.2.4)$$

$$\wp(u) = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[- \eta_1 \omega_1 - \frac{\vartheta_{11}(z)\vartheta''_{11}(z) - \vartheta'^2_{11}(z)}{\vartheta^2_{11}(z)} \right] \qquad (4.2.5)$$

en

$$\wp(u) = e_j + \left[\frac{1}{\omega_1}\,\frac{\vartheta'_{11}(0)\,\vartheta_{cj}(z)}{\vartheta_{cj}(0)\,\vartheta_{11}(z)}\right]^2 . \qquad (4.2.6)$$

Weer passen wij reeksontwikkeling naar z toe en waar wij weten, dat $\vartheta_{11}(z)$ een oneven - , de andere theta-functies even functies van z zijn, kunnen we schrijven

$$\frac{\vartheta_{11}(z)}{\vartheta'_{11}(0)} = z + \frac{z^3}{6}\,\frac{\vartheta'''_{11}(0)}{\vartheta'_{11}(0)} + \ldots$$

en

$$\frac{\vartheta_{cj}(z)}{\vartheta_{cj}(0)} = 1 + \frac{z^2}{2}\,\frac{\vartheta''_{cj}(0)}{\vartheta_{cj}(0)} .$$

Wegens het feit, dat de reeksontwikkeling voor kleine z van $\wp(u)$ geen constante kan bevatten, is nu

$$e_j = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[\frac{1}{3}\,\frac{\vartheta'''_{11}(0)}{\vartheta'_{11}(0)} - \frac{\vartheta''_{cj}(0)}{\vartheta_{cj}(0)}\right] . \qquad (4.2.7)$$

Weer geeft de cyclische verwisseling van de indices 2 nieuwe betrekkingen en de optelling van deze geeft tenslotte

$$\frac{\vartheta'''_{11}(0)}{\vartheta'_{11}(0)} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\vartheta''_{cj}(0)}{\vartheta_{cj}(0)} . \qquad (4.2.8)$$

3. De differentiaalvergelijking.

Zoals U reeds bemerkt hebt tijdens de eerste lezing van dit colloquium, bestaan de theta-functies uit sommen over termen van de vorm

$$T = a \exp\left\{\pi i(\lambda^2 \tau + 2\lambda z)\right\} .$$

Deze T voldoet aan de volgende partiele differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 4\pi i \frac{\partial T}{\partial \tau} . \qquad (4.3.1)$$

De theta-functies voldoen dus ook aan (4.3.1). Bovendien voldoen al hun afgeleiden er aan, daar deze afgeleiden weer bestaan uit sommen over termen van de vorm T.

4. Weer enige relaties.

De differentiaalvergelijking leert ons onmiddellijk

$$\vartheta'''_{ik}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\vartheta'_{ik}(z) = 4\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\,\vartheta_{ik}(z)$$

voor alle waarden van z, in het bijzonder dus voor z = 0.

Deze betrekking, gecombineerd met (4.2.8), leidt tot een belangrijke gelijkheid, want

$$\frac{d}{d\tau} \log \frac{\vartheta_{11}'(0)}{\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0)} = 0$$

of

$$\vartheta_{11}'(0) = C\,\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0),$$

waarin de constante C (zowel voor z als τ een constante) nog nader te bepalen is.

Stellen wij dus in (1.2.5) tot en met (1.2.8) z gelijk aan nul en q infinitesimaal klein, dan vinden wij voor $C = \pi i$ en

$$\vartheta_{11}'(0) = \pi i \vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0). \qquad (4.4.1)$$

Uit de definitie van de U_j en (4.2.2.) volgt nu verder

$$U_j = \omega_1 \frac{\vartheta_{11}(\frac{\omega_j}{2\omega_1})}{\vartheta_{11}'(0)} \exp\left(-\frac{\eta_j \omega_j}{8} + \frac{\eta_1 \omega_j^2}{8\omega_1}\right)$$

$$= \omega_1 \frac{\vartheta_{11}(\frac{\omega_j}{2\omega_1})}{\vartheta_{11}'(0)} \exp\left(\frac{\omega_j}{8\omega_1}\left[\eta_1 \omega_j - \eta_j \omega_1\right]\right).$$

Voor j = 1 volgt hieruit mede wegens $\vartheta_{11}(\frac{1}{2}) = i\vartheta_{10}(0)$, dat

$$U_1 = \omega_1 \, i \frac{\vartheta_{10}(0)}{\vartheta_{11}'(0)} = \frac{\omega_1}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_{00}(0)\vartheta_{01}(0)} \qquad (4.4.3)$$

Evenzo

$$U_2 = -\omega_1 \frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_{11}'(0)} = \frac{\omega_1}{\pi} \frac{i}{\vartheta_{10}(0)\vartheta_{00}(0)} \qquad (4.4.2)$$

en

$$U_3 = \omega_1 \frac{\vartheta_{00}(0)}{\vartheta_{11}'(0)} \exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right) = -\frac{\omega_1}{\pi} \frac{\exp\frac{\pi i}{4}}{\vartheta_{10}(0)\vartheta_{01}(0)}. \qquad (4.4.2)$$

Deze gegevens ingezet in (4.1.5) geven gemakkelijk de identiteit

$$-\vartheta_{00}^4(0) + \vartheta_{01}^4(0) + \vartheta_{10}^4(0) = 0. \qquad (4.4.3)$$

Enig gereken leidt tot de volgende resultaten:

$$e_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left[\vartheta_{01}^4(0) + \vartheta_{00}^4(0)\right], \qquad (4.4.4)$$

$$e_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left[\vartheta_{00}^4(0) + \vartheta_{10}^4(0)\right], \qquad (4.4.4)$$

$$e_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left[\vartheta_{10}^4(0) - \vartheta_{01}^4(0)\right], \qquad (4.4.4)$$

$$g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4\left[\vartheta_{00}^8(0) + \vartheta_{01}^8(0) + \vartheta_{10}^8(0)\right], \qquad (4.4.4)$$

terwijl de $g_3 = 4\, e_1\, e_2\, e_3$ gemakkelijk door vermenigvuldiging uit de eerste 3 gelijkheden (4.4.4) af te leiden is.

Verder geldt nog

$$\Delta = \frac{16\pi^4}{(\omega_1)^{12}}\,\vartheta_{11}^{\cdot 8}(0), \qquad (4.4.5)$$

en $$J = \frac{\pi^8}{54}\,\frac{\left[\vartheta_{00}^8(0)+\vartheta_{01}^8(0)+\vartheta_{10}^8(0)\right]^3}{\left[\vartheta_{11}'(0)\right]^8}\,. \qquad (4.4.5)$$

5. Enige pro-memorie posten.

Op pag. 5 van de eerste syllabus staat aangegeven

$$G(\tau) = q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}), \qquad (4.5.1)$$

en verder

$$\vartheta_{11}(z/\tau) = G(\tau)\,(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}\,e^{2\pi i z})(1-q^{2n}\,e^{-2\pi i z})$$

$$= 2\,i\,G(\tau)\sin\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-2\,q^{2n}\cos 2\pi z+q^{4n}). \qquad (4.5.2)$$

Hieruit leidt men direct de volgende af:

$$\vartheta_{10}(z/\tau) = 2\,G(\tau)\cos\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2\,q^{2n}\cos 2\pi z + q^{4n}), \qquad (4.5.2)$$

$$\vartheta_{01}(z/\tau) = G(\tau)\,q^{-1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2\,q^{2n-1}\cos 2\pi z + q^{4n-2}), \qquad (4.5.2)$$

$$\vartheta_{00}(z/\tau) = G(\tau)\,q^{-1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2\,q^{2n-1}\cos 2\pi z + q^{4n-2}). \qquad (4.5.2)$$

Door $z = 0$ te stellen en gebruik te maken van (4.4.1) vinden we dan uit bovenstaande gelijkheden

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})^2 = G^2(\tau)\,q^{-1/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1+q^{2n})(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1})\right]^2.$$

Het product in het rechterlid van deze betrekking is identiek gelijk aan een. Dat wil zeggen

$$G(\tau) = q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}), \qquad (4.5.1)$$

want het minusteken is uitgesloten. $\lim_{q\to 0}$ geeft nl. een contradictie tussen de formules (1.2.5) en (4.5.2), wanneer wij het min-teken gebruiken.

Nu zijn de $\vartheta_{11}'(0)$ en de $\vartheta_{cj}(0)$ uit te drukken in productontwikkelingen naar q en dus ook de e_j's , de g_j's, de Δ en de J.

Nu is het gemakkelijk te bewijzen, dat

$$\zeta(u)= \frac{1}{\omega_1}\left[\eta_1\omega_1 z + \pi\cot g\pi z + 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2\pi z}{1-2q^{2n}\cos 2\pi z+q^{4n}}\right] \qquad (4.5.3)$$

en

$$\wp(u)= \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2\left[-\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} - 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}(1+q^{4n})\cos 2\pi z-2q^{4n}}{(1-2q^{2n}\cos 2\pi z+q^{4n})^2}\right]. \qquad (4.5.4)$$

Ontwikkeling van (4.5.4) naar opklimmende machten van levert nu, waar wij weten, dat er geen term kan zijn onafhankelijk van z

$$\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}, \qquad (4.5.5)$$

de tweede pro-memorie post.

Nog geeft een ontwikkeling voor de e_i's een laatste relatie:

$$\wp(u+\tfrac{\omega_j}{2}) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u+\tfrac{\omega_j}{2}) = -\frac{d^2}{du^2}\log\left[U_j\sigma_j(u).\exp\left(\frac{\eta_j\omega_j}{8}-\frac{\eta_j u}{2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma_j(u) = -\left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2\left[\eta_1\omega_1 + \frac{d^2}{dz^2}\log\{\vartheta_{cj}(z)\}\right],$$

dus

$$\wp(u+\tfrac{\omega_2}{2}) = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2\left[-\eta_1\omega_1 - 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}(1+q^{4n-2})\cos 2\pi z-2q^{4n-2}}{(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi z+q^{4n-2})^2}\right].$$

Stellen we nu in deze laatste formule u = 0, dan vinden we gemakkelijk

$$e_2 = -\left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2\left[\eta_1\omega_1 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right]. \qquad (4.5.6)$$

Op analoge wijze kan men afleiden

$$e_1 = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2\left[-\eta_1\omega_1 + \pi^2 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right] \qquad (4.5.6)$$

en

$$e_3 = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2\left[-\eta_1\omega_1 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}\right]. \qquad (4.5.6)$$

Na toepassing van (4.5.5) vindt men weer uit (4.5.6):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1+q^n)^2} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} = 0. \qquad (4.5.7)$$

6. Fourierreeksen voor verscheidene functies.

We zullen beginnen met de Fourierreeks voor $\frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)}$ af te leiden. De transformatieformules zijn ons welbekend uit de eerste lezing:

$$\frac{\vartheta'_{01}(z+1/\tau)}{\vartheta_{01}(z+1,\tau)} = \frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)}$$

en

$$\frac{\vartheta'_{01}(z+\tau/\tau)}{\vartheta_{01}(z+\tau,\tau)} = \frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)} - 2\pi i.$$

Zij C nu de als volgt aangegeven weg: van $-\frac{1}{2}$ langs de reele z-as naar $+\frac{1}{2}$, van daar naar $\frac{1}{2}+\tau$, evenwijdig aan de reele as naar $-\frac{1}{2}+\tau$ en terug naar $-\frac{1}{2}$.

Uit bovenstaande volgt onmiddellijk:

$$\int_C \frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)} e^{2n\pi iz}\, dz = (1-q^{2n}) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)} e^{2n\pi iz}\, dz, \qquad (4.6.1)$$

waarbij n geheel is.

De integraal aan de linkerzijde van het gelijkteken is echter gelijk aan $2\pi i$ maal het residu van de integrand in het nulpunt $z = \tau/2$ van $\vartheta_{01}(z/\tau)$.

Of:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)} e^{2n\pi iz}\, dz = \frac{2\pi i\, q^n}{1-q^{2n}}. \text{ indien } n \neq 0. \qquad (4.6.2)$$

Is $n = 0$, dan is wegens het oneven karakter van $\vartheta'_{01}(z/\tau)/\vartheta'_{01}(z/\tau)$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)}\, dz = 0 \qquad n = 0 \qquad (4.6.3)$$

We kunnen dus de volgende Fourierreeks opschrijven onder de voorwaarde, dat

$$|\mathrm{Im}\, z| < \tfrac{1}{2} |\mathrm{Im}\,\tau|,$$

$$\frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)} = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty\prime} \frac{q^n}{1-q^{2n}} e^{-2n\pi iz}, \qquad (4.6.3)$$

waarbij het accent weer aangeeft, dat de term $n = 0$ niet voorkomt in de som.

Deze reeks is weer iets eleganter te schrijven:

$$\frac{\vartheta'_{01}(z/\tau)}{\vartheta_{01}(z/\tau)} = 2\pi i \sum_{n=1}^{-\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \left[e^{-2n\pi iz} - e^{2n\pi iz}\right] = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi z. \qquad (4.6.4)$$

Op analoge wijze is weer af te leiden:

$$\frac{\vartheta'_{00}(z/\tau)}{\vartheta_{00}(z/\tau)} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q)^n}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi z, \qquad (4.6.4)$$

$$\frac{\vartheta'_{10}(z/\tau)}{\vartheta_{10}(z/\tau)} = -\pi \operatorname{tg} \pi z + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi z, \qquad (4.6.4)$$

$$\frac{\vartheta'_{11}(z/\tau)}{\vartheta_{11}(z/\tau)} = \pi \operatorname{cotg} \pi z + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi z. \qquad (4.6.4)$$

De laatste relatie (4.6.4) levert gecombineerd met (4.2.4) en (4.2.5):

$$\zeta(u) = \frac{1}{\omega_1}\left[\eta_1 \omega_1 z + \pi \operatorname{cotg} \pi z + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi z \right], \qquad (4.6.5)$$

$$\wp(u) = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[-\eta_1 \omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}} \cos 2n\pi z \right]. \qquad (4.6.6)$$

Met behulp van de betrekking

$$\wp(v + \tfrac{\omega_j}{2}) = -\left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[\eta_1 \omega_1 + \frac{d^2}{dz^2} \log\left\{ \vartheta_{cj}(z) \right\} \right]$$

afgeleid op pagina no. vinden we nu gemakkelijk:

$$\wp(v + \tfrac{\omega_1}{2}) = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[-\eta_1 \omega_1 + \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n q^{2n}}{1-q^{2n}} \cos 2n\pi z \right], \qquad (4.6.6)$$

$$\wp(u + \tfrac{\omega_2}{2}) = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[-\eta_1 \omega_1 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \cos 2n\pi z \right], \qquad (4.6.6)$$

en

$$\wp(u + \tfrac{\omega_3}{2}) = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[-\eta_1 \omega_1 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n q^n}{1-q^{2n}} \cos 2n\pi z \right]. \qquad (4.6.6)$$

Het behoeft geen betoog, dat al deze reeksontwikkelingen slechts gelden onder de voorwaarde $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2} |\operatorname{Im} \tau|$.

Verder zal het wel een iedereen duidelijk zijn, dat de relaties (4.6.6) ontwikkeld zullen worden naar machten van z, waarbij de gelijkstelling van de constante termen aan hun werkelijke waarden het volgende oplevert:

$$\eta_1 \omega_1 = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}}, \qquad (4.6.7)$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[-\eta_1 \omega_1 + \pi^2 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n q^{2n}}{1-q^{2n}} \right], \qquad (4.6.8)$$

$$e_2 = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[-\eta_1 \omega_1 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \right], \qquad (4.6.8)$$

$$e_3 = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^2 \left[-\eta_1 \omega_1 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n q^n}{1-q^{2n}} \right]. \qquad (4.6.8)$$

Soortgelijke betrekkingen zijn eveneens af te leiden voor de g_2, g_3 e.d. Zo weten wij bijvoorbeeld, dat

$$\wp(u)=\frac{1}{(\omega_1 z)^2}+\frac{g_2}{20}(\omega_1 z)^2+\frac{g_3}{28}(\omega_1 z)^4+\ldots$$

en dus vinden we uit de coefficienten van de tweede en derde machten van (4.6.6) de overeenkomstige uitdrukkingen voor g_2 en g_3.

Het is nu mogelijk nieuwe identiteiten af te leiden, door de resultaten van de §§ 4, 5 en 6 te vergelijken. Deze identiteiten vormen een graag gewild uitgangspunt voor getallentheoretici e.a. Zij zullen dan ook pas een volgende keer aan de beurt komen, maar zij zijn tevens de reden, waarom dit arsenaal van formules thans is afgeleid.

7. Differentiatie naar de andere parameters.

Tot nu toe werd onder een accent verstaan de differentiatie naar de parameter u eventueel z. Edoch de beschouwde functies zijn tevens nog van de parameters ω_1, ω_2 resp. τ, ω_1, afhankelijk. De differentiatie naar deze andere parameters zal worden aangegeven met $\frac{\partial}{\partial\omega_1}$ enz.

Zij nu f een of andere functie, homogeen van de graad λ in u, ω_1 en ω_2. Er geldt dus volgens Euler:

$$\omega_1\frac{\partial f}{\partial\omega_1}+\omega_2\frac{\partial f}{\partial\omega_2}+u\,f'=\lambda f. \qquad (4.7.1)$$

Het is voldoende om twee van de drie partiele afgeleiden te bepalen, de derde is dan ook bekend.

Desgewenst kunnen wij als nieuwe parameters kiezen u, g_2 en g_3 of z, Δ en J in plaats van u, ω_1 en ω_2.

Het is duidelijk, dat tussen de partiele afgeleiden een direct verband zal bestaan.

Stellen wij $u_1=u+m_1\omega_1+m_2\omega_2$, dan volgt uit de periodiciteit van de functies $\wp(u)$ en $\wp'(u)$ en

$$\zeta(u_1)=\zeta(u)+m_1\eta_1+m_2\eta_2,$$

$$\frac{\partial\wp(u_1)}{\partial\omega_1}+m_1\wp'(u_1)=\frac{\partial\wp(u)}{\partial\omega_1},$$

$$\frac{\partial\wp(u_1)}{\partial\omega_2}+m_2\wp'(u_1)=\frac{\partial\wp(u)}{\partial\omega_2},$$

dat de als volgt gedefinieerde functie

$$F(u,\omega_1,\omega_2)=\eta_1\frac{\partial\wp(u)}{\partial\omega_1}+\eta_2\frac{\partial\wp(u)}{\partial\omega_2}+\wp'(u)\,\zeta(u). \qquad (4.7.2)$$

een elliptische functie is.

De functie

$$F(u,\omega_1,\omega_2)+ 2\wp^2(u)- \tfrac{1}{3} g_2$$

is zelfs een elliptische functie zonder polen, zodanig dat voor u = 0 deze functie de waarde nul aanneemt.

Hieruit volgt

$$F(u,\omega_1,\omega_2)+ 2\wp^2(u)- \tfrac{1}{3} g_2 = 0. \qquad (4.7.3)$$

Voert men nu nog in het symbool

$$D = -2\eta_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} - 2\eta_2 \frac{\partial}{\partial\omega_2} , \qquad (4.7.4)$$

dan vindt men gemakkelijk:

$$D\wp(u)= -2F + 2\wp'\zeta = 2(\wp\zeta)' + 6\wp^2 - \tfrac{2}{3} g_2 =$$
$$= 2(\wp\zeta)' + \wp'' - \tfrac{1}{6} g_2 .$$

Ontwikkeling van deze gelijkheid weer naar opklimmende machten van u, levert als resultaten o.a.:

$$D\, g_2 = 12\, g_3 , \qquad D\, g_3 = \tfrac{2}{3} g_2^2 \qquad (4.7.5)$$

Zij nu φ een functie van u, g_2 en g_3, dan geldt algemeen:

$$D\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial g_2} D\, g_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial g_3} D\, g_3 = (12\, g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \tfrac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3})\varphi .$$

Hieruit volgt onmiddellijk

$$D\Delta = 12\, g_3 \cdot 3\, g_2^2 - \tfrac{2}{3} g_2^2 \cdot 54\, g_3 = 0,$$

$$DJ = \frac{12 g_3 \cdot 3 g_2^2}{\Delta} - \frac{g_2^3\, D\Delta}{\Delta^2} = \frac{36 g_3 g_2^2}{\Delta}$$

of

$$DJ = 4\sqrt{3}\ (J-1)^{\frac{1}{2}}\, J^{2/3}\, \Delta^{1/6}. \qquad (4.7.6)$$

Verder volgt uit de definitie

$$D\,\omega_j = -2\eta_j,$$

$$D\tau = \frac{\omega_1 D\omega_2 - \omega_2 D\omega_1}{\omega_1^2} = \frac{-2\eta_2\omega_1 + 2\eta_1\omega_2}{\omega_1^2} = \frac{4\pi i}{\omega_1^2} .$$

Is nu $f(u,\omega_1,\omega_2)$ weer een of andere functie afhankelijk van de drie parameters u, ω_1, ω_2 en u_1 een waarde van u afhankelijk van ω_1 en ω_2, dan geldt dus

$$D\, f\,(u_1)= \Big[D\, f(u)\Big]_{u=u_1} + f'(u_1) Du_1 .$$

Na enig gereken vinden we nu

$$D\,\eta_j = 2\,D\,\wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = \frac{1}{6}\,g_2\,\omega_j,$$

$$D\,e_j = 4\,e_j^2 - \frac{2}{3}\,g_2,$$

waarbij gebruik is gemaakt van de relaties

$$\wp'\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 0 \text{ en } \wp''\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 6\,e_j^2 - \tfrac{1}{2}\,g_2.$$

Nemen wij nu eens de differentiatie naar de Δ , J en z bij de kop. f zij een functie van deze parameters.

$$D\,f = \frac{\partial f}{\partial J}\,D\,J + \frac{\partial f}{\partial z}\,D\,z,$$

aangezien $D\,\Delta = 0$.

Zij nog verondersteld, dat f bovendien onafhankelijk is van z, dan gelden dus

$$D\,f = \frac{\partial f}{\partial J}\,.\,D\,J,$$

en

$$D^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial J^2}(DJ)^2 + \frac{\partial f}{\partial J}\,\frac{\partial DJ}{\partial J}\,DJ. \qquad (4.7.7)$$

Vanwege (4.7.6) is nu geldig

$$\frac{\partial DJ}{\partial J} = 4\sqrt{3}\,\Delta^{1/6}\left[\tfrac{1}{2}(J-1)^{-\frac{1}{2}}\,J^{1/3} + \frac{2}{3}\,(J-1)^{\frac{1}{2}}\,J^{-2/3}\right]$$

en dus

$$\frac{\partial DJ}{\partial J}.DJ = 8\,\Delta^{1/3}\,J^{1/3}\,(7\,J-4).$$

(4.7.7) wordt nu

$$\frac{D^2 f}{8\,\Delta^{1/3}J^{1/3}} = 6\,(J-1)\,J\,\frac{\partial^2 f}{\partial J^2} + \{7\,J-4\}\,\frac{\partial f}{\partial J} \qquad (4.7.8)$$

We kiezen nu 2 voorbeelden, ten eerste $f = \omega_j$ en ten tweede $f = \eta_j$. In het eerste geval berekend men weer onder gebruikmaking van vroeger verkregen resultaten, dat ω_j voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$(J-1)J\,\frac{\partial^2 \omega_j}{\partial J^2} + \frac{7J-4}{6}\,\frac{\partial \omega_j}{\partial J} + \frac{\omega_j}{144} = 0, \qquad (4.7.9)$$

terwijl men in het tweede geval voor ω_j afleidt:

$$(J-1)J\,\frac{\partial^2 \eta_j}{\partial J^2} + \frac{5J-2}{6}\,\frac{\partial \eta_j}{\partial J} + \frac{\eta_j}{144} = 0. \qquad (4.7.10)$$

8. Enige formules met Bernoulli-getallen.

Tot slot leiden we nog reeksontwikkelingen af voor de volgende uitdrukkingen

$$G_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k\omega_1+l\omega_2}\right)^{2n} \qquad n>1, \text{ geheel} \qquad (4.8.1)$$

en wel door uit te gaan van de bekende splitsing in partieel-breuken voor de cotg

$$\pi \operatorname{cotg} \pi a = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right).$$

Het is evenwel ook gemakkelijk $\pi \operatorname{cotg} \pi a$ te ontwikkelen naar opklimmende machten van $v = \exp(\pi i a)$ en wel vindt men dan:

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right) = -\pi i \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v^{2k}\right).$$

En door herhaald differentieren naar a krijgt men

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a+k}\right)^n = (-1)^n \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} v^{2k}.$$

De som aan de linkerzijde van het gelijkteken convergeert voor elke niet gehele a mits $n>1$, terwijl het convergentiegebied van de reeks aan de rechterzijde bepaald wordt door $|v|<1$.

Stellen we nu

$$a = l\tau$$

en voeren we bovendien de sommatie uit over alle gehele positieve waarden van l, dan vinden wij:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{l\tau+k}\right)^n = (-1)^n \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}},$$

waarin q weer dezelfde betekenis als vroeger heeft.

Hieruit volgt

$$G_n = \left(\frac{1}{\omega_1}\right)^{2n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{2n} + 2(-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \right]$$

of ook

$$G_n = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} \left[B_{2n} + (-1)^n 4n \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \right], \qquad (4.8.2)$$

met B_{2n} als Bernoulli-getal, (even notatie).

Iets uitvoeriger opgeschreven is dus:

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} = G_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right). \qquad (4.8.3)$$

$$g_2 = 60\, G_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right) \qquad (4.8.2)$$

$$g_3 = 140\, G_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right) \qquad (4.8.2)$$

$$G_4 = \frac{1}{7!} \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^8 \left(\frac{1}{240} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^7 \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right) \qquad (4.8.2)$$

De uitdrukking voor η_1 / ω_1 was ons al reeds bekend, zie n.l. (4.6.7). Het was dus ook mogelijk geweest als uitgangspunt van de differentiatie de G_1 te gebruiken in plaats van $\pi \operatorname{cotg} \pi a$.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestr. 49,
A M S T E R D A M - O.

Colloquium over theta-functies.
Voordracht door Dr W. Peremans

5 Maart 1952

De modulaire groep.

§ 1. Algebraïsche voorbereidingen.

De modulaire groep bestaat uit de transformaties

$$\tau' = \frac{d\tau + c}{b\tau + a}, \tag{5.1.1}$$

waarin a,b,c,d gehele getallen zijn en ad - bc = 1. We kunnen deze transformatie ook met de matrix

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \tag{5.1.2}$$

karakteriseren. Vermenigvuldiging van alle matrixelementen met dezelfde factor $\neq 0$ geeft dezelfde transformatie. Wegens ad - bc = 1 kan deze factor alleen +1 of -1 zijn. We kunnen daarom bij een bepaalde transformatie van één der matrixelementen, dat $\neq 0$ is, het teken vastleggen.

Door $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ en $\tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'}$ te stellen gaat de transformatie over in een transformatie, die het paar (ω_1, ω_2) in (ω_1', ω_2') overvoert:

$$\begin{cases} \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2 \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Laten we τ en τ' alle complexe waarden en ∞ doorlopen, dan stelt (5.1.1) een projectieve transformatie van de complexe projectieve rechte voor. Laten we de beperking, dat a,b,c en d geheel zijn, vervallen, dan wordt het de meest algemene projectieve transformatie. Voor deze geldt, dat er één en slechts één transformatie is, die drie gegeven willekeurige punten in drie gegeven willekeurige punten overvoert.

Voert men twee modulaire transformaties X en Y na elkaar uit, dan krijgt men de matrix van YX door hun matrices in deze volgorde met elkaar te vermenigvuldigen. De inverse transformatie van (5.1.1) is daarom

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}. \tag{5.1.4}$$

Een projectieve transformatie heeft twee (eventueel samenvallende) invariante punten (polen), die bij (5.1.1) gevonden worden uit de verge-

lijking

(5.1.5) $\qquad b\tau^2 + (a-d)\tau - c = 0.$

We gaan nu na welke orden een modulaire transformatie kan hebben. We kunnen een projectieve transformatie zo transformeren, dat de polen in voorgeschreven punten komen te liggen. De orde verandert daarbij niet, maar de transformatie behoeft natuurlijk niet modulair te blijven.

Nemen we eerst het geval, dat de polen samenvallen (parabolische transformatie). Brengen we de pool naar ∞, dan wordt van de getransformeerde matrix $b' = a'-d' = 0$, $c' \neq 0$. Uit $1 = a'd'-b'c' = d'^2$ volgt $d' = \pm 1$. We mogen $d' = 1$ kiezen. Van de matrix

(5.1.6) $\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & c' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

is de n^{e} macht

(5.1.7) $\qquad P^n = \begin{pmatrix} 1 & n & c' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Dit kan voor geen enkele natuurlijke waarde van n de identieke transformatie worden. De parabolische transformaties hebben dus orde ∞.

Als de polen verschillend zijn, kunnen we deze naar 0 en ∞ brengen. De transformatie wordt dan

(5.1.8) $\qquad \begin{pmatrix} d' & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix}.$

Als deze orde n heeft, is $(\frac{d'}{a'})^n = 1$ en geen lagere positieve macht van $\frac{d'}{a'}$ is 1, m.a.w. $\frac{d'}{a'}$ is een primitieve n^{e} eenheidswortel ε. Verder is $a'd' = 1$, dus $d' = \sqrt{\varepsilon}$, $a' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Dit zijn ook eenheidswortels. Verder is het spoor d+a van een matrix invariant, dus $d+a = \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, maar d+a is een geheel getal. Uit $\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ geheel en $\sqrt{\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 1$ volgt, dat $\sqrt{\varepsilon}$ voldoet aan een vierkantsvergelijking met rationale coëfficiënten. Nu voldoet een primitieve m^{e} eenheidswortel aan een irreducibele vergelijking met rationale coëfficiënten van de graad $\varphi(m)$. Daar $\varphi(m) \leq 2$ alleen voor $m = 2,3,4$ of 6 is $\sqrt{\varepsilon}$ een eenheidswortel van een van deze orden en dus ε een eenheidswortel van orde 2 of 3 (1 geeft de identieke transformatie). De enige eindige orden, die een modulaire transformatie dus kan hebben, zijn 2 en 3. Als $\sqrt{\varepsilon}$ orde 4 heeft, is zijn vergelijking $x^2 + 1 = 0$, dus $a + d = 0$ is voorwaarde voor orde 2. Als $\sqrt{\varepsilon}$ orde 3 of 6 heeft, is zijn vergelijking $x^2 \pm x + 1 = 0$, dus $|a + d| = 1$ is voorwaarde voor orde 3.

We beschouwen nu de realiteit van de polen van een transformatie, die bepaald wordt door de discriminant van (5,1,5), d.i. $(a-d)^2 + 4bc = (a-d)^2 + 4ad - 4 = (a+d)^2 - 4$.

De polen zijn dus niet reëel (elliptische transformaties) als $|a+d| \leq 1$, dat zijn juist blijkens het voorafgaande de transformaties van eindige orde. Als $|a+d| \geq 3$, zijn de polen reëel (hyperbolische

transformaties), deze transformaties hebben oneindige orde. Als $|a+d| = 2$ zijn de transformaties parabolisch.

We bepalen nog de polen van de elliptische transformaties. Daar deze voor elke transformatie toegevoegd complex zijn, kunnen we ons tot het bovenste halfvlak $\Im \tau > 0$ beperken.

Als $a + d = 0$ (orde 2), dan is de pool $\frac{d+i}{b}$. Hierin kunnen d en b niet willekeurig worden gekozen, omdat $c = \frac{-d^2-1}{b}$ geheel moet zijn. Dus moet gelden $d^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ b)$.

Als $|a+d| = 1$ (orde 3), dan kunnen we zonder beperking van de algemeenheid $a + d = 1$ stellen, dan is de pool $\frac{2d-1+i\sqrt{3}}{2b}$. We kunnen deze ook in de derde eenheidswortel $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ uitdrukken en vinden dan $\frac{d+\rho}{b}$. Hier geldt een analoge opmerking als zoëven.

We bewijzen nu, dat de modulaire groep voortgebracht wordt door de twee transformaties $S : \tau' = \tau + 1$ (van oneindige orde) en $T : \tau' = -\frac{1}{\tau}$ (van orde 2), d.w.z. iedere modulaire transformatie is te schrijven in de vorm $S^{n_1} T S^{n_2} T \ldots T S^{n_k}$, waarin $n_1, \ldots, n_k$ gehele getallen zijn. De matrices, die bij S en T behoren, luiden als volgt:

$$(5.1.9) \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We bewijzen nu eerst, dat de $n_1, \ldots, n_k$ in bovenstaande vorm ≥ 0 kunnen worden gemaakt. Hiertoe beschouwen we

$$(5.1.10) \qquad TS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

hetgeen blijkbaar een transformatie van orde 3 is, dus $(TS)^3 = I$, dus $S^{-1} = TSTST$. Hiermee zijn de negatieve exponenten in bovenstaande vorm weg te werken.

Laat nu U een willekeurige modulaire transformatie in de vorm (5.1.1) zijn. Als U het punt ∞ in zichzelf transformeert, is $b = 0$, dus $ad = 1$, dus $a = d = \pm 1$. We kunnen het plusteken aannemen. Blijkbaar is dan $U = S^c$. Laat nu $b \neq 0$ zijn. Dan transformeert U het punt ∞ in een rationaal getal $r = \frac{d}{b}$. We kunnen r schrijven als een afbrekende kettingbreuk

$$(5.1.11) \qquad r = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + a_k}}$$

Dan transformeert $V = S^{a_1} T S^{-a_2} T S^{a_3} T \ldots S^{(-)^{k-1}a_k} T$ het punt ∞ in r. Dus $U = VS^m = S^{a_1} = S^{a_1} T \ldots S^{(-)^{k-1}a_k} T S^m$, waarmee het bewijs geleverd is.

§ 2. Fundamentele gebieden.

We beschouwen het bovenste halfvlak van het complexe vlak. Twee punten heten aequivalent, als er een modulaire transformatie bestaat, die het ene in het andere transformeert. Blijkbaar worden de punten van het bovenste halfvlak hierdoor in klassen aequivalente punten verdeeld. We definiëren een fundamenteel gebied als de vereniging G van een open puntverzameling en een deel van haar rand, zodat uit iedere klasse aequivalente punten één en slechts één in G ligt. Baer en Levi (Math. Z. 34 (1931), 110-130) hebben onder zeer zwakke voorwaarden voor transformatiegroepen de existentie van een fundamenteel gebied aangetoond. Voor de modulaire groep zullen wij de existentie aantonen door het gebied expliciet aan te geven.

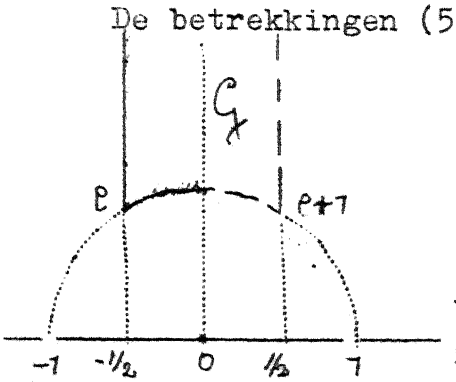
Laat τ een complex getal zijn met positief imaginair deel. Kies een willekeurig complex getal $\omega_1 \neq 0$ en neem $\omega_2 = \omega_1\tau$. Beschouwen we (ω_1, ω_2) als primitief periodenpaar, dan is vroeger bewezen dat voor het door (ω_1, ω_2) bepaalde periodenrooster een primitief periodenpaar (ω_1', ω_2') kan worden gevonden, zodat ω_1' de kortste afstand tot de oorsprong heeft van alle perioden en ω_2' de kortste afstand tot de oorsprong van alle perioden op ω_1' en $-\omega_1'$ na. Verder kan gezord worden dat $\frac{\omega_2'}{\omega_1'}$ een primitief imaginair deel heeft. Dan geldt dus

(5.2.1) $$|\omega_2'| \geqslant |\omega_1'|, |\omega_2' + \omega_1'| \geqslant |\omega_2'|, |\omega_2' - \omega_1'| \geqslant |\omega_2'|.$$

De betrekking tussen (ω_1, ω_2) en (ω_1', ω_2') is van de vorm (5.1.3). Noemen we $\frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \tau'$, dan zijn τ en τ' aequivalent en geldt voor τ':

(5.2.2) $$|\tau'| \geqslant 1, |\tau' + 1| \geqslant 1, |\tau' - 1| \geqslant 1.$$

De betrekkingen (5.2.2) bepalen een gebied G met als rand de eenheidscirkel om de oorsprong en de rechten $\Re\tau = \frac{1}{2}$ en $\Re\tau = -\frac{1}{2}$ en wel ligt het gebied buiten de eenheidscirkel. We hebben dus gevonden dat bij ieder punt in het bovenste halfvlak een aequivalent punt in G of op zijn rand te vinden is. De rand beschouwen we wat nader. Door de transformatie S gaat de linker randrechte in de rechter randrechte over, door de transformatie T gaat de linker helft van de cirkelboog in de rechter helft over. Wij rekenen nu bij G het gedeelte van de rand, waarvan het reële deel $\leqslant 0$ is mee. We zullen bewijzen, dat G een fundamenteel gebied is.



Dat bij ieder punt in het bovenste halfvlak een aequivalent punt in G te vinden is, hebben we al bewezen. We moeten dus alleen nog aantonen, dat er binnen G geen twee verschillende aequivalente punten te vinden zijn. We merken op, dat van alle punten van G de imaginaire delen $\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$

zijn. Laat nu τ en τ' door de modulaire transformatie (5.1.1) verbonden zijn en stel dat τ en τ' beide in G liggen. Noem $\tau = x + iy$, $\tau' = x' + iy'$ (x,y,x',y' reëel). Dan is $\frac{dx + c + idy}{bx + a + iby} = \frac{(dx+c)(bx+a) + bdy^2 + iy}{(bx+a)^2 + b^2y^2}$, Dus

$$(5.2.3) \qquad y' = \frac{y}{(bx+a)^2 + b^2y^2}.$$

De transformaties S^n ($n \neq 0$) en T kunnen we buiten beschouwing laten, omdat deze klaarblijkelijk een punt binnen G in een punt buiten G transformeren. We mogen dan $b \neq 0$ veronderstellen (de identieke transformatie blijft ook buiten beschouwing, omdat $\tau = \tau'$). Als $|b| \geqslant 2$, dan volgt uit (5.2.3), dat $y' \leqslant \frac{y}{4y^2} \leqslant \frac{1}{4y} \leqslant \frac{1}{6}\sqrt{3}$ hetgeen onmogelijk is. Er blijft dus alleen $b = 1$ over en we mogen dan $b = 1$ stellen. Dan geldt:

$$(5.2.4) \qquad \tau' - d = -\frac{1}{\tau + a}.$$

Als $|\tau + a| > 1$, dan $|\tau' - d| < 1$ hetgeen onmogelijk is. Verder is $|\tau + a| < 1$ onmogelijk, dus er blijft alleen $|\tau + a| = 1$ over. Dit laatste kan alleen voor $a = 0$ of $a = 1$. Als $a = 1$, kan τ alleen $= \rho$ zijn. Dan is $\tau' - d = -\frac{1}{\rho} = \rho + 1$, hetgeen alleen $\tau' = \rho$ kan opleveren, dus $\tau = \tau'$. Als $a = 0$, dan is $c = -1$. Omdat $|\tau' - d| = 1$ moet $d = 0$ of -1 zijn. Als $d = 0$, krijgen we T, die we al afgehandeld hebben; als $d = -1$, kan τ' alleen $= \rho$ zijn en dan is τ ook $= \rho$, dus $\tau' = \tau$. Daarmee is het bewijs voltooid, dat er in G geen twee aequivalente punten liggen en dat G dus een fundamenteel gebied is.

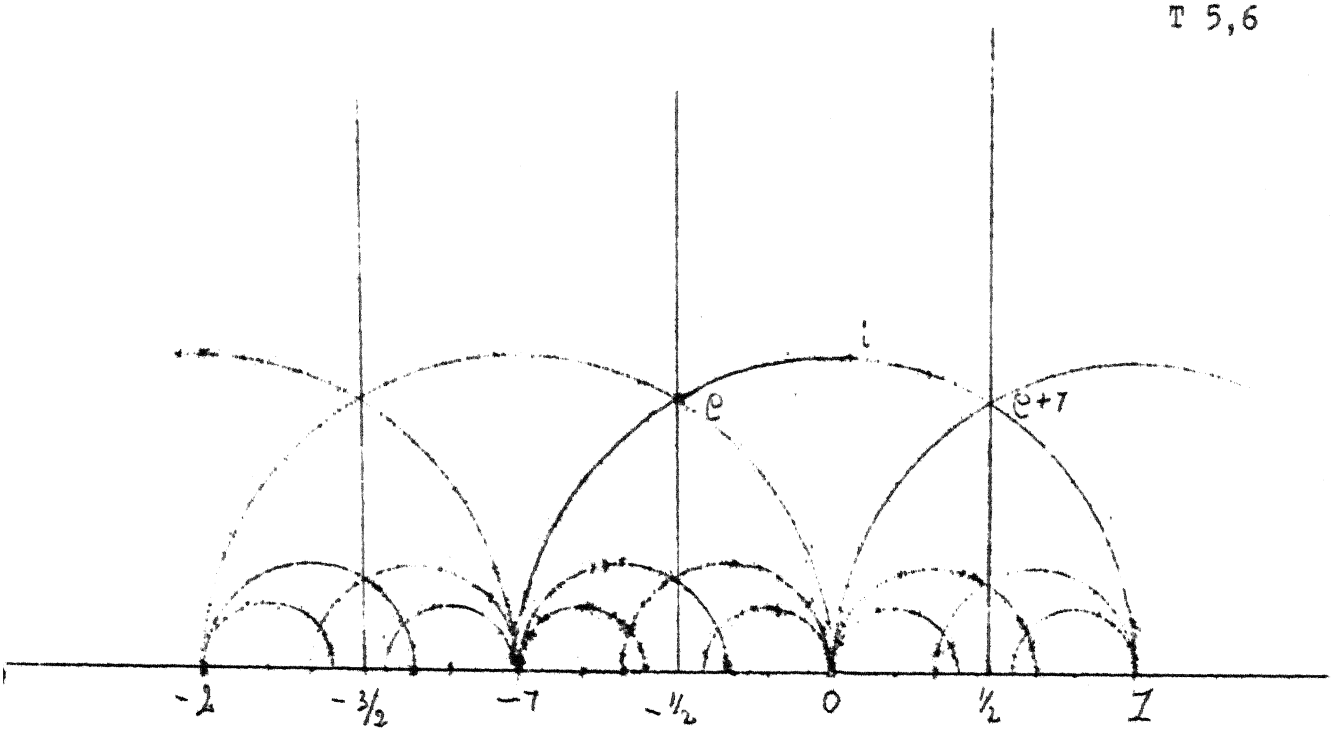
Daar de polen van de transformaties van orde 2 de vorm $\frac{d+i}{b}$ hebben, is de enige dergelijke pool, die in G ligt blijkbaar het punt i. Dus zijn alle polen van transformaties van orde 2 aequivalent, dus door modulaire transformatie uit i te krijgen: $\frac{d'i + c'}{b'i + a'} = \frac{a'c' + b'd' + i}{a'^2 + b'^2}$. Uit

$$(5.2.5) \qquad \left.\begin{aligned} a'c' + b'd' &= d \\ a'^2 + b'^2 &= b \end{aligned}\right\}$$

zijn a',b',c',d' als gehele getallen met $a'd' - b'c' = 1$ op te lossen, mits $d^2 \equiv -1 \pmod b$. We vinden het bekende resultaat uit de getallentheorie, dat de gehele getallen ten opzichte waarvan -1 kwadraatrest is, dezelfde zijn als de gehele getallen, die als sommen van twee kwadraten te schrijven zijn.

Daar de polen van transformaties van orde 3 de vorm $\frac{d + \rho}{b}$ hebben, is de enige pool in G van een transformatie van orde 3 het punt ρ. Dus zijn alle polen van transformaties van orde 3 aequivalent.

De transformaties van de modulaire groep voeren G in gebieden over, die door lijnstukken en cirkelbogen begrensd zijn. De snijpunten zijn



juist de polen van de transformaties van orde 3 en de beeldpunten van het punt ∞, dat zijn de rationale punten op de reële as. Door deze gebieden wordt het hele bovenste halfvlak opgevuld (we noemen dit de modulaire vlakverdeling). Met elk gebied correspondeert een transformatie van de modulaire groep. We kunnen de figuur opbouwen uitgaande van G door successievelijk de transformaties S en T toe te passen op de reeds verkregen gebieden. Ieder der gebieden had ook als fundamenteel gebied dienst kunnen doen.

De transformatie S is een spiegeling in de imaginaire as gevolgd door een spiegeling in de lijn $\Re\tau = \frac{1}{2}$. De transformatie T is een spiegeling in de imaginaire as gevolgd door een spiegeling in de eenheidscirkel. Daar G, als we de rand buiten beschouwing laten, symmetrisch t.o.v. de imaginaire as is, kunnen we voor de opbouw van de modulaire vlakverdeling de spiegelingen in de imaginaire as weglaten. De modulaire vlakverdeling is blijkbaar ook symmetrisch t.o.v. de imaginaire as. Op de modulaire vlakverdeling komen we nog terug.

We bewijzen nu, dat de puntverzameling gevormd door een klasse aequivalente punten in het bovenste halfvlak als verdichtingspunten alle punten van de reële as en geen andere bezit.

Om te bewijzen, dat de punten van de reële as verdichtingspunten zijn, kunnen we ons tot de rationale punten beperken. Laat r een willekeurig rationaal getal zijn en $r = \frac{d}{b}$, b en d geheel, (b,d) = 1, b > 0. Laat $\tau = x + iy$ een punt uit de klasse aequivalente punten zijn. We passen op τ de transformaties (5.1.1) met de zoëven gegeven waarde van d en b toe. Nu is $\frac{d}{b} - \frac{d\tau+c}{b\tau+a} = \frac{1}{b(b\tau+a)}$. Dit moet willekeurig klein gemaakt worden. Wegens de voorwaarde ad + bc = 1 kan, bij gegeven b en d, a geheel willekeurig in één bepaalde restklasse mod b gekozen worden, dus in ieder geval kan |a| willekeurig groot gemaakt worden, hetgeen voldoende is om $\frac{1}{b(b\tau+a)}$ willekeurig dicht bij nul te krijgen.

Nu bewijzen we nog, dat een punt met positief imaginair deel geen verdichtingspunt van de klasse aequivalente punten kan zijn. Daartoe passen we op τ de nu geheel willekeurig modulaire transformatie (5.1.1) toe. Als a en b gegeven zijn met (a,b) = 1 en c_o, d_o zijn dusdanig, dat $ad_o - bc_o = 1$, dan zijn de meest algemene c en d waarvoor ad − bc = 1, gegeven door $d = d_o + nb$, $c = c_o + na$ met willekeurige gehele n. Vullen we deze d en c in (5.1.1) in, dan komt er $\frac{d_o\tau + c_o}{b\tau + a} + n$. Voor de beschouwing van verdichtingspunten kunnen we de meerduidigheid in c en d bij gegeven a en b dus geheel buiten beschouwing laten. We beschouwen nu het imaginaire deel van het beeldpunt, dat in (5.2.3) expliciet staat aangegeven.

Als b = 0, dan is (5.2.3) $\frac{y}{a^2}$ hetgeen zich alleen bij 0 verdicht. Stel nu $b \neq 0$ en noem $\frac{a}{b} = s$. Dan is de noemer in (5.2.3) gelijk aan $N = b^2((s+x)^2 + y^2)$. Kies een $\varepsilon > 0$. Als $|b| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon y}}$ dan is $N > \frac{y^2}{\varepsilon y} = \frac{y}{\varepsilon}$. Er zijn dus slechts eindig veel waarden van b waarvoor $N < \frac{y}{\varepsilon}$. Er is een reëel getal S te vinden, zodat voor $|s| > S$ geldt $\frac{y}{\varepsilon} < (x+s)^2 + y^2 \leq b^2((x+s)^2 + y^2)$. Alleen voor $|s| \leq S$ kan dus $N < \frac{y}{\varepsilon}$ zijn. Dit geeft dus slechts eindig veel waardenparen (a,b) met (a,b) = 1, waarvoor $N < \frac{y}{\varepsilon}$ en dus waarvoor (5.2.3) $> \varepsilon$ is. Daaruit volgt, dat er geen verdichtingspunten buiten de reële as liggen.

§ 3. De modulaire invariant $J(\tau)$.

De functie $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ is als een functie van ω_1 en ω_2 homogeen van het gewicht 0 en is dus een functie van τ. J is invariant t.o.v. modulaire transformaties van τ. Uit de op blz. 4.13 in formules (4.8.2) gegeven ontwikkelingen van g_2 en g_3 naar q volgt

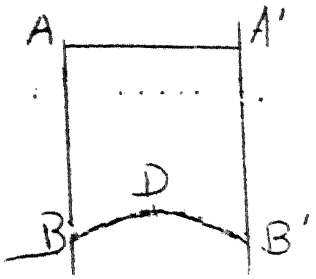
(5.3.1) $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = (\frac{2\pi}{\omega_1})^{12}(q^2 - 24q^4 + \ldots)$

dus

(5.3.2) $J = \frac{(\frac{1}{12} + 20q^2 + \ldots)^3}{q^2(1 - 24q^2 + \ldots)} = \frac{1}{q^2}(\frac{1}{12^3} + c_1 q^2 + \ldots).$

Omdat de reeksontwikkelingen voor g_2 en g_3 convergent zijn voor $|q| < 1$ en omdat $\Delta \neq 0$, geldt (5.3.2) voor $|q| < 1$. Omdat $q = e^{\pi i \tau}$ is $J(\tau)$ een in het bovenste halfvlak analytische functie. Voor $\tau \to i\infty$ is $q \to 0$, dus $J \to \infty$. Verder is J een even functie van q.

Onze hoofdstelling is nu, dat voor ieder complex getal a de vergelijking $J(\tau) = a$ één en slechts één oplossing bezit in het fundamentele gebied G van § 2.(Hieruit volgt nogmaals de tweede helft van het bewijs, dat G een fundamenteel gebied is, want als er in G twee aequivalente punten lagen, zou J in die twee punten dezelfde waarde aannemen.)



We snijden van G door een lijn AA' evenwijdig met de reële as een begrensd stuk af. Omdat $J \to \infty$ voor $\tau \to i\infty$, kan de lijn zo hoog worden gelegd, dat op of boven die lijn zeker $J(\tau) \neq a$ is. Alle oplossingen van $J(\tau) = a$ liggen dan in het gedeelte G' van G beneden AA'.

We nemen eerst aan, dat $J(\tau) \neq a$ op de rand van G. Als we C' de rand van G' noemen, en N het aantal nulpunten van $J(\tau) - a = 0$ in G (elk nulpunt zo vaak gesteld als zijn multipliciteit bedraagt) dan geldt

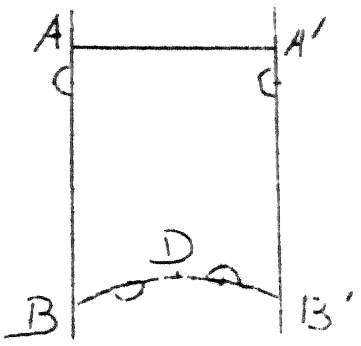
(5.3.3) $N = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - a}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} d\log(J(\tau) - a),$

als C' met een positieve omloopszin doorlopen wordt. Omdat $J(\tau + 1) = J(\tau)$ en $J(-\frac{1}{\tau}) = J(\tau)$ heffen de integraties over AB en B'A' en de integraties over BD en DB' elkaar op. Dus

(5.3.4) $N = \frac{1}{2\pi i}\int_{A'}^{A} d\log(J(\tau) - a).$

Als $\tau = x + iy$ het lijnstuk A'A doorloopt, doorloopt $q^2 = e^{-2\pi y} e^{2\pi i x}$ in het q^2-vlak een in negatieve zin doorlopen cirkel om de oorsprong, waarvan de straal tot nul nadert, als AA' naar boven naar ∞ geschoven wordt ($y \to +\infty$). Uit (5.3.2) volgt dan direct dat $N = 1$.

Nu nemen we het geval, dat $J(\tau) - a$ nulpunten heeft op de rand van G, maar niet in één of meer van de punten B, D en B'. Op de rand van G' liggen dan eindig veel nulpunten van $J(\tau) - a$. Met ieder punt op AB van deze soort correspondeert een dergelijk punt op gelijke hoogte op A'B' en evenzo met BD en B'D.



Maken we nu een contour, die de nulpunten van $J(\tau) - a$ op de rand vermijdt op de wijze als in de figuur hiernaast geschetst, hierbij zorgende, dat in de instulpingen geen verdere nulpunten van $J(\tau) - a$ liggen en noemen we het door deze contour omsloten gebied G'', dan bewijzen we evenals zoëven, dat in G'' één en slechts één nulpunt met multipliciteit 1 van $J(\tau) - a$ ligt. Uit de afspraak die we over de rand van G gemaakt hebben volgt dan, dat ook in G één en slechts één nulpunt met multipliciteit 1 van $J(\tau) - a$ ligt.

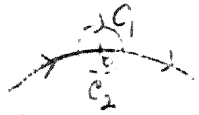
Tenslotte het geval, dat $J(\tau) - a$ een nulpunt heeft in een der punten B, D of B'. Voor $\tau = i$ is $\frac{\omega_1^6 g_3}{140} = \sum' \frac{1}{(m_1+m_2 i)^6} = \sum \frac{1}{(-m_1 i+m_2)^6} = \sum \frac{1}{(m_1+m_2 i)^6} =$

$= 0$, dus $g_3 = \rho$, dus $J(i) = 1$. Voor $\tau = \rho$ is $\frac{\omega_1^4 g_2}{60} = \sum' \frac{1}{(m_1+m_2\rho)^4} =$

$= \frac{1}{\rho} \sum' \frac{1}{(-m_1\rho - m_1+m_2)^4} = \frac{1}{\rho} \sum \frac{1}{(m_1+m_2\rho)^4} = 0$, dus $g_2 = 0$, dus $J(\rho) =$

$= J(\rho+1) = 0$.

In D heeft $J(\tau) - a$ alleen een nulpunt als $a = 1$; dan heeft $J(\tau) - 1$ geen nulpunt in B en B'. We wijzigen de contour nu zo, dat er een instulping C_1 wordt gemaakt, waardoor D uitgesloten wordt. Voor het dan verkregen gebied wordt



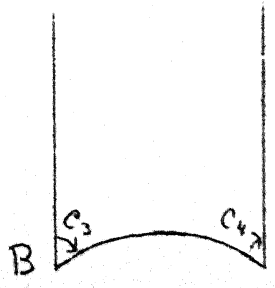
$$2\pi i N = \int_{A'}^{A} d \log(J(\tau) - 1) + \int_{C_1} d \log(J(\tau) - 1).$$

Passen we op C_1 de transformatie $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ toe, dan gaat C_1 in C_2 over en

$$\int_{C_1} d \log(J(\tau) - 1) = \int_{C_2} d \log(J(\tau) - 1) = \tfrac{1}{2} \int_{C_1 - C_2} d \log(J(\tau) - 1.$$

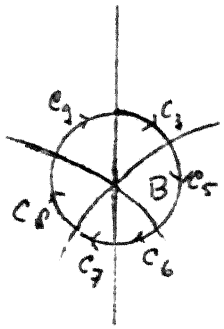
De laatste integraal wordt uitgestrekt over een contour die D éénmaal in negatieve zin omloopt. Noemen we m de multipliciteit van het nulpunt van $J(\tau) - 1$ in D, dan is dus $N = 1 - \frac{1}{2}m$. Omdat N geheel en ≥ 0 en m geheel en ≥ 1 is, geldt $m = 2$, $N = 0$. Buiten D heeft $J(\tau) - 1$ dus in G geen nulpunt en in D een nulpunt van multipliciteit 2.

In B en B' heeft $J(\tau) - a$ alleen een nulpunt als $a = 0$; dan heeft $J(\tau)$ geen nulpunt in D. We wijzigen de contour nu zo, dat er instulpingen C_3 en C_4 worden gemaakt, waardoor B en B' uitgesloten worden. Dan wordt voor het dan verkregen gebied:



$$2\pi i N = \int_{A'}^{A} d \log J(\tau) + \int_{C_3} d \log J(\tau) + \int_{C_4} d \log J(\tau).$$

Nu gaat door toepassing van $\tau' = -\frac{1}{\tau+1}$ C_3 in C_6 over, $-\frac{(\tau+1)}{\tau}$ geeft $C_3 \to C_8$, $-\frac{1}{\tau}$ geeft $C_4 \to C_5$,



$\frac{\tau}{1-\tau}$ geeft $C_4 \to C_7$, $\tau - 1$ geeft $C_4 \to C_8$. Als we n de multipliciteit van het nulpunt van $J(\tau)$ in B noemen, is blijkbaar $N = 1 - \frac{1}{3}n$. Omdat N geheel en ≥ 0 en n geheel en ≥ 1 is, geldt $n = 3$, $N = 0$. Buiten B heeft $J(\tau)$ dus in G geen nulpunt en in B een nulpunt van multipliciteit 3.

We gebruiken dit resultaat om te bewijzen, dat, als a_2 en a_3 complexe getallen zijn waarvoor $a_2^3 - 27a_3^2 = a \neq 0$, er waarden van ω_1 en ω_2 te vinden zijn, waarvoor $g_2(\omega_1, \omega_2) = a_2$, $g_3(\omega_1, \omega_2) = a_3$.

Als $a_2 = 0$, dan is voor $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \varrho$ zeker $g_2(\omega_1, \varrho\omega_1) = 0$. We bepalen ω_1 uit $\omega_1^6 = \frac{140}{a_3} \sum' \frac{1}{(m_1+m_2\varrho)^6}$.

Als $a_3 = 0$, dan is voor $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = i$ zeker $g_3(\omega_1, i\omega_1) = 0$. We bepalen ω_1 uit $\omega_1^4 = \frac{60}{a_2} \sum' \frac{1}{(m_1+m_2 i)^4}$.

Als $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ bepalen we τ zo, dat $J(\tau) = \frac{a_2^3}{a}$. Voor deze τ bepalen we ω_1 uit $\omega_1^2 = \frac{a_2}{a_3} \frac{140 \sum' \frac{1}{(m_1+m_2\tau)^6}}{60 \sum' \frac{1}{(m_1+m_2\tau)^4}}$ en ω_2 uit $\omega_2 = \tau\omega_1$.

§ 4. Enige ondergroepen van de modulaire groep.

We beschouwen de modulaire vlakverdeling. Ieder gebied van deze verdeling wordt uit het fundamentele gebied G door een modulaire transformatie verkregen. Als deze transformatie U is, dan noemen we het gebied $\overline{U}$. We nemen nu een ondergroep H van de modulaire groep M. Twee gebieden $\overline{U}$ en $\overline{V}$ zijn dan en slechts dan aequivalent t.o.v. H als U en V in dezelfde rechter nevenklasse van H liggen. Immers als $\overline{U}$ en $\overline{V}$ aequivalent zijn, is er een $W \in H$, die $\overline{U}$ in $\overline{V}$ transformeert. Als $Wu = v$, $u \in U$, $v \in V$, dan is er een $x \in G$ zodat $Ux = u$, $Vx = v$, dus $WUx = Vx$, dus $WU = V$. Als omgekeerd U en V in dezelfde rechter nevenklasse liggen en $u \in U$, $v \in V$, u en v aequivalent t.o.v. M, dan is er een $x \in G$, zodat $Ux = u$ en $Vx = v$, dus $v = Vx = VU^{-1}u$, maar $VU^{-1} \in H$, dus $\overline{U}$ en $\overline{V}$ zijn aequivalent t.o.v. H.

We kunnen dus een fundamenteel gebied voor H krijgen door uit elke rechter nevenklasse van H één representant te nemen en als vereniging van de bijbehorende gebieden te nemen.

We beperken ons nu tot ondergroepen van M van eindige index in M. Dan is het mogelijk de representanten uit de nevenklassen zo te kiezen, dat het gebied samenhangend wordt. We voeren nl. de volgende construc-

tie uit. We beginnen met G en nemen zo mogelijk een gebied uit de modulaire verdeling, dat langs een kromme bij G aansluit en dat t.o.v. H niet met G geconjugeerd is er bij. Vervolgens nemen we zo mogelijk een gebied uit de modulaire verdeling, dat langs een kromme bij het reeds verkregen gebied aansluit en dat t.o.v. H niet met een der gebieden uit het reeds verkregen gebied geconjugeerd is er bij. Dit zetten we voort tot het niet verder kan. Na eindig veel (ten hoogste de index van H) stappen breekt dit proces af. Laat het dan verkregen gebied G_1 heten. Een gebied $\overline{U}$ uit de modulaire vlakverdeling dat buiten G_1 ligt en langs een kromme bij G_1 aansluit, is aequivalent met een $\overline{V}$ binnen G_1. Laat de transformatie die $\overline{U}$ in $\overline{V}$ transformeert W zijn. Beschrijf een kromme K, die binnen $\overline{U}$ begint en over de grenskromme G_1 binnentreedt. De beeldkromme van deze bij de transformatie W begint in $\overline{V}$ en moet, als K in G_1 binnenkomt, G_1 verlaten. Dus heeft $\overline{V}$ een randkromme met de rand van G_1 gemeen. De randkromme, die $\overline{U}$ met de rand van G_1 gemeen heeft, is aequivalent met de randkromme, die $\overline{V}$ met de rand van G_1 gemeen heeft. Van beide randkrommen rekenen we er slechts één mee voor het fundamentele gebied. Dit doen we voor de hele rand. In het zo verkregen gebied zijn zeker geen twee t.o.v. H aequivalente punten te vinden. We moeten nu nog aantonen, dat bij ieder punt τ in het bovenste halfvlak een aequivalent punt t.o.v. H in G_1 te vinden is. Verbind τ met een punt τ' in G_1 door een uit lijnstukken opgebouwde kromme in het bovenste halfvlak, die de hoekpunten van de gebieden van de modulaire vlakverdeling vermijdt. Deze kromme heeft met slechts eindig veel gebieden van de modulaire vlakverdeling punten gemeen. Doorlopen we de kromme van τ' uitgaande, dan verlaten we op een gegeven ogenblik G_1 via een punt op de rand. Daar met het dan betreden gebied een gebied binnen G_1 aequivlent t.o.v. H is, kunnen we een met het volgende stuk van de kromme aequivalent stuk binnen G_1 vinden, dat ergens op de rand begint. We lopen nu verder tot de beeldkromme G_1 weer verlaat en stappen dan weer over op een binnen G_1 gelegen aequivalente kromme. Dit kan slechts eindig vaak gebeuren, daar bij elk overstappen de oorspronkelijke kromme een randkromme van de modulaire vlakverdeling overschrijdt. Tenslotte vinden we een met τ' aequivalent punt binnen G_1 of op de rand van G_1, maar in het laatste geval is er een aequivalent randpunt, dat bij G_1 meegeteld is.

Hiermee hebben we bij iedere ondergroep H van eindige index j in M een samenhangend fundamenteel gebied gevonden, dat opgebouwd is uit j fundamentele gebieden van M.

Daar een fundamenteel gebied van H opgebouwd is uit fundamentele gebieden van M, die representanten zijn uit rechter nevenklassen van H, is, als H een normale ondergroep is, de factorgroep G|H op te vatten als een permutatiegroep van deze gebieden.

Een uit driehoeken opgebouwde veelhoek met randidentificaties is topologisch op te vatten als het netwerk van een gesloten oppervlak. Het geslacht van het oppervlak, dat zodoende bij een fundamenteel gebied van een ondergroep H behoort, heet het geslacht van H. Het geslacht van M is blijkbaar nul (bol).

We gaan nu enkele ondergroepen van M arithmetisch karakteriseren. Laat n een natuurlijk getal zijn. Twee modulaire transformaties $U = \frac{d_1\tau + c_1}{b_1\tau + a_1}$ en $V = \frac{d_2\tau + c_2}{b_2\tau + a_2}$ heten congruent mod n, als $d_1 \equiv \pm d_2$, $c_1 \equiv \pm c_2$, $b_1 \equiv \pm b_2$, $a_1 \equiv \pm a_2$ alles mod n, mits overal het plusteken of overal het minteken staat. Het is dan duidelijk uit de formules van matrixvermenigvuldiging, dat als $U \equiv V \pmod n$ en $U' \equiv V' \pmod n$, dat $UU' \equiv VV' \pmod n$. Hieruit volgt, dat de klassen congruente transformaties de nevenklassen vormen van een normale ondergroep van M, die bestaat uit de transformaties, congruent met de identieke transformatie. Deze normale ondergroep H_n heet de <u>hoofdcongruentiegroep mod n</u>. Nu is H_n van eindige index, want van een matrix (5.1.2) van een modulaire transformatie kan men de elementen mod n zo reduceren, dat ze $\geqslant 0$ en $\leqslant n-1$ zijn, waarbij $ad - bc = 1$ echter in $a'd' - b'c' \equiv 1 \pmod n$ overgaat; daar deze laatste congruentie echter klaarblijkelijk slechts eindig veel mod n incongruente oplossingen bezit, zijn er ook slechts eindig veel klassen congruente transformaties. Overigens behoort bij iedere oplossing van $a'd' - b'c' \equiv 1 \pmod n$ een modulaire transformatie, d.w.z. zijn er a, b, c, d te vinden, die resp. congruent a', b', c', d' mod n zijn en waarvoor $ad - bc = 1$ geldt. Daar echter bij a, b, c, d en -a, -b, -c, -d dezelfde modulaire transformatie behoort en deze stelsels als $n > 2$ incongruent zijn, is de index van H_n voor $n > 2$ de helft van het aantal incongruente oplossingen van $a'd' - b'c' \equiv 1 \pmod n$. Dit laatste aantal is makkelijk te bepalen (we zullen het niet afleiden) en zo vinden we voor de index van H_n, als $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ de kanonieke ontbinding van n is:

$$(5.4.1) \qquad j(n) = \tfrac{1}{2}n^3\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r^2}\right).$$

Verder is $j(2) = 6$. Uit (5.4.1) volgt $j(3) = 12$, $j(4) = 24$, $j(5) = 60$.

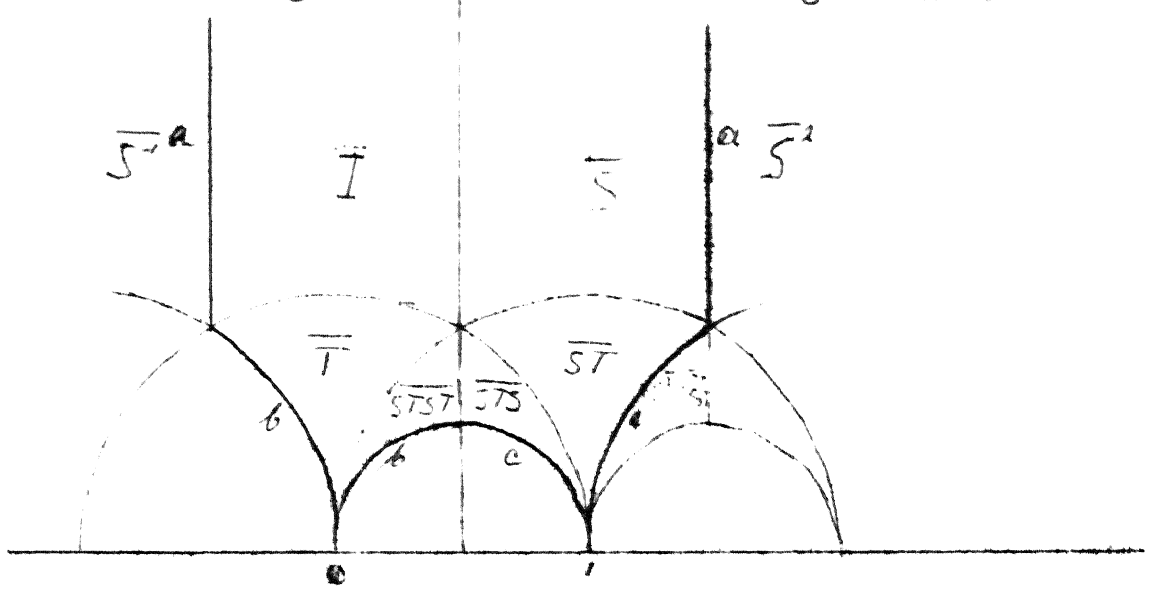
Uit de groepentheorie is bekend, dat, als H een normale ondergroep van M is, met iedere ondergroep H_1 van $M|H$ een groep H_1^* tussen H en M correspondeert, zodat H_1 isomorf is met $H_1^*|H$ en omgekeerd. Verder is H_1 dan en slechts dan een normale ondergroep van $G|H$ als H_1^* een normale ondergroep van M is en $M|H_1^*$ is isomorf met $(G|H)|H_1$, anders uitgedrukt $M|H_1^*$ is isomorf met $(M|H)|(H_1^*|H)$. In zekere zin beheersen we dus de groepen tussen H en M als we de ondergroepen van $M|H$ beheersen. De groepen tussen H_n en M heten <u>congruentiegroepen mod n</u>.

Daar M door de transformaties S en T voortgebracht wordt, geldt, dat $M|H_n$ voortgebracht wordt door de aan S en T toegevoegde elementen S^* en T^* van $M|H_n$. Nu heeft S^* blijkbaar orde n, T^* orde 2 en T^*S^* orde 3. Voor n = 2,3,4 en 5 is de abstracte groep voortgebracht door een element van orde n en een van orde 2, zodat het product orde 3 heeft, isomorf resp. met γ_3 (symmetrische groep van 3 elementen), α_4 (alternerende groep van 4 elementen), γ_4 en α_5. Uit de indices van de groepen H_2, H_3, H_4 en H_5 volgt direct, dat hun factorgroepen ook isomorf zijn met resp. γ_3, α_4, γ_4 en α_5. Het gesloten oppervlak, dat bij het fundamenteel gebied van deze groepen behoort, is een bol en de permutatiegroepen van de punten van de bol, die bij de factorgroepen behoren, zijn juist de polyedergroepen: diëdergroep behorende bij een driehoek, tetraedergroep, octaedergroep en icosaedergroep.

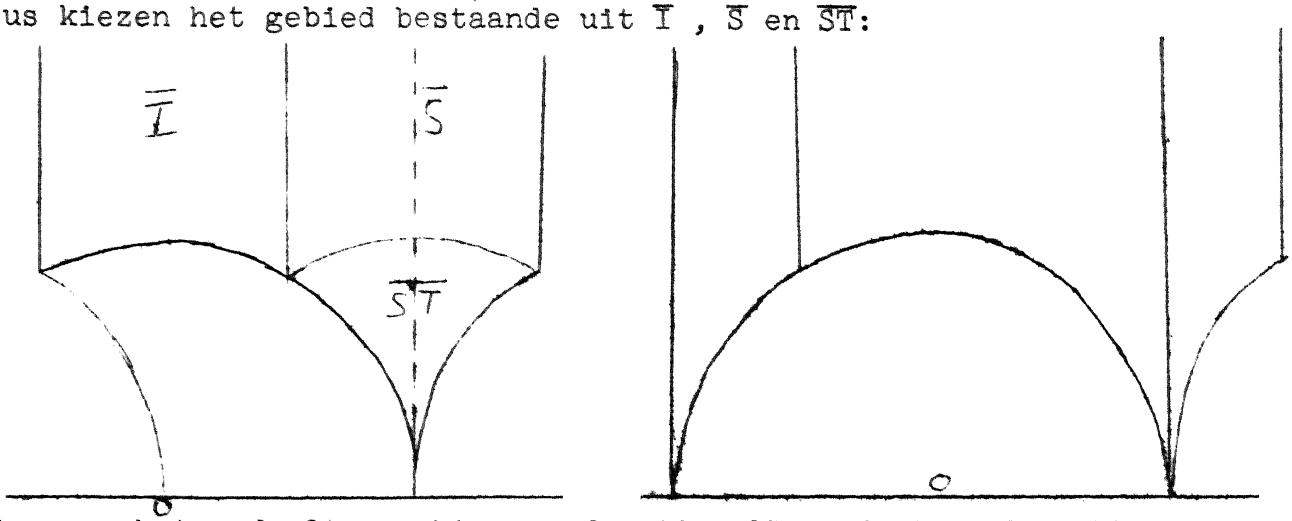
De hoofdcongruentiegroep mod 2 beschouwen we nog wat nader. Deze heeft index 6. Voor de representanten uit de nevenklassen kunnen we kiezen:

$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $ST=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $STS=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $STST=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Als fundamenteel gebied kunnen we dus het volgende kiezen:



In de factorgroep beschouwen we de ondergroep K van orde 2, bestaande uit I en T. Deze heeft index 3. De ondergroep Γ_3 van M die bij K behoort, heeft index 3 in M en bestaat uit de transformaties die $\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ of $\equiv\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ mod 2 zijn, d.w.z. de transformaties $\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}$, waarvoor $bc\equiv 0 \pmod 2$ of $ad\equiv 0 \pmod 2$. De nevenklassen van K in M/H_2 zijn de volgende: $\{1,T\}$, $\{S,STST\}$, $\{ST,STS\}$. Als fundamenteel gebied kunnen we dus kiezen het gebied bestaande uit $\overline{I}$, $\overline{S}$ en $\overline{ST}$:



Door op het gedeelte rechts van de stippellijn de transformatie $S^{-2}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, die tot Γ_3 behoort, toe te passen vinden we een fundamenteel gebied, dat begrensd is door de eenheidscirkel en de rechte lijnen $\Re\tau=1$ en $\Re\tau=-1$.

De aanliggende gebieden van het fundamentele gebied bevatten resp. gebieden behorende bij $S^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $STS=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $S^2TST=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix}$, $S^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.

Het eerste dezer gebieden ontstaat uit het fundamentele gebied door de transformatie $\left(\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=S^{-2}$, daar $S^{-2}S=S^{-1}$, het tweede door T, het derde door $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{smallmatrix}\right)=TS^{-2}$, daar $TS^{-2}ST=TS^{-1}T=STS$, het vierde door $\left(\begin{smallmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)=S^2T$, daar $(S^2T)(ST)=S^2TST$, het vijfde door S^2, hetgeen allen transformaties uit Γ_3 zijn. Deze brengen Γ_3 voort, dus S^2 en T brengen Γ_3 voort: S^2 is $\tau'=\tau+2$ en T is $\tau'=-\frac{1}{\tau}$.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A M S T E R D A M - O.

Colloquium over theta-functies.

Voordracht door C.G. Lekkerkerker

9 April 1952

§ 1. Het gedrag van theta-functies bij willekeurige modulaire substituties.

Reeds bestudeerde v.d. Blij het effect van de substituties $\tau' = \tau + 1$ en $\tau' = \frac{-1}{\tau}$ op b.v. de functie $\vartheta_{oo}(z,\tau)$. Thans willen we nagaan, wat er gebeurt bij een willekeurige modulaire substitutie

$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ geheel en $\alpha\delta-\beta\gamma = +1$).

Wegens (1.2.12) geldt:

$$\vartheta_{gh}(z|\tau) = e^{\frac{1}{4}\pi i\tau g^2}\, e^{\pi i z h}\, \vartheta_{oo}(z+\tfrac{1}{2}g\tau+\tfrac{1}{2}h|\tau)$$

en kunnen we ons rustig beperken tot de bestudering van het gedrag van $\vartheta_{oo}(z|\tau)$.

We zullen ons nog een beperking opleggen, n.l. alleen de modulaire substituties beschouwen, die tot Γ_3 behoren, dus de substituties

(6.1.1) $\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ met $\alpha\gamma \equiv 0(2)$, $\beta\delta \equiv 0(2)$;

het zal blijken, dat hierdoor de berekening op verschillende punten vereenvoudigd wordt.

Verder is het geen beperking te onderstellen:

(6.1.2) $\gamma > 0$.

We gaan nu herleiden:

$$(6.1.3)\qquad \vartheta_{oo}\left(\frac{z}{\gamma\tau+\delta}\,\middle|\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}m^2}\, e^{\frac{2\pi i z}{\gamma\tau+\delta}m}.$$

Wegens $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}$ kan de factor $e^{\pi i\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}m^2}$ geschreven worden als $e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}m^2}\, e^{-\pi i\frac{m^2}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}}$; het ligt dus voor de hand in de (absoluut convergente) reeks in (6.1.3) te sommeren volgens restklassen modulo γ. Stel:

(6.1.4) $m = \gamma n + k$ (n,k geheel en $1 \leqq k \leqq \gamma$).

Nu is $\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma n+k)^2 = \alpha\gamma n^2 + 2\alpha\gamma nk + \frac{\alpha}{\gamma}k^2 \equiv \frac{\alpha}{\gamma}k^2 \pmod 2$ wegens (6.1.1) en dus krijgen we:

$$\vartheta_{oo}\left(\frac{z}{\gamma\tau+\delta}\,\middle|\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{\gamma} e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}k^2}\, e^{-\pi i\frac{(\gamma n+k)^2}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}}\, e^{\frac{2\pi i z(\gamma n+k)}{\gamma\tau+\delta}}.$$

Toepassing van de sommatieformule van Poisson (zie TF 3) levert:

$$\sum_{k=1}^{\gamma} e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}k^2} \sum_{n=-\infty}^{\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi i\frac{(\gamma x+k)^2}{\gamma(\gamma\tau+\delta)} + \frac{2\pi iz}{\gamma\tau+\delta}(\gamma x+k)+2\pi inx}\, dx;$$

deze toepassing is geoorloofd, omdat reeks en integraal absoluut convergeren op grond van $\mathrm{Re}\left(\frac{-i}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}\right) < 0$.

Ter berekening van de integraal schrijven wij

$$-\frac{(\gamma x+k)^2}{\gamma(\gamma\tau+\delta)} + \frac{2z}{\gamma\tau+\delta}(\gamma x+k) + 2nx =$$

$$= \frac{-1}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}\left[(\gamma x+k)^2 - 2\gamma z(\gamma x+k) - 2(\gamma\tau+\delta)n(\gamma x+k)\right] - \frac{2kn}{\gamma} =$$

$$= \frac{-1}{\gamma(\gamma\tau+\delta)}\left[(\gamma x+k)^2 - \gamma z - (\gamma\tau+\delta)n\right]^2 + \frac{\gamma}{\gamma\tau+\delta}\left(z+\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma}n\right)^2 - \frac{2kn}{\gamma};$$

wegens $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\, dy = \sqrt{\pi/\alpha}$ $(\mathrm{Re}\,\alpha > 0,\ \mathrm{Re}\sqrt{\pi/\alpha} > 0)$ krijgen we dan:

$$\vartheta_{oo}\left(\frac{z}{\gamma\tau+\delta}\middle|\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \sum_{k=1}^{\gamma} e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}k^2} \sum_{n=-\infty}^{\pm\infty} e^{-\frac{2\pi ikn}{\gamma} + \frac{\pi i\gamma}{\gamma\tau+\delta}\left(z+\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma}n\right)^2} \sqrt{\pi\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma\pi i}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\pm\infty} \sum_{k=1}^{\gamma} e^{\frac{\pi i}{\gamma}(\alpha k^2-2kn+\delta n^2)} e^{\frac{\pi i\gamma z^2}{\gamma\tau+\delta} + 2\pi izn + \pi i\tau n^2} \sqrt{-i\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma}},$$

waarbij $\sqrt{-i\,\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma}}$ met positief reëel deel genomen moet worden. Nu is

$$e^{\frac{\pi i}{\gamma}(\alpha k^2-2kn+\delta n^2)} = e^{\frac{\pi i}{\gamma}\alpha\delta(\alpha k^2-2kn+\delta n^2)}.$$

Immers $\alpha\delta = 1 + \beta\gamma$, terwijl

$$\beta\,.(\alpha k^2-2kn+\delta n^2) = \alpha\,.\beta k^2 - 2kn\beta+\beta\delta.\ n^2$$

ten duidelijkste een even geheel getal is op grond van (6.1.1). Verder is

$$e^{\frac{\pi i}{\gamma}\alpha\delta(\alpha k^2-2kn+\delta n^2)} = e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}(\alpha\delta k^2-2\delta kn+\delta^2n^2)} =$$

$$= e^{\pi i\frac{\alpha\beta\gamma k^2}{\gamma}}\,.\,e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}(k^2-2\delta kn+\delta^2n^2)} = e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}(k-\delta n)^2}.$$

We stellen nu kortheidshalve:

$$(6.1.5) \qquad S\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \sum_{k=1}^{\gamma} e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}k^2},$$

$$(6.1.6) \qquad W = e^{\frac{\pi i\gamma z^2}{\gamma\tau+\delta}} \sqrt{-i\,\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma}}$$

en vinden dan tenslotte:

$$\vartheta_{oo}\left(\frac{z}{\gamma\tau+\delta}\middle|\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = W \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\gamma} e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}(k-\delta n)^2}\,.\,e^{2\pi izn+\pi i\tau n^2} =$$

$$= W \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\gamma} e^{\pi i\frac{\alpha}{\gamma}k^2}\ e^{2\pi izn+\pi i\tau n^2} = WS\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\vartheta_{oo}(z/\tau).$$

Hiermee is de voorlopige vorm van de transformatieformule gevonden . We moeten nog de som (6.1.5) berekenen, een som van Gauss. Hierbij speelt een belangrijke rol het begrip kwadraatrest, dat we nu eerst bespreken.

§ 2. Kwadraatresten. Symbool van Legendre.

Zij p een oneven priemgetal. De gehele getallen kunnen ingedeeld worden in p restklassen modulo p. Die restklassen vormen een lichaam en kunnen gerepresenteerd worden door de getallen 1,2,...,p.

Zij nu r een willekeurig geheel getal, waarvoor geldt: (r,p) = 1, d.w.z. p $\nmid$ r. We noemen r een (kwadraat)rest modulo p, indien de restklasse van r een kwadraat bevat, dus indien de congruentie

(6.2.1) $\quad x^2 \equiv r \pmod p$

oplosbaar is. En r heet een niet-rest als (6.2.1) niet oplosbaar is.

Uit de definitie vloeit onmiddellijk voort: is r kwadraatrest modulo p en $r' \equiv r \pmod p$, dan is ook r' kwadraatrest. En omgekeerd. Rest zijn of niet-rest zijn, is dus een eigenschap, die aan een restklasse als geheel toekomt.

Uit $x^2 \equiv r \pmod p$ volgt $(x+hp)^2 \equiv r \pmod p$ (h een geheel getal). Dientengevolge leveren de kwadraten $1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$ ons reeds alle resten. We laten zien, dat onder deze getallen juist $\frac{p-1}{2}$ incongruente getallen voorkomen, en wel elk tweemaal. We hebben nl.

1) $(p-i)^2 \equiv i^2 \pmod p$

2) is $1 \leqq i < j \leqq \frac{p-1}{2}$, dan is $i^2 \not\equiv j^2 \pmod p$: want uit $i^2 \equiv j^2$ zou volgen $(i-j)(i+j) \equiv 0 \pmod p$ en dus, omdat p een priemgetal is, hetzij $i-j \equiv 0 \pmod p$, hetzij $i+j \equiv 0 \pmod p$; dit kan niet wegens $0 < j \pm i \leqq p-1$.

Van Legendre is de volgende notatie afkomstig:

$$(6.2.2) \qquad \begin{cases} \left(\frac{r}{p}\right) = +1 \text{ indien r een kwadraatrest is modulo p,} \\ \left(\frac{r}{p}\right) = -1 \text{ indien r een niet-rest is,} \\ \left(\frac{r}{p}\right) = 0 \text{ indien geldt: } p/r. \end{cases}$$

Gemakkelijk ziet men in, dat het door (6.2.2) vastgelegde symbool multiplicatief (in sterke zin) is t.o.v. de teller in het symbool. Want allereerst is $r_1 r_2$ een rest, als r_1 en r_2 dat zijn. Is verder (r,p) = 1 en r^{-1} de inverse van r, d.w.z. de oplossing van $\xi r \equiv 1 \pmod p$, dan geldt: is r een kwadraatrest , dan ook r^{-1}, en omgekeerd. Hieruit volgt, dat het product van $r_1 r_2$ van twee getallen r_1 en r_2 dan en slechts dan kwadraatrest is, indien r_1 en r_2 beide rest of beide niet-rest zijn.

We willen het symbool van Legendre ook definiëren voor het geval dat de noemer geen priemgetal is. We interesseren ons hierbij niet meer voor het verband met kwadraatresten, maar verlangen een symbool, dat ook t.o.v. de noemer multiplicatief is. We krijgen zo nl. juist het symbool, dat we bij de sommen van Gauss nodig hebben. En wel, als n een positief oneven getal is met priemfactorontbinding

$$n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} \qquad (k_1, \dots, k_s \geqq 1),$$

dan definiëren we:

$$(6.2.3) \qquad \left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{r}{p_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{r}{p_s}\right)^{k_s}.$$

§ 3. Berekening van $S(\frac{\alpha}{\gamma})$. Afhankelijkheid van α.

Zij $\gamma > 0$ en oneven. Wegens (6.1.1) is dan α even, dus $\alpha = 2a$ (a geheel). In de som (6.1.5) mogen we dan n een willekeurig restsysteem mod γ laten doorlopen. Verder is $(\alpha, \gamma) = 1$. We zullen bewijzen:

$$(6.3.1) \qquad S\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = S\left(\frac{2a}{\gamma}\right) = \left(\frac{a}{\gamma}\right) S\left(\frac{2}{\gamma}\right).$$

Deze formule houdt in, dat $S(\frac{\alpha}{\gamma})$ op factor ± 1 na gelijk is aan $S(\frac{2}{\gamma})$. De bepaling van deze factor was voor Gauss de hoofdmoeilijkheid bij het berekenen van de som (6.1.5). Het bewijs van (6.3.1) geschiedt in drie stappen.

1. γ is een (oneven) priemgetal.

Dan is

$$\sum_{r \bmod \gamma} e^{\pi i \frac{\alpha}{\gamma} r} = 0,$$

dus

$$\sum_{r \bmod \gamma} \left(\frac{r}{\gamma}\right) e^{\pi i \frac{\alpha}{\gamma} r} = \sum_{r \bmod \gamma} \left(\left(\frac{r}{\gamma}\right)+1\right) e^{\pi i \frac{\alpha}{\gamma} r} =$$

$$= 1 + 2 \sum_{r \bmod \gamma,\ \left(\frac{r}{\gamma}\right)=+1} e^{\pi i \frac{\alpha}{\gamma} r} = \sum_{n \bmod \gamma} e^{\pi i \frac{\alpha}{\gamma} n^2},$$

aangezien bij het doorlopen van een volledig restsysteem n^2, modulo γ gerekend, éénmaal de waarde nul aanneemt, en verder tweemaal als waarde elk getal, dat een kwadraatrest modulo γ is. Dus:

$$(6.3.2) \qquad S\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \sum_{r \bmod \gamma} \left(\frac{r}{\gamma}\right) e^{\pi i \frac{\alpha}{\gamma} r} \qquad (\gamma \text{ een oneven priemgetal}).$$

In de som rechts mogen we natuurlijk r vervangen door br, als maar $(b, \gamma) = 1$ is. Nu is op grond van § 2:

$$\left(\frac{br}{\gamma}\right) = \left(\frac{b}{\gamma}\right) \cdot \left(\frac{r}{\gamma}\right),$$

dus

$$(6.3.3) \qquad S\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \sum_{r \bmod \gamma} \left(\frac{r}{\gamma}\right) e^{\pi i \frac{\alpha}{\gamma} r} = \sum_{r \bmod \gamma} \left(\frac{br}{\gamma}\right) e^{\pi i \frac{\alpha b}{\gamma} r} =$$

$$= \left(\frac{b}{\gamma}\right) S\left(\frac{\alpha b}{\gamma}\right)$$

Dus in het bijzonder

$$S(\frac{2}{\gamma}) = (\frac{a}{\gamma})S(\frac{2a}{\gamma}),$$

dat is (6.3.1).

2. γ is macht van een priemgetal.

$\gamma = p^k$ met p oneven, $k \geqq 2$. Formule (6.3.2) geldt nu niet meer. We zetten

$$n = n_1 p^{k-1} + n_2;$$

doorloopt hierbij n_1 een volledig restsysteem mod p en n_2 een volledig restsysteem mod p^{k-1}, dan doorloopt n een volledig restsysteem mod p^k. Dus geldt, als we nog letten op $2k-2 \geqq k$:

$$S(\frac{2a}{\gamma}) = \sum_{n \bmod p^k} e^{2\pi i \frac{a}{\gamma} n^2} =$$

$$= \sum_{n_1 \bmod p,\, n_2 \bmod p^{k-1}} e^{2\pi i \frac{a}{p^k}(n_1^2 p^{2k-2} + 2n_1 n_2 p^{k-1} + n_2^2)} =$$

$$= \sum_{n_2 \bmod p^{k-1}} e^{\frac{2\pi i a n_2^2}{p^k}} \cdot \sum_{n_1 \bmod p} e^{2\pi i a \frac{n_1 n_2}{p}}.$$

De som over n_1 is alleen van nul verschillend, en dan met name gelijk aan p, als p/n_2 is. In dat geval kunnen we zetten $n_2 = pm$ en m een volledig restsysteem mod p^{k-2} laten doorlopen. Dus geldt:

$$(6.3.4) \qquad S(\frac{2a}{p^k}) = p \sum_{m \bmod p^{k-2}} e^{2\pi i a \frac{m^2}{p^{k-2}}} = p\, S(\frac{2a}{p^{k-2}}).$$

Voor k even vinden we zo:

$$S(\frac{2a}{p^k}) = p^{k/2} \text{ en ook } S(\frac{2}{p^k}) = p^{k/2};$$

voor k oneven daarentegen wegens het in 1 afgeleide:

$$S(\frac{2a}{p^k}) = p^{\frac{k-1}{2}} S(\frac{2a}{p}) = (\frac{a}{p}) p^{\frac{k-1}{2}} S(\frac{2}{p})$$

en

$$S(\frac{2}{p^k}) = p^{\frac{k-1}{2}} S(\frac{2}{p}).$$

Hieruit volgt (6.3.1) als we slechts bedenken (zie (6.2.3)):

$$(\frac{a}{p^k}) = +1 \text{ voor k even,}$$

$$= (\frac{a}{p}) \text{ voor k oneven.}$$

3. Het algemene geval.

Zij $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ met $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ en $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$. Met de onder 2. uiteengezette methode volgt nu:

$$S(\frac{2a}{\gamma_1 \gamma_2}) = \sum_{n_1 \bmod \gamma_2,\, n_2 \bmod \gamma_1} e^{2\pi i a \frac{(n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2)^2}{\gamma_1\gamma_2}} =$$

$$= \sum_{n_1,n_2} e^{2\pi i \frac{a\gamma_1}{\gamma_2} n_1^2 + 2\pi i a \frac{\gamma_2}{\gamma_1} n_2^2} = S(\frac{2a\gamma_1}{\gamma_2})\ S(\frac{2a\gamma_2}{\gamma_1}),$$

dus ook

$$S(\frac{2}{\gamma_1\gamma_2}) = S(\frac{2\gamma_1}{\gamma_2})\ S(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1}).$$

Indien (6.3.1) geldt met noemer γ_1 en met noemer γ_2, dan is

$$S(\frac{2a\gamma_1}{\gamma_2}) = (\frac{a\gamma_1}{\gamma_2})S(\frac{2}{\gamma_2}) = (\frac{a}{\gamma_2})(\frac{\gamma_1}{\gamma_2})S(\frac{2}{\gamma_2}) = (\frac{a}{\gamma_2})S(\frac{2\gamma_1}{\gamma_2}),$$

dus

$$S(\frac{2a}{\gamma_1\gamma_2}) = (\frac{a}{\gamma_2})(\frac{a}{\gamma_1})S(\frac{2\gamma_1}{\gamma_2})S(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1}) = (\frac{a}{\gamma_1\gamma_2})S(\frac{2}{\gamma_1\gamma_2}),$$

o.a. wegens (6.2.3) en (6.3.5). Dus geldt (6.3.1) ook met noemer $\gamma_1\gamma_2$. Zo is (6.3.1) door volledige inductie te bewijzen.

§ 4. Berekening van $S(\frac{2}{\gamma})$ voor γ oneven.

Definiëren we nog $S(\frac{-\alpha}{-\gamma}) = S(\frac{\alpha}{\gamma})$, dan blijven beide leden van (6.1.7) hetzelfde als we $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ allen van teken veranderen, omdat ϑ_{00} een even functie is van z. Dus geldt (6.1.7) voor $\gamma \neq 0$.

De volgende overweging zal een <u>bron van informaties</u> blijken te zijn. Voert men achter elkaar uit twee modulaire substituties

$$\tau_2 = \frac{\alpha_2\tau_1+\beta_2}{\gamma_2\tau_1+\delta_2}, \quad \tau_1 = \frac{\alpha_1\tau+\beta_1}{\gamma_1\tau+\delta_1} \text{ met } \gamma_1 \neq 0,\ \gamma_2 \neq 0,$$

dan is het resultaat weer een modulaire substitutie

$$\tau_2 = \frac{\alpha^*\tau+\beta^*}{\gamma^*\tau+\delta^*} \text{ met } \begin{pmatrix}\alpha^* & \beta^*\\ \gamma^* & \delta^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix};$$

door toepassing van (6.1.7) voor $z = 0$ wordt $\vartheta_{00}(0|\tau_2)$ op <u>twee verschillende manieren</u> uitgedrukt in $\vartheta_{00}(0|\tau)$ en verkrijgen we relaties tussen sommen van Gauss (zouden we niet $z = 0$ invullen, dan zouden automatisch factoren met z tegen elkaar weg moeten vallen).

Als eerste toepassing kiezen wij ($\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$):

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta & -\delta\\ \alpha & \gamma\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

zodat

$$\begin{pmatrix}\alpha^* & \beta^*\\ \gamma^* & \delta^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{\tau} \text{ is.}$$

We hebben enerzijds (vgl. (1.3.2)):

(6.4.1) $$\vartheta_{00}(0|-\tfrac{1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\ \vartheta_{00}(0|\tau) \qquad (\mathrm{Re}\ \sqrt{-i\tau} > 0),$$

anderzijds

(6.4.2) $$\vartheta_{00}(0|\tau_2) = \vartheta_{00}(0|\frac{\alpha\tau_1+\beta}{\gamma\tau_1+\delta}) = S(\frac{\alpha}{\gamma})\sqrt{-i\frac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}}\,\vartheta_{00}(0|\tau_1) =$$

$$= S(\tfrac{\alpha}{\gamma}) \sqrt{i\,\frac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}}\,\vartheta_{00}\Big(0\Big|\,\frac{-\beta\tau-\delta}{\alpha\tau+\gamma}\Big) =$$

$$= S(\tfrac{\alpha}{\gamma}) \sqrt{-i\,\frac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}}\; S(\tfrac{-\beta}{\alpha}) \sqrt{-i\,\frac{\alpha\tau+\gamma}{\alpha}}\;\vartheta_{00}(0|\tau)$$

met

$$\mathrm{Re}\sqrt{-i\,\frac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}} > 0,\quad \mathrm{Re}\sqrt{-i\,\frac{\alpha\tau+\gamma}{\alpha}} > 0.$$

Nu is

$$\frac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma} = \frac{\gamma(-\beta\tau-\delta)+\delta(\alpha\tau+\gamma)}{\gamma(\alpha\tau+\gamma)} = \frac{\tau}{\gamma(\alpha\tau+\gamma)}.$$

Omdat $\dfrac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}$ kennelijk positief imaginair deel heeft en we $\mathrm{Re}\sqrt{-i\,\dfrac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}}$ positief moesten nemen, geldt zelfs

$$\Big|\arg\sqrt{-i\,\frac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}}\Big| < \pi/4.$$

Evenzo

$$\Big|\arg\sqrt{-i\tau}\Big| < \pi/4,\quad \Big|\arg\sqrt{-i\,\frac{\alpha\tau+\gamma}{\alpha}}\Big| < \pi/4.$$

Schrijven we dus

$$\sqrt{-i\,\frac{\gamma\tau_1+\delta}{\gamma}}\cdot\sqrt{-i\,\frac{\alpha\tau+\gamma}{\alpha}} = \sqrt{\frac{-\tau}{\alpha\gamma}} = \sqrt{-i\tau}\;\frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma i}},$$

dan geldt

$$\Big|\arg\sqrt{\alpha\gamma i}\Big| < 3\pi/4,$$

en dus

$$\arg\sqrt{\alpha\gamma i} = \pm\pi/4,$$

al naar gelang $\alpha\gamma > 0$ of < 0 is. Door vergelijking van (6.4.1) en (6.4.2) krijgen we dus:

$$(6.4.3)\qquad S(\tfrac{\alpha}{\gamma})\,S(\tfrac{-\beta}{\alpha}) = \sqrt{\alpha\gamma i},$$

waarbij $\arg\sqrt{\alpha\gamma i} = \pm\pi/4$ is en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehele getallen zijn met $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Gevolgen van (6.4.3).

I. Zij $\gamma \equiv 3 \pmod 4$, $\gamma > 0$. Dan mogen we kiezen

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ \gamma & \frac{\gamma+1}{2}\end{pmatrix};$$

immers $\dfrac{\gamma+1}{2}$ is geheel en de determinant is $2\,\dfrac{\gamma+1}{2} - \gamma = 1$. Dus

$$S(\tfrac{2}{\gamma})\,S(\tfrac{-1}{2}) = \sqrt{2\gamma i} = (1+i)\sqrt{\gamma}.$$

Wegens $S(\tfrac{-1}{2}) = 1 + e^{\frac{-\pi i}{2}} = 1 - i$, vinden we:

$$(6.4.4)\qquad S(\tfrac{2}{\gamma}) = 1\sqrt{\gamma}.$$

II. Zij $\gamma \equiv 1 \pmod 4$, $\gamma > 0$. Nu kiezen we $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ \gamma & \frac{1-\gamma}{2}\end{pmatrix}$ en vinden dan wegens $S(\tfrac{+1}{2}) = 1 + i$:

$$(6.4.5)\qquad S(\tfrac{2}{\gamma}) = \sqrt{\gamma}.$$

We kunnen (6.4.4) en (6.4.5) aldus samenvatten

(6.4.6) $S(\frac{2}{\gamma}) = e_\gamma \sqrt{\gamma}$ (γ oneven, positief)

met

(6,4,7) $e_\gamma = \begin{matrix} 1 \text{ voor } \gamma \equiv 1 \pmod 4 \\ i \text{ voor } \gamma \equiv 3 \pmod 4 \end{matrix}$.

III. Op dezelfde manier vinden wij

(6.4.8) $S(\frac{-2}{\gamma}) = \frac{1}{e_\gamma}\sqrt{\gamma}$ (γ oneven, positief).

We kunnen nog als volgt e_γ in één formule uitdrukken:

(6.4.9) $e_\gamma = i^{(\frac{\gamma-1}{2})^2}$.

Uit (6.4.5) en (6.4.8) volgt op grond van § 3 (het getal a aldaar mag negatief zijn!):

(6.4.10) $(\frac{-1}{\gamma}) = (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}$ (γ oneven positief).

5. Voltooiing van de berekening. De kwadratische reciprociteitswet.

We passen nogmaals het in § 4 genoemde principe toe en wel met

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0.$$

Dan is

$$\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

$$\vartheta_{oo}(0 \mid \frac{-\gamma\tau - \delta}{\alpha\tau + \beta}) = \sqrt{-i\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}}\, S(\frac{\alpha}{\gamma}) \cdot \sqrt{-i\,\frac{\gamma\tau+\delta}{\gamma}}\; \nu_{oo}^{c}(0/\tau)$$

en

$$\vartheta_{oo}(0 \mid \frac{-\gamma\bar\tau - \delta}{\alpha\bar\tau + \beta}) = \sqrt{-i\,\frac{\alpha\bar\tau+\beta}{\alpha}}\, S(\frac{-\gamma}{\alpha}) \cdot \vartheta_{oo}(0/\tau).$$

Dus geldt

(6.5.1) $S(\frac{\alpha}{\gamma}) = \sqrt{\frac{\gamma i}{\alpha}}\, S(\frac{-\gamma}{\alpha})$ voor $\alpha\gamma \equiv 0(2)$,

waarbij $|\arg \sqrt{\frac{\gamma i}{\alpha}}| < \frac{3\pi}{4}$, dus $\arg \sqrt{\frac{\gamma i}{\alpha}} = \pm \pi/4$ is.

We willen thans berekenen $S(\frac{\alpha}{\gamma})$ voor γ even, positief, dus α oneven. Stel $\gamma = 2^k c$ met c oneven , $k \geq 1$. We hebben allereerst:

(6.5.2) $S(\frac{\alpha}{2}) = 1 + e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} = f_\alpha \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i \alpha}{4}}$,

waarin $f_\alpha = \pm 1$ zodanig bepaald moet worden, dat

$|\arg f_\alpha e^{\frac{\pi i \alpha}{4}}| < \pi/2$ is. Voor $\alpha \equiv \pm 1 \pmod 8$ is dus $f_\alpha = 1$; voor $\alpha \equiv \pm 3 \pmod 8$ is $f_\alpha = -1$. Dus kunnen we schrijven:

(6.5.3) $f_\alpha = (-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}} = (-1)^{-\frac{\alpha^2-1}{8}}$.

Verder is

(6.5.4) $S(\frac{\alpha}{4}) = 1 + e^{\pi i \frac{\alpha}{4}} + e^{\pi i \alpha} + e^{9\pi i \frac{\alpha}{4}} = 2e^{\pi i \frac{\alpha}{4}}$.

Terloops rekenen we het symbool $(\frac{2}{\alpha})$ voor α oneven, positief uit, aan de hand van (6.5.4) en (6.5.1):

$$2e^{\pi i\frac{\alpha}{4}} = S(\tfrac{\alpha}{4}) = \sqrt{\tfrac{4i}{\alpha}}\, S(\tfrac{-4}{\alpha}) = \sqrt{\tfrac{4i}{\alpha}}(\tfrac{2}{\alpha})S(\tfrac{-2}{\alpha}) = \sqrt{\tfrac{4i}{\alpha}}(\tfrac{2}{\alpha})\,\tfrac{1}{e_\alpha}\sqrt{\alpha}\ ,$$

dus

$$(\tfrac{2}{\alpha}) = e_\alpha\, e^{\pi i\frac{\alpha-1}{4}} = i^{(\frac{\alpha-1}{2})^2 + \frac{\alpha-1}{2}} = i^{\frac{\alpha^2-1}{4}},$$

(6.5.5) $$(\tfrac{2}{\alpha}) = (-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}} \quad (\alpha \text{ oneven, positief}).$$

Tenslotte herleiden we, eerst voor $\alpha > 0$:

$$S(\tfrac{\alpha}{\gamma}) = \sqrt{\tfrac{\gamma i}{\alpha}}\, S(\tfrac{-\alpha}{\gamma}) = \sqrt{\tfrac{4i}{\alpha}}\,(\tfrac{2^{k-1}c}{\alpha})\, S(\tfrac{-2}{\alpha}) = \sqrt{\gamma i}\,(\tfrac{2^{k-1}c}{\alpha})\,\tfrac{1}{e_\alpha} =$$

$$= (\tfrac{\gamma}{\alpha})\sqrt{\gamma}\ i^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2-1}{4} - (\frac{\alpha-1}{2})^2} = (\tfrac{\gamma}{\alpha})\sqrt{\gamma}\ i^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Voor $\alpha < 0$ gaat de herleiding evenzo. Samenvattend geldt:

(6.5.6) $$S(\tfrac{\alpha}{\gamma}) = (\tfrac{\alpha}{\gamma})\sqrt{\gamma}\ e^{\pi i\frac{\gamma}{4}} \quad (\gamma \text{ even, positief}).$$

We hebben ook nog voor γ oneven, positief, met $\alpha = 2a$, lettend op (6.5.5):

$$S(\tfrac{\alpha}{\gamma}) = S(\tfrac{2a}{\gamma}) = (\tfrac{a}{\gamma})\, e_\gamma \sqrt{\gamma} = (\tfrac{a}{\gamma})\sqrt{\gamma}\ i^{\pm\frac{\gamma^2-1}{4} + (\frac{\gamma-1}{2})^2},$$

(6.5.7) $$S(\tfrac{\alpha}{\gamma}) = (\tfrac{\alpha}{\gamma})\sqrt{\gamma}\ e^{-\frac{\pi i}{4}(\gamma-1)} \quad (\gamma \text{ oneven, positief}).$$

Door (6.1.7), (6.1.6), (6.5.6) en (6.5.7) is de vorm van de transformatieformule voor $\vartheta_{00}(z|\tau)$ volledig bepaald.

Het symbool van Legendre bezit een merkwaardige eigenschap, waarvan het bewijs na de voorgaande analyse geen enkele moeilijkheid meer biedt, en dat we daarom hier reproduceren. Het is de z.g. quadratische reciprociteitswet, die als volgt luidt:

Zijn α en γ twee positieve oneven getallen, dan geldt:

(6.5.8) $$(\tfrac{\alpha}{\gamma})(\tfrac{\gamma}{\alpha}) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\,\frac{\gamma-1}{2}};$$

verder is voor γ oneven, positief

(6.5.9) $$(\tfrac{2}{\gamma}) = (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}, \quad (\tfrac{-1}{\gamma}) = (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Met behulp van deze wet en de definitie (6.2.3) kan een willekeurig symbool $(\tfrac{\alpha}{\gamma})$ snel uitgerekend worden.

Bewijs van (6.5.8): We hebben $S(\tfrac{2\alpha}{\gamma}) = (\tfrac{\alpha}{\gamma})\, e_\gamma\sqrt{\gamma}$ en

$$S(\tfrac{-\gamma}{2\alpha}) = \sum_{n \bmod 2\alpha} e^{-\pi i\frac{\gamma}{2\alpha}n^2} = \sum_{n_1 \bmod \alpha,\, n_2 \bmod 2} e^{-\pi i\frac{\gamma}{2\alpha}(2n_1+\alpha n_2)^2} =$$

$$= \sum_{n_1 \bmod \alpha,\, n_2 \bmod 2} e^{-\pi i\frac{2\gamma n_1^2}{\alpha} - \pi i\frac{\gamma\alpha}{2}n_2^2} = S(\tfrac{-2\gamma}{\alpha})\, S(\tfrac{-\gamma\alpha}{2}).$$ Nu is

$$S(\tfrac{-\gamma\alpha}{2}) = 1 + e^{-\pi i\frac{\gamma\alpha}{2}} = 1 \mp i = \sqrt{2}\, e^{\mp\frac{\pi i}{4}}$$ met minteken voor $\alpha\gamma \equiv 1 \pmod 4$ en plusteken voor $\alpha\gamma \equiv 3 \pmod 4$.

Dus

$$S(\tfrac{-\gamma}{2\alpha}) = (\tfrac{\gamma}{\alpha})\,\frac{1}{e_\alpha}\sqrt{2\alpha}\;e^{\mp\frac{\pi i}{4}}.$$

Uit (6.5.1) volgt dan:

$$(\tfrac{\alpha}{\gamma})\,e_\gamma = e^{\frac{\pi i}{4}}\,(\tfrac{\gamma}{\alpha})\,e_\alpha\,e^{\mp\frac{\pi i}{4}} = (\tfrac{\gamma}{\alpha})\,\frac{1}{e_\alpha}\,e_{\alpha\gamma},$$

dus

$$(6.5.10)\quad (\tfrac{\alpha}{\gamma})(\tfrac{\gamma}{\alpha}) = \frac{e_{\alpha\gamma}}{e_\alpha e_\gamma} = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\gamma-1}{2}}.$$

De formules (6.5.9) werden reeds bewezen als (6.4.10) en (6.5.5).

Opmerking. Het verband tussen theta-functies en sommen van Gauss blijkt ook nog duidelijk uit de volgende overweging. Zij $\alpha\gamma \equiv 0 \pmod 2$ en D een driehoek uit de modulaire vlakverdeling met $\frac{\alpha}{\gamma}$ tot hoekpunt. Er is een modulaire substitutie $\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$. Uit de transformatieformule en $\vartheta_{00}(0\,|\,\tau) \to 1$ voor $\tau \to i\infty$ volgt nu:

voor $\tau' \to \frac{\alpha}{\gamma}$, $\tau' \in D$ is $\vartheta_{00}(0|\tau) \sim S(\frac{\alpha}{\gamma})\sqrt{-i(\tau+\frac{\delta}{\gamma})} \sim S(\frac{\alpha}{\gamma})\sqrt{\frac{i}{\gamma(\gamma\tau'+\alpha)}}$.

zodat de sommen van Gauss in zekere zin bepalend zijn voor het gedrag in de buurt van een rationaal punt van de reële as.

§ 6. Verband tussen theta-functies en modulaire vormen.

We brengen enige definities in de herinnering:

Een functie $f(\tau)$ heet modulaire functie, indien:

1) $f(\tau)$ is op polen na analytisch in τ voor $\mathrm{Im}\,\tau > 0$,

2) $f(\tau)$ is invariant voor de modulaire transformaties uit G,

3) als functie van $e^{2\pi i\tau} = q^2 = x$ heeft $f(\tau)$ hoogstens een pool in $\tau = i\infty$, anders gezegd: voor $\tau \to i\infty$ geldt een reeksontwikkeling

$$f(\tau) = \sum_{n=-\mu}^{\infty} a_n\, e^{2\pi i n\tau}.$$

Een gehele modulaire functie is een modulaire functie, die analytisch is in het hele gebied $\mathrm{Im}\,\tau > 0$, τ eindig.

Een functie $F(\omega_1,\omega_2)$ heet modulaire vorm, indien:

1) $F(\omega_1,\omega_2)$ is homogeen in ω_1,ω_2, zeg met dimensie $-k$ en $\omega_1^{\,k}\,F(\omega_1,\omega_2)$ is als functie van $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ op polen na analytisch voor $\mathrm{Im}\,\tau > 0$,

2) $F(\omega_1,\omega_2)$ is invariant voor de modulaire substituties

$$\omega_2' = \alpha\omega_2 + \beta\omega_1, \quad \omega_1' = \gamma\omega_2 + \delta\omega_1,$$

3) $\omega_1^{\,k}\,F(\omega_1,\omega_2)$ heeft als functie van $e^{2\pi i\tau}$ hoogstens een pool in $\tau = i\infty$.

Een gehele modulaire vorm is een modulaire vorm zonder eindige polen. Men onderscheidt ook modulaire functies en vormen van hogere trap. Zo verstaat men onder een modulaire vorm van trap N een functie $F(\omega_1,\omega_2)$, die voldoet aan:

1) $F(\omega_1,\omega_2)$ is homogeen van dimensie -k in ω_1,ω_2 en $\omega_1^k F(\omega_1,\omega_2)$ is als functie van $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ op polen na analytisch voor $\mathrm{Im}\tau > 0$,

2) $F(\omega_1,\omega_2)$ is invariant voor de transformaties

$$\omega_2' = \alpha\omega_2 + \beta\omega_1,\quad \omega_1' = \gamma\omega_2 + \delta\omega_1,$$

behorend tot de hoofdcongruentiegroep van de trap N.

3) In de spitsen van het fundamentaalgebied heeft $\omega_1^k F(\omega_1,\omega_2)$ hoogstens een pool, gerekend in de bijpassende variabele $e^{2\pi i \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}}$.

De hierboven gedefinieerde vormen zijn dan van de trap 1.

We kunnen gemakkelijk een overzicht krijgen over de modulaire functies en vormen van trap 1.

Stelling. Een modulaire functie $f(\tau)$ is een rationale functie van $J(\tau)$; een gehele modulaire functie is een geheel rationale functie van $J(\tau)$.

Bewijs. Zij J een willekeurig complex getal $\neq 0,1,\infty$. Er is één punt τ in het fundamentaalgebied van de modulaire groep, en wel geen hoekpunt, zodat $J = J(\tau)$; de andere punten τ uit het bovenhalfvlak zijn daarmee aequivalent. Een en ander houdt in, dat τ een meerwaardige analytische functie $\tau = \tau(J)$ is van J, zolang $J \neq 0,1,\infty$. Door overgang op $f(\tau)$ wordt die meerwaardigheid weer te niet gedaan: $f(\tau)$ is een op polen na eenduidige analytische functie van J.

Beschouwen we nu $J = 0$, dus $\tau = \rho$. Neemt $f(\tau)$ in een cirkeltje om $\tau = \rho$ een bepaalde waarde aan, dan wegens de modulaire eigenschappen 3m keren (m een natuurlijk getal), dus òf $f(\tau) - f(\rho)$ heeft een 3m-voudig nulpunt in $\tau = \rho$, òf $f(\tau)$ heeft een 3m-voudige pool in $\tau = \rho$ (m een natuurlijk getal). Verder heeft $J(\tau)$ een drievoudig nulpunt in $\tau = \rho$ (zie TF 5,10), zodat $(\tau - \rho)^3$ analytisch is in J. In de buurt van $\tau = \rho$ is $f(\tau)$ te ontwikkelen in een afbrekende Laurentreeks naar $(\tau - \rho)^3$, dus ook naar J in de buurt van $J = 0$. Hetzelfde geldt in $J = 1$. Voor $J \to \infty$, $\tau \to i\infty$ heeft $f(\tau)$ een afbrekende Laurentreeks als functie van $e^{2\pi i \tau}$ en $J(\tau)$ een pool van de 1^e orde; weer is $f(\tau)$ te ontwikkelen naar J.

Het resultaat is, dat $f(\tau)$ met inbegrip van het punt $J = \infty$ op polen na analytisch is in J. Dan is $f(\tau)$ een rationale functie van J. Dit wordt een geheel rationale functie, als we bovendien aan $f(\tau)$ de eis opleggen geen eindige polen te bezitten.

Stelling. De dimensie van een modulaire vorm is een even geheel getal; de gehele modulaire vormen van negatieve dimensie -k worden geleverd door een N-ledige lineaire schaar, waarbij N gegeven wordt door

$$N = \begin{cases} \left[\frac{2k}{12}\right] & \text{voor } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \left[\frac{2k}{12}\right] + 1 & \text{voor } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases} \qquad (6.6.1)$$

Bewijs. De functies 1, g_2, g_3, g_2^2, g_2g_3, $g_2^2g_3$, samengevat $g_2^\kappa g_3^\lambda$ met $\kappa = 0,1,2$ en $\lambda = 0,1$, zijn kennelijk gehele modulaire vormen, resp. van dimensie 0, -4, -6, -8, -10, -14.

Zij $g_\nu = g_\nu(\omega_1,\omega_2)$ een willekeurige gehele modulaire vorm van negatieve dimensie $-\nu$. Substitutie van $\omega_2' = -\omega_2$, $\omega_1' = -\omega_1$ levert wegens 2) $g_\nu(-\omega_1,-\omega_2) = g_\nu(\omega_1,\omega_2)$. Echter is $\omega_1^\nu g_\nu$ wegens 1) invariant voor deze substitutie, dus $(-\omega_1)^\nu g_\nu(-\omega_1,-\omega_2) = \omega_1^\nu\, g_\nu(\omega_1,\omega_2)$. Dus $(-1)^\nu g_\nu = g_\nu$, ν even geheel.

We vermenigvuldigen nu g_ν met een der vormen $g_2^\kappa g_3^\lambda$, zodat een gehele modulaire vorm ontstaat, waarvan de dimensie een 12-voud is, zeg -12μ. Bij deling door $\Delta^\mu(\omega_1,\omega_2)$ ontstaat een gehele modulaire functie, o.a. omdat $\Delta \neq 0$ is. Deze heeft een pool van hoogstens de orde μ in $\tau = i\infty$:

$$g_\nu g_2^\kappa g_3^\lambda = \Delta^\mu(a_\mu J^\mu + \ldots + a_0) = \sum b_{lm} g_2^l g_3^m,$$

in welke som gesommeerd wordt over l,m geheel en $\geqslant 0$ met $4l + 6m = 12\mu$. Die som bevat zeker de factor $g_2^\kappa g_3^\lambda$. Immers de hier voorkomende functies blijven alle eindig; voor $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \rho$ is $g_2 = 0$, $g_3 \neq 0$; voor $\frac{\omega_2}{\omega_1} = i$ is $g_2 \neq 0$, $g_3 = 0$; dus voor $\kappa > 0$ ($\lambda > 0$) moet het rechterlid minstens κ factoren g_2, resp. λ factoren g_3 bevatten. Conclusie:

$$(6.6.2) \qquad g_\nu = \sum_{\substack{l,m \text{ geheel en } \geqslant 0 \\ 2l + 3m = \nu/2.}} c_{lm} g_2^l g_3^m \quad (c_{lm} \text{ constanten}).$$

Omgekeerd stelt (6.6.2) zeker een gehele modulaire vorm van dimensie $-\nu$ voor.

Gevolg. Voor $k = 2$ is er geen modulaire vorm. De modulaire vormen met resp. $k = 4,6,8,10,14$ zijn op een constante na gelijk aan $g_2, g_3, g_2^2, g_2g_3, g_2^2g_3$.

Toepassingen. We stellen in het vervolg kortheidshalve

$$\vartheta_{gh}(0/\tau) = \vartheta_{gh}(\tau).$$

I. Beschouw de functie $f_1(\tau) = \vartheta_{00}^8(\tau) + \vartheta_{01}^8(\tau) + \vartheta_{10}^8(\tau)$.

Wegens

$$\begin{cases} \vartheta_{00}(\tau+1) = \vartheta_{01}(\tau) \\ \vartheta_{01}(\tau+1) = \vartheta_{00}(\tau) \\ \vartheta_{10}(\tau+1) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_{10}(\tau) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vartheta_{00}(\frac{-1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\ \vartheta_{00}(\tau) \\ \vartheta_{01}(\frac{-1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\ \vartheta_{10}(\tau) \\ \vartheta_{10}(\frac{-1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\ \vartheta_{01}(\tau) \end{cases}$$

is nu $f_1(\tau+1) = f_1(\tau)$, $f_1(\frac{-1}{\tau}) = \tau^4 f_1(\tau)$. Dan is $F_1(\omega_1,\omega_2) = \omega_1^{-4} f_1(\tau)$ invariant voor de substituties

$$\begin{cases} \omega_2' = \omega_2 + \omega_1 \\ \omega_1' = \omega_1 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \omega_2' = -\omega_1 \\ \omega_1' = \omega_2 \end{cases},$$

dus een (gehele) modulaire vorm van dimensie -4. Dus

$$f_1(\tau) = c\omega_1^4 g_2(\omega_1,\omega_2) = 60c \sum{}' \frac{1}{(m_1+m_2\tau)^4}.$$

De waarde van c bepalen we door te letten op het gedrag van beide leden voor $\tau \to i\infty$: ze naderen tot 2 resp. 120 $c\zeta(4) = \frac{120}{90}\pi^4 c$ (vgl. de reeks voor $\vartheta_{gh}(0/\tau)$). Dus $c = \frac{3}{2}\pi^{-4}$,

$$\vartheta_{00}^8(\tau) + \vartheta_{01}^8(\tau) + \vartheta_{10}^8(\tau) = \frac{3}{2}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^4 g_2(\omega_1,\omega_2), \tag{6.6.3}$$

in overeenstemming met de vierde relatie (4.4.4).

II. Voor de functie $f_2(\tau) = -\vartheta_{00}^4(\tau) + \vartheta_{01}^4(\tau) + \vartheta_{10}^4(\tau)$ vinden we evenzo

$$f_2(\tau+1) = -f_2(\tau),\quad f_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\tau^2 f_2(\tau).$$

Dus is $\omega_1^4 f_2^2(\tau)$ een (gehele) modulaire vorm van dimensie -4. Wegens $f_2(\tau) \to 0$ voor $\tau \to i\infty$ geldt dan:

$$-\vartheta_{00}^4(\tau) + \vartheta_{01}^4(\tau) + \vartheta_{10}^4(\tau) = 0, \tag{6.6.4}$$

in overeenstemming met (4.4.3).

III. Beschouwen we de functie $f_3(\tau) = \vartheta_{00}^8(\tau)\vartheta_{01}^8(\tau)\vartheta_{10}^8(\tau)$. Voor $\tau \to i\infty$ gedraagt $f_3(\tau)$ zich als $(2q^{\frac{1}{4}})^8 = 2^8 q^2 = 2^8 e^{2\pi i \tau}$. De functie $\omega_1^{-12} f_3(\tau)$ is een gehele modulaire vorm van dimensie -12. Nu is er een tweeledige lineaire schaar van gehele modulaire vormen van dimensie -12, en wel voortgebracht door g_2^3 en g_3^2. Letten we op de derde en vierde relatie (4.8.2), die we m.b.v. de functie $\sigma_k(n) = \sum_{d/n} d^k$ nog eens opschrijven als

$$\begin{cases} g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^4\left(\frac{1}{12} + 20\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^{2n}\right) \\ g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^6\left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^{2n}\right), \end{cases} \tag{6.6.5}$$

dan blijkt dat g_2^3 en g_3^2 niet tot nul naderen voor $\tau \to i\infty$, echter $g_2^3 - 27g_3^2$ wel. We hebben nu:

$$\omega_1^{-12} f_3(\tau) = c(g_2^3 - 27g_3^2)$$

en

$$g_2^3 - 27g_3^2 \sim \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12}\left(3.\frac{1}{12^2}.20 + 27.2.\frac{1}{216}.\frac{7}{3}\right)q^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} q^2,$$

dus

$$2^8 = c.(2\pi)^{12},$$

$$\vartheta_{00}^8(\tau).\vartheta_{01}^8(\tau).\vartheta_{10}^8(\tau) = \frac{1}{16}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12}\Delta(\omega_1,\omega_2), \tag{6.6.6}$$

in overeenstemming met (4.4.5) en (4.4.1).

7. Een algemene opmerking. Naar aanleiding van het bovenstaande wijzen we er op, dat de theorie van de theta-functies en modulaire functies onafhankelijk van de theorie van de elliptische functies opgezet kan worden, natuurlijk voorzover men zich niet interesseert voor het verband met elliptische functies. Zowel hierboven als in de voordracht van Dr Peremans wordt alleen gebruik gemaakt van de relaties (4.8.2), ofwel (6.6.5)

en van het feit:

(6.7.1) $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ voor $\mathrm{Im}\,\tau > 0$, τ eindig.

Voor de relaties (4.8.2), die de Fourierontwikkeling van de reeksen G_n geven, heeft Berghuis reeds een rechtstreeks bewijs gegeven. De relatie (6.6.7), een gevolg van de eenvoudigste eigenschappen van de $\wp$-functie, kan ook aldus ingezien worden: de functie

$$\Delta^* = 16\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} \vartheta_{00}^8(\tau)\,\vartheta_{01}^8(\tau)\,\vartheta_{10}^8(\tau)$$

is een gehele modulaire vorm van dimensie -12. Deze functie wordt niet nul voor $\mathrm{Im}\,\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, op grond van (1.5.2), en $\omega_1^{12}\Delta^*$ wordt voor $\tau \to i\infty$ nul van de eerste orde in q^2. De functie $\frac{g_2^3}{\Delta^*} = J^*$ voldoet dan aan dezelfde eigenschappen als J; met J^* i.p.v. J blijven de beschouwingen van § 6 geldig, in het bijzonder is $\Delta^* = g_2^3 - 27\,g_3^2 = \Delta$.

Vervolgens laten we zien, hoe de functie $G(\tau)$, in de eerste syllabus ingevoerd bij de afleiding van de productformule voor $\vartheta_{11}(z/\tau)$, rechtstreeks berekend kan worden. We hebben

$$\vartheta_{11}(z/\tau) = G(\tau)(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}) \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n}e^{2\pi i z})(1 - q^{2n}e^{-2\pi i z}),$$

dus wegens (1.2.12):

$$\vartheta_{01}(z|\tau) = e^{\frac{1}{4}\pi i \tau}\, e^{-\pi i z}\, \vartheta_{11}(z - \tfrac{1}{2}\tau/\tau) =$$

$$= e^{\frac{1}{4}\pi i \tau}\, G(\tau)(e^{-\frac{1}{2}\pi i \tau} - e^{-2\pi i z + \frac{1}{2}\pi i \tau}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{2\pi i z})(1-q^{2n+1}e^{-2\pi i z}) =$$

$$= q^{-\frac{1}{4}}\, G(\tau) \prod_{n=1}^{\infty} (1-2q^{2n-1}\cos 2\pi z + q^{4n-2}).$$

We benutten nu de afhankelijkheid van z in de vorm van de differentiaalvergelijking (4.3.1):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \log \vartheta_{01}(0/\tau) = \frac{1}{4\pi i}\left[\frac{1}{\vartheta_{01}(z/\tau)} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\, \vartheta_{01}(z/\tau)\right]_{z=0} =$$

$$= 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} = 2\pi i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}\right].$$

Reeds is hiermee $G(\tau)$ in principe bepaald. De verdere herleiding kan als volgt geschieden. Uit $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ $(|x|<1)$ volgt:

(6.7.2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} nx^{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(1-x^m)^2},$$

dus

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \log \vartheta_{01}(z/\tau) = \pi i\left[2\sum \frac{-nq^n}{1-q^n} - \sum \frac{-2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau} \log \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2}{1-q^{2n}},$$

$$\vartheta_{01}(\tau) = q^{-\frac{1}{4}}G(\tau)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2 = c\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)^2}{1-q^{2n}}.$$

Letten we op het gedrag bij $\tau \to i\infty$, dat is $q \to 0$, dan blijkt $c = 1$ te zijn. Dus

(6.7.3) $$G(\tau) = q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^n}\right)^2\frac{(1-q^n)^2}{1-q^{2n}} = q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}).$$

De formule $\vartheta_{11}(z/\tau) = \pi i\,\vartheta_{00}(0/\tau)\,\vartheta_{01}(0/\tau)\,\vartheta_{10}(0/\tau)$ is nu onmiddellijk te verifiëren.

Uit (6.6.6) leiden we nu een formule voor Δ af:

$$\vartheta_{00}(\tau) = q^{-\frac{1}{4}}G(\tau)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2$$

$$\vartheta_{01}(\tau) = q^{-\frac{1}{4}}G(\tau)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2$$

$$\vartheta_{10}(\tau) = 2G(\tau)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2,$$

dus

$$\Delta(\omega_1,\omega_2) = 16\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12}\left[2^8 q^{-4}G^{24}(\tau)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1})(1+q^{2n})\right]^{16},$$

wat wegens

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})(1+q^{2n})(1-q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)\frac{1-q^n}{1-q^{2n}} = 1$$

levert

(6.7.4) $$\Delta(\omega_1,\omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12}q^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^{24}.$$

De arithmetische functie $\tau(n)$, vastgelegd door

(6.7.5) $$x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n$$

heet de τ-functie van Ramanujan. We hebben dus:

(6.7.6) $$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{12}\Delta(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi i n\tau}.$$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A M S T E R D A M - O .

Colloquium over theta-functies.

Voordracht door Dr Ir A. van Wijngaarden.

21 Mei 1952.

ARITHMETISCHE ASPECTEN VAN DE THETAFUNCTIES

1. Delerfuncties.

De delerfunctie $\sigma_q(r)$ is gedefinieerd als de som van de q-de machten van de delers van het natuurlijke getal n (met inbegrip van 1 en n). In formule:

$$\sigma_q(r) = \sum_{d|r} d^q. \qquad (7.1.1)$$

Zo is dus bijv. $\sigma_0(r)$ het aantal delers van r en $\sigma_1(r)$ de som van de delers van r. Als de factorisatie van r bekend is, is $\sigma_q(r)$ gemakkelijk te berekenen. Men behoeft echter niet alle delers te berekenen en tot de q-de macht te brengen. Immers, als $r = p^n$ (p = priem) dan is blijkbaar

$$\sigma_q(p^n) = p^{nq} + p^{(n-1)q} + \ldots p^q + 1 = \frac{p^{(n+1)q}-1}{p^{q-1}}. \qquad (7.1.2)$$

Zijn voorts a en b onderling priem, (a,b)= 1, dan zijn alle delers van ab juist de termen die men bij termsgewijze vermenigvuldiging van $\sum d(a) . \sum d(b)$ krijgt. Hieruit volgt, dat

$$\sigma_q(ab) = \sigma_q(a)\ \sigma_q(b), \quad \text{als } (a,b) = 1 . \qquad (7.1.3)$$

Men zegt dan, dat $\sigma_q(r)$ een multiplicatieve functie is. Zo is bijv. $\sigma_3(2) = 8 + 1 = 9$, $\sigma_3(3^2) = (3^9-1)/(3^3-1) = 19682/26 = 757$ en dus is $\sigma_3(18) = 9 \times 757 = 6813$.

Natuurlijk slingeren deze functies wild, maar een vrij scherpe schatting is gemakkelijk te verkrijgen. Immers

$$\sigma_q(1) = 1$$

$$\sigma_q(r) \geqslant r^q + 1 \text{ , als } r > 1$$

$$\sigma_q(r) \leqslant \sum_{1}^{r} h(\tfrac{r}{h})^q < r^q \sum_{1}^{\infty} h^{-q} = \zeta(q)\ r^q,$$

waarbij hier en in het vervolg $\zeta(q)$ de zetafunctie van Riemann betekent. Dus

$$\sigma_q(r) = \vartheta r^q, \text{ met } 1 < \vartheta < \zeta(q) \text{ als } r > 1, \text{ en } \vartheta = 1 \text{ als } r = 1. \quad (7.1.4)$$

Als q groot is, is de schatting van ϑ blijkbaar bijzonder scherp.

Een aanvullende definitie voor r = 0 luidt

$$\sigma_q(0) = \tfrac{1}{2}\zeta(-q). \quad (7.1.5)$$

Speciaal van belang is het geval, dat q een oneven natuurlijk getal is. In dat geval kan men blijkbaar ook schrijven:

$$\sigma_{2k-1}(0) = \tfrac{1}{2}\zeta(1-2k) = -B_{2k}/(4k), \qquad k > 0, \quad (7.1.6)$$

waarin B_{2k} een getal van Bernoulli is, dus $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, enz.

Hier en in het vervolg zullen verder met x steeds grootheden worden aangeduid, waarvoor geldt $|x| < 1$. Functies van x zullen met hoofdletters worden aangegeven en de variabele wordt dan niet neergeschreven.

Voor $q \neq -1$ wordt dan gedefinieerd de genererendefunctie H_q:

$$H_q = \tfrac{1}{2}\zeta(-q) + \sum_1^\infty n^q \frac{x^n}{1-x^n} = \tfrac{1}{2}\zeta(-q) + \sum_1^\infty \sum_1^\infty n^q x^{mn} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\zeta(-q) + \sum_1^\infty \sigma_q(r)\, x^r = \sum_0^\infty \sigma_q(r)\, x^r. \quad (7.1.7)$$

Voor q = -1 luidt een aanvullende definitie

$$H_{-1} = -\frac{1}{24}\log x + \sum_1^\infty n^{-1} \frac{x^n}{1-x^n} = -\frac{1}{24}\log x + \sum_1^\infty \sigma_{-1}(r)\, x^r. \quad (7.1.8)$$

De keuze van de singuliere term is zo gemaakt, dat de afgeleide een eenvoudige gedaante aanneemt. Immers, wanneer hier en in het vervolg de operator $x\frac{d}{dx}$ aangegeven wordt met een accent, geldt:

$$H'_{-1} = -\frac{1}{24} + \sum_1^\infty \sum_1^\infty m\, x^{mn} = H_1. \quad (7.1.9)$$

De differentiatieregel voor H_q met $q \neq 1$ is niet zo eenvoudig. Voor een oneven natuurlijk getal q zal in het volgende een regel worden gevonden.

Door in (7.1.8) onder het rechtse somteken te differentieren en de uitkomsten te vergelijken, vindt men $\sigma_1(r) = r\,\sigma_{-1}(r)$, wat slechts een bijzonder geval is van de overigens triviale relatie

$$\sigma_q(r) = r^q\, \sigma_{-q}(r). \quad (7.1.10)$$

Voor practische doeleinden is het vaak beter de term met r = 0 apart te houden. Bovendien is het vaak handiger H_{2k-1} zo te normeren, dat de constante term 1 wordt voor $q \neq -1$. Daarom zij nog gedefinieerd de functie P_{2k-1} door

$$P_{2k-1} = \frac{2}{\zeta(1-2k)} H_{2k-1} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_{2k-1}(r)\, x^r, \quad k > 0. \qquad (7.1.11)$$

Voor toekomstig gebruik zijn enige dier functies hieronder uitgeschreven:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1 - 24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_1(r)x^r && \text{(a)}\\
P_3 &= 1 + 10.24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_3(r)x^r && \text{(b)}\\
P_5 &= 1 - 21.24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_5(r)x^r && \text{(c)}\\
P_7 &= 1 + 20.24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_7(r)x^r && \text{(d)}\\
P_9 &= 1 - 11.24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_9(r)x^r && \text{(e)}\\
P_{11} &= 1 + \frac{2730}{691}.24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_{11}(r)x^r && \text{(f)}\\
P_{13} &= 1 - 24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_{13}(r)x^r && \text{(g)}\\
P_{15} &= 1 + \frac{1080}{3617}.24 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_{15}(r)x^r && \text{(h)}
\end{aligned} \qquad (7.1.12)$$

In speciale gevallen kan H_q ook in een andere vorm worden geschreven. Zo is bijv.

$$-\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \log(1-x^n) = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \sum_{1}^{\infty}{}_{m} m^{-1} x^{mn} = \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_{-1}(r)x^r = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} n^{-1} \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad (7.1.13)$$

zodat ook geldt:

$$H_{-1} = -\frac{1}{24} \log x - \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \log(1-x^n). \qquad (7.1.14)$$

Vervolgens kunnen delerfuncties van hogere orde worden gedefinieerd, waarbij de tot nu toe ingevoerde als delerfuncties van de eerste orde worden bestempeld, door als genererende functie het product van een aantal genererende functies te nemen. Voor de tweede orde bijv.

$$H_{q_1}.H_{q_2} = \sum_{0}^{\infty}{}_{r} \sigma_{q_1,q_2}(r). \qquad (7.1.15)$$

Blijkbaar is

$$\sigma_{q_1,q_2}(r)=\sum_{0}^{r} k\ \sigma_{q_1}(k)\,\sigma_{q_2}(r-k). \qquad (7.1.16)$$

Bijvoorbeeld is $\sigma_{1,3}(4)=\sigma_1(0)\sigma_3(4)+\sigma_1(1)\sigma_3(3)+\sigma_1(2)\sigma_3(2)+$ $+\sigma_1(3)\sigma_3(1)+\sigma_1(4)\sigma_3(0)$. Het zal nu blijken, dat er merkwaardige relaties bestaan tussen delerfuncties van gelijke en verschillende orde. Deze zijn oorspronkelijk ontdekt door Ramanujan. Zijn gedachtengang is echter zeer moeizaam en daarom kan beter worden aangesloten aan een gedachtengang ontwikkeld door van der Pol.

2. De logarithme van $\theta_{11}(z/\tau)$.

Onder invoering van de notaties

$$s = 2\pi z$$
$$x = q^2 = e^{2\pi i\tau}$$

en onder de aanname, dat $\mathrm{Im}\,\tau > 0$, dus $|x| < 1$, geldt de productontwikkeling

$$\theta_{11}(z/\tau)= 2\ i.\sin\tfrac{s}{2}.x^{1/8}.\prod_{1}^{\infty}(1-x^n)(1-2x^n\cos s + x^{2n}), \qquad (7.2.1)$$

dus ook

$$\log\theta_{11}(z/\tau)= \log 2 + \tfrac{\pi}{2}\,i + \tfrac{1}{8}\log x + \log\sin\tfrac{s}{2} + \sum_{1}^{\infty} n\log(1-x^n)+$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} n\ \log\,(1 - 2x^n\cos s + x^{2n}). \qquad (7.2.2)$$

Nu is

$$\log\sin\tfrac{s}{2} = \log\tfrac{s}{2} + 2\ \sum_{1}^{\infty} k\ \frac{(-)^k s^{2k}}{(2k)!}\ \frac{B_{2k}}{4k},$$

$$\log 2 + \log\sin\tfrac{s}{2} = \log s - 2\ \sum_{1}^{\infty} k\ \frac{(-)^k s^{2k}}{(2k)!}\ \sigma_{2k-1}(0). \qquad (7.2.3)$$

Voorts is

$$\log\,(1-2x^n\cos s + x^{2n})= 2\log\left|1-x^n e^{is}\right| = 2\,\mathrm{Re}\log\,(1-x^n e^{is})=$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\sum_{1}^{\infty} m\ \frac{(x^n e^{is})^m}{m} = -2\sum_{1}^{\infty} m\ \frac{x^{mn}}{m}\cos ms.$$

$$(7.2.4)$$

Dus volgt uit (7.3.3) en (7.3.4)

$$\log 2 + \log \sin \frac{s}{2} + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \log (1-2x^n \cos s + x^{2n}) =$$

$$\log s - 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{(-)^k s^{2k}}{(2k)!} \sigma_{2k-1}(0) - 2 \sum_{0}^{\infty}{}_{k} \frac{(-)^k s^{2k}}{(2k)!} \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \sum_{1}^{\infty}{}_{m} m^{2k-1} x^{mn} =$$

$$\log s - 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \sigma_{-1}(r) x^r - 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{(-)^k s^{2k}}{(2k)!} H_{2k-1}(x)$$

en dus tenslotte

$$\log \theta_{11}(z/\tau) = \frac{\pi}{2} i + \log s - 3 H_{-1}(x) - 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{(-)^k s^{2k}}{(2k)!} H_{2k-1}(x) \qquad (7.2.5)$$

Dit kan symbolisch worden geschreven in de vorm

$$L = \log \theta_{11}(z/\tau) = \frac{\pi}{2} i + \log s - 3\{\frac{1}{h}\} + 2\{\frac{1-\cos hs}{h}\}, \qquad (7.2.6)$$

waarin iedere term tussen accolades eerst naar h moet worden ontwikkeld en vervolgens h^q door $H_q(x)$ moet worden vervangen.

Men kan nu gemakkelijk naar s en x differentieren, bijv.

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{1}{s} + 2\{\sin hs\} \qquad (7.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2} = -\frac{1}{s^2} + 2\{h \cos hs\} \qquad (7.2.8)$$

$$x \frac{\partial L}{\partial x} = -3\{h\} + 2x \frac{\partial}{\partial x}\{\frac{1-\cos hs}{h}\} \qquad (7.2.9)$$

De andere ontwikkeling van $\theta_{11}(z/\tau)$, die in onze notatie luidt:

$$\theta_{11}(z/\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n} (-)^n x^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(n+\frac{1}{2})s} \qquad (7.2.10)$$

toont, dat $\theta_{11}(z/\tau)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \theta_{11}(z/\tau)}{\partial s^2} + 2x \frac{\partial \theta_{11}(z/\tau)}{\partial x} = 0 . \qquad (7.2.11)$$

Maar

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{1}{\theta_{11}(z/\tau)} \frac{\partial}{\partial s} \theta_{11}(z/\tau),$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2} = \frac{1}{\theta_{11}(z/\tau)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \theta_{11}(z/\tau) - (\frac{\partial L}{\partial s})^2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{\theta_{11}(z/\tau)} \frac{\partial}{\delta x} \theta_{11}(z/\tau),$$

en dus geldt de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2} + (\frac{\partial L}{\delta s})^2 + 2 \times \frac{\partial L}{\delta x} = 0. \qquad (7.2.12)$$

Substitutie van (7.3. 7,8,9) levert

$$s^2 \times \frac{\partial}{\delta x} \{\frac{1-\cos hs}{hs}\} + \{hs - \sin hs\} + \tfrac{1}{2}\{hs(1-\cos hs)\} = s\{\sin hs\}^2. \qquad (7.2.13)$$

Door gelijkstelling van de coefficienten van gelijknamige machten van s, volgt hieruit de differentiatieregel van de functies H_{2n-1}, nl.:

$$x \frac{d}{dx} H_{2n-1} = \frac{2n+3}{2(2n+1)} H_{2n+1} - \sum_{0}^{n-1}{}_{k} \binom{2n}{2k+1} H_{2k+1}.H_{2n-2k-1}; \; n>0. \qquad (7.2.14)$$

Dan is in de gewijzigde normering volgens (7.1.11):

$$12 P_1 + P_3 = P_1^2 \qquad (a)$$

$$3 P_1 P_3 + P_5 = P_1 P_3 \qquad (b)$$

$$40 P_1 P_5 + 27 P_7 = 20 P_1 P_5 + 7 P_3^2 \qquad (c)$$

$$9 P_1 P_7 + 10 P_9 = 6 P_1 P_7 + 4 P_3 P_5 \qquad (d)$$

$$420 P_1 P_9 + 691 P_{11} = 350 P_1 P_9 + 231 P_3 P_7 + 110 P_5^2 \qquad (e)$$

$$691 P_1 P_{11} + 1575 P_{13} = 691 P_1 P_{11} + 455 P_3 P_9 + 429 P_5 P_7 \qquad (f)$$

$$3600 P_1 P_{13} + 10851 P_{15} = 4200 P_1 P_{13} + 2764 P_3 P_{11} + 2600 P_5 P_9 + 1287 P_7^2 \qquad (g)$$

. . . . . .

(7.2.15)

Iedere vergelijking geeft een arithmetische stelling, bijv. geeft (a)

$$-12.24\, r\, \sigma_1(r) + 10.24\, \sigma_3(r) = 24^2.\, \sigma_{1,1}(r),$$

$$\sigma_1(r) + 5\,\sigma_3(r) = 6\, r\,\sigma_1(r) + 12 \sum_{1}^{r-1}{}_{k} \sigma_1(k)\, \sigma_1(r-k).$$

Afgezien van de directe betekenis volgt hieruit, dat

$$\sigma_1(r) + 5\,\sigma_3(r) \equiv 0 \pmod 6.$$

Dit echter is triviaal, want $d + 5\,d^3 \equiv 0 \pmod 6$ voor iedere d. Maar er volgt ook

$$\sigma_1(2r) + 5\,\sigma_3(2r) = 0 \qquad \pmod{12},$$

en dit geldt niet voor iedere deler afzonderlijk. Immers is bijv. $2 + 5.2^3 = 42 = 6 \pmod{12}$.

3. De $\wp$-functie van Weierstrass.

Vergelijking (4.2.5) luidt in onze notaties met $u = w_1 z = \frac{w_1}{2\pi} s$:

$$\left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^2 \wp(u) = -\frac{\eta_1}{2\pi} \cdot \frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \log \theta_{11}(z/\tau), \tag{7.3.1}$$

en vergelijking (4.5.5) luidt dan

$$-\frac{\eta_1}{2\pi} \cdot \frac{\omega_1}{2\pi} = 2\,H_1, \tag{7.3.2}$$

zodat geldt

$$\left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^2 \wp(u) = s^{-2} + 2\,\{h(1 - \cos hs)\}. \tag{7.3.3}$$

Men ziet hier nog eens duidelijk de pool van de tweede orde en het ontbreken van overige termen van even orde in de ontwikkeling van $\wp(u)$. Tevens echter ziet men, dat de H-functies eigenlijk niets anders zijn dan de ontwikkelingscoefficienten van $\wp(u)$. Inderdaad uit

$$\wp(u) = u^{-2} + \sum_{2}^{\infty} c_n\, y^{2n-2} \tag{7.3.4}$$

volgt

$$c_n = (-)^n \left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^{-2n} \frac{2}{(2n-2)!}\, H_{2n-1}, \tag{7.3.5}$$

zodat in het bijzonder

$$g_2 = 20\,c_2 = \left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^{-4} 20\,H_3 = \left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^{-4} \frac{1}{12}\,P_3, \tag{7.3.6}$$

$$g_3 = 28\,c_2 = -\left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^{-6} \frac{7}{3}\,H_5 = \left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^{-6} \frac{1}{216}\,P_5. \tag{7.3.7}$$

Door nu (7.3.3) te substitueren in de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2\wp(u)}{du^2} = 6\,\wp^2(u) - \tfrac{1}{2}\,g_2 \tag{7.3.8}$$

verkrijgt men opnieuw een relatie, in symbolische vorm:

$$\left\{\tfrac{1}{2}\,(hs)^3 - \left(1 + \frac{1}{12}\,(hs)^2\right) hs(1-\cos hs)\right\} = s\left\{hs\,(1-\cos hs)\right\}^2. \tag{7.3.9}$$

Na gelijkstelling van de coefficienten van gelijknamige machten van s volgt dan

$$H_{2n+1} = \frac{12n(2n-1)}{(n-2)(2n+3)} \sum_{1}^{n-2}{}_{k} \binom{2n-2}{2k} H_{2k+1}\, H_{2n-2k-1}, \quad n \geqslant 3. \qquad (7.3.10)$$

In eerste instantie is dit dus een recursievergelijking voor de H_{2n-1}. Men ziet, dat iedere H_{2n-1} $(n \geqslant 4)$ rationaal in H_3 en H_5 kan worden uitgedrukt, of wat hetzelfde is, c_n in g_2 en g_3.

Uitgeschreven in de P-notatie luiden enige van de bovenstaande identiteiten:

$$\begin{aligned}
P_7 &= P_3^2 && \text{(a)}\\
P_9 &= P_3 P_5 && \text{(b)}\\
691\, P_{11} &= 441\, P_3 P_7 + 250\, P_5^2 && \text{(c)}\\
20\, P_{13} &= 9\, P_3 P_9 + 11\, P_5 P_7 && \text{(d)}\\
25.3617\, P_{15} &= 44.691\, P_3 P_{11} + 39000\, P_5 P_9 + 21021\, P_7^2 && \text{(e)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (7.3.11)$$

Dit systeem is niet onafhankelijk met (7.3.15), maar veeleer wordt een volledig systeem gevormd door vergelijkingen (a), (b) en (c) van (7.2.15) tezamen met (7.3.11) of ook door (7.2.15) met vergelijking (a) van (7.311). Nu kan men omgekeerd trachten zoveel mogelijk de producten $P_h P_k$ te elimineren en dan vindt men

$$\begin{aligned}
P_1 P_1 &= 12\, P_1' + P_3, && \text{(a)}\\
P_1 P_3 &= 3\, P_3' + P_5, && \text{(b)}\\
P_1 P_5 &= 2\, P_5' + P_7, && \text{(c)}\\
P_3 P_3 &= P_7, && \text{(d)}\\
P_1 P_7 &= \tfrac{3}{2} P_7' + P_9, && \text{(e)}\\
P_3 P_5 &= P_9, && \text{(f)}\\
P_1 P_{11} &= P_{11}' + P_{13}, && \text{(g)}\\
P_3 P_9 &= P_{13}, && \text{(h)}\\
P_5 P_9 &= P_{13}, && \text{(i)}
\end{aligned} \qquad (7.3.12)$$

maar verder vindt men niet zulke mooie relaties. Is de som der indices bijv. 10 dan vindt men slechts:

$$350\ P_1P_9 + 231\ P_3P_7 + 110\ P_5P_5 = 420\ P_9' + 691\ P_{11}, \quad (a)$$
$$441\ P_3P_7 + 250\ P_5P_5 = 691\ P_{11}, \quad (b) \qquad (7.3.13)$$

en er is blijkbaar iets loos.

4. Ramanujan's tau-functie.

Uit (7.3.12, b,c,d) volgt:

$$P_1(P_3P_7 - P_5P_5) = (P_3P_7 - P_5P_5)',$$

dus

$$P_1 = x\frac{d}{dx}\ \log\ (P_3\ P_7 - P_5\ P_5). \qquad (7.4.1)$$

Anderzijds is

$$P_1 = 1 - 24\sum_1^\infty \frac{nx^n}{1-x^n} = x\frac{d}{dx}\ \log\left\{x\prod_1^\infty (1-x^n)^{24}\right\}, \qquad (7.4.2)$$

en dus, als men stelt

$$g = 12^{-3}\ G = x\prod_1^\infty (1-x^n)^{24}, \qquad (7.4.3)$$

geldt

$$P_3P_7 - P_5P_5 = C\ g.$$

De coefficient van x in g is 1 en die in $P_3P_7 - P_5P_5$ is 240 + 480 + 2 x 504 = 1728 = 12^3. Dus is C = 12^3 en

$$P_3P_7 - P_5P_5 = G. \qquad (7.4.4)$$

En passant merken wij op, dat $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ het kleinste getal is, dat zich op twee verschillende manieren laat schrijven als de som van derde machten van twee natuurlijke getallen.

Tezamen met (7.4.4) levert (7.3.13) nu de manier om P_1P_9, P_3P_7 en P_5P_5 te schrijven in eenvoudige vorm. Eliminatie levert:

$$P_1P_9 = \frac{6}{5}P_9' + P_{11} - \frac{132}{5.691}G, \qquad (a)$$
$$P_3P_7 = P_{11} + \frac{250}{691}G, \qquad (b) \qquad (7.4.5)$$
$$P_5P_5 = P_{11} - \frac{441}{691}G. \qquad (c)$$

Blijkbaar speelt G een rol analoog aan die van de genererende functies P_{2k-1}. Wij zullen haar daarom ook als genererende functie opvatten en schrijven

$$G = 12^3\sum_1^\infty \tau(n)\ x^n. \qquad (7.4.6)$$

De arithmetische functie $\tau(n)$ heet de taufunctie van Ramanujan. Men kan bewijzen, dat $\tau(n)$ ook multiplicatief is, zodat de verwantschap met de delerfuncties van de eerste orde evident is.

Uit de voorgaande formules kan men natuurlijk weer direct tot identiteiten betreffende de delerfuncties zelve komen. Door er een van (7.4.5) te nemen, vindt men dus formules voor $\tau(n)$. Bijv. zegt (7.4.5, b), dat

$$\tau(n) = \sigma_{11}(n) - \frac{691}{1800}\{3\,\sigma_{11}(n) - 2\,\sigma_7(n) - 2\sigma_3(n) - 480 \sum_{1}^{n-1} \sigma_3(k)\,\sigma_7(n-k)\}, \qquad (7.4.7)$$

een relatie, waaruit direct twee congruenties volgen, nl.

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}, \qquad (7.4.8)$$

$$3\sigma_{11}(n) - 2\sigma_7(n) - 2\sigma_3(n) \equiv 480 \sum_{1}^{n-1} \sigma_3(k)\,\sigma_7(n-k) \pmod{1800} \qquad (7.4.9)$$

Evenzo leert (7.4.5, c), dat

$$\tau(n) = \sigma_{11}(n) - \frac{691}{3}\left\{\frac{\sigma_{11}(n)-\sigma_5(n)}{252} + \sum_{1}^{n-1} \sigma_5(k)\,\sigma_5(n-k)\right\}. \qquad (7.4.10)$$

Overigens is G een allang bekende grootheid. Immers uit (7.4.4), (7.3.12, d), (7.3.6) en (7.3.7) volgt:

$$G = P_3^3 - P_5^2 = \left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^{12} \cdot 12^3\,(g_2^3 - 27\,g_3^2),$$

dus een oude bekende duikt op, nl.

$$g = \left(\frac{w_1}{2\pi}\right)^{12}\Delta. \qquad (7.4.11)$$

8. Nog een verband met thetafuncties.

Zij M_k een functie van het gehele getal k en de drie getallen x, y, z, gedefinieerd door

$$M_k = x^k + y^k + z^k, \qquad (7.8.1)$$

zodat $M_0 = 3$, en laten x, y, z zodanig zijn, dat $M_1 = 0$. Dan kan M_k uitgedrukt worden met behulp van M_2 en M_3. Immers dan is

$$M_2 = x^2 + y^2 + z^2 = -2\,(xy+yz+zx),$$

$$M_3 = x^3 + y^3 + z^3 = 3\,xyz.$$

Dus is

$$\tfrac{1}{3} M_3 M_k = xyz(x^k + y^k + z^k),$$

$$\tfrac{1}{2} M_2 M_{k+1} = -(xy + yz + zx)(x^{k+1} + y^{k+1} + z^{k+1}),$$

of

$$M_{k+3} = \tfrac{1}{2} M_2 M_{k+1} + \tfrac{1}{3} M_3 M_k. \qquad (7.8.2)$$

De oplossing van (7.8.2), die voldoet aan de voorwaarde $M_1 = 0$ is expliciet op te schrijven. Na wat gereken vindt men, als gesteld wordt

$$I = (\tfrac{M_2}{2})^3 (\tfrac{M_3}{3})^{-2} \qquad (7.8.3)$$

$$M_0 = 3 \qquad (7.8.4)$$

$$M_{2k} = (\tfrac{M_2}{2})^k \sum_{h=0}^{[\frac{k}{3}]} \frac{2k}{k-h} \binom{k-h}{2h} I^{-h}, \qquad k > 0, \qquad (7.8.5)$$

$$M_{2k+1} = (\tfrac{M_2}{2})^{k+\frac{1}{2}} I^{-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{[\frac{k-1}{3}]} \frac{2k+1}{k-h} \binom{k-h}{2h+1} I^{-h}, \qquad k \geq 0, \qquad (7.8.6)$$

$$M_{-k} = (\tfrac{M_2}{2})^{-\frac{1}{2}k} \sum_{h=0}^{[\frac{k}{3}]} (-)^h \frac{k}{k-2h} \binom{k-2h}{h} I^{\frac{1}{2}k-h}, \qquad k > 0. \qquad (7.8.7)$$

Bijzonder eenvoudig worden de functies $M_k M_{-k}$:

$$M_0 M_0 = 9 \qquad (7.8.8)$$

$$M_{2k} M_{-2k} = I^{k-[\frac{k}{3}]-[\frac{2k}{3}]} \sum_{h=0}^{[\frac{k}{3}]} \frac{2k}{k-h} \binom{k-h}{2h} I^{[\frac{k}{3}]-h} \cdot \sum_{h=0}^{[\frac{2k}{3}]} (-)^h \frac{2k}{2k-2h} \binom{2k-2h}{h} I^{[\frac{2k}{3}]-h}, \qquad k > 0, \qquad (7.8.9)$$

$$M_{2k+1} M_{-(2k+1)} = I^{k-[\frac{k-1}{3}]-[\frac{2k+1}{3}]} \sum_{h=0}^{[\frac{k-1}{3}]} \frac{2k+1}{k-h} \binom{k-h}{2h+1} I^{[\frac{k-1}{3}]-h} \cdot$$

$$\cdot \sum_{h=0}^{[\frac{2k+1}{3}]} (-)^{h+1} \frac{2k+1}{2k-2h+1} \binom{2k-2h+1}{h} I^{[\frac{2k+1}{3}]-h}, \qquad k \geq 0 \qquad (7.8.10)$$

Hier staat dus niet alleen maar, dat $M_k M_{-k}$ een polynoom in I van de graad $[\frac{k}{2}]$ is, maar expliciet de vorm van het polynoom. Zonder meer ziet men, dat alle coefficienten gehele getallen zijn en bovendien, dat $M_k M_{-k}$ voor $I = 0$ gelijk is aan 0 als $k \not\equiv 0 \pmod 3$, en gelijk is aan 9 als $k \equiv 0 \pmod 3$.

Een lijstje van enige dier polynomen luidt als volgt:

$$
\begin{aligned}
M_0\, M_0 &= 9\\
M_1\, M_{-1} &= 0\\
M_2\, M_{-2} &= 0 + 2\,I\\
M_3\, M_{-3} &= 9 - 3\,I\\
M_4\, M_{-4} &= 0 - 8\,I + 2\,I^2\\
M_5\, M_{-5} &= 0 + 25\,I - 5\,I^2\\
M_6\, M_{-6} &= 9 - 12\,I - 9\,I^2 + 2\,I^3\\
M_7\, M_{-7} &= 0 - 49\,I + 49\,I^2 - 7\,I^3\\
M_8\, M_{-8} &= 0 + 96\,I - 40\,I^2 - 8\,I^3 + 2\,I^4\\
M_9\, M_{-9} &= 9 - 27\,I - 135\,I^2 + 78\,I^3 - 9\,I^4\\
M_{10}M_{-10} &= 0 - 150\,I + 355\,I^2 - 100\,I^3 - 5\,I^4 + 2\,I^5\\
M_{11}M_{-11} &= 0 + 242\,I - 121\,I^2 - 242\,I^3 + 110\,I^4 - 11\,I^5\\
M_{12}M_{-12} &= 9 - 48\,I - 828\,I^2 + 892\,I^3 - 201\,I^4 - 0\,I^5 + 2\,I^6\\
M_{13}M_{-13} &= 0 - 338\,I + 1521\,I^2 - 507\,I^3 - 338\,I^4 + 143\,I^5 - 13\,I^6
\end{aligned}
\qquad (7.8.11)
$$

Nu kennen wij al een waardentripel x,y,z, dat voldoet aan de eis $x + y + z = 0$ uit de theorie van de thetafuncties. Immers volgens (4.4.3) geldt

$$-\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4 + \theta_{10}^4 = 0$$

In het volgende stellen wij daarom

$$M_k = (-\theta_{00}^4)^k + \theta_{01}^{4k} + \theta_{10}^{4k} \qquad (7.8.12)$$

Voorts volgen uit de formules (4.4.4) e.d. gemakkelijk de relaties

$$M_2 = 2\,P_3 = \frac{3}{2}\left(\frac{w_1}{\pi}\right)^4 g_2, \qquad (7.8.13)$$

$$M_3^2 = \frac{4}{3}\,G. = \frac{4}{3}\,(P_3P_7 - P_5P_5) = \frac{9}{16}\left(\frac{w_1}{\pi}\right)^{12}(g_2^2 - 27\,g_3^2) = \frac{9}{16}\left(\frac{w_1}{\pi}\right)^{12}\Delta\,, \qquad (7.8.14)$$

$$I = \frac{27}{4}\,P_3\,P_7\,G^{-1} = \frac{27}{4}\,J. \qquad (7.8.15)$$

De gevonden relaties (7.8.11) zijn dus evenzovele relaties tussen thetafuncties en Klein's modulaire invariant $J(\tau) = J$.

Omdat $M_4 = \frac{1}{2} M_2^2$, geldt voorts de eenvoudige relatie

$$M_4 = 2\, P_7. \tag{7.8.16}$$

9. Klein's modulaire invariant.

Tenslotte zullen wij nog eens J bezien, ook als genererende functie beschouwd:

$$j = 12^3 J = \sum_{-1}^{\infty} c(k)x^k. \tag{7.9.1}$$

Wij hebben in het voorgaande al twee eenvoudige voorstellingen gevonden, nl.

$$j = 128\, M_2 M_{-2} = 64\, P_3 M_{-2}, \tag{7.9.2}$$

$$jg = P_3 P_7. \tag{7.9.3}$$

Als bijv. (7.9.3) uitgeschreven wordt, onder gebruikmaking van (7.4.5), volgt de recursievergelijking voor de c(k):

$$\sum_{-1}^{k-1} \tau(k-n)\, c(n) = \frac{720}{691} \{91\ \sigma_{11}(k) + 600\ \tau(k)\}, \tag{7.9.4}$$

wat een bruikbare relatie is om de c(n) te berekenen. Er zijn wel veel aardiger formules te bedenken, want een meer geraffineerde afleiding levert bijv.

$$\sum_{-1}^{k-1} n\,\tau(k-n)\, c(n) = 24\ \sigma_{13}(n). \tag{7.9.5}$$

Langs deze weg kan men c(n) al heel geschikt berekenen en bovendien leveren dergelijke formules aanknopingspunten om eigenschappen van c(n) te bepalen.

Wij hebben evenwel speciaal (7.9.2) gebruikt. Daarvoor moesten dus de ontwikkelingscoefficienten van $M_{-2} = \theta_{00}^{-8} + \theta_{01}^{-8} + \theta_{10}^{-8}$ worden uitgerekend. De methode waarop dit geschiedt is op zichzelf aardig genoeg om te vermelden.

Zij gegeven een machtreeks $\sum_0^{\infty} a(n)x^n$, met $a(0) \neq 0$, en gevraagd de coefficienten b(n) van

$$\sum_0^{\infty} b(n)x^n = \left\{\sum_0^{\infty} a(n)\, x^n\right\}^{m-1}.$$

Door links en rechts logarithmisch te differentieren en uit te vermenigvuldigen, volgt

$$\sum_0^{\infty} n\, b(n)x^n \sum_0^{\infty} a(n)x^n = (m-1) \sum_0^{\infty} b(n)\, x^n \sum_0^{\infty} n\, a(n)x^n,$$

dus $\sum_{0}^{n} k\,(n-k)\,a(k)\,b(n-k) = (m-1)\sum_{0}^{n} k\,k\,a(k)\,b(n-k)$,

of $\sum_{0}^{n} k\,(n-mk)\,a(k)\,b(n-k) = 0$.

Dit levert een recursievergelijking voor de b's:

$$n\,a(0)\,b(n) = \sum_{1}^{n} k\,(m\,k-n)\,a(k)\,b(n-k).$$

In de eerste plaats bevat deze wijze van berekening haar eigen controle, omdat de som blijkbaar deelbaar moet zijn door n a(0), als de optredende getallen tenminste geheel zijn, wat in onze arithmetische toepassingen het geval is. Maar verder is het procede bijzonder geschikt als de uitgangsreeks a(k) lacunair is, omdat dan slechts enkele termen van de som werkelijk optreden en dit is nu juist bij de thetareeksen bij uitstek het geval.

10. Partitiefuncties.

Tot nu toe hebben wij samenhang onderzocht met de delerfuncties en verwante functies, die een multiplicatief karakter hebben. Er bestaat evenwel ook een verband met de partitiefuncties, dus met additieve eigenschappen van getallen.

Zij p(n) het aantal partities van n in gehelen, bijv. p(4)= 5, want 4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1. Voorts zij $p_u(n)$ het aantal partities in ongelijke gehelen, bijv. $p_u(4)= 2$, evenzo $p_{uo}(n)$ het aantal partities in ongelijke oneven gehelen, bijv. $p_{uo}(4)= 1$, enz. Voorts $p_{Eu}(n)$, resp. $p_{Ou}(n)$ het aantal partities in een even, resp. oneven aantal verschillende gehelen bijv. $p_{Eu}(4)= 1$ en $p_{Ou}(4)= 1$, enz.

Hiervoor zijn enkele genererende functies in de notatie van Cannery et Molk:

$$q_0(q) = \prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n}) = \prod_{1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{0}^{\infty} n \left\{p_{Eu}(n) - p_{Ou}(n)\right\} x^n, \qquad (7.10.1)$$

$$q_1(q) = \prod_{1}^{\infty}(1+q^{2n}) = \prod_{1}^{\infty}(1+x^n) = \sum_{0}^{\infty} n\; p_u(n)\; x^n, \qquad (7.10.2)$$

$$q_2(q) = \prod_{1}^{\infty}(1+q^{2n-1}) = \prod_{1}^{\infty}(1+x^{n+\frac{1}{2}}) = \sum_{0}^{\infty} n\; p_{uo}(n)\; q^n, \qquad (7.10.3)$$

$$q_3(q) = \prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) = \prod_{1}^{\infty}(1-x^{n+\frac{1}{2}}) = \sum_{0}^{\infty} n\; (-)^n\; p_{uo}(n) q^n. \qquad (7.10.4)$$

$$q_0^{-1}(q) = \sum_{0}^{\infty n} p(n)\, x^n \qquad (7.10.5)$$

En passant, voor $q_0(q)$ geldt een stelling van Euler:

$$q_0(q) = \sum_{-\infty}^{\infty k} (-)^k\, x^{\frac{1}{2}k(3k+1)}, \qquad (7.10.6)$$

die niet diep ligt en een van Jacobi:

$$q_0^3(q) = \tfrac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty k} (-)^k\, (2k+1)\, x^{\frac{1}{2}k(k+1)}, \qquad (7.10.7)$$

die wel diep ligt. Voorts gelden ervoor nog enkele zeer curieuze stellingen van Ramanujan:

$$5\, q_0^5(q^5)\, q_0^{-6}(q) = \sum_{0}^{\infty n} p(5n+4)\, x^n, \qquad (7.10.8)$$

$$7\, q_0^3(q^7)\, q_0^{-4}(q) + 49\, q^2\, q_0^7(q^7)\, q_0^{-8}(q) = \sum_{0}^{\infty n} p(7n+5) x^n. \qquad (7.10.9)$$

Deze genererende functies hangen direct met de nulthetas samen. Immers is, zoals men gemakkelijk verifieert:

$$\theta_{00} = q_0(q)\, q_2^2(q), \qquad (7.10.10)$$

$$\theta_{01} = q_0(q)\, q_3^2(q), \qquad (7.10.11)$$

$$\theta_{10} = 2\, q^{1/4}\, q_0(q)\, q_1^2(q), \qquad (7.10.12)$$

$$\theta'_{11} = 2\pi i\, q^{1/4}\, q_0^3(q), \qquad (7.10.13)$$

waarin $\theta'_{11} = \frac{\partial}{\partial z}\, \theta_{11}(z/\tau)$ voor $z = 0$.

In de q-functies zijn al onze formules nu weer vertaalbaar. De twee fundamentele relaties tussen de nulthetas luiden bijv.

$$q_1(q)\, q_2(q)\, q_3(q) = 1, \qquad (7.10.14)$$

$$16\, q\, q_1^8(q) = q_2^8(q) - q_3^8(q), \qquad (7.10.15)$$

en ook M_3 bijv. wordt eenvoudig:

$$M_3 = -48\, q\, q_0^{12}(q). \qquad (7.10.16)$$

Voorts leidt men gemakkelijk enkele rekenregeltjes af voor negatief argument

$$q_0(-q) = q_0(q), \qquad (7.10.17)$$

$$q_1(-q) = q_1(q), \qquad (7.10.18)$$

$$q_2(-q) = q_3(q), \tag{7.10.19}$$

$$q_3(-q) = q_2(q), \tag{7.10.20}$$

en voor gekwadrateerd argument:

$$q_0(q^2) = q_0(q)\, q_1(q) = q_0(iq)\, q_1(iq), \tag{7.10.21}$$

$$q_2(q^2) = q_2(iq)\, q_3(iq), \tag{7.10.22}$$

$$q_3(q^2) = q_2(q)\, q_3(q), \tag{7.10.23}$$

en tenslotte

$$\theta_{00}(q^2) = q_0(iq)\, q_1^{-1}(iq), \tag{7.10.24}$$

$$\theta_{01}(q^2) = q_0(q)\, q_1^{-1}(q). \tag{7.10.25}$$

Met behulp hiervan kan men nu allerlei arithmetische en andere stellingen vinden. Zo vindt men nu bijv. gemakkelijk

$$\theta_{10}^{-8}(q) + \theta_{10}^{-8}(iq) = -\,2^{-4}\, q_0^{-8}(q^2)\, q_1^{8}(q^2),$$

maar anderzijds ook

$$\theta_{01}^{-8}(q^4) = q_0^{-8}(q^2)\, q_1^{8}(q^2),$$

zodat geldt:

$$\theta_{01}^{-8}(q^4) = -\,16\left\{\theta_{10}^{-8}(q) + \theta_{10}^{-8}(iq)\right\}, \tag{7.10.26}$$

een stelling, die naast zijn functietheoretisch karakter ook een arithmetisch resultaat levert. Immers, zij leert, dat de ontwikkelingscoefficienten van θ_{01}^{-8} eenvoudig gevonden kunnen worden uit die van θ_{10}^{-8}. Voorts ziet men direct, dat afgezien van tekens de coefficienten van θ_{00}^{-8} gelijk zijn aan die van θ_{01}^{-8}. Het resultaat is, dat om de coefficienten van M_{-2} te vinden, zoals in sectie 9 nodig bleek, men zich kan beperken tot de coefficienten van θ_{10}^{-8}.

Uit de menigte relaties, die men kan afleiden, zullen wij er nog een zeer merkwaardige lichten: Hoe gedraagt c(n) zich modulo 71?

$$J = \frac{1}{6} M_2^3 M_3^{-2} = \frac{1}{6} (M_2^3 M_3) M_3^{-3} = \frac{4}{9} M_9 M_3^{-3} - \frac{4}{81},$$

$$J + \frac{4}{81} = \frac{4}{9} M_9 M_3^{-3} = 2^{-10} 3^{-5} q^{-3}\{q_2^{72}(q) - q_3^{72}(q) - 2^{36} q^9 q_1^{72}(q)\},$$

$$24\, q^3\{3q^{-2} + 35.71 + 3 + 3 \sum_1^\infty c(n) q^{2n}\} = \tfrac{1}{2} q_2^{72}(q) - \tfrac{1}{2} q_3^{72}(q) - 2^{35} q^9 q_1^{72}(q).$$

Nu is (i = 1,2,3):

$$q_i^{72}(q) = q_i(q)\, q_i^{71}(q) \equiv q_i(q)\, q_i(q^{71}) \pmod{71},$$

$$2^{35} \equiv 1 \pmod{71},\quad 72 \equiv 1 \pmod{71},\quad 24.35.71 \equiv 0 \pmod{71},$$

dus

$$q+q^3+\sum_1^\infty c(n)q^{2n+3} \equiv \tfrac{1}{2}\{q_2(q)q_2(q^{71})-q_3(q)q_3(q^{71})\} - q^9 q_1(q)q_1(q^{71}) \pmod{71}.$$

Als men stelt $c'(n) = c(n)$ voor $n \neq 0$ en $c'(0) = 1$, is dus

$$\sum_1^\infty c'(n)\, q^{2n+3} \equiv \tfrac{1}{2}\Big\{\sum_0^\infty p_{uo}(n)q^n \cdot \sum_0^\infty p_{uo}(n)q^{71n} - \sum_0^\infty (-)^n p_{uo}(n)q^n \cdot \sum_0^\infty (-)^n p_{uo}(n)q^{71n}$$

$$- q^9 \sum_0^\infty p_u(n)\, q^{2n} \cdot \sum_0^\infty p_u(n)q^{142n} \pmod{71}.$$

Door vergelijking van de coefficienten links en rechts van q^{2n+3} vindt men dan

$$c'(n) \equiv \sum_0^{\left[\frac{2n+3}{71}\right]} p_{uo}(k)p_{uo}(2n+3-71k) - \sum_0^{\left[\frac{n-3}{71}\right]} p_u(k)p_u(n-3-71k) \pmod{71}. \qquad (7.10.27)$$

Zoals men ziet, omvat de rechterzijde maar weinig termen, voor $n \leq 2$ een term, voor $3 \leq n \leq 33$ twee termen, voor $34 \leq n \leq 69$ drie termen, voor $70 \leq n \leq 73$ vier termen, voor $74 \leq n \leq 109$ vijf termen, enz.

Modulo 71 geldt dus bijv.

$c(-1) \equiv 1$
$c'(0) \equiv 1$
$c(1) \equiv 1$
$c(2) \equiv 1$
$c(3) \equiv 2-1 = 1$
$c(4) \equiv 2-1 = 1$
$c(5) \equiv 3-1 = 2$
$c(6) \equiv 4-2 = 2,$

enzovoorts.

Soortgelijke eigenschappen gelden modulo zekere andere priemen. Door M_6 te gebruiken i.p.v. M_9 vindt men bijv. een volkomen analoge congruentie modulo 47.

De voorbeelden van deze laatste paragraaf waren op grond van de numerieke gegevens gevonden en pas kort geleden bewezen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m O.

Colloquium over theta-functies.

Voordracht door Dr F.van der Blij

4 Juni 1952 .

Theta-functies en sommen van kwadraten I.

1. Twee kwadraten.

Laten we beginnen met op te merken dat de bepaling van het aantal representaties van een natuurlijk getal N door de som van twee kwadraten van gehele getallen ook zonder thetafuncties plaats kan vinden. We doen het echter nu met thetafuncties. We zullen eerst nog een identiteit bewijzen, en wel

$$\frac{\vartheta'_{01}(z)\,\vartheta_{10}(z)-\vartheta'_{10}(z)\,\vartheta_{01}(z)}{\vartheta_{00}(z)\,\vartheta_{11}(z)} = -\pi i\,\vartheta^2_{00}(0). \tag{8.1.1}$$

We bewijzen deze identiteit door de thetafuncties als functies van z te beschouwen. Allereerst merken we op dat

$\dfrac{\vartheta_{01}(z)}{\vartheta_{10}(z)}$ zowel bij de transformatie $z\to z+1$ als bij $z\to z+\tau$ in zijn tegengestelde overgaat. Hetzelfde geldt voor het quotient $\dfrac{\vartheta^2_{10}(z)}{\vartheta_{00}(z)\,\vartheta_{11}(z)}$, zoals direct met de formules (1.2.13) te verifieren is. Hieruit volgt dat

$$\left\{\frac{\vartheta_{01}(z)}{\vartheta_{10}(z)}\right\}' \cdot \frac{\vartheta^2_{10}(z)}{\vartheta_{00}(z)\,\vartheta_{11}(z)} = \frac{\vartheta'_{01}(z)\,\vartheta_{10}(z)-\vartheta_{01}(z)\,\vartheta'_{10}(z)}{\vartheta_{00}(z)\,\vartheta_{11}(z)}$$

invariant is, bij transformaties $z\to z+\lambda+\mu\tau$.
De enig mogelijke polen van deze functie, kunnen enkelvoudige zijn, gelegen in punten congruent met $z=0$ of $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$ modulo $(1,\tau)$. Het punt $z=0$ is echter geen pool daar de teller voor $z=0$ gelijk aan nul wordt, $\vartheta'_{01}(z)$ en $\vartheta'_{10}(z)$ zijn immers oneven functies van z. De beschouwde functie kan dus alleen polen hebben congruent met $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$ en een elliptische functie met één pool per periodepar. is een constante. Om de waarde van de constante te berekenen bepalen we met de regel van L'Hopital de limiet van de beschouwde functie voor $z\to 0$. Deze wordt

$$\lim_{z\to 0}\frac{\vartheta'_{01}(z)\,\vartheta_{10}(z)-\vartheta_{01}(z)\,\vartheta'_{10}(z)}{\vartheta_{00}(z)\,\vartheta_{11}(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{\vartheta''_{01}(z)\,\vartheta_{10}(z)-\vartheta_{01}(z)\,\vartheta''_{10}(z)}{\vartheta'_{00}(z)\,\vartheta_{11}(z)+\vartheta_{00}(z)\,\vartheta'_{11}(z)} =$$

$$= \frac{\vartheta''_{01}\,\vartheta_{10}-\vartheta_{01}\,\vartheta''_{10}}{\vartheta_{00}\,\vartheta'_{11}} .$$

We schreven als afkorting $\vartheta_{gh}(0) = \nu_{gh}$.
We gebruiken nu (4.4.1) en vinden

$$= \left\{ \frac{\vartheta''_{01}}{\vartheta_{01}} - \frac{\vartheta''_{10}}{\vartheta_{10}} \right\} \frac{1}{\pi i \vartheta_{00}^2}$$

$$= \frac{\omega_1^2 (e_1 - e_2)}{\pi i \vartheta_{00}^2} \qquad (4.2.7)$$

$$= \frac{\pi^2 \{ \vartheta_{01}^4 + 2\vartheta_{00}^4 + \vartheta_{10}^4 \}}{3\pi i \vartheta_{00}^2} \qquad (4.4.4)$$

$$= \frac{\pi^2 \vartheta_{00}^4}{\pi i \vartheta_{00}^2} = -\pi i \vartheta_{00}^2 \qquad (4.4.3)$$

Nu is dus (8.1.1) bewezen.
We vonden dus

$$(8.1.2) \qquad \frac{\vartheta'_{01}(z)}{\vartheta_{01}(z)} - \frac{\vartheta'_{10}(z)}{\vartheta_{10}(z)} = -\pi i \frac{\vartheta_{00}(z)\, \vartheta_{11}(z)}{\vartheta_{01}(z)\, \vartheta_{10}(z)} \cdot \vartheta_{00}^2 .$$

We maken nu dankbaar gebruik van syllabus numero 4 en wel (4.6.4)

$$-\pi i \frac{\vartheta_{00}(z)\, \vartheta_{11}(z)}{\vartheta_{01}(z)\, \vartheta_{10}(z)} \vartheta_{00}^2 = \pi \operatorname{tg} \pi z + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n - (-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2n\pi z.$$

$$-i \frac{\vartheta_{00}(z)\, \vartheta_{11}(z)}{\vartheta_{01}(z)\, \vartheta_{10}(z)} \nu_{00}^2 = \operatorname{tg} \pi z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+(-1)^n q^n} \sin 2n\pi z.$$

Nu substitueren we hierin $z = 1/4$, en merken op dat uit (1.2.5)t/m(1.2.8) volgt $\vartheta_{10}(\frac{1}{4}) = -i\, \vartheta_{11}(\frac{1}{4})$ en $\vartheta_{00}(\frac{1}{4}) = \vartheta_{01}(\frac{1}{4})$, en vinden omdat voor even n geldt $\sin \frac{\pi n}{2} = 0$ tenslotte:

$$(8.1.3) \qquad \vartheta_{00}^2 = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

We schrijven beide leden als machtreeksen in q:

$$\vartheta_{00}^2 = \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} \right\}^2 = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} r_2(N) q^N,$$

waarin $r_2(N)$ het aantal gehele oplossingen (x,y) van $x^2+y^2=N$ voorstelt.

$$1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q^{mn} \sin \frac{n\pi}{2} = 1 + 4 \sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum_{d \mid N} \sin \frac{\pi n}{2} .$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van q geeft

$$(8.1.4) \qquad r_2(N) = 4 \sum_{d \mid N} \sin \frac{\pi d}{2} .$$

Voorbeeld: $x^2+y^2=65$. $r_2(65)=4\{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{5\pi}{2}+\sin\frac{13\pi}{2}+\sin\frac{65\pi}{2}\}=16$.
Het zijn $(\pm4)^2+(\pm7)^2=65$; $(\pm7)^2+(\pm4)^2=65$; $(\pm1)^2+(\pm8)^2=65$; $(\pm8)^2+(\pm1)^2=65$.

2. Vier kwadraten.

Zie eerst de eerste regels van 1. Maar nu gaat het sneller:

$$\vartheta_{01}^4+\vartheta_{00}^4=3\left(\frac{2\eta_1}{\pi}\right)^2 e_1 \qquad (4.4.4)$$

We combineren met (4.6.8) en vinden

$$\vartheta_{01}^4+\vartheta_{00}^4=\frac{3}{\pi^2}\left\{-\eta_1\omega_1+\pi^2-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}.$$

Uit (4.6.7) volgt nu

$$\vartheta_{01}^4+\vartheta_{00}^4=\frac{3}{\pi^2}\left\{\frac{2}{3}\pi^2+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}$$

$$(8.2.1)\qquad \vartheta_{01}^4+\vartheta_{00}^4=2+48\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)q^{2(2k+1)}}{1-q^{2(2k+1)}}.$$

We ontwikkelen weer naar machten van q.

$$\vartheta_{01}^4+\vartheta_{00}^4=2+\sum_{N=1}^{\infty}(1+(-1)^N)\,r_4(N)q^N=2+2\sum_{N=1}^{\infty}r_4(2N)q^{2N}.$$

De ontwikkeling van het rechterlid van (8.2.1) geeft

$$2+48\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(2k+1)q^{2l(2k+1)}=2+48\sum_{N=1}^{\infty}q^{2N}\sum_{\substack{d\mid N\\ d\equiv 1(2)}}d.$$

We vinden zo dus

$$(8.2.2)\qquad r_4(2N)=24\sum_{\substack{d\mid N\\ d\equiv 1(2)}}d.$$

Om $r_4(N)$ ook voor oneven N te berekenen merken we op dat

$$\vartheta_{00}^4=\vartheta_{01}^4+\vartheta_{10}^4 \qquad (4.4.3)$$

Indien $\rho_4(N)$ het aantal gehele x,y,z,t voorstelt met $(x+\frac12)^2+(y+\frac12)^2+(z+\frac12)^2+(t+\frac12)^2=N$ kunnen we uit (4.4.3) afleiden

$$r_4(N)=(-1)^N r_4(N)+\rho_4(N).$$

Voor even N is dit triviaal, voor oneven N vinden we

$$2\,r_4(N)=\rho_4(N).$$

Elementair is in te zien dat

$$r_4(4N)=r_4(N)+\rho_4(N)=3\,r_4(N)$$

mits N oneven is.
Voor oneven waarden van N vinden we dus

$$(8.2.3)\qquad r_4(N)=8\sum_{d\mid N}d.$$

3. Acht kwadraten.

Uit de formules (4.4.4) en (4.8.2) kan men direct afleiden

$$(8.3.1) \qquad \vartheta_{00}^8 + \vartheta_{01}^8 + \vartheta_{10}^8 = 2+480 \sum_{N=1}^{\infty} \sigma_3(N) q^{2N} .$$

Vergelijking van de coëfficiënten van de verschillende machten van q geeft ons de relatie

$$(8.3.2) \qquad 2\,r_8(2N) + \varrho_8(2N) = 480\,\sigma_3(N).$$

Daar de afleiding van de formule voor $r_8(N)$ hieruit nog al wat rekenwerk eist gaan we hier nu niet verder op in. We mogen verwijzen naar het artikel van Prof. B.van der Pol: On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobian theta-functions, with arithmetical applications II. Kon.Ned.Ak.v.Wet.Proceedings Series A Vol LIV (1951) pg 272-284.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r daa m (O)

Colloquium over theta-functies.

Voordracht door Dr F. van der Blij

18 Juni 1952

Theta-functies en sommen van kwadraten II.

1. Inleiding.

We beschouwen de gehele oplossingen van de vergelijking

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = N$$

We stellen het aantal oplossingen voor door $r_n(N)$. De nogal gecompliceerde methode (een conglomeraat van het werk van Siegel, Hardy, Littlewood en Dickson), heeft het voordeel een inzicht te geven hoe verschillende methoden te werk gaan en hoe in het algemeen het probleem van de representatie door kwadratische vormen aangepakt kan worden.

$$(9.1.1)\qquad \vartheta_{\infty}^{n} = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} r_n(N)\, e^{\pi i \tau N}.$$

Verschillende onderzoekingen wijzen in de richting van een nauw verband tussen kwadratische vergelijkingen en congruenties. We berekenen het aantal oplossingen $\alpha_n(N,p)$ van de congruentie $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \equiv N \pmod p$, met een natuurlijk getal p.

$$\alpha_n(N,p) = p^{-1} \sum_{h \bmod p} \sum_{\substack{x_i \bmod p \\ i=1,\ldots,n}} e^{\frac{2\pi i h}{p}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-N)}$$

$$(9.1.2)\qquad \alpha_n(N,p) = p^{-1} \sum_{h \bmod p} e^{-\frac{2\pi i h N}{p}}\, S^n\left(\tfrac{2h}{p}\right).$$

We definieerden $S\left(\frac{2h}{p}\right) = \sum_{x \bmod p} e^{\frac{2\pi i h}{p} x^2}$, en merken op dat deze definitie afwijkt van (6.1.5), waarin van de twee getallen 2h en p geëist werd dat ze onderling ondeelbaar moesten zijn. In het symbool werd dan een breukstreep geschreven. Vervolgens normeren we $\alpha_n(N,p)$. Er is voor iedere x_i een waarde bereik van p getallen, totaal dus p^n en voor de N eveneens p waarden. We bestuderen verder $p^{-n+1}\,\alpha_n(N,p)$. Naast deze uitdrukking beschouwen we:

$$(9.1.3)\qquad \alpha_n(N) = \lim_{p\to\infty} p^{-n+1}\, \alpha_n(N,p).$$

We zullen in § 5 bewijzen, dat deze limiet bestaat, als p een geschikt gekozen getalrij doorloopt b.v. de rij 1!,2! 3!,4!,5!, ...

Nu moet ook het getal $r_n(N)$ genormeerd worden. We doen dit analytisch en normeren met het differentiaal-quotiënt van het volume binnen $\sum x_i^2 = N$ naar N. We berekenen eerst het volume van een n-dimensionale bol $I_n(R) = a_n R^n$ $(\sum x_i^2 = R^2 = N)$

$$I_n(R) = \int_{-R}^{+R} I_{n-1}(\sqrt{R^2-x^2})\,dx = R\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} I_{n-1}(R\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = a_{n-1}R^n \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n\varphi\,d\varphi$$

Hieruit volgt $a_n = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$ dus $\frac{dI_n}{dn} = \frac{d}{dN}\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} N^{\frac{1}{2}n} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} N^{\frac{1}{2}n-1}$.

We beschouwen nu als het genormeerde aantal oplossingen·

$$(9.1.4) \qquad \frac{r_n(N)\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\pi^{\frac{1}{2}n} N^{\frac{1}{2}n-1}}.$$

We zullen bewijzen dat voor n = 5,6 7,8 de uitdrukkingen (9.1.3) en (9.1.4) gelijk zijn. Hierin ligt de rechtvaardiging van de ietwat willekeurige normering van $r_n(N)$. Om de gelijkheid te bewijzen is nogal wat rekenwerk nodig. We weten nu al het een en ander over

$$(9.1.1) \qquad \vartheta_{oo}^n = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} r_n(N) e^{\pi i \tau N}.$$

We bestuderen daarnaast

$$(9.1.5) \qquad \theta_n = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} N^{\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \alpha_n(N) e^{\pi i \tau N}.$$

We bewijzen eerst dat $\frac{\theta_n}{\vartheta_{oo}^n}$ invariant is tegenover transformaties uit Γ_3, in het bijzonder $\tau \to \tau + 2$ en $\tau \to \frac{-1}{\tau}$. Vervolgens bewijzen we $\frac{\theta_n}{\vartheta_{oo}^n}$ begrensd is in het fundamentaal gebied van Γ_3. Hieruit volgt, dat het quotiënt constant is en gezien het gedrag voor $\tau \to i\infty$ moet $\theta_n = \vartheta_{oo}^n$. De invariantie is algemeen te bewijzen (voor $n \geq 5$), de begrenzing alleen voor $n \leq 8$.

2. De functie θ_n.

Uit de definitie volgt

$$\theta_n = 1 + \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \lim_{p\to\infty} \sum_{h \bmod p} \frac{S^n(\frac{2h}{p})}{p^n} \sum_{N=1}^{\infty} N^{\frac{1}{2}n-1} e^{\pi i(\tau - \frac{2h}{p})N}.$$

De verwisseling van de sommaties over h en N is geoorloofd als de reeks absoluut convergeert; dit blijkt het geval te zijn als $\frac{1}{2}n-1 > 1$, d.w.z. $n \geq 5$.

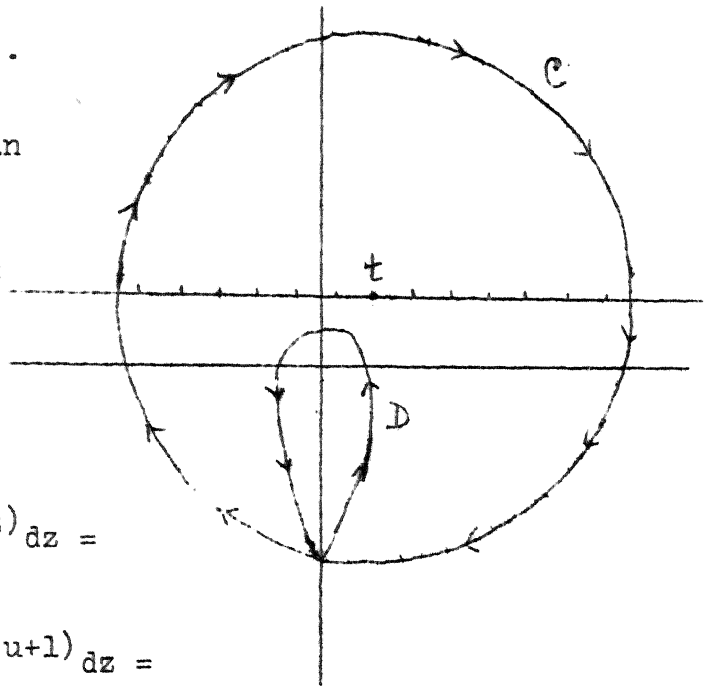
We gebruiken nu de volgende formule van Lipschitz.

$$(9.2.1) \qquad \frac{(-\pi i)^g}{\Gamma(g)} \sum_{l=0}^{\infty} (l+u)^{g-1} e^{\pi i t(l+u)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n u}}{(t-2n)^g}.$$

We veronderstellen $0 < u \leq 1$, $g > 1$ en $\mathrm{Im}\, t > 0$. Het bijzondere geval u=1, g is geheel vinden we al bewezen in de 4e syllabus op pag. 12.

We beschouwen nu de functie $w(z) = \dfrac{\pi i z^{-g_e} \pi i u(t-z)}{1-e^{\pi i(t-z)}}$.

We integreren over C+D C is een cirkel met straal 2N+1, D omsluit O en ligt geheel onder Im(z)=Im(t). De enige polen binnen de contour zijn $z=t-2n$ $-N \leq n \leq N$. De som van de residuen in deze punten is $\sum_{n=-N}^{+N} \dfrac{e^{2\pi inu}}{(t-2n)^g}$. Als $N \to \infty$ nadert de integraal over C tot nul, daar $g > 1$. Voor de integraal over D schrijven we



$$\int_D \pi i z^{-g_e} \pi i u(t-z) \sum_{l=o}^{\infty} e^{\pi i l(t-z)} dz =$$

$$= \pi i \sum_{i=o}^{\infty} e^{\pi i(l+u)t} \int_D z^{-g_e} - \pi i z(u+l) dz =$$

$$= -(-\pi i)^g \sum_{l=o}^{\infty} (l+u)^{g-1} e^{\pi i(l+u)t} \oint_D \left[-\pi i z(u+l)\right]^{-g} e^{-\pi i z(u+l)} d\left[\pi i z(u+l)\right].$$

Wanneer $N \to \infty$, nadert de integraal over D tot de integraal van Hankel voor de gamma-functie. De bekende relatie tussen contourintegraal en som residuen geeft nu voor $N \to \infty$ precies formule (9.2.1).

Passen we deze formule nu toe. dan vinden we

$$\theta_n = 1+i^{\frac{1}{2}n} \lim_{p\to\infty} \sum_{h \bmod p} \frac{S^n(\frac{2h}{p})}{p^n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\tau - \frac{2h}{p} - 2l)^{-\frac{1}{2}n}$$

$$\theta_n = 1+i^{\frac{1}{2}n} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{S^n(\frac{2k}{p})}{p^{\frac{1}{2}n}(p\tau - 2k)^{\frac{1}{2}n}}. \tag{9.2.2}$$

Nu beschouwen we de breuk $\frac{2k}{p}$ en vereenvoudigen deze tot $\frac{a}{b}$. Dan geldt $S(\frac{2k}{p}) = \frac{p}{b} S(\frac{a}{b})$, mits $ab \not\equiv 0 \pmod 2$. Als echter in 2k en p even hoge machten van 2 opgaan, berekenen we, ($p=2^\lambda p_1$, $2k=2^\lambda k_1$, $\lambda \gg 1$, k_1 en p_1 oneven)

$$S(\frac{2k}{p}) = \sum_{x \bmod p} e^{\frac{2\pi i k}{p} x^2} = \sum_{x \bmod p} e^{\frac{\pi i k_1}{p_1}(x+p_1)^2} = e^{\pi i k_1 p_1} \sum_{x \bmod p} e^{\frac{2\pi i k_1}{p} x^2} = -S(\frac{2k}{p})$$

Dus is in dit geval $S(\frac{2k}{p}) = 0$. Nu definiëren we $S(\frac{a}{b}) = 0$ als $(a,b) > 1$ of als $ab \not\equiv 1 \pmod 2$. Dan vinden we

$$\theta_n = 1 + i^{\frac{1}{2}n} \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{S^n(\frac{a}{b})}{b^{\frac{1}{2}n}(b\tau - a)^{\frac{1}{2}n}}. \tag{9.2.3}$$

3. Het gedrag van θ_n onder transformaties uit Γ_3.

Vervangen we a in de sommatie van (9.?.3) door a-2b, dan volgt direct

(9.3.1) $$\theta_n(\tau+2) = \theta_n(\tau).$$

We berekenen nu verder

$$\theta_n(\tfrac{-1}{\tau}) = 1+i^{\frac{1}{2}n}\sum_{a=-\infty}^{+\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{S^n(\frac{a}{b})}{b^{n/2}(\frac{-b}{\tau}-a)^{n/2}}.$$

We gebruiken nu de reciprociteitsformule voor sommen van Gausz (6.5.1)

$$S(\tfrac{a}{b}) = S(\tfrac{-b}{a})\sqrt{\tfrac{bi}{a}}.$$

We beschouwen eerst de term met a=0; deze levert $(-i\tau)^{\frac{1}{2}n}$. De termen met $a > 0$ leveren:

$$i^{\frac{1}{2}n}\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{S^n(\frac{-b}{a})(\frac{bi}{a})^{\frac{1}{2}n}}{b^{n/2}(\frac{-b}{\tau}-a)^{n/2}} = i^{\frac{1}{2}n}(-i\tau)^{+\frac{1}{2}n}\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{S^n(\frac{-b}{a})}{a^{n/2}(a\tau+b)^{\frac{1}{2}n}}.$$

De termen met $a < 0$ leveren:

$$i^{\frac{1}{2}n}\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{S^n(\frac{b}{a})(\frac{bi}{-a})^{\frac{1}{2}n}}{b^{n/2}(\frac{-b}{\tau}+a)^{n/2}} = i^{\frac{1}{2}n}(-i\tau)^{+\frac{1}{2}n}\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{S^n(\frac{b}{a})}{a^{n/2}(a\tau-b)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Nemen we nog de term 1 erbij, dan vinden we

$$\theta_n(\tfrac{-1}{\tau}) = (-i\tau)^{+\frac{1}{2}n}\left\{1+i^{\frac{1}{2}n}\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}\frac{S^n(\frac{b}{a})}{a^{n/2}(a\tau-b)^{\frac{1}{2}n}}\right\}$$

oftewel

(9.3.2) $$\theta_n(\tfrac{-1}{\tau}) = (-i\tau)^{+\frac{1}{2}n}\,\theta_n(\tau).$$

We vonden al eerder

$$\vartheta_{00}(\tau+2) = \vartheta_{00}(\tau)$$
$$\vartheta_{00}(\tfrac{-1}{\tau}) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\vartheta_{00}(\tau).$$

Dus $\dfrac{\theta_n}{\vartheta_{00}^n}$ is invariant onder Γ_3.

4. Het gedrag van $\theta_n / \vartheta_{00}^n$ in het fundamentaalgebied.

Het is duidelijk, dat de functie overal begrensd is met uitzondering eventueel in de buurt van de punten $\tau = \pm 1$, de randpunten van het fundamentaalgebied op de singuliere lijn. We bestuderen alleen $\tau = 1$. We stellen $\tau = 1 - \frac{1}{T}$ en laten $T \to i\infty$, zodat $\tau \to 1$ binnen het fundamentaalgebied. We voeren nog in $e^{\pi i T} = x$, zodat $x \to 0$, als $T \to i\infty$.

$$\vartheta_{00}^n(1-\tfrac{1}{T}) = \vartheta_{01}^n(\tfrac{-1}{T}) = (-iT)^{\frac{1}{2}n}\,\vartheta_{10}^n(T)$$

(9.4.1) $$\vartheta_{00}^n(1-\tfrac{1}{T}) = (-iT)^{\frac{1}{2}n}(2x^{\frac{1}{4}})^n(1+x^2+\ldots)^n.$$

Vervolgens berekenen we

$$\theta_n(1-\tfrac{1}{T}) = 1+i^{\frac{1}{2}n}\sum_{a=-\infty}^{+\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{S^n(\frac{a}{b})}{b^{n/2}(1-\frac{1}{T}-\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}n}}$$

$$(9.4.2)\qquad \vartheta_n(1-\tfrac{1}{T}) = 1 + i^{\frac{1}{2}n}\sum_{\substack{c=-\infty\\ c\equiv 1(2)}}^{+\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{S^n(\frac{b-c}{b})}{b^{n/2}(\frac{c}{b}-\frac{1}{T})^{\frac{1}{2}n}}.$$

We bestuderen nu

$$S(\tfrac{b-c}{b}) = \sum_{x \bmod b}(-1)^x e^{-\frac{\pi i c}{b}x^2} = S_{01}(\tfrac{-c}{b}).$$

We definieerden S_{01} analoog met ϑ_{01}. Voor deze nieuwe sommen van Gausz geldt als analogon van (6.5.1) en (1.3.3)

$$(9.4.3)\qquad S_{01}(\tfrac{-c}{b}) = \sqrt{\tfrac{b}{ci}}\; S_{10}(\tfrac{b}{c}),$$

waarbij

$$S_{10}(\tfrac{b}{c}) = \sum_{x \bmod c} e^{\frac{\pi i b}{c}(x+\frac{1}{2})^2}.$$

Het bewijs kan analoog met dat van (6.5.1.) geleverd worden. We reduceren nu op dezelfde wijze als in de vorige paragraaf.

$$\vartheta_n(1-\tfrac{1}{T}) = i^{\frac{1}{2}n}(-iT)^{\frac{1}{2}n}\sum_{\substack{c=1\\ c\equiv 1(2)}}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{+\infty}\frac{S_{10}^n(\frac{b}{c})}{c^{n/2}(cT-b)^{n/2}}.$$

Hier voeren we nu in $b = \lambda c + \mu$, waarin λ alle gehele getallen en μ een restsysteem modulo c met $(\mu,c) = 1$ doorloopt. Nu volgt uit de definitie:

$$S_{10}(\tfrac{\lambda c+\mu}{c}) = e^{\frac{\pi i\lambda}{4}}S_{10}(\tfrac{\mu}{c})$$

$$\vartheta_n(1-\tfrac{1}{T}) = i^{\frac{1}{2}n}(-iT)^{\frac{1}{2}n}\sum_{\substack{c=1\\ c\equiv 1(2)}}^{\infty}{\sum_{\mu \bmod c}}'\frac{S_{10}^n(\frac{\mu}{c})}{c^n}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{\pi i\lambda n}{4}}}{(T-\frac{\mu}{c}-\lambda)^{\frac{1}{2}n}}.$$

We stellen nu $T^* = 2(T-\frac{\mu}{c})$ en passen (9.2.1) toe

$$\vartheta_n(1-\tfrac{1}{T}) = (-iT)^{\frac{1}{2}n}\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}\sum_{\substack{c=1\\ c\equiv 1(2)}}^{\infty}{\sum_{\substack{\mu \bmod c\\ (\mu,c)=1}}}'\frac{S_{10}^n(\frac{\mu}{c})}{c^n}\sum_{l=0}^{\infty}(l+u)^{\frac{1}{2}n-1}e^{\pi iT^*(l+u)}.$$

Hierin is $u = \frac{n}{8}$ als $n \leq 8$, anders moet $\frac{n}{8}$ modulo 1 gereduceerd worden op $0 < u \leq 1$. Verder $e^{\pi iT^*} = e^{2\pi iT}e^{-\frac{2\pi i\mu}{c}} = x^2 e^{-\frac{2\pi i\mu}{c}}$. Tenslotte

$$(9.4.4)\qquad \vartheta_n(1-\tfrac{1}{T}) = (-iT)^{\frac{1}{2}n}\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}\sum_{l=0}^{\infty}(l+u)^{\frac{1}{2}n-1}x^{2(l+u)}\sum_{\substack{c=1\\ c\equiv 1(2)}}^{\infty}{\sum_{\substack{\mu \bmod c\\ (\mu,c)=1}}}'\frac{S_{10}^n(\frac{\mu}{c})e^{-\frac{2\pi i\mu(l+u)}{c}}}{c^n}.$$

Het gedrag voor $T \to i\infty$, $x \to 0$ wordt op een constante factor na bepaald door $(-iT)^{\frac{1}{2}n}x^{2u}$. Het gedrag van $\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{00}^n}$ dus door $x^{2u-\frac{1}{2}n}$. Dit quotiënt is begrensd als $2u \geq \frac{1}{2}n$, d.w.z. voor $n \leq 8$.

5. Uitwerking van de resultaten.

We bewezen dat voor $5 \leq n \leq 8$

$$(9.5.1)\qquad r_n(N) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}N^{\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}\alpha_n(N),$$

of wat hetzelfde is

(9.5.2) $\quad \vartheta_{00}^{n} = \theta_n.$

We trachten nu voor $r_n(N)$ een eenvoudige uitdrukking te vinden.

We zouden kunnen aanknopen bij (9.2.3), hierin $S^n(\frac{a}{b})$ invullen en dan de optredende Poincaré- of Eisenstein-reeks omzetten in een Lambert-reeks (verg. pag. T 4,12) en deze in een machtreeks naar q. Vooral voor n = 8 wordt dit eenvoudig, daar $S^8(\frac{a}{b}) = b^4$, mits (a, b) = 1 en $ab \equiv 0 \pmod 2$.

Een andere mogelijkheid is echter aan te knopen bij (9.1.3). We bewijzen eerst

(9.5.3) $\quad \alpha_n(N, p_1p_2) = \alpha_n(N, p_1)\alpha_n(N, p_2), \qquad (p_1, p_2) = 1.$

Laat $\lambda p_1 + \mu p_2 = 1$ en $\sum a_i^2 \equiv N \pmod{p_1}$, $\sum b_i^2 \equiv N \pmod{p_2}$. Dan zal $c_i = \mu p_2 a_i + \lambda p_1 b_i$ een oplossing mod p_1p_2 zijn.

$$\sum_i (\mu p_2 a_i + \lambda p_1 b_i)^2 = \mu^2 p_2^2 \sum a_i^2 + \lambda^2 p_1^2 \sum b_i^2 + 2\lambda\mu p_1 p_2 \sum a_i b_i$$

$$\equiv \mu^2 p_2^2 \sum a_i^2 + \lambda^2 p_1^2 \sum b_i^2 \pmod{p_1p_2}$$

$$\equiv \mu^2 p_2^2 N + \lambda^2 p_1^2 N \pmod{p_1p_2}$$

$$\equiv N \pmod{p_1p_2}.$$

We kunnen ons dus beperken tot de berekening van $\alpha_n(N, p^\lambda)$, waarin p een priemgetal is. Eerst rekenen we voor oneven priemgetallen. We beginnen met (9.1.2)

$$p^{-\lambda(n-1)}\alpha_n(N, p^\lambda) = p^{-\lambda n} \sum_{h \bmod p^\lambda} e^{-\frac{2\pi i h N}{p^\lambda}} S^n(\tfrac{2h}{p^\lambda}).$$

We schrijven $h = kp^{\lambda-\rho}$ en sommeren over $\rho = 0, 1, \ldots \lambda$ en k mod' p^ρ ($(k, p) = 1$)

$$= 1 + p^{-\lambda n} \sum_{\rho=1}^{\lambda} p^{(\lambda-\rho)n} \sum_{k \bmod p^\rho}{}' e^{-\frac{2\pi i k N}{p^\rho}} S^n(\tfrac{2k}{p^\rho}) =$$

$$= 1 + \sum_{\rho=1}^{\lambda} p^{-\rho n} \sum_{k \bmod p^\rho}{}' e^{-\frac{2\pi i k N}{p^\rho}} (\tfrac{2k}{p})^{n\rho} p^{\frac{1}{2}n\rho} e^{-\frac{\pi i n}{4}(p^\rho - 1)} =$$

$$(9.5.4) \quad = 1 + \sum_{\rho=1}^{\lambda} p^{-\frac{1}{2}\rho n} e^{-\frac{\pi i n}{4}(p^\rho - 1)} \sum_{k \bmod p^\rho}{}' (\tfrac{2k}{p})^{\rho n} e^{-\frac{2\pi i k N}{p^\rho}}$$

Als we in de som over k de sommatieveranderlijke vervangen door k+p, komt er een extra factor $e^{-\frac{2\pi i N}{p^{\rho-1}}}$. De som over k is dus nul, tenzij $p^{\rho-1} \mid N$. Als p^μ de de hoogste in N opgaande macht van p is, breekt de som over ρ dus af bij $\mu+1$. Hieruit blijkt, dat de limiet voor $\lambda \to \infty$ bestaat, waarmee een promemoriepost uit § 1 is behandeld. Het is nu noodzakelijk de gevallen van even en oneven n apart te beschouwen. Het eenvoudigste geval van even n beschouwen we hier.

Uit elementaire beschouwingen volgt voor de sommen van Ramanujan:

$$\sum_{k \bmod p^\rho}{}' e^{-\frac{2\pi i k N}{p^\rho}} = p^\rho\left(1-\frac{1}{p}\right) \text{ als } \rho \leq \mu$$

$$= -p^\mu \qquad \text{als } \rho = \mu+1.$$

Bovendien is nu

$$e^{-\frac{\pi i n}{4}(p^\rho-1)} = \left(\frac{-1}{p^\rho}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\rho n}{2}}.$$

dus

$$p^{-\lambda(n-1)} \alpha_n(N,p^\lambda) = 1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\rho=1}^{\mu} p^{-\rho(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\rho n}{2}} +$$

$$- p^{-(\mu+1)(\frac{1}{2}n-1)-1}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{n(\mu+1)}{2}} =$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\mu} p^{-\rho(\frac{1}{2}n-1)}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\rho n}{2}} - \sum_{\rho=1}^{\mu+1} p^{-\rho(\frac{1}{2}n-1)-1}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\rho n}{2}} =$$

$$= \left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{n}{2}} p^{-\frac{1}{2}n}\right] \sum_{\rho=0}^{\mu}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\rho n}{2}} p^{-\rho(\frac{1}{2}n-1)}.$$

Vervolgens, λ geschikt gekozen,

$$(9.5.5) \qquad \prod_{\substack{p \\ p\neq 2}} p^{-\lambda(n-1)} \alpha_n(N,p^\lambda) = \prod_{\substack{p \\ p\neq 2}}\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{n}{2}} p^{-\frac{1}{2}n}\right] \sum_{d \mid N \atop d\equiv 1(2)} \left(\frac{-1}{d}\right)^{\frac{n}{2}} d^{-\frac{1}{2}n+1}.$$

Nu hebben we nodig voor n=6

$$(9.5.6) \qquad \prod_{p\neq 2}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-3}\right) = \left\{\sum_{k\equiv 1(2)}\left(\frac{-1}{k}\right)k^{-3}\right\}^{-1} = \frac{32}{\pi^3}$$

(b.v. Bromwick: Infinite Series p.300).

En voor n=8

$$(9.5.7) \qquad \prod_{p\neq 2}\left(1-p^{-4}\right) = \left\{\sum_{k\equiv 1(2)} k^{-4}\right\}^{-1} = \left\{\frac{15}{16}\zeta(4)\right\}^{-1} = \frac{96}{\pi^4}.$$

We berekenen nu verder $\alpha_n(N,2^\lambda)$.

$$2^{-\lambda(n-1)}\alpha_n(N,2^\lambda) = 2^{-\lambda n}\sum_{h \bmod 2^\lambda} e^{-\frac{2\pi i h N}{2^\lambda}} S^n\left(\frac{2h}{2^\lambda}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{\rho=1}^{\lambda} 2^{-\rho n}\sum_{k \bmod 2^\rho}{}' e^{-\frac{2\pi i k N}{2^\rho}} S^n\left(\frac{2k}{2^\rho}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{\rho=2}^{\lambda} 2^{-\rho n}\sum_{k \bmod 2^\rho}{}' e^{-\frac{2\pi i k N}{2^\rho}} 2^{\frac{\rho+1}{2}n}\left(\frac{2}{k}\right)^{n(\rho-1)} e^{-\frac{\pi i n}{4}} =$$

$$(9.5.8) \qquad = 1 + \sum_{\rho=2}^{\lambda} 2^{-\frac{(\rho-1)}{2}n}\sum_{k \bmod 2^\rho}{}' \left(\frac{2}{k}\right)^{n(\rho-1)} e^{-\frac{2\pi i k(N-2^{\rho-3}n)}{2^\rho}}.$$

We beperken ons nu weer tot n=6 en n=8.

Voor n=6 is de som over k gelijk nul, tenzij $2^{\rho-1} \mid (N-2^{\rho-3}n)$. Dit kan als $N = 2^\mu M$, met oneven M, alleen gebeuren als $\rho = \mu+2$. Dan vinden we dus

$$2^{-\lambda(n-1)}\,\alpha_n(N,2^\lambda) = 1 + 2^{-3(\mu+1)} \sum_{k \bmod 2^{\mu+2}}{}' e^{\frac{\pi i k}{2}(M-3)} =$$

$$(9.5.9) \qquad = 1 - (\tfrac{-1}{M})2^{-2(\mu+1)}.$$

Voor n=8 vinden we daarentegen

$$2^{-\lambda(n-1)}\,\alpha_n(N,2^\lambda) = 1 + \sum_{\rho=2}^{\lambda} 2^{-4(\rho-1)} \sum_{k \bmod 2^\rho}{}' e^{-\frac{2\pi i k N}{2^\rho}}.$$

De som over k is nul voor $\rho > \mu+1$, is -2^μ voor $\rho = \mu+1$ en is $2^{\rho-1}$ voor $\rho < \mu$.

$$(9.5.10) \quad \begin{cases} 2^{-\lambda(n-1)}\alpha_n(N,2^\lambda) = \frac{1}{7}(8-15.2^{-3\mu}) & \text{als } \mu > 0 \\ = 1 & \text{als } \mu = 0 \end{cases}$$

We vinden dus voor n=6, gebruik makend van (9.5.1), (9,5,3), (9.5.5), (9.5.6) en (9.5.9)

$$r_6(N) = \frac{\pi^3.N^2}{2}.\frac{32}{\pi^3}.(1-(\tfrac{-1}{M})2^{-2\mu-2}).\sum_{d|M}(\tfrac{-1}{d})d^{-2} =$$

$$= 4.\left[2^{2\mu+2} - (\tfrac{-1}{M})\right].(\tfrac{-1}{M}).\sum_{d|M}(\tfrac{-1}{d})\,d^2. \qquad (N = 2^\mu M),$$

en voor n=8, gebruik makend van (9.5.1), (9.5.3), (9.5.5), (9.5.7) en (9.5.10)

$$r_8(N) = \frac{\pi^4 N^3}{6}.\frac{96}{\pi^4}.\frac{1}{7}\left|8 - 15.2^{-3\mu}\right|.\sum_{d|M} d^{-3} =$$

$$= \frac{16}{7}.\left|2^{3\mu+3} - 15\right|.\sum_{d|M} d^3 =$$

$$\begin{cases} = 16\sum_{d|N}(-1)^d d^3 & \text{als N even is,} \\ = 16\sum_{d|N} d^3 & \text{als N oneven is.} \end{cases}$$

De berekening van $r_5(N)$ en $r_7(N)$ kan gebeuren uitgaande van (9.5.4) en (9.5.8). Er zijn geen wezenlijke moeilijkheden meer, alleen worden de resultaten minder overzicht lijk.

6. Litteratuur.

Voor verband vergelijking en congruentie:

C.L. Siegel: Uber die Analytische Theorie der Quadratischen Formen. I, Annals of Math.(2), 36 (1935) pag. 527-606.

Voor paragraaf 2, 3 en 4:

L.E. Dickson: Studies in the Theory of Numbers, Chap. XIII.

Speciaal het geval n=8

G.H. Hardy: Ramanujan, twelve lectures, Chap. IX.

De hier onbewezen formule (9.4.3) is een zeer speciaal geval van

H.D. Kloosterman: The Behaviour of general Theta-functions I, form (3.22) Annals of Math. (2), 47 (1946) pag. 330.