STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 24

Colloquim analytische getallentheorie.

S.C.van Veen.

1953

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

MATHEMATICH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m O.

Colloquium

ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen.
1e Voordracht, 1 October 1952/53

I

Problemen in verband met priemgetallen.

§ 1. Inleiding: De onregelmatige verdeling van de priemgetallen 2,3,5,7,11,13,17... in de rij der natuurlijke getallen heeft sinds lange tijd de aandacht getrokken. Door aftelling uit de tafels der priemgetallen is experimenteel gevonden door Legendre en Gauss, dat de "dichtheid" der priemgetallen in de omgeving van het getal x gemiddeld ongeveer $\frac{1}{\log x}$ is, zodat het aantal priemgetallen $< x$ ongeveer

$$\pi(x) \backsim \frac{x}{\log x}$$

bedraagt. Het heeft tot 1896 geduurd, voor men dit vermoeden van Legendre en Gauss streng heeft bewezen, n.l.:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1. \tag{1}$$

(Stelling der priemgetallen (Hadamard, de la Vallée-Poussin).)
Deze belangrijke stelling zal als uitgangspunt dienen tot tal van andere onderzoekingen op het uitgestrekte gebied der priemgetallen, welke onze aandacht in de loop van deze cursus in beslag zullen nemen.

Als litteratuur wil ik noemen:

E.C.Titchmarsh: The Theory of the Riemann Zeta-function, Oxford 1951.

A.E.Ingham: The distribution of prime numbers, Cambridge Tracts No. 30, Cambridge University Press, 1932.

E.Landau: Vorlesungen über Zahlentheorie II, Leipzig 1927.

T.Esterman: Introduction to Modern Prime Number Theory, Cambridge Tracts No. 41, Cambridge University Press, 1952.

Voor grondige studie, vooral wat betreft de historische ontwikkeling, is het klassieke standaardwerk van Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (twee delen 1909) van onvergankelijke waarde, hoewel hierin uiteraard slechts de resultaten van voor 1909 te vinden zijn.

§ 2. Analytische behandeling van problemen der priemgetallen. Invoering van de Zeta-functie.

Hoe kan men de onregelmatige rij der priemgetallen aan een regelmatig onderzoek onderwerpen? Een verband tussen de rij der priemgetallen en een

regelmatig verlopende functie is reeds ontdekt door Euler (1737), maar eerst volledig uitgebuit door Riemann in 1859 in zijn fundamentele verhandeling "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (Monatsber.d.Preuss.Akad.d.Wissensch. 1859, 1860, 671-680.) Ges.Werke (1^e Aufl. 1876, 136-144, 2^e Aufl. 1892, 145-155).
Dit verband wordt gegeven door:

Stelling I

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\qquad \Re(s)>1. \tag{2}$$

waar het product wordt uitgestrekt over de rij der priemgetallen.

<u>Bewijs</u>:

$$\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\leq N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{N_1^{\,s}}+\frac{1}{N_2^{\,s}}+\ldots\ldots$$

waarin $N_1, N_2\ldots.$ getallen zijn $>N$: <u>Stel $s=\sigma+it$</u> $(\sigma>1)$.

Voor $\Re(s)>1$ is $\left|\frac{1}{N_1^{\,s}}+\frac{1}{N_2^{\,s}}+\ldots\ldots\right|\leq\frac{1}{(N+1)^\sigma}+\frac{1}{(N+2)^\sigma}+\ldots\ldots<$

$$<\int_N^\infty\frac{dx}{x^\sigma}=\frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1}\to 0 \text{ voor } N\to\infty,\ \sigma>1.$$

Dus

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\lim\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}=\zeta(s).\quad(\sigma>1)$$

w.t.b.w.

<u>Opmerking</u>: In het bovenstaande bewijs ligt opgesloten, dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{3}$$

absoluut en gelijkmatig convergeert in het gebied $\sigma\geqslant\sigma_0>1$.
De door (3) rechts van de verticaal $\sigma=1$ gedefinieerde functie stelt dus een in dat halfvlak analytische functie van de complexe veranderlijke s voor. <u>Dit is de beroemde Zeta-functie</u> $\zeta(s)$ <u>van Riemann</u>, waarmede wij ons uitvoerig moeten bezighouden.
Het product $\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ staat bekend als het product van Euler. Voorlopig is deze functie alleen bepaald in een halfvlak. Het is voor de theorie van de priemgetallen van het grootste belang deze functie analytisch voort te zetten, zo mogelijk in het gehele complexe vlak.
Uit (2) kan onmiddellijk voor $\sigma>1$ een verband tussen het aantal priemgetallen $<x=\pi(x)$ en de ζ-functie worden afgeleid.

$$\log\zeta(s)=-\sum_p\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=-\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\pi(n)-\pi(n-1)\right\}\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right)=$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\left\{\pi(n)-\pi(n-1)\right\}\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right)=$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=2}^{N}\pi(n)\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right)-\sum_{n=1}^{N-1}\pi(n)\log\left(1-\frac{1}{(n+1)^s}\right)=\right.$$

$$= -\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=2}^{N}\pi(n)\left\{\log(1-\frac{1}{n^s})-\log(1-\frac{1}{(n+1)^s})\right\}+\pi(N)\log(1-\frac{1}{(N+1)^s})\right]=$$

$$= +\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=2}^{N}\pi(n)\int_n^{n+1}\frac{s\,dx}{x(x^s-1)}-\pi(N)\log(1-\frac{1}{(N+1)^s})\right\}=$$

$$=s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,dx \qquad (\text{wegens } \pi(N)\leq N).$$

Indien het nu mogelijk zou zijn, om uit de integraalvergelijking

$$\log\zeta(s)=s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,dx. \qquad (\sigma>1)$$

de onbekende functie $\pi(x)$ op te lossen, door deze uit te drukken in de bekende functie $\zeta(s)$, zou er veel, ja bijna alles gewonnen zijn.

Dit zal inderdaad mogelijk zijn, nadat wij ons uitvoerig georiënteerd hebben ten aanzien van het gecompliceerde gedrag van $\zeta(s)$ in het complexe vlak. Wij kunnen echter reeds nu de voor het vervolg uiterst belangrijke stelling signaleren:

Stelling II. De functie $\zeta(s)$ bezit geen enkel nulpunt met $\sigma>1$. Dit is een onmiddellijk gevolg van (2), daar alle factoren $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\neq 0$ zijn.

Of $\zeta(s)$ nulpunten bezit, is zonder meer niet uit te maken met behulp van (2). Het zal spoedig blijken, dat dit inderdaad het geval is (uit de aard der zaak met $\sigma\leq 1$). Het zal dan verder blijken, dat het gecompliceerde gedrag der priemgetal-problemen ten nauwste samenhangt met de gecompliceerde verdeling van de complexe nulpunten van $\zeta(s)$.

§ 3. Analytische voortzetting van $\zeta(s)$. Functionaalvergelijking voor $\zeta(s)$.

Het hoofdonderwerp van deze paragraaf is het bewijs, dat $\zeta(s)$ een functie van s is, die analytisch is in het gehele s-vlak, met uitzondering van het punt s=1, waar $\zeta(s)$ een enkelvoudige pool bezit met residu 1. Verder zal blijken dat $\zeta(s)$ voldoet aan de functionaalvergelijking:

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).$$

Van deze stellingen zijn tal van bewijzen gegeven (Titchmarsh vermeldt er een zevental). Wij willen hier volstaan met een der oorspronkelijke eenvoudige bewijzen van Riemann.

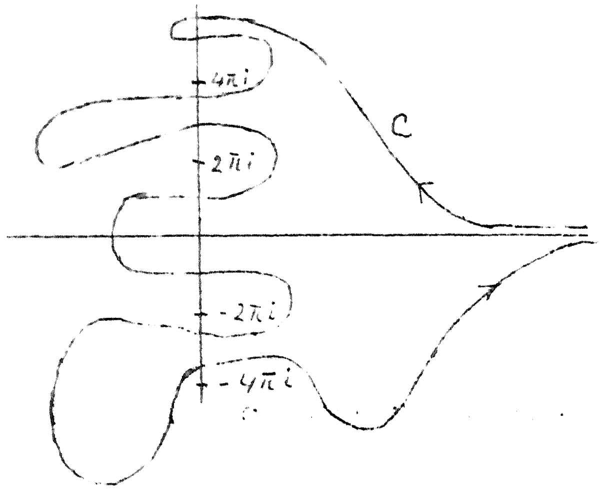
Bewijs:

Voor $\sigma>1$ is $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-mx}\,dx=$

$$=\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\Gamma(s)\zeta(s).$$

Nu beschouwen wij de integraal

$$I(s)=\int_C\frac{z^{s-1}}{e^z-1}\,dz,$$

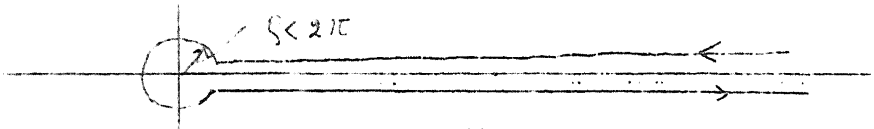


waarin C een contour is, welke begint in $+\infty$, in + richting om 0 loopt, de punten $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$ etc. buitensluit en weer terugkeert naar $+\infty$.

$$z^{s-1}=e^{(s-1)\log z},$$

$\log z$ reëel voor z reëel >0.

Neem eerst voor C de volgende eenvoudige contour



Op de cirkel is $|z^{s-1}|=e^{(\sigma-1)\log\rho - t\arg z} \leq \rho^{s-1}e^{2\pi|t|}$;

voor $|z|<1$ is $|e^z-1|>|z|\left|1-\frac{|z|}{2!}-\frac{|z|^2}{3!}\dots\right|>|z|\left|1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\dots)\right|=\frac{1}{4}|z|$.

Hieruit volgt $\displaystyle\int_{\text{cirkel}} \rightarrow 0$ voor $\rho\rightarrow 0$ als $\sigma>1$.

dus:

$$I(s)=-\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx+\int_0^\infty \frac{(xe^{2\pi i})^{s-1}}{e^x-1}\,dx=(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\zeta(s)=$$

$$=\frac{2\pi i e^{\pi is}}{\Gamma(1-s)}\zeta(s).$$

<u>Dus voor $\sigma>1$</u> is

$$\zeta(s)=\frac{e^{-\pi is}\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}}{e^z-1}\,dz. \qquad (4)$$

De integraal $I(s)$ convergeert gelijkmatig naar s in ieder eindig s-gebied. Zij stelt dus een <u>gehele</u> functie van s voor.

De uitkomst (4) levert dus de analytische voortzetting van $\zeta(s)$ over het gehele s-vlak.

De enig mogelijke singulariteiten zijn de polen van $\Gamma(1-s)$, dus $s=1,2,3\dots$ Wij weten reeds, dat $\zeta(s)$ analytisch is voor $s=2,3,\dots$. (Inderdaad is $I(s)=0$ in deze punten volgens de stelling van Cauchy.)

De enig mogelijke singulariteit is dus een <u>enkelvoudige</u> pool in $s=1$.

$$I(1)=\int_C \frac{dz}{e^z-1}=2\pi i$$

$$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(s)=\lim_{s\to1}-\frac{e^{-i\pi s}(1-s)\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\frac{z^{s-1}}{e^z-1}\,dz=$$

$$=\lim_{s\to1}-\frac{e^{-i\pi s}\Gamma(2-s)}{2\pi i}\int_C\frac{z^{s-1}}{e^z-1}\,dz=-1.$$

Het residu voor $s=1$ is dus 1.

Wegens $\displaystyle\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+B_1\frac{z^2}{2!}-B_2\frac{z^4}{4!}+\dots$ (B_1,B_2 zijn de getallen van Bernoulli)

is

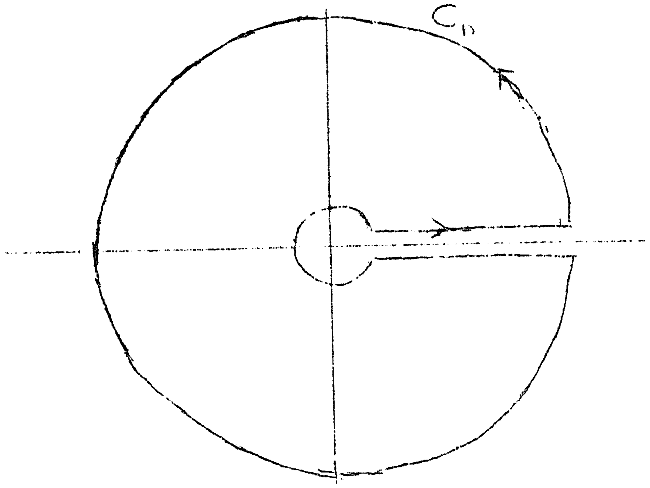
$$\zeta(0)=-\tfrac{1}{2},\quad \zeta(-2m)=0,\quad \zeta(1-2m)=\frac{(-1)^m B_m}{2m}\qquad (m=1,2,\dots).$$

Afleiding van de <u>functionaal-vergelijking</u>.

Neem

$$\int \frac{z^{s-1}dz}{e^z-1}$$

over de volgende contour:



Grote cirkel C_n met straal $(2n+1)\pi$.
De integrand heeft enkelvoudige polen in de punten $z=\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots \pm 2n\pi i$.
De residuen in $2m\pi i$ en $-2m\pi i$ bedragen samengenomen:

$$(2m\pi e^{i\frac{\pi}{2}})^{s-1}+(2m\pi e^{+\frac{3\pi i}{2}})^{s-1}=$$

$$=(2m\pi)^{s-1}e^{i\pi(s-1)}2\cos\frac{\pi}{2}(s-1)=$$

$$=-2(2m\pi)^{s-1}e^{+i\pi s}\sin\frac{s\pi}{2}.$$

$$\int_{C_n} -I(s)=-4\pi i e^{i\pi s}\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(2m\pi)^{s-1}.$$

Neem nu $n\to\infty$ en $\sigma<0$.

Op C_n is $\frac{1}{e^z-1}$ begrensd; $|z^{s-1}|=\{(2n+1)\pi\}^{\sigma-1}e^{-t\varphi}$

$\to 0$ voor $n\to\infty$, dus $\int_{C_n}\to 0$.

$$I(s)=\frac{2\pi i e^{\pi i s}}{\Gamma(1-s)}\zeta(s)=4\pi i e^{\pi i s}\sin\frac{\pi s}{2}\cdot(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s),$$

of

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Deze uitkomst geldt voorlopig voor $\sigma<0$.
Omdat echter linker- en rechterlid analytische functies van s zijn in het gehele complexe s-vlak met uitzondering van het punt s=1 geldt de functionale relatie

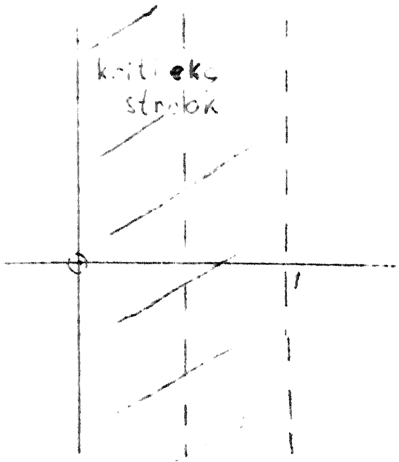
$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\qquad (5)$$

voor alle waarden van s.

<u>Opmerkingen</u>: Wij zagen reeds, dat $\zeta(-2m)=0$. De functie $\zeta(s)$ bezit dus in de eerste plaats de nulpunten $s=-2m$ $(m=1,2,\dots)$. Dit zijn de zgn. <u>triviale</u> nulpunten.
Wij zullen later aantonen, dat de zeta-functie ook nog complexe nulpunten heeft. Deze zijn echter niet zo eenvoudig te localiseren. Voorlopig merken wij op, dat uit (5) volgt voor $\sigma<0$, $s\neq -2m$

$$\zeta(s)\neq 0$$

omdat alle factoren van het rechterlid van (5) dan $\neq 0$ zijn. Alle verdere eventuele nulpunten van $\zeta(s)$ blijven dus beperkt tot de zogenaamde "kritieke strook" $0\leq\sigma\leq 1$. Wij zullen spoedig zien, dat er inderdaad



oneindig vele nulpunten binnen deze strook zijn gelegen en vele overwegingen voeren tot het beroemde nog steeds niet bewezen vermoeden van Riemann, dat al deze nulpunten gelegen zijn op de halveringslijn $\sigma = \frac{1}{2}$.

Met behulp van de bekende "verdubbelingsformule" voor de Γ-functie

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2s)$$

kan (5) worden omgezet in :

$$\zeta(s) = 2^{s}\pi^{s-1}\frac{\pi}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}\;\frac{2^{-s}\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\sqrt{\pi}} = \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(1-s)$$

welke convergeert in de symmetrische gedaante:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\zeta(1-s), \text{ of } g(s)=g(1-s),$$

met

$$g(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s).$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.

Colloquium

A N A L Y T I S C H E   G E T A L L E N T H E O R I E

o.l.v. Prof. dr S.C. van Veen.
2$^{\text{e}}$ Voordracht, 15 October 1952.

II

§ 4. De stelling van Hadamard en de la Vallée-Poussin.

Wij zagen reeds dat $\zeta(s)$ geen nulpunten bezit voor $\sigma > 1$. Wij zullen zien, dat alle verdere successen berusten op het uitbreiden naar links van het gebied, dat vrij van nulpunten is. Het eerste belangrijke resultaat is de volgende stelling van Hadamard en de la Vallée-Poussin (1896).

Stelling III. $\zeta(s)$ bezit geen nulpunten op de rechte $\sigma = 1$.

Bewijs: Het bewijs berust essentieel op de elementaire ongelijkheid

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta = 2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.$$

Voor $\sigma > 1$ is

$$\log\zeta(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

waarin

$$\left.\begin{array}{ll} c_n = \frac{1}{m} & \text{voor } n = m^{\text{de}} \text{ macht van een priemgetal} \\ c_n = 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{array}\right\} \quad 1 \geq c_n \geq 0.$$

$$\log|\zeta(\sigma+it)| = \Re\sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\sigma+it}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n \cos(t\log n)}{n^{\sigma}}$$

$$\log\left|\zeta^3(\sigma).\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\sigma}}\left\{3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\right\} \geq 0$$

of:

$$\left\{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\right\}^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+ti)}{\sigma-1}\right|^4 \left|\zeta(\sigma+2ti)\right| \geq \frac{1}{\sigma-1} \quad (\sigma>1) \tag{1}$$

Stel: $1+ti\ (t \gtrless 0)$ is een nulpunt van $\zeta(s)$.
$\zeta(s)$ analytisch voor $s=1+ti$ en $s=1+2it$, en $\zeta(s)$ bezit een pool van de 1$^{\text{e}}$ orde met residu 1 in $s=1$, dus $\lim\limits_{\sigma\to(1)} (\sigma-1)\zeta(\sigma) = 1$.
Volgens onze veronderstelling gaat (1) over in:

$$\left\{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\right\}^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+ti)-\zeta(1+ti)}{(\sigma+ti)-(1+ti)}\right|^4 \left|\zeta(\sigma+2ti)\right| \geq \frac{1}{\sigma-1}.$$

Nu $\sigma \to 1$. Linkerlid nadert tot de eindige limiet:

$$1.\ |\zeta'(1+ti)|\ .\ |\zeta(1+2ti)|$$

Rechterlid $\to \infty$. Tegenspraak!
Wij zullen spoedig het nulpuntvrije gebied nog iets uitbreiden links van de rechte $\sigma = 1$. Daartoe hebben wij enige schattingen met betrekking tot $\zeta(s)$ en verwante functies nodig.

§ 5. Schattingen en ongelijkheden.

Wij bewijzen eerst:

Stelling IV. Voor iedere willekeurige positieve constante A geldt in het gebied

$$1-\frac{A}{\log t}\leq \sigma \leq 2$$
$$t > e^A > 1$$

gelijkmatig

$$\zeta(s)=O(\log t)$$

d.w.z.

$$|\zeta(s)| < M.\ \log t, \text{ waarin } M \text{ een constant getal is.}$$

Bewijs.

Voor $\sigma>1$ is

$$\zeta(s)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{2}$$

$$s\int_N^\infty \frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx=\sum_{n=N}^{\infty} s\int_n^{n+1}\frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx=\sum_{n=N}^{\infty} s\int_0^1\frac{(\frac{1}{2}-y)dy}{(y+n)^{s+1}}=$$

$$=\sum_{n=N}^{\infty}\left\{-\frac{(\frac{1}{2}-y)}{(y+n)^s}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{dy}{(y+n)^s}\right\}=\sum_{n=N}^{\infty}\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}\right)-\int_N^\infty\frac{dx}{x^s}=$$

$$=\frac{1}{2N^s}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\frac{N^{1-s}}{s-1} \tag{3}$$

Uit (2) en (3) volgt:

$$\zeta(s)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}=s\int_N^\infty\frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx+\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{N^{-s}}{2}\quad(\sigma>1) \tag{4}$$

Linker en rechterlid zijn analytische functies van s voor $\sigma>0$ $(s\neq1)$. Dus door analytische voortzetting geldt voor $\sigma>0$, $t>1$:

$$\zeta(s)-\sum_{1}^{N}\frac{1}{n^s}=O\left(t\int_N^\infty\frac{dx}{x^{\sigma+1}}\right)+O\left(\frac{N^{1-\sigma}}{t}\right)+O(N^{-\sigma}).$$

Kies $N=[t]$, dus $n\leq[t]\leq t$, dan is in het beschouwde gebied $\begin{cases}1-\frac{A}{\log t}\leq\sigma\leq 2\\ t>e^A>1\end{cases}$

$$|n^{-s}|=n^{-\sigma}=e^{-\sigma\log n}\leq e^{-(1-\frac{A}{\log t})\log n}=n^{-1}e^{A\frac{\log n}{\log t}}\leq n^{-1}e^A.$$

$$\zeta(s)=\sum_{1}^{N}O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{t}{\sigma N^\sigma}\right)+O\left(\frac{N^{1-\sigma}}{t}\right)+O(N^{-\sigma})=$$

$$=O(\log N)+O\left(\frac{t}{N}\right)+O\left(\frac{1}{t}\right)+O\left(\frac{1}{t}\right)=O(\log t)+O(1)=O(\log t).$$ w.t.b.w.

Stelling V. In hetzelfde gebied is

$$\zeta'(s)=O(\log^2 t).$$

Bewijs: Uit (4) volgt:

$$\zeta'(s)=-\sum_{2}^{N}\frac{\log n}{n^s}+\int_N^\infty\frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}(1-s\log x)dx-\frac{N^{1-s}\log N}{s-1}-\frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}+\tfrac{1}{2}N^{-s}\log N.$$

$$\zeta'(s)=O\sum^{N}\frac{\log n}{n}+O\left(\int_N^\infty\frac{dx}{x^{\sigma+1}}\right)+O\left(t\int_N^\infty\frac{\log x\,dx}{x^{\sigma+1}}\right)+O\left(\frac{N^{1-\sigma}\log N}{t}\right)+$$

$$\left(\frac{N^{1-\sigma}}{t^2}\right)+O(N^{-\sigma}\log N)=O(\log N)^2+O\left(\frac{N^{-\sigma}}{\sigma}\right)+O\left(\frac{t}{\sigma}\frac{\log N}{N^{\sigma}}\right)+O\left(\frac{N^{1-\sigma}\log N}{t}\right)=O(\log^2 t).$$

gelijkheden.

Voor $2\geqslant\sigma>1$ volgt uit (1):

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|}\leqslant\left\{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\right\}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}\left|\zeta(\sigma+2it)\right|^{\frac{1}{4}}<\frac{M_1\log^{\frac{1}{4}}t}{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}\quad(M_1>0)\qquad(5)$$

Voor $2\geqslant\sigma\geqslant 1-\frac{A}{\log t}$ volgt uit stelling V

$$\left|\zeta(1+it)-\zeta(\sigma+it)\right|=\left|-\int_1^\sigma\zeta'(u+it)du\right|<M_2|\sigma-1|\log^2 t\quad(M_2>0)\qquad(6)$$

Dus voor $2\geqslant\sigma>1$:

$$\left|\zeta(1+it)-\zeta(\sigma+it)\right|<M_2(\sigma-1)\log^2 t.\qquad(6')$$

$$|\zeta(1+it)|=\left|\zeta(\sigma+it)+\left\{\zeta(1+it)-\zeta(\sigma+it)\right\}\right|>$$

$$>\left|\,|\zeta(\sigma+it)|-|\zeta(1+it)-\zeta(\sigma+it)|\,\right|>\frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{M_1\log^{\frac{1}{4}}t}-M_2(\sigma-1)\log^2 t,$$

vegens (5) en (6').).

ies $\sigma=1+k\log^{-9}t$, $0<k<\frac{1}{(M_1M_2)^4}$

$$|\zeta(1+it)|>\left(\frac{k^{\frac{3}{4}}}{M_1}-M_2k\right)\log^{-7}t=M_3\log^{-7}t\quad M_3>0.$$

u volgt uit (6) voor $2>\sigma\geqslant 1-\frac{A}{\log t}$

$$|\zeta(\sigma+it)|=\left|\zeta(1+it)+\left\{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)\right\}\right|>$$

$$>\left|\,|\zeta(1+it)|-|\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)|\,\right|>M_3\log^{-7}t-M_2.\log^2 t(1-\sigma)$$

$$>0 \text{ als } 1-\sigma<\frac{M_3}{M_2}\log^{-9}t.$$

iermede is het belangrijke feit bewezen, dat

$\zeta(s)$ geen nulpunten bezit in het gebied:

$$\sigma>1-\frac{M_3}{M_2}\log^{-9}t.$$

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right|=\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|\text{ is dan }<\frac{\log^7 t}{M_3-M_2\log^9 t(1-\sigma)}.$$

Kies b.v. $\sigma\geqslant 1-\frac{M_3}{2M_2}\log^{-9}t>1-\frac{M_3}{M_2}\log^{-9}t.$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|<\frac{2}{M_3}\log^7 t,\quad\text{dus}\quad\frac{1}{\zeta(s)}=O(\log^7 t)$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=O(\log^9 t).$$

$$\log\zeta(s)=\int_2^\sigma\frac{\zeta'(u+it)}{\zeta(u+it)}du+\log\zeta(2+it)=O(\log^9 t).$$

voor $\sigma\geqslant 1-\frac{M_3}{2M_2}\log^{-9}t.$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam-O.

Colloquium

ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen

3e Voordracht, 29 October 1952.

III

§ 6. Bewijs van de stelling der priemgetallen.

Stelling VI. Wanneer $\pi(x)$ het aantal priemgetallen $\leq x$ voorstelt, dan is voor $x \to \infty$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{1}$$

of

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Bewijs: Het verband tussen $\zeta(s)$ en $\pi(x)$ is in § 2 uitgedrukt door de betrekking

$$\log \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\, dx. \qquad (\sigma > 1) \tag{2}$$

Stel

$$\omega(s) = \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^{s+1}(x^s-1)}\, dx, \tag{3}$$

dan is

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} - \omega(s) = \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^{s+1}}\, dx. \tag{4}$$

De door (3) gedefinieerde functie $\omega(s)$ is meer handelbaar dan $\log \zeta(s)$ in (2), want wegens $\pi(x) \leq x$ convergeert de integraal in (3) gelijkmatig voor $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$, zoals volgt door vergelijking met

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}+\delta}(x^{\frac{1}{2}+\delta}-1)},$$

m.a.w. $\omega(s)$ is analytisch en begrensd in het gebied $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$.
Hetzelfde geldt voor $\omega'(s)$ omdat

$$\omega'(s) = \int_2^\infty \pi(x) \log x . \frac{1-2x^s}{x^{s+1}(x^s-1)^2}\, dx. \tag{5}$$

Voor $\sigma > 1$ volgt uit (4) door differentiatie naar s:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\log \zeta(s)}{s^2} + \omega'(s) = \int_2^\infty \frac{\pi(x) \log x}{x^{s+1}}\, dx.$$

Wij voeren nu in de volgende hulpfuncties:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\log\zeta(s)}{s^2} + \omega'(s) = \varphi(s).$$

$$\int_0^x \frac{\pi(u)\log u}{u}\,du = g(x),$$

dus $g(x) = 0$ voor $x < 2$ (wegens $\pi(u) = 0$ voor $u < 2$),

$$\int_0^x \frac{g(u)}{u}\,du = h(x), \text{ dus } h(x) = 0 \text{ voor } x < 2.$$

$g'(x) = \dfrac{\pi(x)\log x}{x}$ in alle continuiteitspunten $x \neq p$. $g(x)$ continu voor $x > 0$.

$$g(x) = \int_0^x \frac{\pi(u)}{u}\log u\,du = \int_1^x \frac{\pi(u)}{u}\log u\,du < \int_1^x \log u\,du = x\log x - x + 1 < $$
$$< x\log x \quad (x > 1).$$

$$h(x) = \int_1^x \frac{g(u)}{u}\,du < \int_1^x \log u\,du < x\log x.$$

$$\varphi(s) = \int_0^\infty \frac{\pi(x)\log x}{x^{s+1}}\,dx = \int_0^\infty g'(x)x^{-s}ds.$$

Hieruit volgt door partiële integratie:

$$\varphi(s) = s\int_0^\infty g(x)x^{-s-1}dx = s\int_0^\infty h'(x)x^{-s}dx = s^2\int_0^\infty h(x)x^{-s-1}dx$$
$$(\sigma > 1)$$

of

$$\frac{\varphi(1-s)}{(1-s)^2} = \int_0^\infty \frac{h(x)}{x}\,x^{s-1}dx \qquad (\sigma < 0).$$

$h(x)$ is continu en van begrensde variatie in ieder eindig interval, dus $h(x)x^{k-2}$ is absoluut integreerbaar over $(0,\infty)$ voor $k < 0$. Wij beschouwen nu de integraal

$$m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\varphi(1-s)}{(1-s)^2}\,x^{-s}ds \text{ voor } k < 0.$$

Stel $x = e^u$

$$m(e^u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(k+ti)}dt\int_{-\infty}^{+\infty} h(e^v)e^{v(k+ti-1)}dv =$$

$$= \frac{e^{-uk}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(v-u)}e^{vk}\{h(e^v)e^{-v}\}dv. \qquad (6)$$

Omdat

$$h(e^v)e^{v(k-1)} = h(x)x^{k-1}$$

is $h(e^v)e^{v(k-1)}$ absoluut integreerbaar over $(-\infty, +\infty)$ voor $k < 0$. Hier kan dus het integraaltheorema van Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(t-x)}dt$$

(vold.voorw.: $f(t)$ absoluut integreerbaar in $(-\infty,+\infty)$) worden toegepast. Men vindt dan uit (6)

$$m(x) = m(e^u) = e^{-uk}\cdot e^{uk}\cdot h(e^u)e^{-u} = e^{-u}h(e^u) = \frac{h(x)}{x},$$

of

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\varphi(1-s)}{(1-s)^2}\, x^{-s}\, ds \qquad (k < 0)$$

en

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\varphi(s)}{s^2}\, x^s ds, \qquad (c > 1) \tag{7}$$

waardoor nu inderdaad $h(x)$ door $\varphi(s)$ (dus door $\zeta(s)$) is uitgedrukt. De integraal in het rechterlid van (7) convergeert absoluut, omdat

$$\varphi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\log\zeta(s)}{s^2} - \omega'(s)$$

begrensd is voor $\sigma \geqslant 1$, behalve in de omgeving van $s = 1$. Hier is:

$$\varphi(s) = \frac{1}{s-1} + \log\frac{1}{s-1} + \ldots = \frac{1}{s-1} + \psi(s), \tag{8}$$

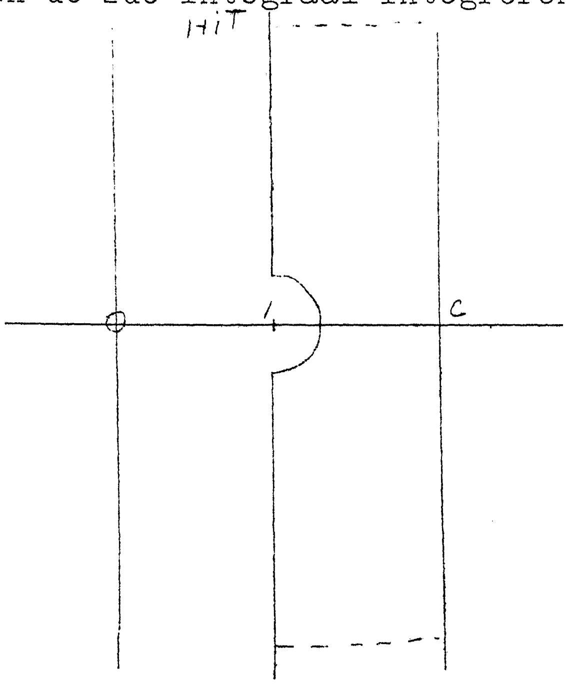
waarin $\psi(s)$ begrensd is in $\sigma \geqslant 1$, $|s-1| \geq 1$, terwijl $\psi(s)$ logarithmisch oneindig wordt voor $s \to 1$. Uit (7) en (8) volgt:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{(s-1)s^2} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\psi(s)}{s^2}\, x^s ds \quad (c>1).$$

De eerste term kan worden bepaald door contourintegratie, en is gelijk aan de som van de residuen en de polen links van $(c-i\infty,\ c+i\infty)$, nl. de polen $s = 0$ en $s = 1$. De som van de residuen is

$$x - \log x - 1.$$

In de 2de integraal integreren wij over de ingetande rechthoek (cirkel



met straal ε om 1). Voor $T \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ vindt men:

$$h(x) = x - \log x - 1 + \frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(1+it)}{(1+it)^2}\, x^{it} dt.$$

$$\frac{h(x)}{x} = 1 - \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(1+it)}{(1+it)^2} e^{it\log x} dt$$

Nu $x \to \infty$.

De laatste integraal nadert dan tot 0, volgens het theorema van Riemann-Lebesgue, dus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = 1.$$

Hieruit kan nu gemakkelijk de stelling der priemgetallen worden afgeleid.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam-O.

Colloquium

ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen
4$^{\text{e}}$ Voordracht, 12 November 1952.

IV

§ 6$^{\text{a}}$. Vervolg bewijs van de stelling der priemgetallen.

Hulpstelling:

Als $f(x) > 0$ en niet-afnemend is, met

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \frac{f(u)}{u}\,du = 1,$$

dan is

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Bewijs:

$$\delta > 0.$$

$$(1-\delta)x < \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt < (1+\delta)x \quad \text{voor} \quad x > x_0(\delta).$$

Voor iedere positieve waarde van ε is dus

$$\int_x^{x(1+\varepsilon)} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_1^{x(1+\varepsilon)} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_1^x \frac{f(u)}{u}\,du < (1+\delta)(1+\varepsilon)x - (1-\delta)$$

$$= (2\delta + \varepsilon + \delta\varepsilon)x. \tag{1}$$

Daar $f(x)$ niet afnemend is, is

$$\int_x^{x(1+\varepsilon)} \frac{f(u)}{u}\,du \geqslant f(x)\int_x^{x(1+\varepsilon)} \frac{du}{u} > f(x)\int_x^{x(1+\varepsilon)} \frac{du}{x(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f(x). \tag{2}$$

Uit (1) en (3) volgt:

$$f(x) < x(1+\varepsilon)\left(1+\delta+\frac{2\delta}{\varepsilon}\right).$$

Neem b.v. $\varepsilon = \sqrt{\delta}$

$$\overline{\lim} \frac{f(x)}{x} \leqslant 1. \tag{3}$$

Analoog:

$$\int_{x(1-\varepsilon)}^x \frac{f(u)}{u}\,du = \int_1^x \frac{f(u)}{u}\,du - \int_1^{x(1-\varepsilon)} \frac{f(u)}{u}\,du > (1-\delta)x - (1+\delta)(1-\varepsilon)x =$$

$$= (\delta\varepsilon - 2\delta + \varepsilon)x \tag{4}$$

$$\int_{x(1-\varepsilon)}^x \frac{f(u)}{u}\,du \leqslant f(x)\int_{x(1-\varepsilon)}^x \frac{du}{u} < f(x)\int_{x(1-\varepsilon)}^x \frac{du}{x(1-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} f(x). \tag{5}$$

Uit (4) en (5) volgt:

$$f(x) > x(1-\varepsilon)\left(1+\delta-\frac{2\delta}{\varepsilon}\right),$$

dus voor $\varepsilon = \sqrt{\delta}$:

$$\underline{\lim}\ \frac{f(x)}{x} \geqslant 1. \tag{6}$$

Uit (3) en (6) volgt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \text{ w.t.b.w.} \tag{7}$$

<u>Slot van het bewijs van de stelling der priemgetallen.</u>

$\underline{\text{I}}$ $\quad h(x) = \int_0^x \frac{g(u)}{u}\, du \quad$ (pag. 9).

Wegens

$$\lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \quad \text{(pag. 10 onderaan)}$$

is

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{g(u)}{u}\, du,$$

dus wegens de hulpstelling:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = 1. \tag{8}$$

$\underline{\text{II}}$ $\quad g(x) = \int_0^x \frac{\pi(u)\log u}{u}\, du \quad$ (pag. 9 bovenaan).

Wegens (8) is

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\pi(u)\log u}{u}\, du = 1,$$

dus wegens de hulpstelling

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1},$$

waarmede de stelling der priemgetallen in haar eenvoudigste formulering is bewezen.

§ 7. <u>Bewijs van de aanwezigheid van oneindig vele niet-triviale nulpunten van $\zeta(s)$ binnen de kritieke strook.</u>

Het bewijs van de existentie van deze nulpunten (Hadamard, de la Vallée-Poussin) is gebaseerd op een aantal eigensschappen van de <u>gehele</u> functies.

<u>Stelling VII</u>. $f(z)$ analytisch in het cirkelgebied $|z-z_0| \leq R$; $f(z_0) \neq 0$. Als $f(z)$ <u>ten minste</u> n nulpunten bezit in $|z-z_0| \leq r < R$, dan is

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leqslant \frac{M}{|f(z_0)|}. \tag{9}$$

Hierin is $M = \max |f(z)|$ op $|z-z_0| = R$.

<u>Bewijs</u>: Zonder beperking nemen wij $z_0 = 0$ (anders $z = z_0 + z'$).

Stel dat $f(z)$ in $|z| \leq r$ de nulpunten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezit (meervoudige nulpunten naar hun veelvoudigheid gerekend). De functie

$$\varphi(z) = f(z) \prod_{m=1}^{n} \frac{R^2 - \bar{a}_m z}{R(z-a_m)} \qquad (\bar{a}_m = \text{toeg. compl. van } a_m)$$

analytisch in $|z| \leq R$. Voor $|z| = R$ is

$$\left| \frac{R^2 - \bar{a}_m z}{R(z-a_m)} \right| = 1, \text{ dus } |\varphi(z)| = |f(z)| \leq M \text{ voor } |z| = R, \text{ dus } |\varphi(0)| \leq M$$

en

$$|f(0)| = |\varphi(0)| \prod_{m=1}^{n} \frac{|a_m|}{R} \leq M(\tfrac{r}{R})^n \quad \text{w.t.b.w.}$$

<u>Stelling VIII</u>. $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n$ analytisch in $|z-z_0| < R$

$$\operatorname{Re} f(z) \leq U \text{ in } |z-z_0| < R. \tag{10}$$

Dan is:

1º. $$|c_n| \leq \frac{2(U - \operatorname{Re} c_0)}{R^n}, \quad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{11}$$

2º. in $|z-z_0| \leq r < R$ is $$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2r}{R-r}\left\{U - \operatorname{Re} f(z_0)\right\}. \tag{12}$$

3º. $$\left|\frac{f^{(m)}(z)}{m!}\right| \leq \frac{2R}{(R-r)^{m+1}}\left\{U - \operatorname{Re} f(z_0)\right\} \; (m=1,2,\ldots). \tag{13}$$

<u>Bewijs</u>: Zonder beperking $z_0 = 0$. Stel

$$\varphi(z) = U - f(z) = U - c_0 - \sum_1^\infty c_n z^n = \sum_0^\infty b_n z^n \quad (|z| < R).$$
$C \equiv$ cirkel $|z| = r < R$.

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{+\pi} (P+iQ)e^{-ni\theta}\, d\theta \quad (n \geq 0) \tag{14}$$

waarin

$$\varphi(re^{i\theta}) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta).$$

Evenzo levert de analytische functie: $\varphi(z)z^{n-1}$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)z^{n-1}dz = \frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(P+iQ)e^{ni\theta}\, d\theta \quad (n \geq 1)$$

dus ook

$$\frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(P-iQ)e^{-ni\theta}\, d\theta = 0. \tag{15}$$

Uit (14) en (15) volgt:

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P e^{-ni\theta}\, d\theta \quad (n \geq 1).$$

Voor $|z| < R$ (dus op C) is $P = U - Rf(z) \geq 0$ (volgens (10)) dus voor $n \geq 1$

$$|b_n| r^n \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P d\theta = 2\operatorname{Re} b_0 \text{ (wegens (14))}.$$

Dus voor $r \to R$:

$$|b_n| R^n \leq 2\operatorname{Re} b_0 = 2\beta_0 = 2(u - \operatorname{Re} c_0) \quad (n \geq 1) \tag{16}$$

waarmede (11) bewezen is. Uit (16) volgt:

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| = \left|\sum_1^\infty b_n z^n\right| \leq \sum_1^\infty 2\beta_0 (\tfrac{r}{R})^n = \frac{2\beta_0 r}{R-r},$$

waarmede (12) bewezen is en voor $m \geq 1$:

$$|\varphi^m(z)| \leq \sum_{n=m}^\infty n(n-1)\ldots(n-m+1)\frac{2\beta_0 r^{n-m}}{R^n} = (\tfrac{d}{dr})^m \frac{2\beta_0 R}{R-r} = \frac{2\beta_0 R.m!}{(R-r)^{m+1}},$$

waarmede (13) bewezen is.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.

Colloquium

A N A L Y T I S C H E   G E T A L L E N T H E O R I E

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen

6$^{\underline{e}}$ Voordracht, 10 December 1952.

VI

§7$^{\underline{a}}$ (Deze paragraaf komt in de plaats van § 7 uit de 4$^{\underline{e}}$ syllabus p.14).

Stelling VII$^{\underline{a}}$ (Stelling van Jensen).

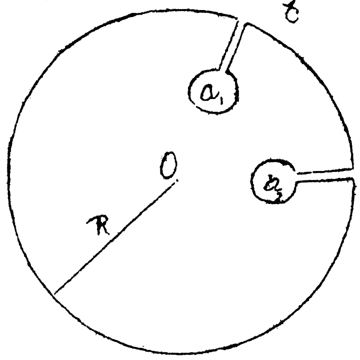
$f(z)$ analytisch in het cirkelgebied $|z| \leqslant R$. $f(0) \neq 0$.

$f(z)$ bezit binnen deze cirkel de nulpunten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (geen nulpunten op de cirkelomtrek).

Dan is:

$$\log |f(0)| + \sum_{k=1}^{m} \log \frac{R}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \, d\varphi .$$

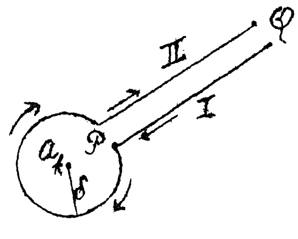
Bewijs: Beschouw $\int_C \frac{\log f(z)}{z} dz$ over de gesloten contour met lusinsnoeringen om de nulpunten.



Binnen en op de rand van het omsloten gebied is $\frac{\log f(z)}{z}$ analytisch, behalve een pool van de 1$^{\underline{e}}$ orde in de oorsprong. Dus:

$$2\pi i \log f(0) = \int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\varphi}) i d\varphi + \sum_{k=1}^{m} \int_{lus_k} . \qquad (1)$$

Beschouw de k$^{\underline{\underline{de}}}$ lus $f(z) = (z-a_k)\varphi(z)$; $\varphi(z) \neq 0$ in omgeving van a_k.



$$\log f(z) = \log \varphi(z) + \log(z-a_k).$$

$$\arg(z-a_k)_{II} = \arg(z-a_k)_I - 2\pi i.$$

Dus:

$$\int_{P_{II}}^{Q} \frac{\log f(z)}{z} dz + \int_{Q_I}^{P} \frac{\log f(z) dz}{z} =$$

$$= \int_{P_{II}}^{Q} \frac{\log f(z)}{z} dz - \int_{P_I}^{Q_I} \frac{\log f(z)}{z} dz = - 2\pi i \int_{P_{II}}^{Q} \frac{dz}{z} = - 2\pi i \log \frac{Q}{P_{II}}.$$

De integraal over de cirkelomtrek is $O(\delta \log \delta) \rightarrow 0$ voor $\delta \rightarrow 0$. Bijdrage k$^{\underline{\underline{de}}}$ lus $= - 2\pi i \log \frac{\alpha_k}{a_k}$ (α_k op omtrek cirkel). Dus uit (1) volgt:

$$\log f(0) = \int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\varphi}) d\varphi - \sum_{k=1}^{m} \log \frac{\alpha_k}{a_k}.$$

Het reële gedeelte van deze gelijkheid levert de stelling van Jensen.

Gevolg:

$$|f(0)| \frac{R^m}{\prod_{k=1}^{m} |a_k|} \leqslant M \text{ (= max van } |f(z)| \text{ op cirkelomtrek).}$$

Als de nulpunten gelegen zijn binnen een cirkel met straal $r < R$ dan is:

$$|f(0)| \leqslant M\left(\frac{r}{R}\right)^m \quad \text{(zie stelling VII).}$$

Hulpstelling (Schwarz):

$f(z)$ analytisch op en binnen de eenheidscirkel. Verder is in dit gebied $|f(z)| \leqslant 1$. Verder is $f(0) = 0$.

Dan is nauwkeuriger:

$$|f(z)| \leqslant |z|.$$

Bewijs: $\frac{f(z)}{z}$ is ook analytisch. Dus $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ bereikt zijn max op de cirkelomtrek. $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant$ max $|f(z)|$ op cirkelomtrek.

$$|f(z)| \leqslant |z|.$$

Stelling VIII$^{\underline{a}}$ (Borel-Hadamard-Carathéodory).

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ analytisch in } |z-z_0| \leqslant R.$$

$$\Re f(z) \leqslant U \text{ in } |z-z_0| \leqslant R. \tag{10}$$

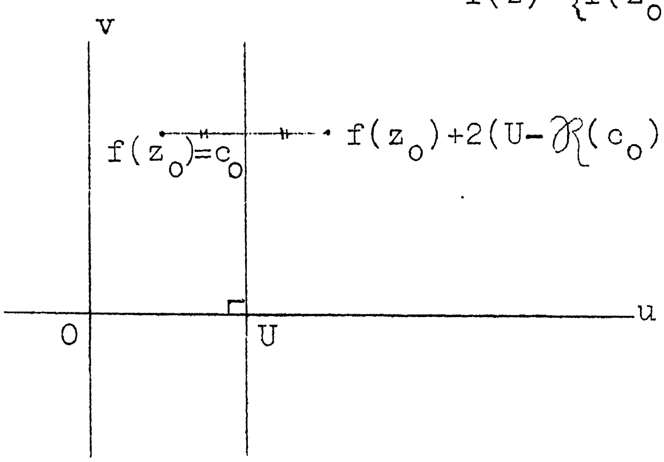
Dan is:

1$^{\underline{o}}$ $$|c_n| \leqslant \frac{2(U-\Re c_0)}{R^n} \quad (n = 1,2,3,\ldots), \tag{11}$$

2$^{\underline{o}}$ in $|z-z_0| \leqslant r < R$ is $$|f(z)-f(z_0)| \leqslant \frac{2r}{R-r}\left\{U-\Re c_0\right\}, \tag{12}$$

3$^{\underline{o}}$ $$\left|\frac{f^{(m)}(z)}{m!}\right| \leqslant \frac{2R}{(R-r)^{m+1}}\left\{U-\Re c_0\right\} \quad (m = 1,2,3,\ldots). \tag{13}$$

Bewijs: Beschouw $$F(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\{f(z_0)+2(U-\Re c_0)\}} \quad (\text{dus } F(z_0) = 0) \tag{14}$$



Wegens $\Re f(z) \leqslant U$ liggen de beeldpunten $f(z)$ links van de rechte $u = U$, dus

$|F(z)| \leqslant 1$ voor $|z-z_0| < R$.

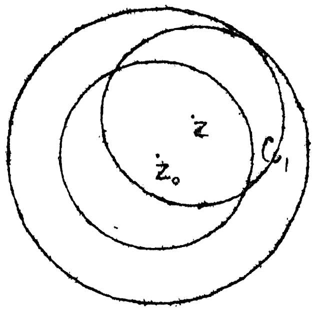
Volgens de stelling van Schwarz is voor $|z-z_0| \leqslant r < R$.

$$\left|\frac{F(z)}{z-z_0}\right| \leqslant \frac{1}{R}.$$

$$|F(z)| \leqslant \frac{r}{R}. \tag{15}$$

Uit (14) en (15) volgt: $|f(z)-f(z_0)| \leqslant \frac{r}{R}|f(z)-f(z_0)| + \frac{2r}{R}(U-\Re c_0)$

of: $|f(r)-f(z_0)| \leqslant \frac{2r}{R-r}(U-\Re c_0)$ (12)



z is willekeurig punt binnen cirkel met straal r om z_o. Beschrijf cirkel C_1 om z, die cirkel met straal R om z_o inwendig raakt.

$$\frac{f^{(m)}(z)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(u)-f(z_o)}{(u-z)^{m+1}}\, du \qquad m = 1,2,3\ldots$$

$$u = z + \left\{ R-|z| \right\} e^{i\varphi} .$$

$$\frac{f^{(m)}(z)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\left\{R-|z|\right\}^m} \int_C i \left\{ f(u)-f(z_o) \right\} e^{-mi\varphi}\, d\varphi \qquad (16)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \overline{\left\{f(u)-f(z_o)\right\}}\, (\overline{u-z})^{m-1}\, d\bar{u} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{R-|z|\right\}^m \int_C i \overline{\left\{f(u)-f(z_o)\right\}}\, e^{-mi\varphi}\, d\varphi . \qquad (17)$$

Uit (16) en (17) volgt:

$$\frac{f^{(m)}(z)}{m!} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left\{R-|z|\right\}^m} \int_C \left[\left\{f(u)-f(z_o)\right\} + \overline{\left\{f(u)-f(z_o)\right\}}\right] e^{-mi\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\left\{R-|z|\right\}^m} \int_C \Re\left\{f(u)-f(z_o)\right\} e^{-mi\varphi} d\varphi$$

$$\left|\frac{f^{(m)}(z)}{m!}\right| < \frac{2}{2\pi\left\{R-|z|\right\}^m} \int_C \left\{U-\Re c_o\right\} d\varphi = \frac{2\left\{U-\Re c_o\right\}}{\left\{R-|z|\right\}^m}.$$

Deze uitkomst is nauwkeuriger dan de te bewijzen uitkomst (13) wegens

$R - |z| \geqslant R - r.$

Dus:

$$\left|\frac{f^{(m)}(z)}{m!}\right| < \frac{2\left\{U-\Re c_o\right\}}{(R-r)^m} < \frac{2R\left\{U-\Re c_o\right\}}{(R-r)^{m+1}} \qquad \text{(zie (13).}$$

Voor z = 0 vinden wij:

$$|c_m| < \left|\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\right| < \frac{2\left\{U-\Re c_o\right\}}{R^m} \qquad (11).$$

§8. Eigenschappen en definities in verband met de theorie der gehele functies.

Wanneer er bij een gehele functie f(z) een getal $A > 0$ bestaat, zodat

$$f(z) = O(e^{r^A}) \quad \text{voor } |z| = r \to \infty,$$

dan heet de functie f(z) van eindige orde (Hadamard). Men noemt

$$\inf\ A = \rho$$

de orde van f(z), d.w.z. voor iedere $\varepsilon > 0$ is $f(z) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}})$ of

$$|f(z)| < K\, e^{r^{\rho+\varepsilon}} \qquad \text{(K i.h.a. afhankelijk van } \varepsilon).$$

Als K onafhankelijk van ε is, dan is $f(z) = O(e^{r^\rho})$.

Voorbeelden:

$$\rho(e^z) = 1, \quad \rho(\cos\sqrt{z}) = \tfrac{1}{2}, \quad \rho(ze^z) = \rho(e^{z \log z}) = 1.$$

Onder $n(r)$ verstaan wij het aantal nulpunten a_k van $f(z)$, waarvoor $|a_k| \leq r$.

Dan is:

$$\int_0^R \frac{n(x)}{x}dx = \int_0^{|a_1|} + \int_{|a_1|}^{|a_2|} + \ldots + \int_{|a_{N-1}|}^{|a_N|} + \int_{|a_N|}^R$$

(als $0 < |a_1| \leq |a_2| \ \ldots \leq |a_N| < R$, de moduli van de nulpunten $< R$ voorstellen). Dus:

$$\int_0^R \frac{n(x)}{x}dx = 1\int_{|a_1|}^{|a_2|} \frac{dx}{x} + 2\int_{|a_2|}^{|a_3|} \frac{dx}{x} + \ldots (N-1)\int_{|a_{N-1}|}^{|a_N|} \frac{dx}{x} + N\int_{|a_N|}^{R} \frac{dx}{x} =$$

$$= -\log|a_1| - \log|a_2| - \log|a_3| \ldots - \log|a_{N-1}| - \log|a_N| + N\log R =$$

$$= \sum_{k=1}^N \log\frac{R}{|a_k|} = \log\frac{R^N}{|a_1.a_2.\ldots.a_N|}.$$

Vergelijking met de uitkomst van de stelling van Jensen (St. VII^a) geeft:

$$\int_0^R \frac{n(x)}{x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|. \tag{18}$$

Stelling IX. Als $f(z)$ is van de orde ρ, dan is $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$.

Bewijs:

$$\log|f(re^{i\theta})| < Kr^{\rho+\varepsilon} \quad (K \text{ slechts afhankelijk van } \varepsilon).$$

Wegens (18) is:

$$\int_0^{2r} \frac{n(x)}{x}dx < K\,r^{\rho+\varepsilon}.$$

$n(r)$ niet-afnemend $\rightarrow \displaystyle\int_r^{2r} \frac{n(x)}{x}dx \geq n(r)\int_r^{2r}\frac{dx}{x} = n(r)\log 2$ dus

$$n(r) \leq \frac{1}{\log 2}\int_0^{2r} \frac{n(x)}{x}dx < \bar{K}\,r^{\rho+\varepsilon} \qquad \text{w.t.b.w.}$$

Ruw gezegd: hoe hoger de orde, hoe meer nulpunten mogelijk.

Stelling X. Voor $\alpha > \rho$ is $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\alpha}$ convergent.

Bewijs: voor $\alpha > \beta > \rho$ is $n(r) < Ar^\beta$
of $n < A|a_n|^\beta$.

$$|a_n|^{-\alpha} < A^{\frac{\alpha}{\beta}}\, n^{-\frac{\alpha}{\beta}} \text{ dus } \sum |a_n|^{-\alpha} \text{ convergeert.}$$

Definitie Men noemt $\rho_1 = \inf \alpha$ (voor alle positieve getallen α waarvoor $\sum|a_n|^{-\alpha}$ convergeert) de convergentie-exponent van de nulpunten.

Uit het bovenbewezene volgt:

$$\rho_1 \leq \rho$$

Soms geldt het $<$ teken, b.v. $f(z) = e^z$, $\rho = 1$; geen nulpunten dus $\rho_1 = 0$.

Stellen wij:

$$E(u,0) = 1-u$$

$$E(u,p) = (1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\dots+\frac{u^p}{p}} \qquad (p = 1,2,\dots) \qquad \text{(primaire factoren)}$$

dan is het product:

$$\prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_n},p)$$

convergent voor alle waarden van z als $p+1 > \rho_1$, want dan is

$$\sum \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p+1}$$

convergent. Dit geldt a fortiori, als $p+1 > \rho$. Het kleinste gehele getal p, waarvoor $\sum \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p+1}$ convergeert heet het geslacht van f(z).

Als ρ_1 niet geheel is, dan is $p = [\rho_1]$,

als ρ_1 geheel is, dan is $\begin{cases} p = \rho_1 & \text{als } \sum |a_n|^{-\rho_1} \text{ divergent is.} \\ p = \rho_1 - 1 & \text{" } \quad \text{" } \quad \text{convergent ".} \end{cases}$

Onder alle omstandigheden is: $p \leqslant \rho_1 \leqslant \rho$.

Stelling XI. Het factorisatietheorema van Weierstrass-Hadamard.

f(z) is een gehele functie van eindige orde ρ met nulpunten $a_1, a_2, \dots$; $f(0) \neq 0$.

Dan is:

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_n},p),$$

waarin Q(z) een veelterm is van graad $\leqslant \rho$.

Bewijs. (Landau M.Z. 26(1927) 170-175):

$$\nu = [\rho] \quad \text{dus} \quad p \leqslant \nu .$$

$$(\frac{d}{dz})^{\nu} \left\{ \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} = Q^{(\nu+1)}(z) - \nu ! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n-z)^{\nu+1}}.$$

Wij zullen bewijzen: $Q^{(\nu+1)}(z) = 0$.

Stel:

$$g_R(z) = \frac{f(z)}{f(0)} \prod_{|a_n| \leqslant R} (1-\frac{z}{a_n})^{-1}.$$

Voor $|z| = 2R$, $|a_n| \leqslant R$ is $\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \geqslant 1$ dus

$$|g_R(z)| \leqslant \left|\frac{f(z)}{f(0)}\right| = O(e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}}). \tag{19}$$

Dit geldt dus ook voor $|z| < 2R$.

$h_R(z) = \log g_R(z)$ (met $h_R(0) = 0$); $h_R(z)$ analytisch voor $|z| \leqslant R$.

Wegens (19) is $\Re\{h_R(z)\} < K R^{\rho+\varepsilon}$, dus wegens stelling VIII^{a} (omdat $h_R(z)$ analytisch is voor $|z| \leqslant R$):

$$h_R^{(\nu+1)}(z) \leqslant \frac{2R(\nu+1)!}{(R-r)^{\nu+2}} K R^{\rho+\varepsilon} \quad \text{voor } |z| = r < R.$$

Dus voor $|z| = \frac{R}{2}$:

$$h_R^{(\nu+1)}(z) = O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}).$$

Dus:

$$Q^{(\nu+1)}(z) = h_R^{(\nu+1)}(z) + \nu! \sum_{|a_n|>R} \frac{1}{(a_n-z)^{\nu+1}} =$$

$$= O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}) + O(\sum_{|a_n|>R} |a_n|^{-\nu-1})$$

voor $|z| = \frac{R}{2}$, dus ook voor $|z| < \frac{R}{2}$.

Wegens $\nu+1 > \rho$ zal de 1^e term $\to 0$ naderen voor $R \to \infty$, ook de 2^e term $\to 0$, omdat $\sum \frac{1}{|a_n|^{\nu+1}}$ convergeert.

De linkerkant is onafhankelijk van R, dus Q(z) is een veelterm van graad $\leqslant \rho$.

<u>Stelling XII</u>. Voor een kanoniek **product** geldt: $\rho_1 = \rho$ (dus de orde = = de convergentie-exponent).

Bewijs: Wij weten reeds, dat voor iedere functie $\rho_1 \leqslant \rho$. Dus wij moeten nog bewijzen, dat voor een kanoniek product P(z) geldt: $\rho \leqslant \rho_1$.

$$\log|P(z)| = \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|E(\tfrac{z}{a_n},p)\right| + \sum_{r_n > kr} \log\left|E(\tfrac{z}{a_n},p)\right| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

waarin $r_n = |a_n|$, $r = |z|$, k is een reële constante > 1.

Voor $\sum_2$ geldt (wegens $\frac{r}{r_n} < \frac{1}{k} < 1$):

$$\log\left|E(\tfrac{z}{a_n},p)\right| \leqslant \left|\log E(\tfrac{z}{a_n},p)\right| < \frac{1}{p+1}(\frac{r}{r_n})^{p+1} + \frac{1}{p+2}(\frac{r}{r_n})^{p+2} + \ldots =$$

$$= O\left\{r^{p+1} \frac{1}{(r_n)^{p+1}}\right\}, \text{ dus } \sum\nolimits_2 = O\left\{r^{p+1} \sum_{r_n > kr} \frac{1}{r_n^{p+1}}\right\}.$$

Dus als $p = \rho_1 - 1$, dan is $\sum_2 = O(r^{p+1}) = O(r^{\rho_1})$. In alle andere gevallen is $\rho_1 + \varepsilon < p+1$, als ε klein genoeg is.

$$r^{p+1} \sum_{r_n > kr} r_n^{-p-1} = r^{p+1} \sum_{r_n > kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p-1} \, r_n^{-\rho_1-\varepsilon} <$$

$$< r^{p+1}(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p-1} \sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

Voor $\sum_1$ geldt: $|u| = \left|\frac{r}{r_n}\right| \geqslant \frac{1}{k}$, dus:

$$\log\left|E(u,p)\right| \leqslant \log(1+|u|) + \frac{|u|}{1} + \frac{|u|^2}{2} + \ldots + \frac{|u|^p}{p} < K|u|^p$$

(K is slechts afhankelijk van k), dus

$$\sum\nolimits_1 < O(r^p \sum_{r_n \leqslant kr} r_n^{-p}) = O(r^p \sum_{r_n \leqslant kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p} \, r_n^{-\rho_1-\varepsilon}) =$$

$$= O\left\{r^p (kr)^{\rho_1+\varepsilon-p} \sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right\} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

Dus $\log|P(z)| < O(r^{\rho_1+\varepsilon})$ voor iedere $\varepsilon > 0$. Hiermede is het gevraagde resultaat bewezen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A M S T E R D A M - O.

Colloquium

ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen
7ᵉ Voordracht, 7 Januari 1953,
8ᵉ Voordracht, 21 Januari 1953.
VII en VIII

Stelling XIII. Als $\rho \neq$ geheel getal, dan is $\rho_1 = \rho$.
Bewijs: Onder alle omstandigheden is $\rho_1 \leq \rho$ (St. X). Veronderstel dat $\rho_1 < \rho$. Dan is P(z) van de orde ρ_1 (St. XII) dus van een orde $< \rho$. Als Q(z) een veelterm is van de graad q, dan is $e^{Q(z)}$ van de orde q en $q \leq \rho$ (St. XI) en in dit geval is $q < \rho$, omdat q geheel is, en ρ niet. $f(z) = e^{Q(z)}P(z)$, waarin de orde van $e^{Q(z)}$ en ook die van $P(z) < \rho$ is. Hieruit volgt: f(z) is van een orde $< \rho$ (Contradictie) dus $\rho_1 = \rho$.
Gevolg: Wanneer de orde van een gehele functie niet geheel is, dan moet die functie oneindig veel nulpunten bezitten, want dan is orde $P(z) >$ $>$ orde $e^{Q(z)} \geq 0$ (want orde $e^{Q(z)} = q$ (geheel)), dus $\rho_1 > 0$, d.w.z. er zijn oneindig veel nulpunten. Als de orde geheel is, dan kan P(z) een veelterm of een constante voorstellen en de orde wordt bepaald door $e^{Q(z)}$. In elk geval, omdat P(z) van de orde ρ_1 is en $e^{Q(z)}$ van de orde q, geldt

$$\rho = \max(q, \rho_1).$$

Wij zullen nu deze algemene stellingen over gehele functies toepassen op het bijzondere geval van de ζ-functie van Riemann. De ζ-functie is echter niet geheel (pool van de 1ᵉ orde voor s = 1). De vroeger daaruit afgeleide functie

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s)$$

is wel geheel, en deze voldoet aan de functionale relatie

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

Stelling XIV. De gehele functies

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) \tag{21}$$

en

$$\Xi(z) = \xi(\tfrac{1}{2} + iz) \tag{22}$$

zijn van de orde 1.
Bewijs:

$$\left|\Gamma(\tfrac{s}{2})\right| = \left|\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{s}{2}-1}du\right| \leq \int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{\sigma}{2}-1}du = \Gamma(\tfrac{\sigma}{2}) = O(e^{A\sigma\log\sigma}) \quad (\sigma > 0)$$

(onder toepassing van $\log\Gamma(\frac{\sigma}{2}) = (\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2})\log\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} + O(1)$).

Volgens (4) (pag. 8) geldt voor $\sigma > 0,\ t > 1$ met $N = 1$

$$\zeta(s) = 1 + s\int_1^\infty \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}\,dx + \frac{1}{s-1} - \tfrac{1}{2}.$$

Dus voor $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|s-1| > A$:

$$\zeta(s) = O(|s|\int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}) + O(1) = O|s|\ .$$

Dus voor $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$; $|s| > 1$ volgt uit (21)

$$\xi(s) = O(e^{A|s|\log|s|}) = O(e^{|s|^{1+\varepsilon}}).$$

Wegens $\xi(s) = \xi(1-s)$ geldt deze uitkomst ook voor $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$, dus algemeen.
Dus Orde van $\xi(s) \leqslant 1$.
Dat de orde precies $= 1$ volgt uit het feit, dat voor reële waarden van s voor $s \longrightarrow \infty$

$$\log\zeta(s) \sim 2^{-s},\quad \log\xi(s) \sim \frac{s}{2}\log s.$$

Wegens (22) is dus ook:

$$\Xi(z) = O(e^{A|z|\log|z|}) \qquad (|z| > A)$$

en $\Xi(z)$ is van de orde 1. Wegens

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

is

$$\Xi(z) = \Xi(-z)$$

dus $\Xi(z)$ is een even gehele functie en $\Xi(\sqrt{z})$ is ook een gehele functie van de orde $\frac{1}{2}$.

Wegens het gevolg van St. XIII heeft $\Xi(\sqrt{z}) = \xi(\frac{1}{2} + i\sqrt{z})$ dus oneindig veel nulpunten, waarvan de convergentie-exponent $= 1$. Dus ook $\xi(s)$ heeft oneindig vele nulpunten. $\xi(s)$ bevat niet meer de triviale nulpunten $-2, -4, -6$ van $\zeta(s)$. Deze zijn geëlimineerd door de vermenigvuldiging met $\Gamma(\frac{s}{2})$. $\xi(s)$ bevat (evenmin als $\zeta(s)$) nulpunten voor $\sigma > 1$, dus ook niet voor $\sigma < 0$. Alle nulpunten van $\xi(s)$ (oneindig in aantal), dus ook alle niet-triviale nulpunten van $\zeta(s)$ liggen in de strook $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Uit het voorgaande volgt, dat ze complex zijn, en oneindig in aantal. (Er liggen geen nulpunten op de reële as op $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, zoals volgt uit

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \ldots > 0 \text{ voor } 0 < s < 1.)$$

Gevolg: Voor $\Xi(\sqrt{z})$ geldt $\rho_1 = \rho = \frac{1}{2}$ (St. XIII), dus

$$p = [\rho_1] = 0 \quad \text{(p. 20)}.$$

De nulpunten van $\Xi(\sqrt{z})$ (b.v. $b_1, b_2, \ldots$) leveren dus de convergente reeks $\sum \frac{1}{|b_n|}^{p+1} = \sum \frac{1}{|b_n|^1}$, dus de reeks van de niet triviale nulpunten a_k van $\zeta(s)$ $\left\{a_k = \frac{1}{2} + i\sqrt{b_k}\right\}$ levert de convergente reeks

$$\sum \frac{1}{|a_k|^2}.$$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.

Colloquium

ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen
9$^{\text{e}}$ Voordracht, 4 Februari 1953
10$^{\text{e}}$ Voordracht, 18 Februari 1953.
IX en X

Het factorisatietheorema van Hadamard-Weierstrass voor de ζ functie.

Stelling XV.
$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}e^{b_0 s}\prod_\rho\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}} \qquad (b_0 \text{ constant}) \tag{23}$$
en
$$\zeta(s) = \frac{e^{bs}}{2(s-1)\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\prod_\rho\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}} \qquad (b = b_0+\tfrac{1}{2}\log\pi), \tag{24}$$
waarin de producten zich uitstrekken over alle complexe nulpunten van $\zeta(s)$.

Bewijs: Daar de orde van $\xi(s)$ (en ook van $\zeta(s)$) $= 1$, is
$$\xi(s) = e^{Q(s)}\prod_\rho\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}},$$
waarin $Q(s)$ een veelterm is van de graad ≤ 1. Dus
$$Q(s) = a+b_0 s \quad \text{met} \quad e^a = \xi(0) = -\zeta(0) = \tfrac{1}{2},$$
waarmede (23) bewezen is. (24) volgt uit (23) met behulp van de functionaal-relatie (21) (voorgaande syllabus, p. 22).

Gevolg: (24) kan onmiddellijk worden herleid tot
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} + \sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) \tag{25}$$
dus voor $s \to 0$
$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = b + 1 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}. \tag{26}$$
De functionaal-relatie
$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$
levert
$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log 2\pi - \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \tag{27}$$
In de omgeving van s=1 geldt
$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}(1-s) = -\frac{1}{s-1} + O(|s-1|)$$
$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + O(|s-1|) = -C + O(|s-1|) \quad (C = \text{const.v.Eul}$$
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + C + O(|s-1|).$$

Neem in (34) (<u>voorlopig</u>) $1 < \sigma \leq 2$; $|t| > a_1$, dan volgt uit de definitie (33)

$$\Re(3g(\sigma)+4g(\sigma+ti)+g(\sigma+2ti)) < \frac{3}{\sigma-1} + A_1 \log(|t|+2). \qquad (35)$$

Anderzijds geldt voor $s = \sigma$, $s = \sigma+ti$, $s = \sigma+2ti$:

$$\Re f(s) = \sum_\rho \Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) = \sum_\rho \left(\frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2} + \frac{\beta}{|\rho|^2}\right) > \frac{\sigma-\beta_0}{|s-\rho_0|^2} > 0,$$

waarin $\rho = \beta + \gamma i$, terwijl $\rho_0 = \beta_0 + \gamma_0 i$ een willekeurig gekozen nulpunt is. Dus

$$\Re(3f(\sigma)+4f(\sigma+ti)+f(\sigma+2ti)) > \frac{4(\sigma-\beta_0)}{(\sigma-\beta_0)^2+(t-\gamma_0)^2}. \qquad (36)$$

Uit (36), (34) en (35) volgt:

$$\frac{4(\sigma-\beta_0)}{(\sigma-\beta_0)^2+(t-\gamma_0)^2} < \frac{3}{\sigma-1} + A_1 \log(|t|+2). \quad 1<\sigma\leq 2;\ |t|>a_1 \qquad (37)$$

De beperking $\sigma \leq 2$ kan nu worden opgegeven, onder eventuele vergroting van A_1, omdat het linkerlid $\leq \frac{4}{\sigma-\beta_0} < 4$ voor $\sigma > 2$. Kies in (37)

$$t = \gamma_0.$$

Onder weglating van de index 0 gaat (37) over in

$$\frac{4}{\sigma-\beta} - \frac{3}{\sigma-1} < A_2 \log(|\gamma|+2), \qquad (\sigma > 1) \qquad (38)$$

waarin $\rho = \beta + \gamma i$ een willekeurig nulpunt met $|\gamma| > a_1$ betekent. Uit (38) volgt ten eerste

$$\beta < 1.$$

Want als $\beta = 1$ zou zijn, dan zou het linkerlid $\to \infty$ voor $\sigma \to 1+0$. Dus voor ieder $\sigma > 1$ kan geschreven worden $\sigma = 1 + \lambda(1-\beta)$ met $\lambda > 0$, waardoor (38) overgaat in

$$\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{4}{1+\lambda} - \frac{3}{\lambda}\right) < A_2 \log(|\gamma|+2). \qquad (\lambda > 0)$$

Voor $\lambda > 3$ is het linkerlid > 0, i.h.b. $\lambda = 4$ geeft

$$\frac{1}{1-\beta} < 20\, A_2 \log(|\gamma|+2)$$

of

$$\beta < 1 - \frac{1}{20\, A_2 \log(|\gamma|+2)} \leq 1 - \frac{a}{\log(|\gamma|+2)}$$

met

$$a = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{20\, A_2}, a_1 \log 2\right),$$

w.t.b.w.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - 0.

Colloquium

ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen

11$^{\underline{e}}$ Voordracht, 4 Maart 1953

XI

Stelling XVII. Wanneer a het getal is uit stelling XVI (begrenzing van het nulpuntvrije gebied $\sigma > 1 - \frac{a}{\log(|t|+2)}$) dan geldt voor ieder positief getal $b < a$ voor $t \geqslant t_0 \geqslant 3$ in het gebied $\sigma > 1 - \frac{b}{\log(|t|+2)}$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c \log^3 t.$$

Bewijs: Schakel tussen b en a 2 getallen b_1 en b_2 in, dus $b < b_1 < b_2 < a$. Voor $\sigma > 1$ geldt

$$\log \zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}}.$$

$\log \zeta(s)$ is analytisch in $t \geqslant t_0$; $1 \geqslant \sigma > 1 - \frac{a}{\log(|t|+2)}$. Kies 2 concentrische cirkels met middelpunt

$$s_0 = 2 + (|t|+2)i$$

en stralen

$$R = 1 + \frac{b_2}{\log(|t|+2)} \quad \text{en} \quad r = 1 + \frac{b_1}{\log(|t|+2)}.$$

Als t groot genoeg wordt gekozen, liggen beide cirkels in het nulpuntvrije gebied $\sigma > 1 - \frac{a}{\log(|t|+2)}$. Want

$$|t| + 1 - \frac{b_2}{\log(|t|+2)} \leqslant v \leqslant |t| + 3 + \frac{b_2}{\log(|t|+2)}$$

$$u \geqslant 1 - \frac{b_2}{\log(|t|+2)}, \tag{1}$$

waarin u+iv een willekeurig punt van de grootste cirkel $|s-s_0| \leqslant R$ voorstelt. Voor voldoend grote t $(t \geqslant t_1)$ is het rechterlid van (1) zeker

$$> 1 - \frac{a}{\log\left(|t| + 3 + \frac{b_2}{\log(|t|+2)}\right)}$$

Vroeger is bewezen (stelling IV), dat in hetzelfde gebied geldt

$$|\zeta(s)| = O\left\{\log(|t|+2)\right\} < c_1 \log(|t|+2)$$

$$\mathcal{R}\left\{\log \zeta(s)\right\} = \log|\zeta(s)| < \log c_1 + \log \log(|t|+2)$$
$$< c_2 \log \log(|t|+2)$$

dus

$$\zeta(s_0) = \zeta\left\{2 + (|t|+2)i\right\} \text{ is begrensd} \neq 0,$$

$$\mathcal{R}\left\{\log \zeta(s_0)\right\} = c_3.$$

Pas nu de ongelijkheid van Borel-Hadamard-Carathéodory toe (stelling VIII$^{\underline{a}}$). Voor $|s-s_0| \leqslant r < R$ geldt

$$\left|\frac{d}{ds} \log \zeta(s)\right| \leqslant \frac{2R}{(R-r)^2}\left\{c_2 \log \log(|t|+2) + c_3\right\} =$$

$$= \frac{2 \log(|t|+2)\left\{\log(|t|+2)+b_2\right\}\left\{c_2 \log \log(|t|+2)+c_3\right\}}{(b_2-b_1)^2} < c \log^3 t.$$

Deze ongelijkheid geldt i.h.b. op de horizontale straal van de cirkel, aan de linkerzijde. Rechts van s_o geldt de ongelijkheid vanzelfsprekend, wegens

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} = k < \log^3 t \text{ voor } t \text{ groot genoeg, w.t.b.w.}$$

Wij zijn nu gereed om met de ζ-functie de kritieke strook binnen te treden.

Stelling XVIII. $\displaystyle\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log \frac{x}{n} = x + O(xe^{-\alpha_1 \sqrt{\log x}})$

(de getallen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zijn eindige positieve getallen).

Bewijs: Voor $\sigma > 1$ is

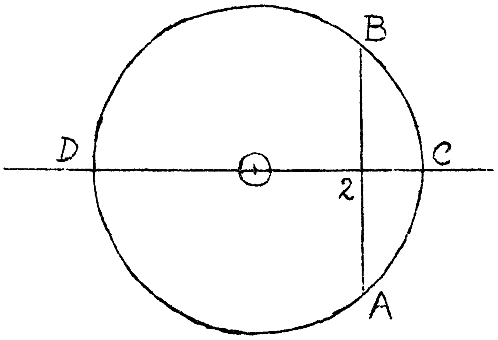
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Voor $\sigma = 2$ is de absolute waarde van de algemene term van het rechterlid $\leq \frac{\Lambda(n)}{n^2}$, dus de reeks rechts convergeert dan absoluut. Beschouw

$$-\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = +\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\, ds =$$

$$= +\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2}\, ds \qquad (2)$$

(verwisseling integratie en sommatie geoorloofd wegens $\left|\frac{x^s}{s^2}\right|_{2+\infty i} = \frac{x^2}{4+t^2}$ terwijl $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{4+t^2}$ convergeert). De bekende integraal $\int_{2-\infty i} \frac{e^{sa}}{s^2}\, ds$ (a reëel)



wordt gevonden door contourintegratie. Neem een cirkel met straal R om 0 ($R \to \infty$). Enige singulariteit is pool van de 2^e orde in 0 met residu $\underline{a}$. Voor $a < 0$ is langs de boog ACB

$$\left|\frac{e^{sa}}{s^2}\right| = \frac{e^{R\cos\varphi\, a}}{R^2} < \frac{e^{2a}}{R^2} < \frac{1}{R^2}.$$

De stelling van Cauchy levert:

$$\int_{\text{rechte AB}} \frac{e^{sa}}{s^2}\, ds = \int_{\text{boog AB}} \frac{e^{sa}}{s^2}\, ds \to 0 \quad \text{als } R \to \infty.$$

Voor $a \geq 0$ nemen wij de boog ADB. Daar langs is

$$\left|\frac{e^{sa}}{s^2}\right| = \frac{e^{R\cos\varphi\, a}}{R^2} < \frac{e^{2a}}{R^2}.$$

Stelling van Cauchy geeft:

$$\int_{\text{rechte AB}} + \int_{\text{boog BDA}} = 2\pi i a,$$

dus voor $R \to \infty$

$$\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{e^{sa}}{s^2}\, ds = 2\pi i a \qquad (a \geq 0).$$

Stel in (2)

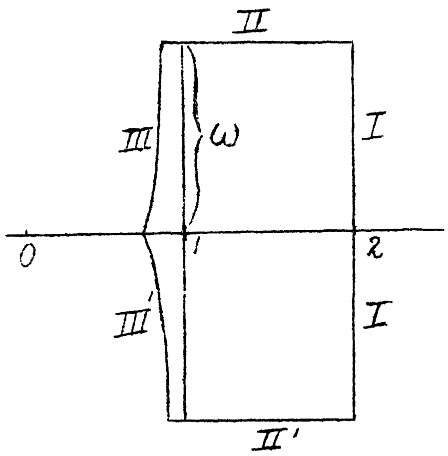
$$\frac{x}{n} = e^{a} \qquad a = \log\frac{x}{n}$$

$$\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{s}}{s^{2}}\, ds = 2\pi i \log\frac{x}{n} \qquad (x \leq n).$$
$$= 0 \qquad (x > n).$$

Uit (2) volgt dus

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \log\frac{x}{n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s}}{s^{2}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds.$$

De laatste integraal wordt nu onder gebruikmaking van de stelling van Cauchy zover mogelijk binnen het kritieke gebied gelegd, zonder de nulpunten te overschrijden.



III en III' worden bepaald door

$$\sigma = 1 - \frac{b}{\log(|t|+2)} \quad \text{(b uit st. XVII).}$$

Op de rechte stukken II en II' is

$$\left|\frac{x^{s}}{s^{2}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < \frac{x^{2}}{\omega^{2}} \log^{3}|\omega| \quad \text{(st. XVII).}$$

De weglengte is < 2, dus de bijdrage van de contourintegralen over II en II' $\to 0$ als $\omega \to \infty$.

Op de stukken III en III' is

$$\left|\frac{x^{s}}{s^{2}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds\right| < \frac{x^{1-\frac{b}{\log(|t|+2)}}}{t^{2}+\frac{1}{4}}\, c_{1} \log^{3} t \left|\frac{b}{\{|t|+2\}\log^{2}(|t|+2)} + 1\right| dt <$$

$$< \frac{c_{2} \log^{3} t}{t^{2}+\frac{1}{4}}\, x\, e^{-\frac{b \log x}{\log(|t|+2)}} <$$

$$< \frac{c_{2} \log^{3} t \{|t|+2\}^{\frac{1}{2}}}{t^{2}+\frac{1}{4}}\, x\, e^{-\frac{b\log x}{\log(|t|+2)} - \frac{\log(|t|+2)}{2}} =$$

$$= c_{2} x \frac{\log^{3} t\, \{|t|+2\}^{\frac{1}{2}}}{t^{2}+\frac{1}{4}}\, e^{-\left(\frac{b^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} x}{\log^{\frac{1}{2}}(|t|+2)} - \frac{\log^{\frac{1}{2}}(|t|+2)}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{2} - \sqrt{2b \log x}} <$$

$$< c_{2} x\, e^{-\sqrt{2b \log x}}\, \frac{\log^{3} t\, \{|t|+2\}^{\frac{1}{2}}}{t^{2}+\frac{1}{4}}.$$

Dus

$$\left|\int_{III} + \int_{III'}\right| < 2c_{2} x\, e^{-\sqrt{2b\log x}} \int_{0}^{\infty} \frac{\log^{3} t\, \{|t|+2\}^{\frac{1}{2}}}{t^{2}+\frac{1}{4}}\, dt$$

de laatste integraal convergeert, dus

$$\left|\int_{III} + \int_{III'}\right| = O(x e^{-\sqrt{2b \log x}}),$$

dus

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^{s}}{s^{2}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \log\frac{x}{n} =$$

$$= x + O(x e^{-\sqrt{2b \log x}}), \qquad \text{w.t.b.w.}$$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam-O.

Colloquium
ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof. Dr S.C. van Veen
12^e Voordracht, 18 Maart 1953

XII

Stelling XIX. $$\sum_{p\leq x} \log p \log \frac{x}{p} = x + O(x.e^{-a_1\sqrt{\log x}}) \tag{1}$$

Bewijs: Volgens definitie is

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\log \frac{x}{n} = \sum_{p\leq x} \log p \log \frac{x}{p} + \sum_{\substack{p^m\leq x\\ m>1}} \log p \log \frac{x}{p^m}.$$

In de laatste som

$$\sum_{\substack{p^m\leq x\\ m>1}} \log p \log \frac{x}{p^m}$$

is iedere term $< \log x \log x = \log^2 x$. Deze som is dus

$$\leq \log^2 x \sum_{p\leq x^{\frac{1}{m}}} \sum_{m\leq \frac{\log x}{\log p}} 1 \leq \sum_{p\leq x^{\frac{1}{m}}} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log^2 x \leq$$

$$\leq \frac{\log x}{\log 2} \log^2 x\, \pi(x^{\frac{1}{m}}) \leq \frac{\log^3 x}{\log 2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) < \frac{\log^3 x\sqrt{x}}{\log 2} = O(\sqrt{x}\log^3 x).$$

Volgens stelling XVIII is dus

$$\sum_{p\leq x}\log p \log \frac{x}{p} = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\log \frac{x}{n} - \sum_{\substack{p^m\leq x\\ m>1}} \log p \log \frac{x}{p^m} =$$

$$= x + O(x.e^{-a_1\sqrt{\log x}}) + O(\sqrt{x}.\log^3 x) = x + O(x.e^{-a_1\sqrt{\log x}})$$

w.t.b.w.

Stelling XX. $$\sum_{p\leq x} \log p = x + O(x.e^{-a_2\sqrt{\log x}}) \tag{2}$$

Bewijs: Stel $\delta = \delta(x) = e^{-\frac{a_1}{2}\sqrt{\log x}}$. Volgens st. XIX is

$$\sum_{p\leq x} \log p \log \frac{x}{p} = x + O(x.\delta^2). \tag{3}$$

Vervang x door $x(1+\delta)$. Wegens

$$(1+\delta)x\, e^{-a_1\sqrt{\log x(1+\delta)}} < 2x\, e^{-a_1\sqrt{\log x}},$$

is

$$\sum_{p\leq x(1+\delta)} \log p \log \frac{x(1+\delta)}{p} = x(1+\delta) + O(x.\delta^2). \tag{4}$$

Aftrekking van (3) en (4) levert:

$$\log(1+\delta)\sum_{p\leq x}\log p + \sum_{x<p\leq(1+\delta)x} \log p \log\frac{(1+\delta)x}{p} = \delta x + O(x.\delta^2).$$

De 2e som is > 0 en

$$\leq \log 2x \log(1+\delta) \sum_{x<n\leq(1+\delta)x} 1 < \delta^2 x \log 2x = O(\delta^2 x \log x).$$

Dus

$$\sum_{p\leq x} \log p = \frac{\delta}{\log(1+\delta)} x + O(\frac{\delta^2}{\log(1+\delta)} x) + O(\frac{\delta^2 x \log x}{\log(1+\delta)}) =$$

$$=\left\{1 + O(\delta)\right\} x + O(\delta x \log x) = x + O(\delta x \log x) =$$

$$= x + O(xe^{-\frac{a_1}{2}\sqrt{\log x}} \log x) = x + O(xe^{-\frac{a_1}{2}\sqrt{\log x}} e^{\frac{a_1}{4}\sqrt{\log x}}) =$$

$$= x + O(xe^{-\frac{a_1}{4}\sqrt{\log x}}), \quad \text{w.t.b.w.}$$

Stelling der priemgetallen in verscherpte vorm.

Stelling XXI. $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-a_3\sqrt{\log x}})$.

Bewijs: Stel $\sum_{p\leq x} \log p - x = g(x) \qquad (= O(xe^{-\frac{a_1}{4}\sqrt{\log x}}))$.

Voor n geheel ≥ 2 is

$$g(n) - g(n-1) = \begin{cases} \log p-1 \text{ voor } n = p \\ -1 \text{ in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Dus

$$\pi(x) - \sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\log n} = \sum_{n=2}^{[x]} \frac{g(n)-g(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{[x]} \frac{g(n)}{\log n} - \sum_{n=1}^{[x]-1} \frac{g(n)}{\log(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=2}^{[x]} g(n)(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}) + \frac{g[x]}{\log([x]+1)}.$$

Dus

$$\left|\pi(x) - \sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\log n}\right| \leq \operatorname*{Max}_{2\leq n\leq [x]} |g(n)| \left\{\sum_{n=2}^{[x]} (\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}) + \frac{1}{\log([x]+1)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \operatorname*{Max}_{2\leq n\leq [x]} |g(n)| = O(xe^{-\frac{a_1}{4}\sqrt{\log x}}),$$

dus

$$\pi(x) = \sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\log n} + O(xe^{-\frac{a_1}{4}\sqrt{\log x}}). \tag{5}$$

Voor $x > 2$ is

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\log n} = \sum_{n=3}^{[x]} \int_{n-1}^{n} \frac{du}{\log n} + \frac{1}{\log 2} \leq \sum_{n=3}^{[x]} \int_{n-1}^{n} \frac{du}{\log u} +$$

$$+ \frac{1}{\log 2} \leq \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(1)$$

en

$$\geq \sum_{n=2}^{[x]} \int_n^{n+1} \frac{du}{\log n} \geq \int_2^{[x]+1} \frac{du}{\log x} > \int_2^x \frac{du}{\log u},$$

of

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\log n} = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(1). \tag{6}$$

Uit (5) en (6) volgt:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-\frac{a_1}{4}\sqrt{\log x}}), \text{ w.t.b.w.}$$

g: $$\int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{u}{\log u}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{u\ du}{\log^2 u\ u} = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + O(1) =$$

$$= \frac{x}{\log x} + \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log^2 u} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{du}{\log^2 u} + O(1) =$$

$$= \frac{x}{\log x} + O(\frac{1}{\log^2 2}\sqrt{x}) + O(\frac{x}{\log^2(\sqrt{x})}) + O(1) =$$

$$= \frac{x}{\log x} + O(\sqrt{x}) + O(\frac{x}{\log^2 x}) + O(1) = \frac{x}{\log x} + O(\frac{x}{\log x}),$$

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O(\frac{x}{\log x})$$ (stelling der priemgetallen).

een kleinigheidje:

ling XXII. $p_r \sim r \log r$ of $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{p_r}{r \log r} = 1.$

js: $$\lim_{r\to\infty} \frac{r \log p_r}{p_r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\pi(p_r)}{\frac{p_r}{\log p_r}} = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty} (\log r + \log\log p_r - \log p_r) = 0.$$

$$\lim_{r\to\infty} (\frac{\log r}{\log p_r} - 1) = 0.$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r \log r}{p_r} = \lim_{r\to\infty} \frac{r \log p_r}{p_r} \frac{\log r}{\log p_r} = 1,$$ w.t.b.w.

2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam -O.

Colloquium

ANALYTISCHE GETALLENTHEORIE

o.l.v. Prof.Dr S.C. van Veen

13e Voordracht, 15 April 1953

XIII

De Stelling van Hardy, over de nulpunten van $\zeta(s)$ op de kritieke lijn.

In 1914 heeft Hardy de belangrijke stelling bewezen, dat er op de kritieke lijn $\sigma = \frac{1}{2}$ oneindig vele nulpunten van $\zeta(s)$ zijn gelegen. (Hardy C.R. 158 (1914), 1012-1014).

Voordat wij tot dit bewijs overgaan, zullen wij eerst enige algemene beschouwingen geven.

Uit de functionale relatie van Riemann

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s} \cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\zeta(s).$$

volgt met: $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$

dat $$\xi(s) = \xi(1-s), \tag{1}$$

waarin $\xi(s)$ een in het rechterhalfvlak $\sigma \geqslant 0$ gehele analytische functie van s is.

Uit (1) volgt:

$$\xi(\tfrac{1}{2}+it) = \xi(\tfrac{1}{2}-it).$$

Hieruit volgt:

$\xi(\frac{1}{2}+it) = \xi(\frac{1}{2}-it)$ is reëel voor reële waarden van t .

Wij hebben reeds vroeger gesteld:

$$\xi(\tfrac{1}{2}+it) = \Xi(t).$$

Dus de functionale relatie komt neer op

$$\Xi(t) = \Xi(-t) \tag{2}$$

zodat $\Xi(t)$ een even functie van t is.

Het bewijs van Hardy kan nu het gemakkelijkst worden gegeven door beschouwing van de functie

$$Z(t) = \frac{\Xi(t)e^{\frac{\pi t}{4}}}{t^2+\frac{1}{4}} \tag{3}$$

Of:

$$Z(t) = \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi t}{4}} = \frac{\frac{1}{2}(it+\frac{1}{2})(it-\frac{1}{2})\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{it}{2})\zeta(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s).e^{\frac{\pi t}{4}} \qquad (\sigma=\tfrac{1}{2}). \tag{4}$$

Uit (3) volgt: $Z(t)$ is reëel voor reële waarden van t.
Uit (4) volgt: De eventuele nulpunten van $\zeta(s)$ op $\sigma = \frac{1}{2}$ corresponderen met de reële nulpunten van $Z(t)$.

Wij zijn dus klaar, als wij kunnen bewijzen:

$Z(t)$ heeft oneindig vele reële nulpunten.

Het idee van het bewijs berust nu op de vergelijking van de beide integralen

$$\int_T^{2T} Z(t)dt \quad \text{en} \quad \int_T^{2T} |Z(t)|\,dt \quad \text{voor } T \to \infty \tag{5}$$

Als n.l. $Z(t)$ slechts een eindig aantal reële nulpunten bezit, dan is $Z(t)$ voor $t > T$ (T groot genoeg) van onveranderlijk teken, en de beide integralen (5) zullen dan in absolute waarde gelijk zijn.

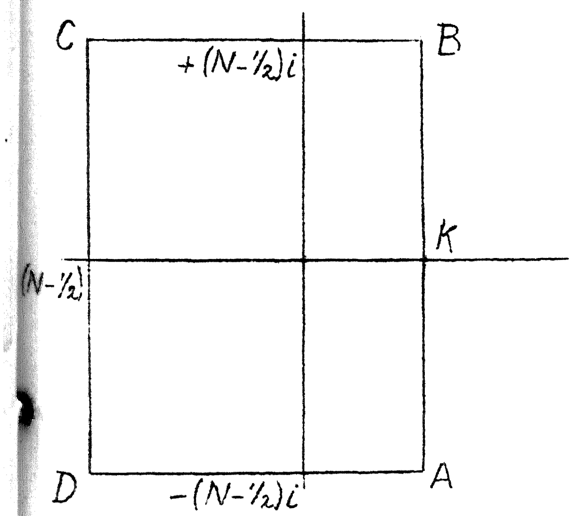
Het zal blijken, dat deze veronderstelling tot een contradictie voert.

Hiertoe maken wij gebruik van de volgende hulpstelling (Cahen-Mellin).

Stelling I: Voor $k > 0$, $\mathcal{R}(y) > 0$, $y^{-s} = e^{-s\log y}$ ($|\arg y| < \frac{\pi}{2}$) is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s)\, y^{-s}\, ds = e^{-y}. \tag{6}$$

Bewijs: Integreer $\frac{1}{2\pi i}\int \Gamma(s)\, y^{-s}\, ds$ over onderstaande rechthoek



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K-(N-\frac{1}{2})i}^{K+(N-\frac{1}{2})i} \Gamma(s)y^{-s}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_A^B =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_A^D + \int_D^C + \int_C^B\right\} + \sum \text{res.}$$

Op AD en BC =

$$|\Gamma(s)\, y^{-s}| = O\left|e^{s\log s - s\log y}\right|$$

$$= O\left|e^{\rho\cos\varphi\log\rho - \rho\sin\varphi.\varphi - \rho\cos\varphi\log|y| + \rho\sin\varphi.\alpha}\right| = \qquad s = \rho e^{i\varphi}, \quad y = |y|\, e^{i\alpha}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

$$= O\left|e^{\rho\cos\varphi(\log\rho - \log|y|) \mp (N-\frac{1}{2})(\varphi-\alpha)}\right| =$$

$$= O\left|e^{k\log\frac{N-\frac{1}{2}}{|y|} - (N-\frac{1}{2})(\arg B - |\alpha|)}\right| \to 0 \text{ voor } N \to \infty$$

wegens $\arg B \to \frac{\pi}{2}$.

Hieruit volgt gemakkelijk, dat $\int_A^D$ en $\int_C^B \to 0$ voor $N \to \infty$.

Voor $\int_D^C$ maken wij gebruik van

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

$$\Gamma\left\{-(N-\tfrac{1}{2})+it\right\} = \frac{2\pi}{(-1)^N(e^{\pi t}+e^{-\pi t})}\;\frac{1}{\Gamma(N+\frac{1}{2}-it)} = O\Big\{2\pi e^{-\pi|t|} \quad (e^{-N\log N})$$

Dus: $\left|\Gamma(s)\; y^{-s}\right| = O\left(e^{-\pi|t| - N\log N - \rho\cos\varphi\log|y| + \rho\sin\varphi.\alpha}\right) =$

$$= O\left(e^{-\pi|t| - N\log N + N\left|\log|y|\right| + N|\alpha|}\right) =$$

$$= O\left(e^{-N\left\{\log\frac{N}{|y|} - |\alpha|\right\}}\right) \to 0 \qquad \text{met } N \to \infty$$

Hieruit volgt:

$$\int_D^C \to 0 \quad \text{als } N \to \infty.$$

$\Gamma(s)$ heeft polen van de 1^e orde in $s = 0,-1,-2,\ldots$

residu in $-k$ $= y^k \lim_{s\to -k} (s+k)\Gamma(s) = y^k \lim_{s\to -k} \dfrac{(s+k)\pi}{\sin\pi s.\Gamma(1-s)} =$

$$= \frac{y^k\,\pi}{\Gamma(1+k)} \lim_{s\to -k} \frac{s+k}{(-1)^k \sin\pi(s+k)} = (-1)^k\,\frac{y^k}{k!}.$$

Eindresultaat voor $N \to \infty$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s)\; y^{-s}\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{y^k}{k!} = e^{-y} \qquad (\text{w.t.b.w})$$

Hieruit volgt

<u>Stelling II.</u> Voor $\mathcal{R}(x) > 0$ is:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s)\,x^{-\frac{s}{2}}\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)(n^2x)^{-\frac{s}{2}}\, ds =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}\,. \qquad (7)$$

Nu gaan wij over tot het bewijs van de stelling van Hardy.

Verschuif in (7) de integratierechte naar $\sigma = \frac{1}{2}$. Dan wordt een pool gepasseerd bij $s = 1$ (pool van $\zeta(s)$).

Residu$= \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}\,.$

Dus: $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s)\; x^{-\frac{s}{2}}\, ds = 2\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2x} - \sqrt{\frac{\pi}{x}} = \varphi(x).$$

Dus in verband met (4)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi t}{4}}\; Z(t)\; \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it}\, dt = -\varphi(x).$$

Stel $\quad x = \pi e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} \qquad (\delta \text{ klein } > 0).$

Uit (3) volgt, dat $e^{-\frac{\pi}{4}t}\; Z(t) = \dfrac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}}$

een <u>even</u> functie van t is.

De voorgaande uitkomst gaat nu over in:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi t}{4}}\, Z(t)\, e^{i(\frac{\pi}{2}-\delta)(-\frac{1}{4}-\frac{it}{2})}\, dt =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{i}{4}(\frac{\pi}{2}-\delta)}}{\pi}\int_0^{\infty}\cosh\left\{(\frac{\pi}{2}-\delta)\frac{t}{2}\right\} e^{-\frac{\pi t}{4}}\, Z(t)dt = -\varphi\left\{\pi . e^{i(\frac{\pi}{2}-\delta)}\right\} =$$

$$= O\Big(\sum_1^{\infty} e^{-n^2\pi\sin\delta}\Big) + O(1) = O\Big(\int_0^{\infty} e^{-u^2\pi\sin\delta}\, du\Big) + O(1) = O(\delta^{-\frac{1}{2}}) \qquad (8)$$

<u>Neem nu aan, dat $Z(t) \neq 0$ voor $t > t_o$.</u>

Voor $T > t_o$ is dan

$$\int_T^{2T} |Z(t)|dt = \left|\int_T^{2T} Z(t)dt\right| < e\left|\int_T^{2T} e^{\frac{\pi t}{4}-\frac{t}{2T}}\, e^{-\frac{\pi t}{4}}\, Z(t)dt\right| <$$

$$< 2e\left|\int_{t_o}^{\infty}\cosh(\frac{\pi t}{4}-\frac{t}{2T})e^{-\frac{\pi t}{4}}\, Z(t)dt\right| = O(T^{\frac{1}{2}}) \qquad (9)$$

Anderzijds is volgens (4)

$$|Z(t)| = \tfrac{1}{2}\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right| . e^{\frac{\pi|t|}{4}}\left| e^{-(\frac{1}{4}+\frac{it}{2})\log\pi}\,\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{it}{2})\right| =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right| e^{\frac{\pi|t|}{4}}\, e^{-\frac{1}{4}\log\pi}\left| e^{(\frac{it}{2}-\frac{1}{4})\log(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})-(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\log 2\pi+O(\frac{1}{t})}\right| =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right|\, e^{\frac{\pi}{4}|t|-\frac{1}{4}\log\pi} . e^{-\frac{1}{4}\log(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{16})-\frac{|t|}{2}\operatorname{arctg}2|t|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2\pi+O(\frac{1}{t})} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{8}} e^{-\frac{1}{4}\log\pi+\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{4}}\, e^{\frac{|t|}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2|t|}+O(\frac{1}{t})}\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right| >$$

<u>$> A|t|^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right|$</u> voor $t > t_o$

Dus:

$$\int_T^{2T}|Z(t)|\,dt > A.T^{-\frac{1}{4}}\int_T^{2T}\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right|dt >$$

$$> A.T^{-\frac{1}{4}}\left|\int_T^{2T}\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\,dt\right| \qquad (10)$$

Door contourintegratie vindt men:

$$i\int_T^{2T}\zeta(\tfrac{1}{2}+it)dt = \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+2iT}\zeta(s)ds = \int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT} + \int_{2+iT}^{2+2iT} + \int_{2+2iT}^{\frac{1}{2}+2iT} \qquad (11)$$

Voor $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ is $\zeta(s) = O(\sqrt{T})$.

Dus de som van de 1^e en 3^e integraal rechts is $O(\sqrt{T})$.

De middelste integraal is

$$\int_{2+iT}^{2+2iT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\, ds = \Big[s - \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n} \Big]_{2+iT}^{2+2iT} = i\,T + O(1). \qquad (12)$$

(10) en (11) geven:

$$\Big| \int_{T}^{2T} \zeta\left(\tfrac{1}{2} + it\right) dt \Big| = T + O(\sqrt{T}). \qquad (13)$$

Uit (10) en (13) volgt

$$\int_{T}^{2T} |Z(t)|\, dt > A.T^{\frac{3}{4}} .$$

Dit is in tegenspraak met (9).

Dus voor iedere waarde t_o is er ten minste nog 1 getal $t_1 > t_o$ met $Z(t) = 0$, w.t.b.w.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m -O.

Colloquium

A N A L Y T I S C H E   G E T A L L E N T H E O R I E

o.l.v. Prof.Dr S.C. van Veen

14$^{\underline{e}}$ Voordracht, 29 April 1953

15$^{\underline{e}}$ Voordracht, 13 Mei 1953.

XIV - XV

De asymptotische uitdrukking van von Mangoldt voor het aantal complexe nulpunten van de ζ-functie.

In zijn klassieke verhandeling van 1859 gaf reeds Riemann zonder bewijs zulk een uitdrukking, nl:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

(bis auf einen Bruchteil von der Ordnung der Grosse $\frac{1}{T}$).
Voor het eerst is volledig door von Mangoldt in 1905 bewezen:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

(Math. Annalen Bd 60, 1-19)

nadat hij reeds in 1895 dit vermoeden van Riemann bijna volledig had bewezen (met een restterm $O(\log^2 T)$ i.p.v. $O(\log T)$). (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd 114, S. 225-305).

Bij dit bewijs zijn weder enige hulpstellingen over het asymptotisch gedrag der Γ-functie nodig.

Hulpstelling 1: Voor $\omega > o$ is $\mathcal{R}\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = \log\omega + O(\omega^{-1})$

Bewijs: Uit $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}\right)$ volgt:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\Gamma'(\omega i)}{\Gamma(\omega i)}\right) = -C + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+\omega^2}\right) = -C + \sum_{n=1}^{\omega^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+\omega^2}\right) +$$

$$+\omega^2 \sum_{\omega^2+1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+\omega^2)} = -C + \sum_{n=1}^{\omega^2}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\omega^2}\frac{n}{n^2+\omega^2} + O\left(\omega^2\sum_{n=\omega^2+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\right) =$$

$$= -C + 2\log\omega + C + O(\omega^{-2}) - \int_0^{\omega^2}\frac{u\,du}{u^2+\omega^2} + O(\omega^{-1}) + O(\omega^{-2}) =$$

$$= 2\log\omega + O(\omega^{-1}) - 2\log\omega + O(\omega^{-2}) + \log\omega = \log\omega + O(\omega^{-1}).$$

Hulpstelling 2: Voor $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ en voor $\sigma \geqslant 2$, $t \geqslant 0$ is gelijkmatig

$$\frac{\Gamma'(\sigma+\omega i)}{\Gamma(\sigma+\omega i)} = O(\log\omega).$$

Bewijs: Uit de in stelling 1 gebruikte formule voor $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ volgt in dit gebied, als $\omega \geqslant 2$ is:

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < 1 + \tfrac{1}{2} + |s|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n|s+n|},$$ dus wegens

$$|s+n| \geq |s+1|$$
$$|s+n| \geq n-1$$
$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < 2 + |s|\sum_{n=1}^{|s|} \frac{1}{n|s+1|} + |s| \sum_{n=|s|+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < 2 +$$
$$+ \frac{|s|}{|s+1|}\left\{\log|s| + C\right\} + \frac{|s|}{|s|} < k \log|s| < k \log\omega$$

met $k > \frac{3}{\log|s|} + \frac{|s|}{|s+1|} + \frac{C}{\log|s|}$, dus $k = \frac{4}{\log 2} + 2$ kan volstaan.

<u>Hulpstelling 3</u>: $\sigma = \sigma_0$ is een <u>vast</u> getal uit het interval $-1 \leq \sigma \leq 2$.

$$\int_1^{\omega} \Re\left(\frac{\Gamma'(\sigma_0+ti)}{\Gamma(\sigma_0+ti)}\right)dt = \omega\log\omega - \omega + O(\log\omega).$$

<u>Bewijs</u>: a) Voor $\sigma_0 = 0$ passen wij hulpstelling 1 toe:

$$\int_1^{\omega} \Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right)dt = \int_1^{\omega}(\log t + O(t^{-1}))dt = \omega\log\omega - \omega + O(\log\omega).$$

b) Voor andere waarden van σ_0 uit $-1 \leq \sigma \leq 2$ contourintegratie over de rechthoek $(\sigma_0+i, \sigma_0+\omega i, \omega i, i)$.

$$\int_{\sigma_0+i}^{\sigma_0+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}ds = \int_{\sigma_0+i}^{i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}ds + \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}ds +$$
$$+ \int_{\omega i}^{\sigma_0+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\, ds.$$

3^e integraal van het 2^e lid is $O(\log\omega)$ (hulpst. 2).
1^e integraal onafhankelijk van ω,
dus:

$$\int_{\sigma_0+i}^{\sigma_0+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\, ds = \int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\, ds + O(\log\omega)$$

dus:

$$\Im\int_{\sigma_0+i}^{\sigma_0+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\, ds = \Im\int_{i}^{\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\, ds + O(\log\omega)$$

of

$$\int_1^{\omega} \Re\left(\frac{\Gamma'(\sigma_0+ti)}{\Gamma(\sigma_0+ti)}\right) dt = \int_1^{\omega}\Re\left(\frac{\Gamma'(ti)}{\Gamma(ti)}\right)dt + O(\log\omega) =$$

$$= \omega\log\omega - \omega + O(\log\omega) \text{ volgens geval a.}$$

Nu komen de nulpunten der ζ-functie in het geding.

<u>Stelling I</u> Voor $T > 0$ stelt $N(T)$ het aantal nulpunten $\rho = \beta + \gamma i$ van $\zeta(s)$, waarvan $0 < \gamma \leq T$ is.
Dan is:

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T).$$

<u>Bewijs</u>: Wij maken gebruik van de vroeger afgeleide uitkomst:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) \qquad (1)$$

of

$$\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - b + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \qquad (2)$$

Voor $s=2+Ti$ is $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \leqslant -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} = O(1)$ (3)

Volgens hulpstelling 2 is, wegens $\frac{s}{2}+1 = 2+\frac{T}{2}i$

$$\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} = O(\log T) \qquad (4)$$

Uit (2), (3) en (4) volgt voor $s=2+Ti$

$$\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) = O(\log T)$$

dus a fortiori

$$\sum_{\rho}\mathcal{R}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) = O(\log T).$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \geqslant \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} > \frac{1}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} >$$

$$> \frac{1}{4+(T-\gamma)^2} > \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(T-\gamma)^2}.$$

Dus

$$\sum_{\rho}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\log T). \qquad (5)$$

Voor

$$T < \gamma \leqq T+1$$

bevat het linkerlid

$$N(T+1)-N(T)$$

termen, ieder $\geqslant \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Dus linkerlid $\geqslant \frac{N(T+1)-N(T)}{2}$

of

$$N(T+1)-N(T) = O(\log T). \qquad (6)$$

Stelling II: Wanneer $\sum_{\rho}'$ zich slechts uitstrekt over de nulpunten $\rho=\beta+\gamma i$, waarvoor

$$|T-\gamma| \geqslant 1$$

dan is

$$\sum_{\rho}'\frac{1}{(T-\gamma)^2} = O(\log T).$$

Bewijs: $\sum_{\rho}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqslant \sum_{\rho}'\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \geqslant \sum'\frac{1}{(T-\gamma)^2+(T-\gamma)^2} = \frac{1}{2}\sum_{\rho}'\frac{1}{(T-\gamma)^2}$ (7).

(5) en (7) leveren het te bewijzene.

<u>Stelling III</u>: Voor $s=\sigma+Ti$; $-1\leq\sigma\leq 2$ geldt

$$\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)=O(\log T).$$

<u>Bewijs</u>: Wegens (2) is:

$$\sum_\rho\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\zeta'(s+3)}{\zeta(s+3)}-b+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})}.$$

Daar

$$\Re(s+3)=\sigma+3\geq 2$$
$$\Re\left(\frac{s}{2}+\frac{5}{2}\right)=\frac{\sigma+5}{2}\geq 2$$

is

$$\left|\sum_\rho\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|<c_1+\frac{c_2}{2}\log\left|\frac{s}{2}+\frac{5}{2}\right|<c_3\log|s| \qquad (8)$$

Het aantal termen van $\sum_\rho$, die niet tot $\sum_\rho{}'$ behoren, is

$$< N(T+1)-N(T-1)=N(T+1)-N(T)+N(T)-N(T-1)=O(\log T) \qquad (9)$$

Iedere term

$$\left|\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right|<1+\frac{1}{|\rho|}\leq 1+c_4 \qquad (10)$$

($\rho=0$ is geen nulpunt).
Wegens (9) en (10) is:

$$\left|\sum_\rho\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)-\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|<c_5\log|s| \qquad (11)$$

dus uit (8) en (11)

$$\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|<c_6\log|s|.$$

Dus:

$$\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|=\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)+\left(\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)-\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right)\right|\leq$$
$$\leq\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s+3-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|+\left|\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{s+3-\rho}\right)\right|<c_6\log|s|+\sum_\rho{}'\frac{3}{|s-\rho||s+3-\rho|}\leq$$
$$\leq c_6\log|s|+\sum_\rho{}'\frac{3}{|\Im(s-\rho)||\Im(s+3-\rho)|}=c_6\log|s|+3\sum_\rho{}'\frac{1}{(T-\gamma)^2}<c_6\log(2+T)+$$
$$+c_7(\log T)<c_8\log T.$$

Of:

$$\sum_\rho{}'\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)=O(\log T) \quad \text{w.t.b.w.} \qquad (12)$$

<u>Hoofdstelling</u>:

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T). \text{ (Von Mangoldt)}$$

<u>Bewijs</u>: Neem aan, dat $T\neq$ ordinaat van een nulpunt van $\zeta(s)$.

$$2\pi i N(T)=\int\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds$$

genomen over de rechthoek (2,2+Ti, -1+Ti, -1), waarin de basis bij s=1 door een kleine halve cirkel ingetand is.

$$\int_{-1}^{2} \text{ is onafhankelijk van } T \qquad (13)$$

$$\int_{2}^{2+Ti} = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{m(2+Ti)}} - \sum_{p,m} \frac{1}{m.p^{2m}} = O(1). \qquad (14)$$

Dus: $$2\pi N(T) = \mathfrak{I}\int_{2+Ti}^{-1+Ti} + \mathfrak{I}\int_{-1+Ti}^{-1} + O(1). \qquad (15)$$

Wegens de functionaalvergelijking:

$$\Gamma(\tfrac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma(\tfrac{1-s}{2})\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

is:

$$\frac{\zeta'(-1+ti)}{\zeta(-1+ti)} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma'(1-\frac{t}{2}i)}{\Gamma(1-\frac{t}{2}i)} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma'(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i)} + \log\pi - \frac{\zeta'(2-ti)}{\zeta(2-ti)}$$

dus: $$\mathfrak{I}\int_{-1+Ti}^{-1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \int_{T}^{0}\mathfrak{R}\left(\frac{\zeta'(-1+ti)}{\zeta(-1+ti)}\right)dt = -\tfrac{1}{2}\int_{T}^{0}\mathfrak{R}\left(\frac{\Gamma'(1-\frac{t}{2}i)}{\Gamma(1-\frac{t}{2}i)}\right)dt - \tfrac{1}{2}\int_{T}^{0}\mathfrak{R}\left(\frac{\Gamma'(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}i)}\right)dt +$$

$$- T\log\pi + \mathfrak{I}\int_{2-Ti}^{2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \int_{0}^{\frac{T}{2}}\mathfrak{R}\left(\frac{\Gamma'(1-ui)}{\Gamma(1-ui)}\right)du + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\mathfrak{R}\left(\frac{\Gamma'(-\frac{1}{2}+ui)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+ui)}\right)du - T\log\pi + O(1).$$

Hulpstelling 3 geeft:

$$\int_{0}^{\frac{T}{2}}\mathfrak{R}\left(\frac{\Gamma'(1-ui)}{\Gamma(1-ui)}\right)du = \int_{0}^{\frac{T}{2}}\mathfrak{R}\left(\frac{\Gamma'(1+ui)}{\Gamma(1+ui)}\right)du = \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(\log T)$$

$$\int_{0}^{\frac{T}{2}}\mathfrak{R}\left(\frac{\Gamma'(-\frac{1}{2}+ui)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+ui)}\right)du = \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(\log T),$$

dus:

$$\mathfrak{I}\int_{-1+Ti}^{-1}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = T\log\frac{T}{2\pi} - T + O(\log T). \qquad (16)$$

(15) en (16) geven:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) + \frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{I}\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds. \qquad (17)$$

Het enige wat te bewijzen overblijft, is

$$\mathfrak{I}\int_{2+Ti}^{-1+Ti}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = O(\log T).$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} + \sum_{\rho}{}'\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) + \sum_{\rho}{}''\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \qquad (18)$$

waarin $\sum_{\rho}'$ gesommeerd wordt voor $|T-\gamma| \geq 1$

" $\sum_{\rho}''$ " " " $|T-\gamma| < 1$.

Eerste term rechterlid (18) is $O(1)$, 2^e term is $O(T^{-1})$, de 3^e term is $O(\log T)$. (hulpst.2). 4^e term $= O(\log T)$ (Stelling III).

Het aantal termen van de laatste som $\sum''$ uit (18) is $O(\log T)$.

$$\left| \mathcal{I} \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{ds}{s-\rho} \right| < \pi$$

$$\left| \sum_{\rho}{}'' \frac{1}{\rho} \right| < \left\{ N(T+1)-N(T-1) \right\} \frac{1}{T-1} = O\left(\frac{\log T}{T-1}\right).$$

Dus

$$\mathcal{I} \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \sum_{\rho}{}'' \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) ds = O(\log T). \qquad (19)$$

Uit (18) en (19) volgt:

$$\mathcal{I} \int_{2+Ti}^{-1+Ti} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = O(\log T). \qquad (20)$$

Uit (17) en (20) volgt de te bewijzen stelling:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \qquad \text{w.t.b.w.}$$

Nog een kleinigheidje:

Voor $n \to \infty$

$$|\rho_n| \sim \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}.$$

Bewijs:

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T.$$

$$2\pi N(\gamma_n \pm 1) \sim (\gamma_n \pm 1) \log (\gamma_n \pm 1) \sim \gamma_n \log \gamma_n$$

$$N(\gamma_n - 1) \leq n \leq N(\gamma_n + 1)$$

dus

$$2\pi n \sim \gamma_n \log \gamma_n ,$$

of

$$\log n \sim \log \gamma_n$$

dus

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}.$$

<u>Opmerking</u>: Als <u>het</u> vermoeden van Riemann juist zou zijn, dan zou

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{\log T}{\log \log T}\right)$$

zijn.