STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 25c

Elementaire avondcursus wiskunde 1952-1954;

Analytische meetkunde.

J.Verhoeff.

1954

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoudsopgave

Avondcursus 1953-1954

Analytische Meetkunde

door

J. Verhoeff

AVONDCURSUS 1953 - 1954

ANALYTISCHE MEETKUNDE

door

J. Verhoeff.

Hoofdstuk I. De rechte lijn.

§1. Gerichte afstanden. Is op een rechte l een (positieve)richting gegeven dan kan men spreken van de gerichte afstand van twee punten A en B (van l). Hieronder verstaat men de afstand AB als de richting van A naar B overeenstemt met de gegeven richting en - AB als dit niet het geval is. Notatie $\overrightarrow{AB}$.

Uit de definitie volgt onmiddellijk dat $\overrightarrow{AA} = 0$ en $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Voor drie punten A, B en C (van l) hebben we

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Opg.1. Bewijs deze eigenschap.

Opg. 2. Leid $\overrightarrow{AA} = 0$ en $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ af uit de bovenstaande formule. Deze eigenschappen zijn onafhankelijk van de oorspronkelijk gegeven richting.

Opg. 3. Als A, B, C en D vier punten op l zijn en als

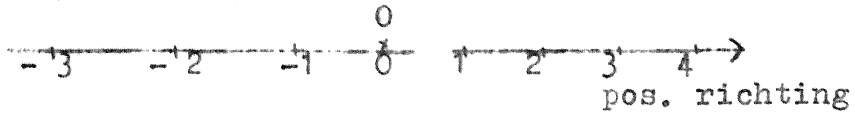
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = d \quad \text{dan is} \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}} = 1 - d$$

§2. Coördinaten op de rechte lijn.

Wanneer op een rechte l een vast punt O (nulpunt of oorsprong)en een positieve richting gegeven is dan is een punt P van l volkomen bepaald als zijn gerichte afstand tot O bekend is.

Onder de coördinaat van P t.o.v. O verstaat men $\overrightarrow{OP}$ met dien verstande dat men de lengteeenheid meestal onvermeld laat. Is dus $\overrightarrow{OP} = x$ cm dan is x de coördinaat van P t.o.v. O (met de cm als lengte eenheid). De coördinaat is dus een reëel getal (positief of negatief). Het punt O en de gegeven richting (en de lengte eenheid) noemt men een coördinatenstelsel op de rechte.

O heeft nul tot coördinaat.



Als P en Q resp. coördinaten x_p en x_q hebben dan is

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = x_q - x_p \quad (\text{Cm}).$$

Van een coördinatenstelsel wordt geëist dat verschillende punten verschillende coördinaten hebben.

Wanneer er op een rechte l twee coördinatenstelsels gegeven zijn met oorsprong O resp. O' en gelijke positieve richting, dan heeft elk punt P van l twee coördinaten x en x'.
Nu bestaat er een verband tussen x en x'. Laat het punt O' de coördinaat a hebben (t.o.v. het eerste stelsel), dan geldt

$$x = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = a + x'$$

De formule $x = a + x'$ heet de (coördinaten) transformatie formule van het tweede naar het eerste stelsel.

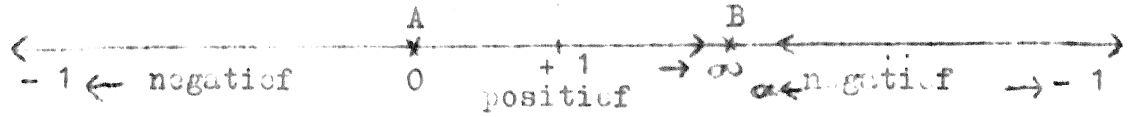
Opg. 4. Wat is de coördinaten transformatie formule van het eerste naar het tweede stelsel?
Deze formules stellen ons dus in staat de coördinaat t.o.v. het ene stelsel te berekenen uit die t.o.v. het anderestelsel. Dergelijke formules zullen wij gemakkelijk ontmoeten, nl. zodra er meerdere coördinatenstelsels in het spel zijn.

§ 3. Deelverhouding.

Met behulp van het begrip deelverhouding kunnen wij op de rechte lijn coördinaten invoeren, die onafhankelijk zijn van de lengte eenheid.
Definitie : Onder de deelverhouding (ABC) van drie punten A, B en C van een rechte verstaat men $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB}$.

Opg. 5. Bewijs dat $(BAC) = (ABC)^{-1}$.

Kies nu op de rechte l twee vaste punten A en B en neem als coördinaat voor P de deelverhouding $(ABP) = \lambda$.
Zodoende hebben alle punten behalve B een coördinaat. Voor de waarde, die deze coördinaat doorloopt, zie onderstaande figuur.



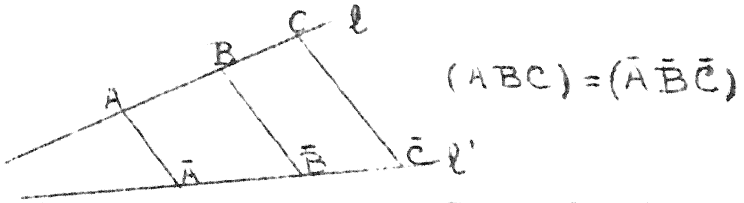
Wij zullen nu de coördinaten transformatie formule geven voor de overgang van het stelsel met oorsprong O op het zo juist gedefiniëerde stelsel. Deze volgt uit de definitie van de deelverhouding.

Stel de (oude) coördinaat van P is x en die van A en B resp. a en b, dan is

$$x = (ABP) = \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \frac{(x - a)}{(b - x)}.$$

De transformatie terug, ook wel inverse transformatie genaamd, luidt $x = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$

Opg. 6. Bewijs dat de deelverhouding van drie punten niet verandert als men de punten parallel projecteert op een andere rechte. (Zie fig.)



Opg. 7. Gevraagd de coördinaten van de punten P met de eigenschap dat de afstanden tot twee gegeven punten A en B(met coördinaten 0 en 1 resp.) zich verhouden als 2 : 3.

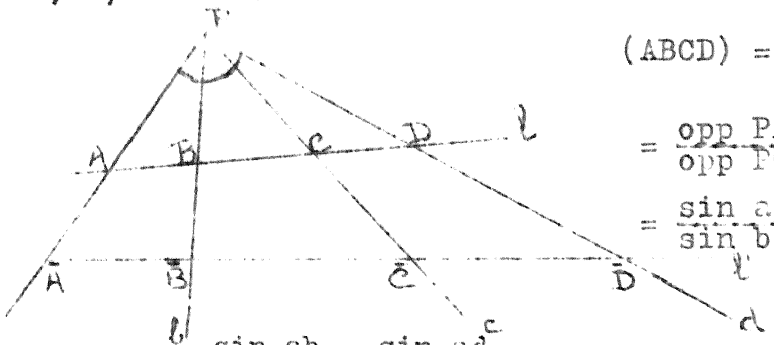
Het punt B heeft nog steeds geen coördinaat in het nieuwe stelsel. Sommige auteurs geven dit punt het symbool ∞ als coördinaat, maar dit is geen getal. De moeilijkheid kan opgelost worden door het invoeren van homogene coördinaten (in het nieuwe stelsel). Stelt men nl. $(ABC) = (\lambda, \mu)$ met als definitie $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = \lambda : \mu$, of liever $\lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{AC} = 0$, dan correspondeert met elk punt C een paar (λ, μ) als men paren met dezelfde verhouding als identiek beschouwt.
In geval $C \neq B$ is $(ABC) = \frac{\lambda}{\mu}$. Men kan dan μ bijvoorbeeld 1 kiezen. In het geval C = B echter, wordt $\mu = 0$ en de formule wordt zinloos. Wel zinvol blijft $(BAC) = \frac{\mu}{\lambda}$ (mits $C \neq A$).
Wanneer men $\lambda : \mu = 1 : 0$ interpreteert met $\mu = 0$, dan wordt de transformatie formule $\lambda : \mu = (x - a) : (b - x)$.
De inverse formule wordt $x = \frac{\mu a + \lambda b}{\lambda + \mu}$ (Bewijs?).
Het homogeen maken van coördinaten zal ons meer uit dergelijke moeilijkheden redden of kunnen redden.

§ 4. Dubbel verhouding.

Definitie. Onder de dubbelverhouding (ABCD) van vier punten A, B, C en D van een rechte verstaat men $\frac{(ADC)}{(BDC)} : \frac{(ADC)}{(BDC)}$.
Gemakshalve onderstellen wij de vier punten verschillend. De moeilijkheden die ontstaan, indien er punten samenvallen, kunnen door homogeen maken ontgaan worden.

Het belang van de dubbelverhouding ligt in de volgende stelling: De dubbelverhouding van vier punten is invariant t.o.v. centrale projectie.

Bewijs. Projecteer A, B, C en D uit P op l' en noem de beelden $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ en $\bar{D}$.



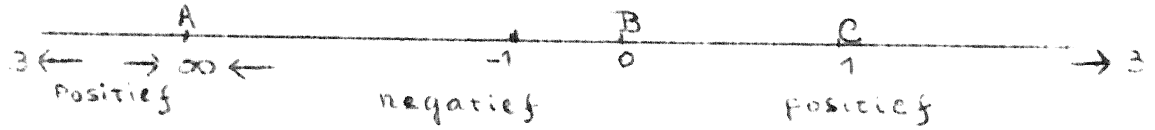
$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} + \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} =$$

$$= \frac{\text{opp } PAC}{\text{opp } PCB} : \frac{\text{opp } PAD}{\text{opp } PDB} =$$

$$= \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin db} = (\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})$$

Men noemt $\frac{\sin ab}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin db}$ de dubbelverhouding (abcd) van de lijnen a, b, c, en d (de vierstraal).

Ook hier kan men bij vaste A, B en C de dubbelverhouding (ABCP) als coördinaat voor P nemen. Het onderstaande figuurtje laat zien welke waarden deze coördinaat aanneemt als bijv. (ABC) = 2.



De volgorde van de punten A, B, C en D in de dubbelverhouding is essentiëel. Er zijn à priori 4! = 24 mogelijke rangschikkingen van de vier punten. Deze permutaties zijn alle te verkrijgen door opeenvolgende transposities, zodat de volgende stelling ons in staat stelt voor elke permutatie de dubbelverhouding te berekenen als (ABCD) gegeven is.

Stelling. Als (ABCD) = d, dan is (BACD) = (ABDC) = d^{-1} en (ACBD) = 1 - d.

Bewijs. Volgens de definitie en opg. 5 is $(BACD) = \frac{(BAC)}{(BAD)} = \frac{(ABD)}{(ABC)} =$

$= (ABDC) = d^{-1}$. Terwijl volgens opg. 3 (ACBD) = 1 - d geldt.

Dit geeft het volgende tabelletje:

(ABCD) = (BADC) = (DCBA) = (CDAB) = d

(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = d^{-1}

(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - d

(ADBC) = (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = $(1 - d)^{-1}$

(ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = $1 - (1 - d)^{-1} = d(d - 1)^{-1}$

(ADBC) = (DACB) = (BCAD) = (CBDA) = $(d - 1)d^{-1}$

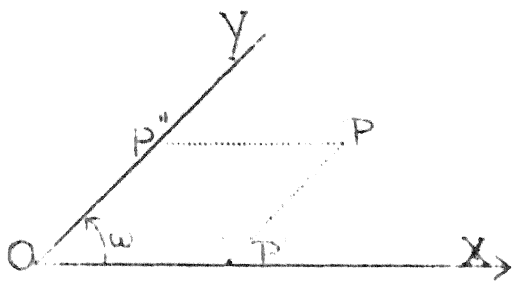
Hieruit blijkt, dat er zes i.h.a. verschillende waarden zijn per viertal. In het geval d = - 1 hebben we drie waarden nl. -1, $\frac{1}{2}$ en 2. Men zegt in dit (belangrijke) geval, dat ABCD harmonisch liggen, of dat de paren AB en CD elkaar harmonisch scheiden.
Een vierstraal met dubbelverhouding -1 heet ook harmonisch. Zij snijdt op elke transversaal een harmonisch viertal uit.
Ook aan vier evenwijdige lijnen kent men een dubbelverhouding toe, nl. die, die zij uitsnijdt op een transversaal.

Opg. 8. Bewijs dat deze definitie niet afhangt van de transversaal.

Hoofdstuk II. Het Platte Vlak.

§5. Coördinaten in het platte vlak.

Om in het platte vlak coördinaten in te voeren kiezen we twee rechte lijnen die elkaar in een punt O onder een hoek ω snijden. Op beide lijnen kiezen we een positieve richting. De ene lijn noemen we x-as en de andere y-as. Op beide assen zijn nu coördinaten vastgelegd met O als oorsprong. Laat P nu een punt van het vlak zijn. De projectie van P in de richting van de y-as op de x-as zij P' en de projectie van P in de richting van de x-as op de y-as zij P''. Stel de coördinaat van P' op de x-as is x en die van P'' op de y-as is y, dan noemt men (x,y) de coördinaten van P t.o.v. het(schevе) assenkruis OXY.



Zodoende heeft elk punt van het vlak twee coördinaten gekregen. Bijv. de coördinaten van O zijn (0,0), van P'' (0,y), van P' (x,0)
Notatie: O(0,0), P'(x,0) enz.
Men spreekt van abscis of x-coördinaat en van ordinaat of y-coördinaat.
Is in het bijzonder $\omega = 90^0$, dan spreekt men van rechthoekige Cartesische coördinaten.
Door andere coördinaten op de assen te nemen, of door een andere projectie methode te gebruiken, verkrijgt men andere coördinatenstelsels. Ook door krommе lijnen te gebruiken kan men coördinaten invoeren. Hierop komen we later terug.

§6. Afstand van twee punten.

Met behulp van de cosinus regel kan men direct een formule voor de afstand van twee punten $A(a_1a_2)$ en $B(b_1b_2)$ geven. Te weten

$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + 2(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cos\omega}$$

voor schevе en

$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$ voor rechte Cartesische coördin.

Daar de laatste formule veel eenvoudiger is, zullen we in het vervolg steeds rechthoekige coördinaten gebruiken, tenzij nadrukkelijk anders vermeld. Later zullen we nog meer voordelen zien.

Beschouw nu in het platte vlak een cirkel met middelpunt M(a,b) en een straal r. Voor de coördinaten x en y van een punt P(x,y) op de cirkel geldt dan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Omgekeerd voldoen de coördinaten x en y van een punt aan deze vergelijking dan ligt het punt op de cirkelomtrek. Wij ontmoeten hier een belangrijk principe van de analytische meetkunde, te weten het voorstellen van een figuur door de vergelijking, waaraan de coördinaten van de punten voldoen. Men spreekt van de vergelijking van de figuur. De doorsnijding van twee figuren bestaat dus uit die punten, waarvan de coördinaten voldoen aan de vergelijkingen van beide figuren. Men vindt die punten dus door de vergelijkingen op te lossen.

De meetkundige plaats der punten waarvoor de som der afstanden tot twee vaste punten een constante waarde heeft heet een ellips, de vaste punten heten brandpunten. Wij zullen de vergelijking afleiden van de ellips met brandpunten (c,0) en (-c,0). Zij P(x,y) een punt van de ellips, dan geldt $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} =$ = constant = 2a. Dus a > c. Verdrijving van de wortels geeft $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, waarbij $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. De vergelijking van de x-as is y = 0, zodat men als doorsnijding van de ellips en de x-as vindt (a,0) en (-a,0).

Opg. 9. Wat is de doorsnijding met de y-as? Wat met de cirkel $x^2 + y^2 = b^2 + \frac{1}{4}c^2$?

§ 7. De cirkel.

In de vorige § vonden wij voor de vergelijking van de cirkel met M(a,b) als middelpunt en r tot straal $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Uitgewerkt geeft dit de vergelijking $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, dus een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. De vergelijking van een cirkel is dus een tweede-graads vergelijking, waarin de coëfficiënten van x^2 en y^2 gelijk zijn en waarin de coëfficient van xy gelijk aan nul is. Omgekeerd kunnen we een tweede-graads vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ schrijven als $(x + \frac{1}{2}A)^2 + (y + \frac{1}{2}B)^2 =$ $= \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$ en dit is een cirkel, met middelpunt $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$, mits $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$ positief is. In het geval dat $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C < 0$ is spreekt men toch van een cirkel, en wel van een imaginaire cirkel, terwijl in het geval $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C = 0$ men van nulcirkel spreekt. In het tweede geval zijn er geen punten die aan de vergelijking voldoen en in het derde geval juist één, en wel $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$, dus in zekere zin een cirkel met straal nul.

Opg.10. Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats der punten waarvoor de afstanden tot de punten A(a,0) en B(b,0) zich verhouden als 2 : 3. Is dit een cirkel? Zo ja, wat is het middelpunt, zo nee, hoe laat is het dan?

Opg.11. Bepaal middelpunt en aard van de volgende cirkels:

1e $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ 2e $4x^2+4y^2-12x+16y+25=0$

3e $144x^2+144y^2-216x-120y-38=0$

We zullen nu de vergelijking opstellen van de cirkel gaande door de punten $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ en $P_3(x_3,y_3)$. De vergelijking is in ieder geval van de gedaante $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$

Hierin zijn A,B,C en D nog nader te bepalen en wel zo, dat $A(x_1^2+y_1^2)+Bx_1+Cy_1+D=0$

d.w.z. zo dat P_1 er op ligt en natuurlijk ook $A(x_2^2+y_2^2)+Bx_2+Cy_2+D=0$

en $A(x_x^2+y_3^2)+Bx_3+Cy_3+D=0$.

Het punt P(x,y) ligt alleen dan of de cirkel als deze vier homogene vergelijkingen in vier onbekenden A,B,C en D een oplossing hebben, dus als

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ geldt. Men kan ook uitgaan

van deze determinant en opmerken, dat het een tweedegraads vorm in x en y is, die aan de eisen voldoet en die nul wordt voor P_1, P_2 en P_3 (2 gelijke rijen). Tenslotte wanneer men A,B,C en D uit de laatste drie vergelijkingen had opgelost en in de eerste vergelijking ingevuld, dan had men (op een evenredigheidsfactor na) hetzelfde resultaat gevonden. Er kan echter iets misgaan n.l. als de coefficient van (x^2+y^2) nul is, we hebben dan geen tweedegraadsvergelijking. Men noemt dit wel een ontaarde cirkel (of rechte lijn). Deze coefficient is $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ en de voorwaarde voor het ontaard zijn is dus $\Delta = 0$, de betekenis hiervan zullen we in de volgende paragraaf zien.

Opg.12. Bepaal de cirkel door 1e. (0,-2),(-2,1) en (1,3)
2e. (0,0),(a,0) en (0,b).

Opg.13. Vormen de punten (-3,4),(1,-4),(4,-3) en (6,1) een koordenvierhoek en de punten (0,0),(6,0),(1,-5) en (5,1)?

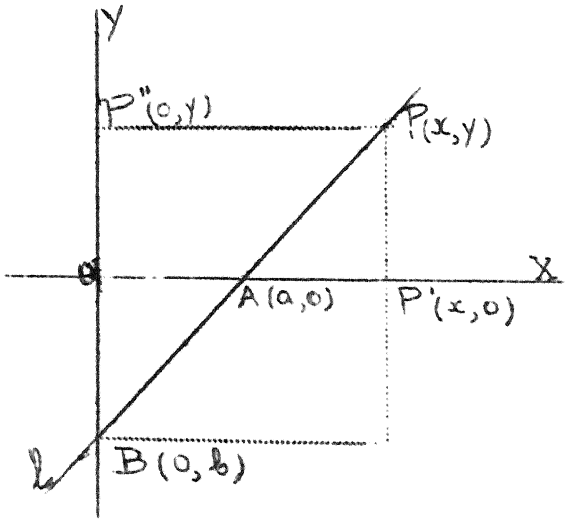
Opg.14. Bepaal de cirkel met middelpunt $(1\frac{1}{2},0)$ rakende aan de x-as.

§8. De rechte lijn.

Alvorens door te gaan met de cirkels, zullen we de rechte lijn behandelen. We zullen bewijzen dat de punten van een rechte lijn voldoen aan een lineaire vergelijking.

Om te beginnen is dit duidelijk voor een lijn evenwijdig aan de y-as. Laat (a,0) het snijpunt zijn met de x-as, dan geldt voor elk punt P(x,y) van die lijn x = a. Evenzo voor een lijn // x-as geldt y = b als (0,b) het snijpuntmet de y-as is. Voor een lijn l door 0 niet // y-as heeft mon, als φ de hoek met de x-as voorstelt, dat voor een punt P(x,y) van l geldt $y = x \operatorname{tg} \varphi$.

Laat nu l een lijn zijn niet door 0 en niet // x- of y-as. Stel A(a,0) is het snijpunt van l met de x-as en B(0,b) dat met de y-as. Zij P(x,y) willekeurig ander punt van l, dan geldt (zie opg.6) (PAB)=(P'A'B')=(P"A"B") (projecties op x- en y-as). Er geldt echter daar A"=B'=0



$(P'A'B') = \frac{P'B'}{B'A'} = \frac{0-x}{a-0}$ en $(P"A"B") = \frac{b-y}{0-b}$

dus

$$\frac{-x}{a} = \frac{b-y}{-b} \quad \text{of} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Men kan ook opmerken, dat als φ weer de hoek met de x-as voorstelt, dat dan $y-b = x \operatorname{tg} \varphi$ geldt.

In alle gevallen is nu een lineaire vergelijking gevonden, dus een vergelijking van de vorm Ax+By+C=0 waarbij A en B niet beide nul zijn. De lijn is //x-as als A = 0 en //y-as als B = 0, terwijl als $A \neq 0$ de hoek φ met de x-as voldoet aan $-\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \varphi$. In het laatste geval kunnen we dus schrijven y = mx+n, m(=tg φ) heet de richtingscoefficient.

Opg.15. Bewijs dat omgekeerd elke vergelijking van de vorm Ax+By+C=0 met A en B niet beide nul een rechte voorstelt.

Een uiterst belangrijk en veel voorkomend kwestie is het opstellen van de vergelijking van een rechte door twee gegeven punten $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$. We weten nu dat het een lineaire vergelijking Ax+By+C=0 is. Hiervoor moet dus gelden

$Ax_1+By_1+C=0$ en
$Ax_2+By_2+C=0$.

Voor een punt P(x,y) van de rechte moet dus gelden

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

aangezien de drie homogene vergelijkingen met de drie onbekenden A,B en C een oplossing hebben.

Ook hier verkrijgen we de vergelijking door eliminatie van de coefficienten. Hier zien we de oorzaak van het ontaarden van de cirkel, de

drie punten liggen dan op een rechte: De ontaarde cirkel is blijkbaar de rechte door de drie punten.
Een andere vorm voor de vergelijking van de rechte door $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ is $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Om te beginnen stelt dit een rechte voor (lineair in x en y) en de punten P_1 en P_2 voldoen kennelijk. We kunnen dit ook rechtstreeks inzien door de invariantie van (PP_1P_2) bij projectie op x- en y-as. Een prettig bijzonder geval is $P_1 = O(\infty)$.
De boven afgeleide vergelijking van de rechte door $(a,0)$ en $(0,b)$ dus $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de vergelijking op de assegmenten.
Is van een lijn de richtingscoefficient m en een punt $P_o(x_o,y_o)$ gegeven dan luidt de vergelijking $y = m(x-x_o)+y_o$.

Opg.16. Bewijs dit.

Opg.17. Bepaal de vergelijking van de lijn door 1° (0,4) en (5,1).
2^e (1,1) en (1,1000.000) 3^e (0,0) en (2,3) 4^e $(0,\frac{1}{2})$ en $(\frac{1}{3},0)$.

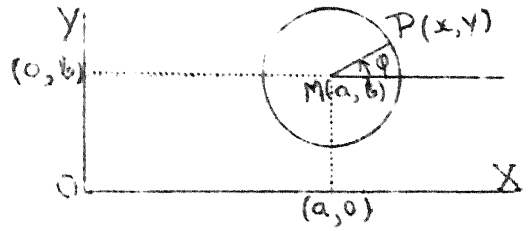
Opg.18. Bepaal de vergelijking van de rechte 1^e door (0,1) met richtingscoefficient 3. 2^e door (0,0) met een hoek van 60° met x-as! 3^e (3,4) // y-as.

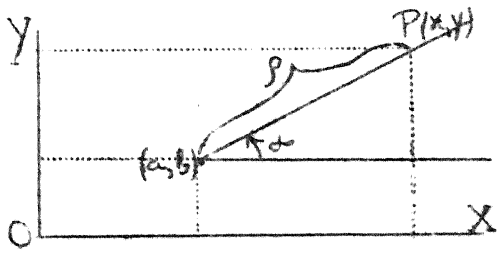
Opg.19. Hoe luiden de vergelijkingen van de zijden van de driehoek (2,3), (-1,1)(4,-5)? Wat zijn de richtingscoefficienten van de zijden?

§ 9. Parameter voorstelling.

Laat gegeven zijn $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$. Wat zijn nu de coordinaten van het punt $P(x,y)$ op de lijn door P_1 en P_2, zodanig dat $(P_1P_2P)=\lambda$?

Projecteer P_1P_2P op x- en y-as, dan is $(P_1'P_2'P)=\lambda$ en dus $x=\frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$ evenzo $y=\frac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}$. Deze formules gaan ook door als de lijn P_1P_2 evenwijdig aan een der assen is. Hier hebben we de coordinaten van een punt van de rechte uitgedrukt in die van twee van zijn punten en een parameter (coordinaat op die rechte). Dit is een zgn. parametervoorstelling van de rechte. Eliminatie van de parameter geeft de vergelijking van de rechte, en dus tevens een nieuw bewijs van de lineairiteit van die vergelijking.





Ook voor de punten van een cirkel kunnen we een parameter-voorstelling geven. Stel middelpunt van de cirkel is $M(a,b)$ en de straal zij r. Neem als parameter de hoek φ die de radius met de x-as maakt, dan geldt

$$x = a+r\cos\varphi \quad \text{en}$$
$$y = b+r\sin\varphi .$$

Voor een lijn die door (a,b) gaat en een hoek α met de x-as maakt geldt de volgende parameter-voorstelling: $x = a+\rho\cos\alpha$

$$y = b+\rho\sin\alpha .$$

Hier is ρ de parameter en tevens weer coördinaat op de lijn.
De parameter behoeft niet altijd een duidelijke meetkundige betekenis te hebben. Zo is het niet direct duidelijk wat de parameter φ voorstelt in de voorstelling van de ellips $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ met $x = a \cos\varphi$ en $y = b \sin\varphi$.
Wij kunnen vooral bij vraagstukken vaak met vrucht gebruik maken van parameter voorstellingen.

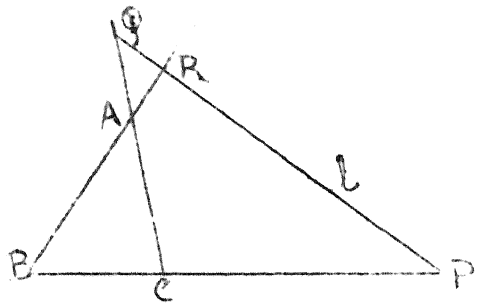
§10. Stellingen van Menelaos en Ceva.

Als toepassing zullen we de stelling van Menelaos bewijzen.
Stelling. Laten A (a_1,a_2), B (b_1,b_2) en C (c_1c_2) de hoekpunten van een driehoek zijn en laat de lijn l de zijden AB, BC, en CA resp. snijden in R (r_1,r_2), P (p_1,p_2) en Q (q_1,q_2), dan is
(ABR) (BCP)(CAQ) = -1.
Bewijs. Stel (ABR) = ν, (BCP) = λ en (CAQ) = μ dan geldt

$$p_1 = \frac{c_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda}, \quad p_2 = \frac{c_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda}$$

$$q_1 = \frac{a_1 + \mu c_1}{1 + \mu}, \quad q_2 = \frac{a_2 + \mu c_2}{1 + \mu}$$

$$r_1 = \frac{b_1 + \nu a_1}{1 + \nu}, \quad r_2 = \frac{b_2 + \nu a_2}{1 + \nu}$$



P, Q en R zullen op een rechte liggen als

$$\begin{vmatrix} \frac{c_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda} & \frac{c_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda} & 1 \\ \frac{a_1 + \mu c_1}{1 + \mu} & \frac{a_2 + \mu c_2}{1 + \mu} & 1 \\ \frac{b_1 + \nu a_1}{1 + \nu} & \frac{b_2 + \nu a_2}{1 + \nu} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deze determinant is gelijk aan

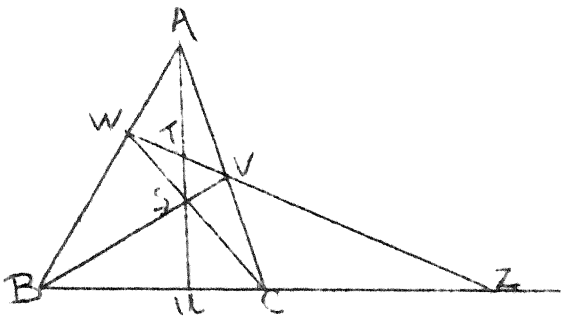
$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\lambda}{1 + \lambda} & \frac{1}{1 + \lambda} \\ \frac{1}{1 + \mu} & 0 & \frac{\mu}{1 + \mu} \\ \frac{\nu}{1 + \nu} & \frac{1}{1 + \nu} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_c & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Daar A, B en C niet op een rechte liggen is de tweede factor niet nul. De eerste factor is gelijk aan $\frac{\lambda\mu\nu + 1}{(1 + \ )(1 + \ )(1 + \ )}$,

De stelling van Ceva luidt: Als $A(a_1a_2)$, $B(b_1b_2)$ en $C(c_1c_2)$ de hoekpunten zijn van een driehoek, S een willekeurig punt (niet op de zijden) en als AS, BS en CS resp. BC, CA en AB snijden in U, V en W dan is $(ABW) \cdot (BCU) \cdot (CAV) = 1$.
Het bewijs van de stelling van Ceva vereist meer rekenwerk.

Opg. 20. Bewijs de stelling van Ceva door toepassing van de stelling van Menelaos op de drie hoeken BVC en BVA resp. met de transversalen UA en WC.

Wij zullen de stelling aantonen door te bewijzen dat, als Z het snijpunt van WV met BC is, $(BCUZ) = -1$ (harmonisch viertal).

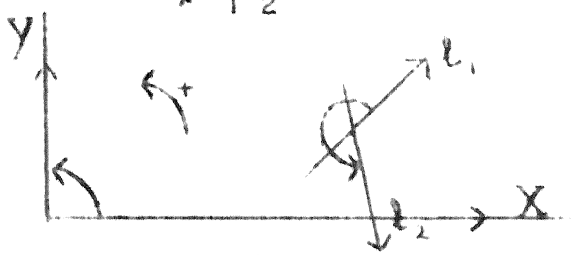


Daar de dubbelverhouding invariant is t.o.v. centrale projectie hebben we $(BCUZ) = (WVTZ)$ projectie op WV met A als centrum (T snijpunt AU en VW), en ook $(WVTZ) = (CBUZ)$, (projectie terug met S als centrum).
Dus $(BCUZ) = (CBUZ)$, maar als $(BCUZ) = d$, dan is (zie pag. 4) $(CBUZ) = d^{-1}$, dus $d = d^{-1}$ en $d = \pm 1$
We moeten hier -1 hebben, daar (BCU) en(BCZ) verschillend teken hebben.
Volgens Menelaos $(ABW)\,(BCZ)\,(CAV) = -1$, dus door $\dfrac{(BCU)}{(BCZ)} = -1$ geldt $(ABW)\,(BCU)\,(CAV) = 1$.

Opg. 21. Bewijs dat $Z\left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \dfrac{a_2 + c_2 + b_2}{3}\right)$ op elke der zwaartelijnen van de driehoek $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ en $C(c_1,c_2)$ ligt.

§ 11. Gerichte hoeken.

We zullen eerst het begrip gericht plat vlak invoeren. Hieronder verstaan we een platvlak met een gegeven(positieve) draairichting. Onder de gerichte hoek tussen de gerichte lijnen l_1 en l_2 verstaat men de hoek, waarover men l_1 in de gegeven draairichting moet draaien om l_1 met l_2 (ook qua richting) te laten samenvallen.
Notatie: $\sphericalangle\, l_1l_2$



Bij een gegeven coördinatenstelsel kiest men de positieve draaiing gewoonlijk zodanig dat de hoek tussen de x-as en y-as 90° wordt.

Opg. 22. Bewijs dat $\sphericalangle\, l_1l_2 + \sphericalangle\, l_2l_3 = \sphericalangle\, l_1l_3$ geldt voor alle gerichte rechten l_1, l_2, l_3.
Dus i.h.b. (zie opg.2) $\sphericalangle\, l_1l_1 = 0$ en $\sphericalangle\, l_1l_2 = -\sphericalangle\, l_2l_1$.

Opg. 23. Bewijs dat, als A en B punten zijn op de gerichte lijn l en A' resp. B' de projecties op de gerichte lijn l', dan geldt: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \cos \sphericalangle ll'$.

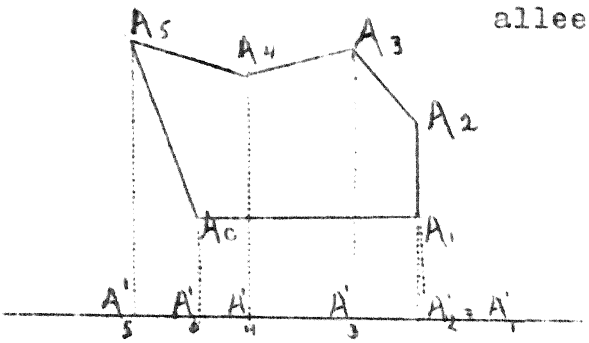
Opg. 24. Bewijs dat dit onafhankelijk is van de positieve zin van l en l'.

Beschouw nu n punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en noem l_i de verbindingslijn van A_i en A_{i+1} ($i=1 \ldots n$ en $A_{n+1} = A_0$).

Laat l een willekeurige lijn zijn, dan volgt direct uit opg. 23, 24 en 1. dat

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cos \sphericalangle l_1 l + \overrightarrow{A_2A_3} \cos \sphericalangle l_2 l + \ldots + \overrightarrow{A_nA_0} \cos \sphericalangle l_n l = 0$$

geldt. Hieruit volgt direct dat de projectie van een gebroken lijn alleen afhangt van de plaats der eindpunten. Van deze eigenschap zullen we ons vaak bedienen o.a. bij het afleiden van de coördinaten transformatie-formules.



§ 12. De hoek tussen twee rechten.

Onder de hoek tussen de rechten l_1 en l_2 verstaat men de kleinste hoek waarover l_1 in positieve richting gedraaid moet worden om met l_2 samen te vallen. Notatie $< l_1 l_2$.

Opg. 25. Bewijs dat $< l_1 l_2 = 180^\circ - < l_2 l_1$ en dat $\sphericalangle l_1 l_2 = < l_1 l_2 + k\,180$, waarbij k geheel.

Uit opg. 25 volgt dat $tg < l_1 l_2 = tg \sphericalangle l_1 l_2 = tg(\varphi_2 - \varphi_1)$, als φ_1 en φ_2 de hoeken zijn die l_1 resp. l_2 met de x-as maken.

Zijn de richtingscoëffiniënten van l_1 en l_2 resp. m_1 en m_2, dan geldt dus $tg < l_1 l_2 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ en $ctg < l_1 l_2 = \dfrac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$.

De rechten zijn evenwijdig als $m_1 = m_2$, en zij staan dan loodrecht op elkaar als $m_1 m_2 = -1$.

Zijn de vergelijkingen van de lijnen resp.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{en} \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

dan hebben we $tg < l_1 l_2 = \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$

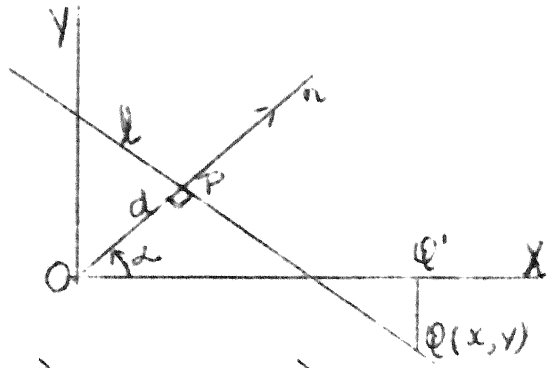
Opg. 26. Bewijs dat de hoogtelijnen van een driehoek door een p... gaan.

Opg. 27. Bewijs dat de middelloodlijnen door een punt gaan.

Opg. 28. Wat zijn de hoeken van de driehoek (0,-3) (1,2) en (4,3).

§13. Afstand van punt tot rechte.

We projecteren de oorsprong op een rechte l, de projectie zij P en de rechte OP zij n (OP is de positieve richting).



De gerichte hoek tussen x-as en n zij α, dus die tussen y-as en n is $\alpha - 90^\circ$.

Neem nu een willekeurig punt Q (x,y) op l (Q' is de projectie op de x-as) De gebroken lijn OQ'Q noemt men wel de coördinatentrek van Q. De afstand OP zij d, dan geldt volgens §11

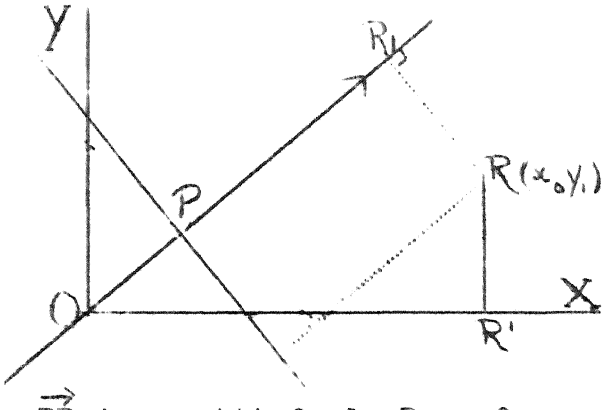
$\overrightarrow{OQ'} \cos\alpha + \overrightarrow{Q'Q} \cos(\alpha - 90^\circ) + \overrightarrow{QP} \cos 90^\circ = \overrightarrow{OP}$ dus

$x \cos\alpha + y \sin\alpha = d$. Dit is de zg. normaalvorm van Hesse.

De formule is ook correct als d = 0, hoewel dan de richting van n niet vast ligt.

Een vergelijking is op de normaalvorm te brengen door deling door $\sqrt{a^2 + b^2}$. Zij luidt dan $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ als $c \leqslant 0$

De afstand van O tot de rechte is dus $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$.



Om de afstand van een willekeurig punt $R(x_1,y_1)$ tot l te bepalen projecteren we de coördinatentrek van R op n. De projectie van R op n zij R_1, dan geldt

$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = OR_1 = OP + PR_1$

of $PR_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - d$.

$\overrightarrow{RP}$ is positief als R en O aan dezelfde zijde van l liggen, nul als R op l ligt en negatief als R en O aan weerskanten van l liggen.

Schrijft men de vergelijking van l afgekort $l(x,y) = d - x \sin\alpha - y \cos\alpha$ dan is de afstand $\overrightarrow{RP}$ gelijk aan $l(x_1,y_1)$.

Voor de algemene vergelijking van de rechte $l(x,y) = ax + by + c = 0$

Hebben we $\overrightarrow{RP} = \frac{l(x_1,y_1)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{c}{|c|}$

De vergelijking van de bissectrice van $l_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_2$ en $l_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$, vinden we door de afstanden van P(x,y) tot l_1 en l_2 gelijk te stellen. Dus

$$\frac{l_1(x,y)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \frac{c_1}{|c_1|} = \frac{\pm\, l_2(x,y)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \frac{c_2}{|c_2|}$$

of $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\, l_2(x,y) = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\, l_2(x,y) = 0$

Opg.29. De bissectrices van een driehoek gaan door een punt.

Opg. 30. Bereken de oppervlakte van de driehoek (1,2), (3,-1), (-1,-4).

§ 14. Snijpunten van lijnen.

Het snijpunt van de lijnen $l_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en $l_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$, vindt men door de vergelijkingen op te lossen. We onderscheiden drie gevallen

1e. Rang van de coëfficiënten matrix A $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$ is twee. Er is dan een snijpunt en de hoek tussen de rechten nl. $\dfrac{\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right|}{a_1a_2 + b_1b_2}$ is dan niet nul.

2e. Rang van A is één en evenals de rang van B = $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|$

Er zijn oneindig veel oplossingen en $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, zodat de lijnen identiek zijn.

3e. Rang van A is één en van B is twee.

De vergelijkingen zijn strijdig, dus geen snijpunt, de hoek tussen l_1 en l_2 is nul, of te wel de lijnen zijn evenwijdig. Ze zijn verschillend daar $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

De lijnen $l_1(x,y) = 0$ en $l_2(x,y) = 0$ en $l_3(x,y) = a_3x + b_3y + c_3$ zijn concurrent (hebben gemeenschappelijk snijpunt) als de drie vergelijkingen in twee onbekenden een oplossing hebben.

Nodig is dat $\left| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right| = 0$ geldt.

Zijn geen twee lijnen evenwijdig dan is dit ook voldoende.
Gaan de lijnen l_1, l_2 en l_3 door één punt, dan is de bovenstaande determinant nul en er bestaat dus een lineair verband tussen de rijen. We hebben dan

$$\lambda_1 l_1(x,y) + \lambda_2 l_2(x,y) + \lambda_3 l_3(x,y) \equiv 0 \text{ (voor alle x en y)}$$

voor zekere listig gekozen λ_1, λ_2 en λ_3.

Zijn l_1 en l_2 verschillend dan is $\lambda_3 \neq 0$ en l_3 is te schrijven als

$l_3(x,y) = \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y) = 0$ (met $\lambda = \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_3}$ en $\mu = \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_3}$

Omgekeerd stelt elke lineaire vergelijking van de vorm

$l_3(x,y) = \lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y) \overset{=0}{\vee}$ een rechte voor door het snijpunt van l_1 en l_2, immers $l_3(x,y)$ wordt nul voor dit snijpunt, daar $l_1(x,y)$ en $l_2(x,y)$ dat beide worden.

Men noemt de verzameling rechten voorgesteld door $\lambda l_1(x,y) + \mu l_2(x,y) = 0$ een lijnenwaaier. De verhouding van λ en μ is de parameter (homogene coördinaat)in de waaier . De verzameling bevat ∞^1 rechte lijnen.
Het gebruik van een inhomogene parameter bijv. $l_1(x,y) + \lambda l_2(x,y) = 0$, heeft analoge bezwaren als bij de deelverhouding; de lijn $l_2(x,y)$ ontbreekt dan in de waaier.

Opg. 31. Bepaal de vergelijking van de rechte $\perp$ op de rechte $5x - y + 17 = 0$ en door het snijpunt van de lijn door $(\frac{1}{2},0)$ en $(0,-1/3)$ en de bissectrice van x- en y-as.

Opg. 32. Bepaal de snijpunten van

$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 3x - y + 3 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \text{en ook van} \qquad \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Opg. 33. Bewijs dat het zwaartepunt, het hoogtepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek op één rechte liggen. (Rechte van Euler).

Opg. 34. Laat H het hoogtepunt zijn van $\triangle$ ABC en H' het spiegelpunt van H t.o.v. AB. Bewijs dat de voetpunten van de loodlijnen uit H' op de zijden collineair zijn.

Opg. 35. Gegeven $\triangle$ ABC, waarin M het midden is van AB en N het midden van CM en P het snijpunt van AC en BN. Bewijs dat $CP = 1/3CA$.

Opg. 36. De verbindingslijnen van de middens van overstaande zijden van een veelhoek delen elkaar middendoor.

§ 15 Oppervlakte van een driehoek.

Wij zijn nu in staat de formule af te leiden voor de oppervlakte van een driehoek met hoekpunten $(A(a_1,a_2), B(b_1,b_2)$ en $C(c_1,c_2))$.

De lijn BC heeft tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De afstand van A tot BC is dus

$$\pm \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_2 & 1 \\ c_2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ c_1 & 1 \end{vmatrix}^2}}$$

De lengte van BC is gelijk aan $\sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2}$.
De oppervlakte wordt dus gelijk aan

$$\left| \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \right| .$$

§ 16. Cirkelbundels.

Opg. 37. Bepaal de vergelijking van de cirkel gaande door de oorsprong en de snijpunten van de cirkels $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 - x - y = \frac{1}{2}$.

Om het bovenstaande vraagstuk op te lossen behoeft men niet de snijpunten van beide cirkels te bepalen.
Stel $C_1(x,y) = A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + D_1 = 0$ en
$C_2(x,y) = A_2(x^2 + y^2) + B_2x + C_2y + D_2 = 0$ zijn twee cirkels.
Beschouw nu $C_3(x,y) = \lambda C_1(x,y) + \mu C_2(x,y) = 0$. Deze vergelijking stelt een cirkel voor door de snijpunten $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ van $C_1(x,y) = 0$ en $C_2(x,y) = 0$; immers deze punten voldoen ten duidelijkste aan $C_3(x,y) = 0$. Maar ook omgekeerd als $C_3(x,y) = A_3(x^2 + y^2) + B_3x + C_3y + D_3 = 0$ een cirkel door de snijpunten van C_1 en C_2 is, dan laten zich een λ en een μ bepalen, zodanig dat
$C_3(x,y) = \lambda C_1(x,y) + \mu C_2(x,y)$.
Als nl. $P(x_0,y_0)$ een willekeurig punt is verschillend van P_1 en P_2, dan kunnen we $\bar{\lambda}$ en $\bar{\mu}$ zodanig bepalen dat $\bar{\lambda} C_1(x_0,y_0) + \bar{\mu} C_2(x_0,y_0) = 0$.
Nemen we nu voor $P(x_0,y_0)$ een punt van de cirkel $C_3(x,y) = 0$, dan heeft deze cirkel drie punten met de cirkel $\bar{\lambda} C_1(x,y) + \bar{\mu} C_2(x,y) = 0$ gemeen, zodat $C_3(x,y) = \rho(\bar{\lambda} C_1(x,y) + \bar{\mu} C_2(x,y)) = \lambda C_1(x,y) + \mu C_2(x,y)$ geldt met $\lambda = \rho\bar{\lambda}$ en $\mu = \rho\bar{\mu}$.

Men kan het voorgaande ook inzien door de drie vergelijkingen in drie onbekenden:

$$A_1\xi_1 + B_1\xi_2 + C_1\xi_3 = -D_1$$
$$A_2\xi_1 + B_2\xi_2 + C_2\xi_3 = -D_2$$
$$A_3\xi_1 + B_3\xi_2 + C_3\xi_3 = -D_3$$

te beschouwen.

Deze vergelijkingen hebben nl. twee oplossingen
$(x_1^2 + y_1^2), x_1, y_1$ en $(x_2^2 + y_2^2), x_2, y_2$, zodat de matrix

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{matrix} \right\|$$

de rang twee moet hebben.

Hieruit volgt dan weer $C_3(x,y) = \lambda C_1(x,y) + \mu C_2(x,y)$.

De verzameling van cirkels $\lambda C_1 + \mu C_2$ heet een cirkelbundel.

We zagen reeds dat door elk punt $P(x_0,y_0)$ ($\neq P_1, P_2$) van het vlak een exemplaar van de bundel gaat.

Aangezien bovenstaande beschouwingen zuiver algebraïsch van karakter zijn, is het volkomen inessentieel dat de getallen x_1, y_1, x_2, y_2 reëel zijn, zodat alle resultaten geldig blijven als we ook punten met complexe coördinaten toelaten. Een aanschouwelijke meetkundige plaats hebben deze punten niet, zodat men, in geval P_1 (en dus ook P_2) imaginair is, de bundel niet meetkundig kan interpreteren als verzameling van cirkels, die door twee gegeven punten gaan. De volgende § zal ons echter redden.

Opg. 38. Pas deze beschouwingen toe op opg. 37.

§ 17. Macht van punt t.o.v. cirkel.

$C(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ zij de genormeerde(de vergelijking heet genormeerd als de coëfficiënt van $x^2 + y^2$ gelijk is aan één) vergelijking van de cirkel en $P(x_0y_0)$ zij een willekeurig punt. Een (willekeurige) lijn l door P snijdt C in $S_1(x_1y_1)$ en $S_2(x_2y_2)$.

Wij zullen nu bewijzen dat $\overrightarrow{PS_1} \cdot \overrightarrow{PS_2} = C(x_0y_0)$.

Stel de hoek tussen l en x-as is φ , dan is

$$\overrightarrow{PS_1} \cdot \overrightarrow{PS_2} = \frac{x_1 - x_0}{\cos\varphi} \cdot \frac{x_2 - x_0}{\cos\varphi} .$$

Schrijf nu $C(x,y)$ als $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(x_0,y_0) = 0$, dan is $(x - x_0)^2 (1 + tg^2\varphi) + (x - x_0)D + C(x_0,y_0) = 0$

Hieruit volgt direct dat $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = \dfrac{C(x_0,y_0)}{1 + tg^2\varphi}$ dus

$\overrightarrow{PS_1} \cdot \overrightarrow{PS_2} = C(x_0,y_0)$. Men noemt $C(x_0,y_0)$ de macht van P t.o.v. C. Laten nu $C_1(x,y) = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en $C_2(x,y) = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ de genormeerde vergelijkingen zijn van de cirkels C_1 en C_2, dan is de meetkundige plaats van de punten die gelijke machten hebben t.o.v. beide cirkels de rechte lijn (ontaarde cirkel) $C_1(x,y) - C_2(x,y) = 0$. Deze rechte heet de machtlijn van beide cirkels. Nu bewijst men geheel analoog als in § 16 dat als $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ twee punten van de machtlijn zijn, dat zowel P_1 als P_2 gelijke machten hebben t.o.v. alle cirkels van de vorm $\frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{\lambda + \mu} = 0$ ($\lambda \neq -\mu$) en omgekeerd.
Ook in dit geval heet de verzameling cirkels een bundel.

Opg. 39. Bewijs dat hieruit volgt dat elk punt van de machtlijn gelijke machten heeft t.o.v. van alle cirkels van de bundel.

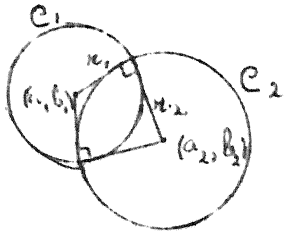
Opg. 40. Bewijs dat de macht van P t.o.v. een cirkel negatief is als P met het middelpunt samenvalt.

Opg. 41. Bewijs dat de macht van P t.o.v. een cirkel met middelpunt M en straal r gelijk is aan $PM^2 - r^2$.

Opg. 42. Bewijs dat de macht van een punt t.o.v. een cirkel dan en slechts dan negatief is als het punt binnen de cirkel ligt.

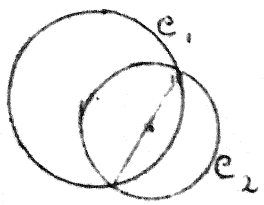
§ 18. Vervolg "Cirkelbundels".

Twee cirkels C_1 en C_2 snijden elkaar onder een hoek van 90° als de macht van het middelpunt van de ene cirkel t.o.v. de andere gelijk is aan het quadraat van de straal van die eerste cirkel.



Als $C_1(x,y) = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$ en $C_2(x,y) = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$ de cirkels zijn wordt de voorwaarde $C_1(a_2,b_2) = r_2^2 = -C_2(a_2,b_2)$ of meer symmetrisch geschreven $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Opg. 43. Bewijs dat de heek φ tussen de bovenstaande cirkels voldoet aan



$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - (a_1-a_2)^2-(b_1-b_2)^2}{2r_1r_2}$$

C_1 deelt C_2 middendoor als $C_1(a_2,b_2) = -r_2^2 = C_2(a_2,b_2)$.

Opg. 44. Bewijs dat alle cirkels die door $P(x_0,y_0)$ gaan en $C_1(x,y) = 0$ loodrecht snijden een bundel vormen.

Opg. 45. Bewijs dat alle cirkels door $P(x_0,y_0)$, die $C_2(x,y) = 0$ halveren een bundel vormen.

Opg. 46. Bewijs dat alle cirkels die $C_1(x,y) = 0$ loodrecht snijden en $C_2(x,y) = 0$ halveren een bundel vormen.

Opg. 47. Bewijs dat alle cirkels die $C_1(x,y) = 0$ en $C_2(x,y) = 0$ loodrecht .....

Opg. 49. Maak opg. 47 af en hoe zou opg. 48 luiden?

Een cirkel heeft in de normaalvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ drie parameters (er zijn ∞^3 cirkels). Een voorwaarde als in de vraagstukken 44 - 48 geeft een lineaire vergelijking in deze parameters, weswege de voorwaarde lineair heet. Door 2 lineaire voorwaarden zijn de coëfficiënten a, b en c niet eenduidig bepaald, maar er zijn ∞^1 oplossingen die een lineair compositum zijn van twee oplossingen a_1, b_1, c_1 en a_2, b_2, c_2, zodat de cirkel de vorm $\frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{\lambda + \mu} = 0$ krijgt.

Hieruit ziet men direct dat een bundel bepaald is door twee willekeurige exemplaren. Heeft men één lineaire voorwaarde dan zijn er ∞^2 oplossingen en men heeft als algemene oplossing de cirkel $C = \frac{\lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3}{\lambda + \mu + \nu} = 0$. Deze verzameling heet een net.

Het net bevat de bundels $\frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{\lambda + \nu}$, $\frac{\mu C_2 + \nu C_3}{\mu + \nu}$ en $\frac{\nu C_3 + \lambda C_1}{\nu + \lambda}$ met machtlijnen $C_1 - C_2 = 0$, $C_2 - C_3 = 0$ en $C_3 - C_1 = 0$. De zijnen gaan blijkbaar door één punt, het machtpunt van het net genaamd.

Opg. 50. Bewijs dat het machtpunt gelijke machten heeft t.o.v. elk exemplaar van het net.

§ 19. Vervolg "Cirkelbundels".

De middelpunten van de cirkels van de bundel met $C_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0$ en $C_2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$ als basis-exemplaren, liggen op een rechte, immers het zijn de punten $\left(\frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda b_1 + \mu b_2}{\lambda + \mu}\right)$. Deze rechte heet de centraal van de bundel. Zij staat loodrecht op de machtlijn.

Opg. 51. Bewijs dit.

Dit is in overeenstemming met het feit dat, als de cirkels C_3 en C_4 de cirkels C_1 en C_2 loodrecht snijden, elk exemplaar van de bundel $\lambda C_3 + \mu C_4$ elk exemplaar van de bundel $\lambda C_1 + \mu C_2$ loodrecht snijdt. De bundels noemen we orthogonaal toegevoegd. We kunnen dus om de cirkelbundels nader te onderzoeken, de x-as langs de centraal en de y-as langs de machtlijn kiezen. C_1 wordt dan $(x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0$ en voor C_2 mogen we $x = 0$ kiezen, immers $\lambda C_1 + \mu C_2 = (\lambda + \mu)C_1 - \mu(C_1 - C_2) = \bar{\lambda} C_1 + \bar{\mu} x$. Uitzondering? Een bundel zij nu $C_1 + 2x\lambda = 0$, dus $\bar{\lambda} = 1$ (hierdoor valt de y-as uit) dan is de vergelijking van een willekeurig exemplaar $(x - a)^2 + y^2 + 2\lambda x - r^2 = 0$, of $(x - a + \lambda)^2 + y^2 = r^2 - 2a\lambda + \lambda^2$. We onderscheiden nu drie gevallen, te weten $a < r$, $a > r$ en $a = r$.

1°. $a < r$. De snijpunten met de y-as zijn dan reëel nl. $P_1(0, +\sqrt{r^2 - a^2})$ en $P_2(0, -\sqrt{r^2 - a^2})$.
Er zijn geen (reële) nulcirkels in de bundel daar $r^2 - 2a\lambda + \lambda^2 = r^2 - a^2 + (a - \lambda)^2 > 0$ voor alle λ.
De bundel bestaat dus uit alle cirkels door P_1 en P_2. Basispunten.

2°. $r < a$. In dit geval zijn de snijpunten met de y-as imaginair of onbestaanbaar daar $r^2 - a^2 < 0$.
Er zijn dan echter wel reële nulcirkels en wel met middelpunten $\pm\sqrt{a^2 - r^2}, 0$. Dit zijn de zgn. grenspunten van de bundel.

3°. $a = r$. Dit is in zekere zin een overgangsgeval tussen 1° en 2°. De snijpunten met de y-as vallen samen in $(0,0)$ evenals de nulcirkels. Elk exemplaar $(x - a + \lambda)^2 + y^2 = (a - \lambda)^2$ raakt in 0 aan de y-as.

De orthogonaal toegevoegde bundel is:
$x^2 + (y - r)^2 - a^2 + 2\mu y = 0$, immers $x^2 + (y - r)^2 - a^2 = 0$ snijdt C_1 en y-as loodrecht evenzo $y = 0$. Heeft de bundel dus reële basispunten, dan heeft de orthogonaal toegevoegde bundel reële grenspunten (dezelfde punten) en omgekeerd. In het derde geval zijn de beide bundels van dezelfde soort.

Opg. 52. Welke cirkel gaat door de snijpunten der cirkels $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0$ en $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 17 = 0$ en heeft zijn middelpunt op $5x - 3y - 1 = 0$?

§20. Raaklijn aan cirkel.

We zullen de raaklijn bepalen in het punt (x_0, y_0) van de cirkel $C = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$. De raaklijn is de lijn door (x_0,y_0) zodanig dat het tweede snijpunt met C samenvalt met (x_0,y_0). Stel $y - y_0 = m(x - x_0)$ is een willekeurige lijn door (x_0,y_0) dan is dat snijpunt bepaald uit $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Daar (x_0,y_0) aan de eerste vergelijking voldoet kunnen we hiervoor schrijven

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2(x_0 - a)(x - x_0) + 2(y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

dit geeft na eliminatie van $y - y_0$

$$(x - x_0)\left\{(x - x_0)(1 + m^2) + 2(x_0 - a) + 2m(y_0 - b)\right\} = 0$$

Deze vergelijking heeft twee wortels x_0 als $m = -\dfrac{x_0 - a}{y_0 - b}$

en we vinden als raaklijn $(y - y_0)(y_0 - b) + (x - x_0)(x_0 - a) = 0$
Wij kunnen dit ook schrijven als

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - a)(y_0 - a) - r^2 = 0$$

Opg. 53. Bewijs dat de raaklijn loodrecht staat op de straal naar (x_0,y_0)

Opg. 54. Bewijs dat $A(xx_0 + yy_0) + B(x + x_0) + C(y + y_0) + D = 0$ de raaklijn in (x_0,y_0) is aan de cirkel $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$ (er geldt dus in ieder geval $A(x_0^2 + y_0^2) + 2Bx_0 + 2Cy_0 + D = 0$).

Opg. 55. Gegeven een cirkel in parameter voorstelling

$$x = a + r\cos\varphi$$
$$y = b + r\sin\varphi$$

Bewijs dat de vergelijking van de raaklijn in het punt met parameter φ_1 luidt:

$$(x - a)\cos\varphi_1 + (y - b)\sin\varphi_1 = r$$

De raaklijnen uit een punt aan een cirkel kan men op analoge wijze bepalen.

Opg. 56. Bepaal de raaklijnen uit $(-1,7)$ aan de cirkel $x^2 + y^2 = 25$ en uit $(1,1)$ aan de cirkel $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

§ 21. Poollijn en pool.

Stel C is een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ en $P(x_0,y_0)$ zij een punt verschillend van het middelpunt. Laat de lijn l door P de cirkel snijden in $S_1(x_1,y_1)$ en $S_2(x_2,y_2)$.
Op l is nu een punt $Q(x,y)$ te vinden zodanig dat $(PQS_1S_2) = -1$.
Wij zullen nu de meetkundige plaats bepalen van deze punten Q als l om P draait.
Stel $S(\xi, \eta)$ is een punt van l met $(PQS) = (\lambda, \mu)$ dan geldt

$$\xi = \frac{\lambda x + \mu x_0}{\lambda + \mu} \qquad \eta = \frac{\lambda y + \mu y_0}{\lambda + \mu}$$

S ligt op C als $(\lambda x + \mu x_0)^2 + (\lambda y + \mu y_0)^2 + A(\lambda x + \mu x_0)(\lambda + \mu) +$
$+ B(\lambda y + \mu y_0)(\lambda + \mu) + C(\lambda + \mu)^2 = 0$.
Voor de punten S_1 en S_2 geldt echter $(PQS_1S_2) = -1$ of
$\frac{\lambda_1}{\mu_2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0$ als $(PQS_i) = (\lambda_i,\mu_i)$ $(i = 1,2)$. Zodat de vierkantsvergelijking in $\frac{\lambda}{\mu}$ (of $\frac{\mu}{\lambda}$) tegengestelde wortels moet hebben dwz. de coëfficiënt van $\lambda\mu$ moet in bovenstaande vergelijking nul zijn.

Dus $xx_0 + yy_0 + A(x + x_0) + B(y + y_0) + C = 0$

Gaat men uit van $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ dan vindt men
$(x - a)(x_0 - a) + (y - a)(y_0 - a) - r^2 = 0$.

Opg. 57. Ga dit na.

De punten Q liggen dus op een rechte, die blijkbaar, als P op C ligt, de raaklijn is. Deze rechte heet de poollijn van P t.o.v. C en P heet de pool van de rechte t.o.v. C.
Als P buiten C ligt dan is niet elk punt van de poollijn een "punt Q". Wegens de symmetrie in x en x_0 (y en y_0) van de vergelijking van de poollijn hebben we direct de stelling: Als $R(x_1, y_1)$ ligt op de poollijn van $P(x_0,y_0)$ dan ligt P op de poollijn van R.
De punten P en R heten dan toegevoegd t.o.v. de cirkel.
De voorwaarde luidt:

$$x_0x_1 + y_0y_1 + A(x_0 + x_1) + B(y_0 + y_1) + C = 0.$$

Hieruit volgt direct dat, als $R_1(x_1,y_1)$ en $R_2(x_2,y_2)$ de snijpunten van de poollijn van $P(x_0,y_0)$ (t.o.v.C) met C zijn, de raaklijnen in R_1 en R_2 door P gaan. Dit zijn immers de poollijnen van R_1 en R_2.

Men kan de poollijn dus (als P buiten C ligt) opvatten als raakkoorde. Dit geeft tevens een methode om de raaklijnen uit P aan C te vinden. Men snijdt de cirkel met de poollijn en verbindt de snijpunten met P. Een onder direct gevolg is de

stelling: Doorloopt een punt P een rechte l dan draait de poollijn om een vast punt, de pool van l.

Dit is ook gemakkelijk in te zien door de poollijnen van

(x_0,y_0); (x_1,y_1) en $\left(\frac{\lambda x + \mu x_0}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda y_1 + \mu y_0}{\lambda + \mu}\right)$ te vergelijken.

We mogen als cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ nemen.

De poollijnen

$$\left.\begin{aligned} xx_0 + yy_0 - r^2 &= 0 \\ xx_1 + yy_1 - r^2 &= 0 \\ x\frac{\lambda x_1 + \mu x_0}{\lambda + \mu} + y\frac{\lambda y_1 + \mu y_0}{\lambda + \mu} - r^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

zijn kennelijk afhankelijk. Zij bepalen een punt als $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \neq 0$

dwz. als de lijn door (x_0,y_0) en (x_1,y_1) niet door het middelpunt gaat. Gaat de rechte wel door het middelpunt dan zijn de poollijnen alle evenwijdig. De pool van een lijn vindt men als snijpunt van de poollijnen van twee van zijn punten. Een lijn door het middelpunt heeft dus geen pool.

§ 22. Poolverwantschap.

Door een bepaalde cirkel is dus een correspondentie gelegd tussen de punten en lijnen van een vlak. Deze correspondentie heet poolverwantschap. De poolverwantschap is zodanig dat met drie collineaire punten drie concurrente lijnen corresponderen.

Er is een punt, nl. het middelpunt van de cirkel, dat geen poollijn heeft en er zijn ∞^1 lijnen die geen pool hebben, nl. alle lijnen door het middelpunt.

Stelling: Zijn l_0, l_1, l_2 en l_3 resp. de poollijnen van de (collineaire) punten P_0, P_1, P_2 en P_3, dan geldt $(P_0P_1P_2P_3) = (l_0l_1l_2l_3)$. De dubbelverhouding is dus in zekere zin invariant t.o.v. de poolverwantschap.

Bewijs: Kies de oorsprong in het middelpunt van de cirkel en kies de x-as zo dat geen der lijnen l_i $(i = 0,1,2,3)$ evenwijdig daarmee is.

Noem de coördinaten van P_i weer x_i,y_i $(i = 0,1,2,3)$.

Dan luidt de vergelijking van l_i $(i = 0,\ldots)$ $xx_i + yy_i - r^2 = 0$.

Noem de snijpunten van l_i met de x-as Q_i (i = ...) met coördinaten $(q_i,0)$ (....) dan geldt

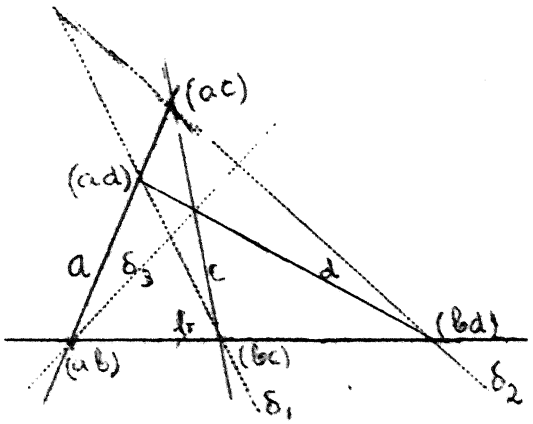
$$q_i = \frac{r^2}{x_i} .$$ Verder geldt $(l_0l_1l_2l_3) = (Q_0Q_1Q_2Q_3) =$

$$\frac{q_2 - q_0}{q_1 - q_2} : \frac{q_3 - q_0}{q_1 - q_3} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_0}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}} : \frac{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_0}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3}} = \frac{x_0 - x_2}{x_2 - x_1} : \frac{x_0 - x_3}{x_3 - x_1} = (P_0P_1P_2P_3)$$

De enige restrictie aan de vier punten opgelegd is, dat geen der punten met het middelpunt samenvalt. We hebben immers aan vier // lijnen ook een dubbelverhouding toegekend. De vier punten moeten natuurlijk op één lijn liggen, en dan gaan de vier lijnen automatisch door een punt of ze zijn alle evenwijdig.

§ 23. Dualiteit.

Er heerst dus bijna een dualiteit in het platte vlak in die zin, dat met elke stelling waarin alleen de begrippen punt, rechte, incidentie (punt op rechte en rechte door punt) en dubbelverhouding optreden een duale stelling correspondeert. Deze stelling ontstaat door de begrippen punt en rechte te verwisselen. De zo ontstane stelling is dan bij voorbaat bewezen. Er blijven echter uitzonderingsgevallen doordat niet elk punt een poollijn en niet elke lijn een pool heeft. Deze mankementen gaan we in een volgende § verhelpen door het invoeren oneigenlijke punten.
Eerst echter enige voorbeelden.

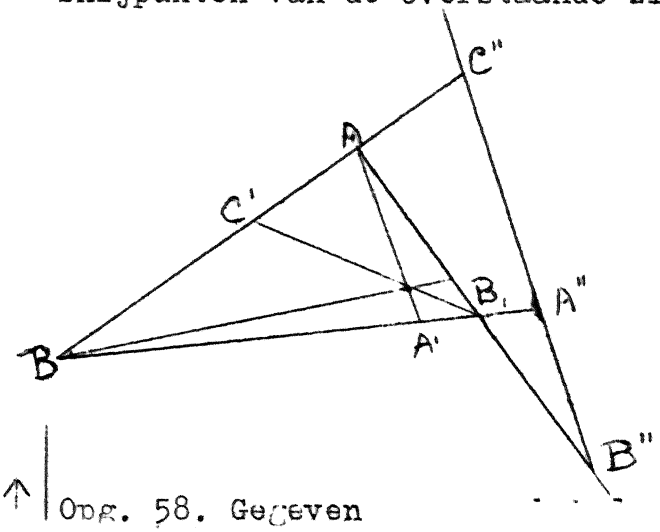


De figuur gevormd door vier lijnen (geen drie door een punt) en de $\binom{4}{2}=6$ snijpunten heet volledige vierzijde. de 4 lijnen heten de zijden en de 6 snijpunten de hoekpunten van de vierzijde. De (drie) verbindingslijnen van overstaande hoekpunten heten de diagonalen van de vierzijde.

Stelling: Op elke diagonaal scheiden de beide hoekpunten de snijpunten met de andere diagonalen harmonisch en door elk hoekpunt scheiden de beide zijden de diagonaal door dat hoekpunt en de verbindingslijn (van dat hoekpunt) met het snijpunt van de andere diagonalen harmonisch.

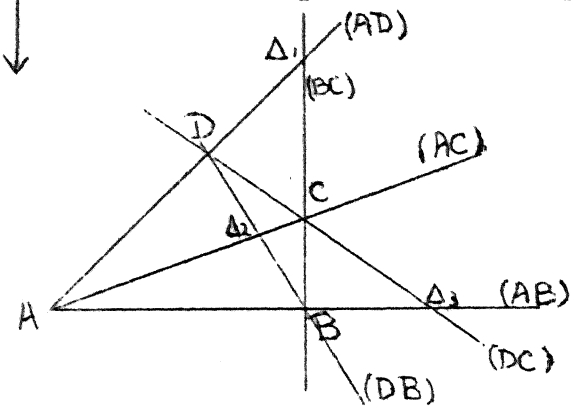
Opmerking: geen twee zijden mogen evenwijdig zijn, daar er anders snijpunten verdwijnen.

Duaal tegenover volledige vierzijde staat volledige vierhoek.
Dit is de figuur gevormd door vier punten (geen drie op een rechte) en de $\binom{4}{2} = 6$ verbindingslijnen. De vier punten heten de hoekpunten en de 6 verbindingslijnen heten de zijden van de vierhoek. De (drie) snijpunten van de overstaande zijden heten de diagonaalpunten.



Stelling: Door elk diagonaalpunt scheiden de beide zijden de verbindingslijnen met de andere diagonaalpunten harmonisch en op elke zijde scheiden de beide hoekpunten het diagonaal punt (op die zijde) en het snijpunt van die zijde met de verbindingslijn van de andere diagonaalpunten harmonisch.

Opg. 58. Gegeven
Δ ABC en een punt S (niet op één der zijden) AS snijdt BC in A', BC snijdt CA in B' en CS snijdt AB in C', terwijl A" het vierde harmonische punt is van BC en A', cyclisch B" en C".
Bewijs, bv. met behulp van Ceva en Menelaos, dat A", B" en C" collineair zijn. De rechte door A", B" en C" heet de harmonikaal van S t.o.v. ABC.



Opg. 59. Dualiseer bovenstaande stelling.

Een stelling die gelijk is aan haar duale heet zelfduaal.

§ 24. Oneigenlijke elementen.

We zullen het volgende spraakgebruik invoeren: in plaats van twee lijnen l en m zijn evenwijdig of l en m hebben de richting gemeen, zullen we zeggen l en m hebben een oneigenlijk punt gemeen.
Elke lijn krijgt zodoende één en slechts één oneigenlijk punt erbij.
Voortaan verstaan we onder punt, zowel "gewoon" punt als oneigenlijk punt. Ter onderscheiding zullen we de punten in gewone zin eigenlijk noemen.
We zullen nu van enige axioma's nagaan in hoeverre zij hun geldigheid behouden als we de oneigenlijke punten ook in de beschouwing betrekken.
Om te beginnen het axioma: Door twee punten gaat één en slechts één rechte. Dit geldt voor twee eigenlijke punten.

Ingeval één punt eigenlijk is en één oneigenlijk geldt het ook en wel volgens het gg.5e Postulaat van Euclides, nl. dat door een punt buiten een rechte één en slechts één rechte gaat evenwijdig met die rechte.
Ingeval beide punten oneigenlijk zijn maken we het axioma geldig door af te spreken, dat alle oneigenlijke punten op een (oneigenlijke) rechte zullen liggen, die we de oneigenlijke rechte zullen noemen.
We zullen een "goeie ouwe" rechte weer eigenlijk noemen.
We hebben geen moeilijkheden met de beide existentie axioma's.
Elke rechte bevat minstens twee punten en er zijn minstens drie niet collineaire punten. Het beruchte vijfde postulaat geldt echter niet meer. Wel geldt het duale van het eerste axioma nl. twee lijnen hebben één en slechts één snijpunt. De zo ontstane meetkunde heet projectief, omdat zij invariant is t.o.v. centrale projectie.

Wij moeten nu de tot nu toe ingevoerde begrippen nog definieren voor oneigenlijke punten. Het begrip afstand van A tot B krijgt geen betekenis, als één der punten oneigenlijk is.
Het begrip deelverhouding zullen we niet definieren voor drie oneigenlijke punten. Zijn van de drie collineaire punten A, B en P bv. A en B eigenlijk en P oneigenlijk, dan definieren we

$$(ABP) = -1, \quad (APB) = (0,1) \text{ en } (PAB) = (1,0)$$

Opg. 60. Bewijs dat de deelverhouding invariant is t.o.v. parallelprojectie.

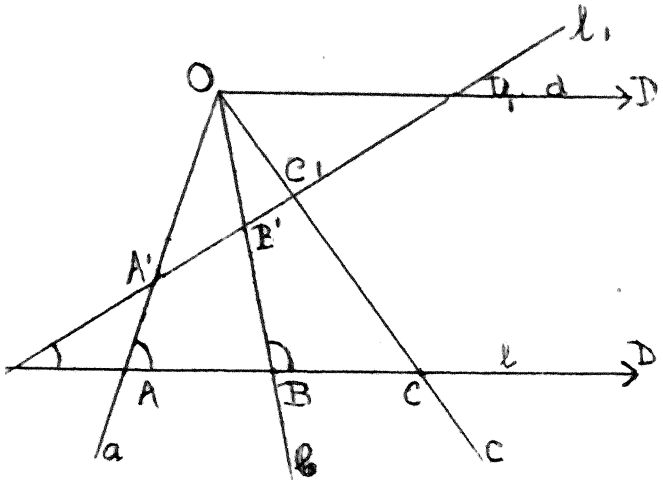
Opg. 61. Bewijs dat de stelling van Menelaos geldig blijft als de transversaal één of meer zijden in oneigenlijke punten snijdt.

We hebben nu tevens bereikt dat elke reële verhouding van λ en μ (dus niet beide nul) als deelverhouding optreedt.
De definitie (ABCD) = (ABC) : (ABD) kan men nu aanhouden voor punten van een eigenlijke rechte.
Voor punten A, B, C en D van de oneigenlijke rechte definieren we (ABCD) = (OA, OB, OC, OD), waarbij O een eigenlijk punt is.

Opg. 62. Bewijs dat deze definitie onafhankelijk is van de keuze van het punt O.

De stelling dat de dubbelverhouding invariant is t.o.v. parallelprojectie blijft geldig. Bewijs:

Gegeven A, B, C en D op l en A', B', C' en D' zijn de projectie van O op l'. Is O oneigenlijk dan betreft het parallelprojectie en de stelling volgt uit de invariantie van de deelverhouding.
Zijn l en l' beiden eigenlijk dan blijft er alleen iets te bewijzen, als één der punten, bv. D, oneigenlijk is. (zie figuur).



We moeten nu bewijzen dat
(ABCD)=-(ABC) = (A'B'C'D').
We weten reeds dat

$$(A'B'C'D') = \frac{\sin ac}{\sin cb} : \frac{\sin ad}{\sin db} =$$

$$\frac{\sin ac}{\sin cb} : \frac{\sin al}{\sin ld} = \frac{\sin ac}{\sin cb} : \frac{OB}{AO} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}OC \cdot AO \sin ac}{\frac{1}{2}OC \cdot OB \sin cb} = \frac{AC}{CB} = -(ABC)$$

Opg. 63. Bewijs de overige gevallen.

Opg. 64. Gegeven de rechte l met de eigenlijke punten A en B er op. M is het midden van AB en M' is het oneigenlijke punt van l. Bewijs dat AB en MM' harmonische paren zijn.

Opg. 65. Bewijs dat de bissectrices van een hoek de benen harmonisch scheiden.

§25. Dualiteit (vervolg).

Uit opg. 64 volgt direct dat het middelpunt van een cirkel nu een poollijn heeft gekregen en wel de oneigenlijke rechte. Ook een rechte door dat middelpunt heeft thans een pool, nl. het oneigenlijke punt van de loodlijnen. Hierdoor is de dualiteit zonder uitzondering geldig, zodat in zekere zin het onderscheid tussen punten en lijnen hier vervalt. In de projectieve meetkunde verliezen de begrippen afstand en hoek hun absolute betekenis. De begrippen incidentie en dubbelverhouding blijven echter behouden, daar deze invariant zijn t.o.v. centrale projectie. De oneigenlijke elementen hebben in de projectieve meetkunde geen speciale betekenis. Zij zijn gelijkwaardig met de eigenlijke.
Wil men terug van de projectieve meetkunde naar de "school"-meetkunde, dan kan men beginnen met een (willekeurige) rechte oneigenlijk te noemen. Lijnen heten dan evenwijdig als ze elkaar op deze rechte snijden. Aan het "vijfde postulaat" is dan automatisch voldaan.
In de zo ontstane meetkunde, die affien heet, moet men dan nog een geschikte maat invoeren om de Euclidische meetkunde te verkrijgen.

§26. Homogene Cartesische coördinaten.

De rechte lijn.

We zullen de oneigenlijke elementen ook coördinaten geven. De gewone afstandscoördinaten zijn zonder meer niet geschikt, daar met elk reëel getal al een punt correspondeert.

De verhoudingscoördinaten geven aan het oneigenlijke punt de coördinaat -1. Eén van de basispunten van het coördinatenstelsel heeft dan geen coördinaat. Dit euvel hebben we in § 3 verholpen door de deelverhouding homogeen te schrijven. Dit kan ook met de afstandscoördinaten.
Zij op de rechte l een afstandscoördinatenstelsel gegeven. O zij de oorsprong en E zij het punt met coördinaat 1. Door O en E zijn de coördinaten eenduidig bepaald. De coördinaat x van een punt P van l is gelijk aan -(PEO). Is P nu het oneigenlijke punt van l, dan heeft (PEO) alleen als we de verhouding homogeen schrijven betekenis en wel (1,0). We vinden dus dat, als we de afstandscoördinaat als verhouding interpreteren en homogeen schrijven, ook het oneigenlijke punt een coördinaat krijgt.
Elk punt heeft twee getallen x en z als coördinaat; x en z mogen niet beide nul zijn en allen hun verhouding is essentiëel, zodat λx, λz $(\lambda \neq 0)$ bij hetzelfde punt horen.
Verschillende punten hebben coördinaten met verschillende verhouding. Voor eigenlijke punten is $z \neq 0$, zodat men door voor $\lambda = z^{-1}$ te kiezen de coördinaten kan normeren tot $\frac{x}{z}$,1 en dan is $\frac{x}{z}$ de oude afstandscoördinaat.

Opg. 66. Gegeven de punten A en B met coördinaten x_A, z_A en x_B, z_B en een punt P met $(ABP) = (\lambda, \mu)$. Bewijs dat $\mu x_A + \lambda x_B$, $\mu z_A + \lambda z_B$ coördinaten van P zijn.

Het platte vlak.

In het platte vlak nemen we weer een rechthoekig assenkruis. Een punt P projecteren we weer evenwijdig aan de y-as; dus vanuit het oneigenlijke punt van de y-as op de x-as en vanuit het oneigenlijke punt van de x-as op de y-as, projecties resp. P' en P''.
Op de x-as resp. y-as hebben P' en P'' homogene coördinaten.
Als P eigenlijk is, dan zijn P' en P'' beide eigenlijk en beide hebben dus een tweede coördinaat $\neq 0$.
Men kan het dus zo inrichten dat de tweede coördinaat van P' gelijk is aan die van P''. Laat x,z de coördinaten van P' en y,z die van P'' zijn. Het punt P geven we dan de drie getallen x,y,z als coördinaten. Ook hier komt het alleen op de verhouding van x, y en z aan, zodat λx, λy, λz ook coördinaten van P zijn, mits $\lambda \neq 0$. Door, ingeval P eigenlijk is, $\lambda = z^{-1}$ te kiezen, krijgt men dan de oude coördinaten terug.
Een oneigenlijk punt P heeft oneigenlijke projecties P' en P''. Deze projecties bepalen P niet, hiervoor is nog een richting nodig.

Stel dat P het oneigenlijke punt is van de rechte $ax = by$ (vergelijking in oude coördinaten). We geven P dan de coördinaten $\lambda b, \lambda a, 0$ $(\lambda \neq 0)$, zodat de nieuwe coördinaten ook aan de vergelijking voldoen.

Opg. 67. Wat zijn de coördinaten van het oneigenlijke punt van de x-as resp. y-as?

§ 27. Homogene vergelijkingen.

Het is gemakkelijk na te gaan dat de punten van de eigenlijke rechte met de oude vergelijking $ax + by + c = 0$ coördinaten hebben gekregen die voldoen aan $ax + by + cz = 0$

Opg. 68. Voer dit uit.

Voor de punten van de oneigenlijke rechte geldt $z = 0$, zodat we mogen zeggen, dat de punten van een rechte altijd voldoen aan een **lineaire** homogene vergelijking $ax + by + cz = 0$.
De restrictie a en b niet beide nul sluit juist de oneigenlijke rechte uit.
De vergelijking van de ellips van pag. 6 wordt voor homogene coördinaten: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$.
Deze vergelijking ontstaat door in de oude vergelijking voor x in te vullen $\frac{x}{z}$ en $\frac{y}{z}$ voor y en daarna met z^2 te vermenigvuldigen.

Voor punten met een $z \neq 0$ geeft dat niets nieuws, maar onder omstandigheden kunnen er ook oneigenlijke punten aan de nieuwe vergelijking voldoen. Deze laten we dan ook tot de voorgestelde meetkundige plaats behoren.

Opg. 69. Welke oneigenlijke punten liggen op de hyperbool
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

Meetkundig stellen deze punten de asymptotische richtingen voor.
Is nl. (a, b, 0) een punt dat voldoet aan de vergelijking $f(x,y,z) = 0$, dan zullen de punten (a, b, ε) tot de kromme naderen als ε tot nul nadert. Meetkundig wil dit zeggen, dat de punten $\frac{a}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon}$ (in afstandscoördinaten) relatief dicht bij de kromme liggen. Als ε naar nul gaat dan worden de coördinaten van deze punten willekeurig groot.

Opg. 70. Maak de vergelijking $x^3 + y^3 = 3axy$ homogeen.
Wat zijn de asymptotische richtingen?
Folium van Descartes.

§ 28. De isotrope punten.

De homogene vergelijking van de cirkel luidt $x^2 + y^2 + 2Axz + 2Byz + Cz^2 = 0$. Snijding met $z = 0$ levert $x^2 + y^2 = 0$.
De oneigenlijke punten zijn dus imaginair. Zij zijn voor alle cirkels gelijk. Het zijn de imaginaire punten $I(1,i,0)$ en $J(1,-i,0)$, zij worden de isotrope punten of cirkelpunten genoemd. Omgekeerd, indien een kromme voorgesteld door een tweedegraads vergelijking met reële coëfficiënten door de isotrope punten gaat, dan is dit een cirkel.
Laat $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$
de vergelijking zijn. Substitutie van $(1,i,0)$ levert:

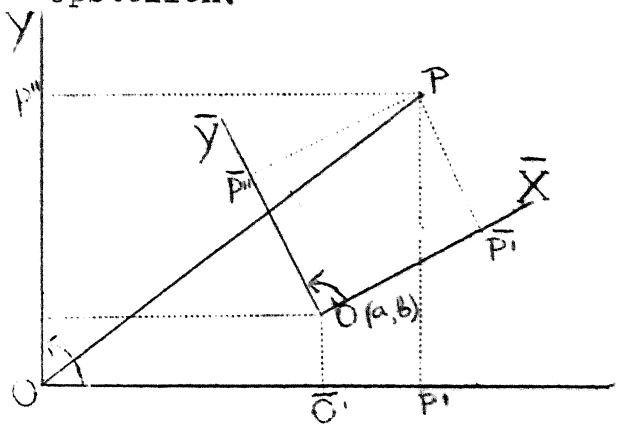
$$a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0$$

dus daar a_{ij} reëel $a_{11} = a_{22}$ en $a_{12} = 0$.
Dit zijn juist de cirkelvoorwaarden van pag.6.
Als $a_{11} = a_{22} = 0$, dan is de cirkel ontaard. De kromme is dan $z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}x) = 0$, dus het lijnenpaar $z = 0$ en $(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z) = 0$. Twee concentrische cirkels hebben nu ook een machtlijn nl. $z = 0$. Immers als $C_1 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r_1^2 = 0$ en $C_2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r_2^2 = 0$ de cirkels zijn, dan is $C_1 - C_2 = (r_2^2 - r_1^2)z^2$.
De cirkel $\dfrac{\lambda C_1 + \mu C_2}{\lambda + \mu} = 0$ heeft ook a,b als middelpunt. Men noemt een verzameling concentrische cirkels een ontaarde bundel.

Opg.71. Bepaal de asymptotische richtingen van de krommen:
$xy = a^2$, $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$ (strophoïde) en
$(x - y - 2)^2(x - y - 5) + 3(x - y - 1)(x + y)^2 = 0$

§ 29. Coördinatentransformaties.

Stel er zijn in het platte vlak twee rechthoekige Cartesische coördinatenstelsels XOY en $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ gegeven. Elk punt P heeft dan twee stellen coördinaten (x,y) en $(\bar{x},\bar{y})$. Wij zullen nu de transformatie formules opstellen.



Stel $\bar{O}$ heeft de coördinaten (a,b) en $\sphericalangle X\bar{X} = \alpha$, terwijl $\sphericalangle XY = \sphericalangle \bar{X}\bar{Y} = 90^\circ$.
Projecteer OP en $\bar{O}\,\bar{O}'\bar{O}\,\bar{P}'P$ op X-as en Y-as. Dan krijgt men
$x = a + \bar{x}\cos\bar{X}X + \bar{y}\cos\bar{Y}X = a +$
$+ \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\cos(\bar{Y}X + \bar{X}X) = a +$
$+ \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha$ en

$y = b + \bar{x}\cos\overline{XY} + \bar{y}\cos\overline{YY} = b + \bar{x}\cos(\overline{XX} + XY) + \bar{y}\cos(\overline{YX} + \overline{XX} + XY) = b + \bar{x}\cos 90 - \alpha + \bar{y}\cos(-90 - \alpha + 90) = b + \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha.$

De transformatie formules zijn dus:

$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha + a$

$y = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha + b.$ Mocht bij het tweede stelsel $\sphericalangle XY = 270^\circ$ zijn dan geldt $\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha + a \\ y &= \bar{y}\sin\alpha - \bar{y}\cos\alpha + b \end{aligned}\right\}$,

deze formules ontstaan door $\bar{y}$ door $-\bar{y}$ te vervangen.

Opg. 72. Bewijs dat bij scheefhoekige stelsels met $\sphericalangle XOY = \omega$ en $\sphericalangle \overline{XOY} = \bar{\omega}$ geldt

$x = \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\cos(\bar{\omega} + \alpha)$

$y = \bar{x}\cos(\alpha - \omega) + \bar{y}\cos(\bar{\omega} + \alpha - \omega)$ en leid hieruit bovenstaande formules af.

Speciale gevallen zijn de verschuiving van het assenkruis, dus met $\alpha = 0$.

$x = \bar{x} + a$

$y = \bar{y} + b$ en de zuivere draaiïng met $O = \bar{O}$

$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha$

$y = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha$

De transformatie formules voor homogene coördinaten luiden

$x = \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha + \bar{z}a$

$y = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha + \bar{z}b$

$z = \bar{z}$

Deze formules kan men met de matrix notatie beknopter schrijven, nl. als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

Men noemt A de transformatiematrix. Deze legt de transformatie vast.

Opg. 73. Bereken de coördinaten van O t.o.v. het nieuwe stelsel. Leid hieruit de transformatie formules af van het oude naar het nieuwe stelsel.

Opg. 74. Wat is de inverse matrix van A? vergelijk deze met de uitkomst van de vorige opgave.

Ook in het geval van de zuivere draaiïng kunnen we de matrix notatie gebruiken. Deze luidt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$ De matrix is orthogonaal.

dus $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{pmatrix}$, dan volgt hieruit dat B de transformatie-

matrix van $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ naar XOY is.

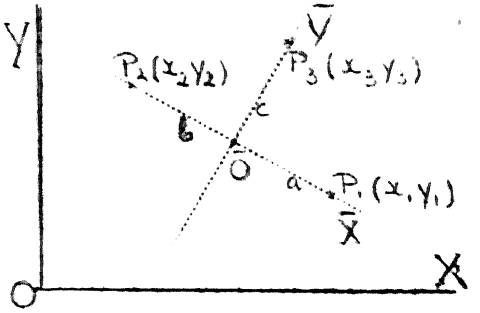
Opg. 75. Bewijs

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Opg. 76. Bewijs dat

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ als

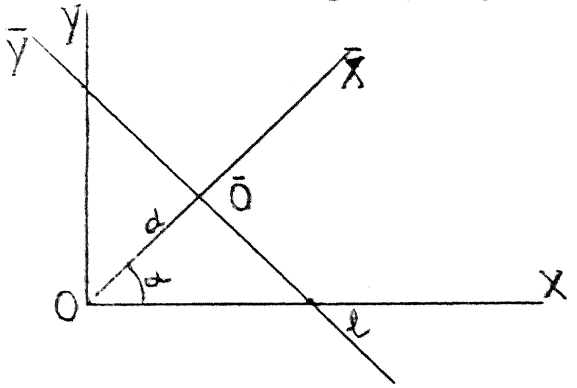
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Hieruit kan men gemakkelijk bewijzen dat $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ gelijk is aan de oppervlakte van $\triangle P_1(x_1,y_1)$ $P_2(x_2,y_2)$ $P_3(x_3,y_3)$. Immers door geschikte keuze van het assenstelsel kan men bereiken, dat de coördinaten (a,0), (b,0) en (0,c) worden. Men heeft dan

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}c(b-a) = \text{opp } \triangle P_1P_2P_3 .$$

Ook kan men nu gemakkelijk aantonen dat de rechte voorgesteld wordt door een lineaire vergelijking in de coördinaten.



Laat l de rechte zijn. Vergelijking t.o.v. $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ is $\bar{x} = 0$.
De transformatie luidt (zie figuur)
$\bar{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha - d$
$\bar{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$
De vergelijking van l is dus
$x\cos\alpha + y\sin\alpha - d = 0$.

§ 30. Punttransformaties.

De transformatieformules van de vorige paragraaf bevatten de coördinaten van één punt t.o.v. verschillende stelsels. Men kan ze ook anders opvatten, nl. als verband tussen de coördinaten van verschillende punten $P(x,y,z)$ en $\bar{P}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ t.o.v. hetzelfde stelsel bv. $\overline{OXY}$.
Zo opgevat definiëren de transformatieformules een zgn. Punttransformatie. Een transformatie van de vorm

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha + a\bar{z} \\ y &= \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha + b\bar{z} \\ z &= \bar{z} \end{aligned}\right\} \text{ heet beweging.}$$

Het is de beweging die het kruis XOY met $\overline{XOY}$ laat samenvallen.

Opg. 77. Welk punt is aan zichzelf toegevoegd bij bovenstaande transformatie?

Opg. 78. Wanneer is het punt van de vorige opgave oneigenlijk?

Een beweging is bepaald door de transformatiematrix. De matrix van twee na elkaar uitgevoerde bewegingen met matrix A resp. B is AB.

Opg. 79. Bewijs dat dit weer een beweging is.

De transformatie gedefiniëerd door de matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & b \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$ waarin $\rho \neq 0$, heet gelijkvormigheidstransformatie. Ook deze transformatie laat de oneigenlijke rechte invariant.

Opg. 80. Laat door bovenstaande gelijkvormigheidstransformatie $\triangle P_1P_2P_3$ overgaan in $\triangle \bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$, bewijs dan dat

$$\text{opp } \triangle P_1P_2P_3 = \rho^2 \text{opp } \triangle \bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3 .$$

Opg. 81. Als P_1 en P_2 als boven overgaan in $\bar{P}_1$ en $\bar{P}_2$, bewijs dan dat $P_1P_2 = \rho\,\bar{P}_1\bar{P}_2$.

Zowel de beweging als de gelijkvormigheidstransformatie voeren colliniaire punten over in colliniaire punten en dus rechte lijnen in rechte lijnen. Ook worden cirkels in cirkels overgevoerd.

Opg. 82. Bewijs deze eigenschappen.

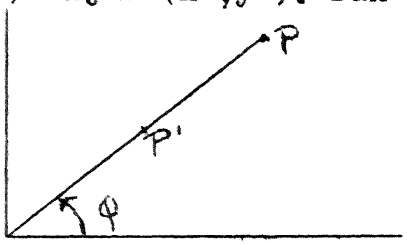
De hoek tussen twee rechten is ook invariant.
Laten nl. $(a_1,b_1,0)$ en $(a_2,b_2,0)$ de oneigenlijke punten zijn van de rechten, dan voldoet de hoek $\bar{\varphi}$ tussen de beelden van deze rechten aan

$$\operatorname{tg}\bar{\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{a}_1 & -b_2 \\ \bar{b}_1 & \bar{a}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \bar{a}_1 & -\bar{b}_2 \\ \bar{b}_1 & \bar{a}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix}} = \operatorname{tg}\varphi$$

waarbij φ de hoek tussen de rechten is.
De transformaties heten daarom hoektrouw. Corresponderende figuren bij een beweging heten congruent en bij een gelijkvormigheidstransformatie heten ze gelijkvormig.

§31. Inversie.

Een geheel ander soort transformatie is de inversie.
Laat gegeven zijn een vast punt O en een willekeurig getal k.
Meetkundig definiëren we de inversie als de punttransformatie die aan elk punt P het punt P' op de rechte OP toevoegt zodanig dat $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = k$. Aan het punt O wordt geen punt toegevoegd evenmin als aan een oneigenlijk punt. Wordt aan P het punt P' toegevoegd, dan wordt blijkbaar aan P' weer P toegevoegd. Dit wil zeggen dat, als men de transformatie tweemaal toepast, elk punt aan zichzelf wordt toegevoegd (identieke transformatie). Een transformatie met deze eigenschap heet involutorisch.
Om de transformatieformules voor de inversie af te leiden kiezen we een rechthoekig assenkruis met de oorsprong in O. Het beeld van P(x,y) zij P'(x',y'). Dan geldt



$$k = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} \quad \text{of wel}$$

$$\frac{k}{\overrightarrow{OP}^2} = \frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}, \quad \text{dus}$$

$$x' = \frac{kx}{x^2+y^2} \quad \text{en} \quad y' = \frac{ky}{x^2+y^2}.$$

Opg. 83. Maak deze redenering in orde als x = 0 of y = 0.

De inverse transformatie die wegens het involutorische karakter identiek is met de transformatie zelf luidt dus

$$x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \qquad y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2}$$

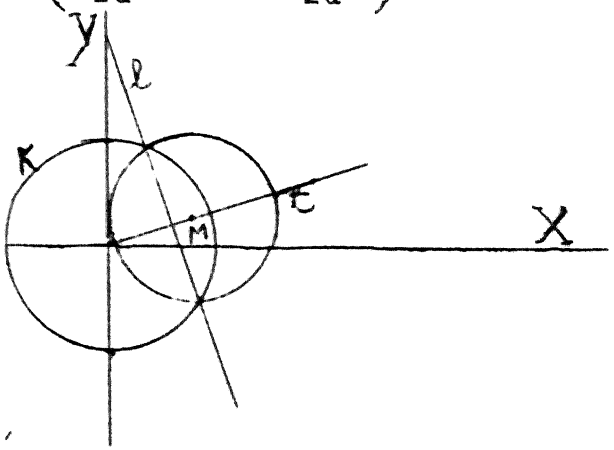
Het beeld van de rechte $ax + by + c = 0$ is

$$\frac{akx'}{x'^2 + y'^2} + \frac{bky'}{x'^2 + y'^2} + c = 0 \quad \text{of na vermenigvuldiging met } x'^2 + y'^2$$

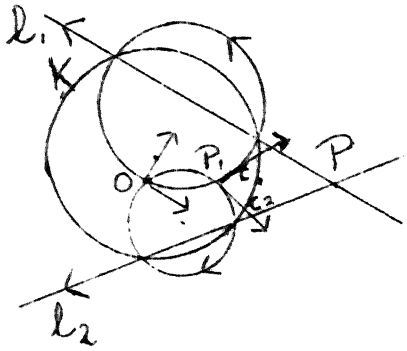
$$c(x'^2 + y'^2) + akx' + bky' = 0$$

Hieruit zien we dat als de rechte niet door O gaat (dus $c \neq 0$) het beeld een cirkel door O is. Gaat de rechte wel door O dan blijft hij invariant.
Het beeld van een cirkel $(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By + C = 0$ is $k^2 + 2Ax' + 2By' + C(x'^2 + y'^2) = 0$. Dit is als de cirkel niet door O gaat weer een cirkel. Gaat de cirkel wel door O, dan is het beeld een rechte. Dit volgt natuurlijk ook weer uit het involutorisch karakter van de inversie.

Het beeld van de rechte $l = x\cos\alpha + y\sin\alpha - d = 0$ is de cirkel $C = d(x^2 + y^2) - kx\cos\alpha - ky\sin\alpha = 0$ door O met middelpunt $M\left(\frac{k\cos\alpha}{2d}, \frac{k\sin\alpha}{2d}\right)$. De lijn OM staat loodrecht op l.



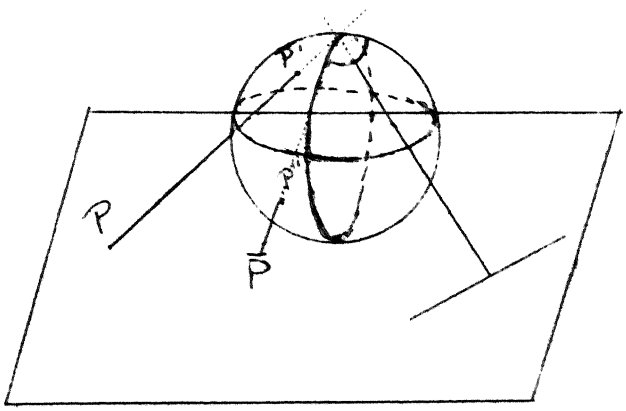
In de figuur is het geval getekend dat $k > 0$. De cirkel $K=x^2+y^2-k=0$ heet de inversiecirkel, daar alle punten ervan invariant zijn,
In de figuur liggen P_1 en P_2 als snijpunten van l en C op K.
Stel beelden van de gerichte lijnen l_1 en l_2 (snijpunt P) zijn de cirkels C_1 en C_2. De hoek tussen C_1 en C_2 is dan gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in P' (let op de richting) en deze is het tegengestelde van de hoek tussen de raaklijnen in O, welke gelijk is aan $\sphericalangle l_1 l_2$. Hieruit volgt dan dat de hoek tussen de krommen K_1 en K_2 gelijk is aan het tegengestelde van de hoek tussen de beeldkrommen K_1' en K_2'. De inversie heet daarom tegengesteld hoektrouw.



Raken K_1 en K_2 elkaar in P, dan raken K_1' en K_2' elkaar in P'.

Opg. 84. Het beeld van een cirkelbundel (net) is weer een bundel (net).

Opg. 85. Gegeven een cirkel C, een rechte l en een punt P. Gevraagd een cirkel door P rakend aan C en aan l.



Een duidelijk beeld van de inversie krijgt men door de stereografische projectie. Dit is de centrale projectie van een bol op een raakvlak vanuit het diametrale punt van het raakpunt. Rechten van het vlak gaan over in cirkels door het projectiecentrum (noordpool) en cirkels gaan over in cirkels. Bij inversie(met het raakpunt als centrum en geschikte macht)wordt de bol

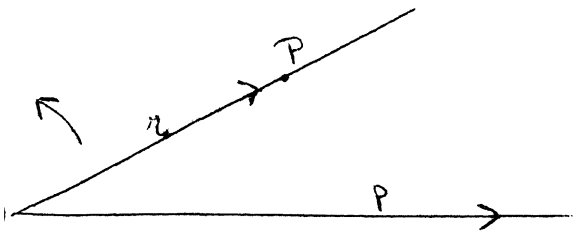
---

Rectificatie. Op pag. 30 regel 17 van onderen staat "een ontaarde" dat zal zijn "ook een". Na Bundel gelieve men in te lassen: De orthogonaal toegevoegde bundel is de lijnenwaaier door het middelpunt. Zij bestaat uit louter ontaarde exemplaren. Zij heet daarom een ontaarde cirkelbundel.

gespiegeld t.o.v. de grote cirkel evenwijdig aan het vlak.

§ 32. Poolcoördinaten.

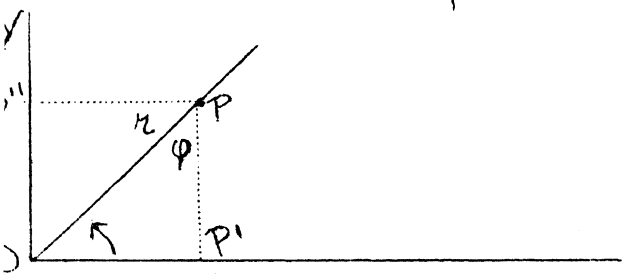
We zullen thans een ander soort coördinaten invoeren. Fixeer in het platte vlak een gerichte rechte p, poolas genaamd, met een punt O, oorsprong genaamd, er op en een positieve draaizin.
Stel P is een punt ($\neq$ O). De rechte OP denken we ons zo gericht dat $r = OP > 0$ is. De gerichte hoek pOP noemen we φ. Het punt P is nu bepaald door r en φ. Deze grootheden heten de poolcoördinaten van P (t.o.v. het gegeven stelsel). O krijgt de coördinaat r = 0 en φ willekeurig.



De coördinatentransformatieformules tussen een rechthoekig Cartesisch coördinatenstelsel en een poolcoördinatenstelsel met dezelfde oorsprong en x-as als poolas (draaizin zodanig dat XOY = 90°) zijn

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{en} \qquad \varphi = \text{bg cos}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{bg sin}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

terwijl $x = r \cos\varphi$ en $y = r \sin\varphi$.



De vergelijking van de rechte $l = x\cos\alpha + y\sin\alpha - d = 0$ wordt in poolcoördinaten
$r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - d = 0$
dus $r\cos(\varphi - \alpha) = d$.
De cirkel met middelpunt M($\varrho\cos\alpha, \varrho\sin\alpha$) en straal R krijgt in poolcoördinaten de vergelijking $(r\cos\varphi - \varrho\cos\alpha)^2 + (r\sin\varphi - \varrho\sin\alpha)^2 - R^2 = 0$ of anders geschreven $r^2 + \varrho^2 - R^2 - 2r\varrho\cos(\varphi - \alpha) = 0$.
De transformatieformules voor de inversie (met centrum O en macht k) worden in poolcoördinaten $r' = \frac{k}{r}$ en $\varphi' = \varphi$.

Met poolcoördinaten laten zich de eigenschappen van de vorige § gemakkelijk bewijzen.

Opg. 85. Voer dit uit.

Opg. 86. Schets de krommen $r = a\sin\varphi$
$r = 6a\sin 3\varphi$
en $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Opg. 87. Hoe luiden deze vergelijkingen in rechthoekige coördinaten?

Opg. 88. Hoe luidt $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$ in poolcoördinaten?

GEMENGDE OPGAVEN.

cursus Elementaire Analytische Meetkunde
pp. 1 - 36.

I. Van de drie rechten l_1, l_2 en l_3 zijn de vergelijkingen:

$$2x - 3y = 0$$
$$x + 2y - 8 = 0$$
$$x - y + 2 = 0.$$

Door het snijpunt van l_1 en l_3 trekt men de evenwijdige aan de X-as. Door het punt, waar l_2 de X-as ontmoet, trekt men de evenwijdige aan l_1. Deze twee hulplijnen snijden elkaar in D_1. Door het punt, waar l_3 de Y-as ontmoet, trekt men de evenwijdige aan de X-as. Deze hulplijn snijdt l_2 in D_2. Door het punt, waar l_2 de Y-as ontmoet, trekt men de evenwijdige aan l_1. Deze hulplijn snijdt l_3 in D_3. Bewijs dat D_1, D_2, D_3 op een rechte lijn zijn gelegen.

II. Gegeven zijn een punt A(5,4) en twee rechten l_1 en l_2 waarvan de vergelijkingen zijn:

$$l_1 : y + 2 = 0$$
$$l_2 : 7x - y + 19 = 0$$

Gevraagd wordt te bepalen:

1°. De coördinaten van het snijpunt C van l_1 en l_2.
2°. De coördinaten der voetpunten B en D van de loodlijnen uit A neergelaten op l_1 en l_2.
3°. De inhoud van vierhoek ABCD.

III. Door het punt (a,0) wordt een veranderlijke rechte getrokken die de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ in P en Q snijdt. Bepaal de meetkundige plaats van de middelpunten der cirkels die door P en Q gaan en een straal R hebben.

IV. Bewijs dat de 2 cirkels

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$$

elkaar aanraken. Bepaal daarna de vergelijkingen van de cirkels die de twee gegeven cirkels in hun gemeenschappelijk raakpunt aanraken en die tevens raken aan de Y-as.

V. Aan de punten A en B waarin de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ de as OX snijdt, trekt men de raaklijnen a en b. Een veranderlijke raaklijn snijdt a en b in punten A' en B'. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt der verbindingslijnen AB' en A'B.

VI. Het punt x=7, y=1 is het middelpunt van een cirkel met straal 4 en het punt x=3, y=4 van een cirkel met straal 2. Bepaal de meetkundige plaats der raakpunten van de raaklijnen uit O getrokken aan alle cirkels, die door de snijpunten der gegeven cirkels gaan. Bepaal van de gevonden meetkundige plaats de richting der oneindige punten.

VII. Schets de kromme lijn die tot vergelijking heeft

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a - x}{a + x}$$

en bewijs: I. dat twee onderling loodrechte lijnen, getrokken uit de oorsprong der coördinaten, de kromme snijden in twee punten, waarvan de verbindigslijn door de Y-as middendoor gedeeld wordt; II. dat die verbindingslijn gaat door een punt dat zowel op de kromme als op de X-as ligt.

VIII. Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 = 18$ en het punt P(9,9). Op de poollijn van P ten opzichte van c ligt een veranderlijk punt Q. Men beschouwt het stelsel cirkels, die PQ tot middellijn hebben.
1°. Bewijs dat deze cirkels een bundel vormen.
2°. Bepaal de coördinaten van de basispunten van deze bundel.
3°. Bewijs dat de cirkels van deze bundel de cirkel c loodrecht snijden.

IX. Men beschouwt op de X-as de punten:

$P(\frac{2a}{\mu}, 0)$ en $Q(2a\mu, 0)$, μ is veranderlijk.

1°. Bewijs dat elk van deze puntenparen (P,Q) harmonisch gescheiden worden door de punten A(-2a,0) en B(2a,0).
2°. Men beschouwt de cirkels met PQ als middellijn. Bewijs dat deze cirkels alle tot eenzelfde bundel behoren.
3°. Stel de vergelijking op van een tweede bundel, die A en B tot basispunten heeft en bewijs dat ieder exemplaar van de eerste bundel rechthoekig gesneden wordt door ieder exemplaar van de tweede bundel.

X. Gegeven zijn de cirkels:

c_1: $x^2 + y^2 = 4$ en c_2: $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

1°. Bepaal de coördinaten van het snijpunt Q van de poollijnen van $P(x_0, y_0)$ ten opzichte van c_1 en c_2.
2°. Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats van P, indien de poollijn van P ten opzichte van c_3: $x^2 + y^2 + - 4x - 2y + 4 = 0$ eveneens door Q gaat.
3°. Toon aan dat PQ een middellijn is van deze meetkundige plaats.

XI. Stel de poolvergelijking op van de meetkundige plaats van het voetpunt P van de loodlijn uit het snijpunt O van twee onderling loodrechte rechten l en m op een veranderlijke rechte neergelaten, waarvan door l en m een stuk van constante lengte 2a wordt afgesneden, indien O als pool en één der rechten l en m als poolas aangenomen wordt. Leid hieruit de vergelijking in rechthoekige coördinaten af t.o.v. l en m als coördinaatassen (vierbladige roset).

XII. Op de poolas ligt het punt A op afstand a van de pool O. Men laat uit A de loodlijn AB neer op een veranderlijke rechte l door O en evenzo uit het spiegelbeeld B' van het voetpunt B t.o.v. l. Gevraagd wordt de poolvergelijking van de meetkundige plaats van het voetpunt P van de loodlijn B'P en uit deze poolvergelijking die in Cartesische coördinaten af te leiden (trifolium van de Longchamps).

XIII. Gegeven is de vergelijking van een kromme t.o.v. een rechthoekig assenkruis:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 30x - 85y + 400 = 0.$$

Gevraagd wordt de vergelijking van deze kromme t.o.v. het rechthoekige assenkruis, waarvan de oorsprong $(3\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5})$ is en de x'-as een hoek maakt met de x-as van het oorsronkelijke assenkruis, waarvan de tangens $= \frac{3}{4}$ is.

XIV. Bewijs dat de middens der diagonalen van een volledige vierzijde op één rechte liggen.
Opm. Gebruik een sluw gekozen scheefhoekig assenstelsel.

XV. Gevraagd worden de vergelijkingen der loodlijnen op de rechten $4x + 10y = 5$ en $3x - 4y + 2 = 0$ in het snijpunt van die rechten opgericht (rechthoekig assenkruis).

XVI. Bepaal de coördinaten van het snijpunt der raaklijnen aan de cirkel $4x^2 + 4y^2 + 16x - 20y - 59 = 0$ in de snijpunten met de rechte $22x - 2y = 51$.

Eliminatie van yy_o geeft: $x\left\{(x_o-c) - \frac{b^2x_o}{a^2}\right\} = cx_o - c^2 - b^2$ oftwel

$x\,\frac{c}{a^2}\left\{cx_o - a^2\right\} = cx_o - a^2$. Daar P op de ellips ligt geldt

$x_o \leqslant a$ dus $x = \frac{a^2}{c}$, waarmee het gestelde bewezen is.

Uitgaande van $F_2(-c,0)$ vindt men $x = \frac{-a^2}{c}$.

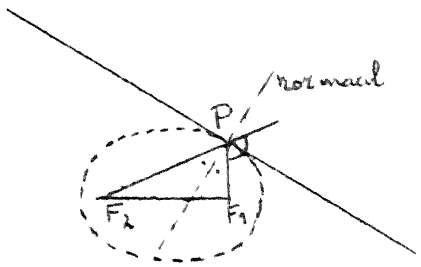
Deze beide lijnen heten de richtlijnen r_1 en r_2 van de ellips resp. behorende bij $F_1(c,0)$ en $F_2(-c,0)$.

Voor elk punt $P(x_o,y_o)$ van de ellips geldt dat de afstanden tot een brandpunt en de bijbehorende richtlijn zich verhouden als c:a.
Immers de afstand tot $F_{1(2)}$ is $\sqrt{(x_o \pm c)^2 + y_o^2}$ en tot $r_{1(2)}$ is

$(x_o \pm \frac{a^2}{c})$ in verband met $y_o^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_o^2$ geeft dit

$$\sqrt{(x_o \pm c)^2 + y_o^2} = \sqrt{x_o^2\,\frac{c^2}{a^2} \pm 2cx_o + a^2} = \frac{c}{a}\sqrt{(x_o \pm \frac{a^2}{c})^2}\ .$$

De factor $e = \frac{c}{a}$ heet de excentriciteit van de ellips. De ellips o[p] te vatten als meetkundige plaats van de punten waarvan de afstanden t[ot] een vast punt en een vaste lijn een constante verhouding < 1 hebben.
De ellips heeft geen reële oneigenlijke punten.
De raaklijn in een punt P van de ellips deelt de nevenhoek tussen de beide voerstralen (dat zijn de verbindingslijnen van P met de brandpunten) middendoor.
Opg. 99. Bewijs dit.
De rechte door een punt P van de ellips, die loodrecht staat op de raaklijn in P heet de normaal in P; P heet het voetpunt van de normaal.
De normaal in P deelt dus de hoek tussen de voerstralen middendoor.



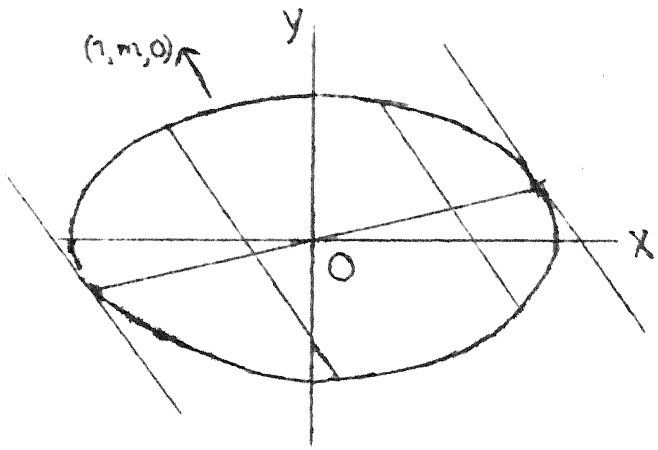
Feestopgave met diverse prijzen w.o. J.A.Barrau "De onbemindheid der wiskunde" , "Figuren en hare coördinaten" en J.G. v.d.Corput: "Moderne rekenmachines"
Opg. 100. Bewijs: Door een punt niet op de ellips gaan i.h.a. 4 normalen van de ellips. Als de voetpunten van die normalen A,B,C en D zijn, [dan] liggen A,B,C,-D op een cirkel,(onder -D versta ik dus het spiegelpunt van P t.o.v. het middelpunt).

De vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ van de ellips is dusdanig, dat als P(x,y) op de ellips ligt, ook $P_1(-x,y)$, $P_2(x,-y)$ en $P_3(-x,-y)$ er op liggen.

De x- en y-as heten daarom symmetrie-assen van de ellips en hun snijpunt O heet het middelpunt.

Lijnen door het middelpunt heten middellijnen.

Ook hier geldt nl. de stelling: De meetkundige plaats van het midden van evenwijdige koorden is een middellijn. Zij de gegeven richting (1,m,0) dus de vergelijking van zo'n koorde $y = mx + \lambda$



De x-coördinaat van de eindpunten vindt men uit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+\lambda)^2}{b^2} = 1 .$$

Die van het midden M is dan

$$\frac{-m\lambda a^2}{b^2+m^2a^2}$$ dus M(x,y) is het punt

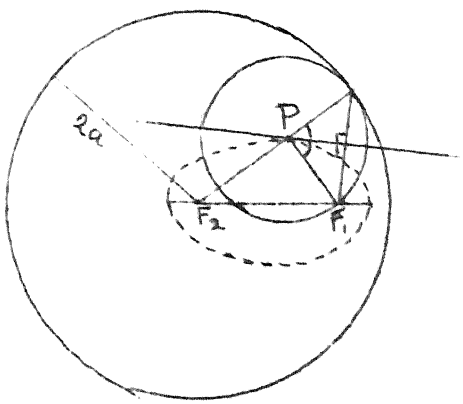
$$\left(\frac{-ma^2\lambda}{b^2+m^2a^2} \cdot \frac{\lambda b^2}{b^2+m^2a^2}\right)$$ en de gezochte meetkundige plaats is $y = \frac{-b^2}{a^2m}x$: d.i. een lijn door het middelpunt.

Deze middellijn heet de aan de richting m toegevoegde middellijn.

De oneigenlijke punten (1,m,0) en $(a^2m,-b^2,0)$ heten ook toegevoegd.

Opg. 101. Herhaal deze beschouwing voor een cirkel. Zijn hier de oneigenlijke punten ook toegevoegd t.o.v. de poolverwantschap t.o.v. die cirkel?

Opg. 102. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van de loodlijn uit een der brandpunten op een variabele middellijn m met de aan m toegevoegde middellijn.



De cirkels $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2$ en $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2$ heten de richtcirkels resp. behorend bij $F_1(c,0)$ en $F_2(-c,0)$.

Uit de figuur leest men direct af dat de cirkel met P (op de ellips) als middelpunt gaande door F_2 raakt(inwendig) aan de richtcirkel behorende bij F_1. De ellips kan dus ook opgevat worden als de meetkundige plaats van het middelpunt van de cirkels die inwendig raken aan een vaste cirkel en gaan door een vast punt binnen die cirkel.

Opg. 103. Gegeven de brandpunten en de hoofdas van een ellips E, mitsgaders een rechte lijn l. Construeer met passer en liniaal de snijpunten van l en E . Wanneer vallen deze samen?
Volgt hieruit de in opg. 99 te bewijzen eigenschap?
Tot slot de meetkundige plaats van de punten P met de eigenschap dat de raaklijnen uit P aan de ellips loodrecht op elkaar staan.
Als voorwaarde dat de lijn $y-y_o = m(x-x_o)$ door P de ellips

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}+\frac{2x_o(x-x_o)}{a^2}+\frac{2y_o(y-y_o)}{b^2}+\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}-1=0$$

raakt vindt men $\left(\frac{x_o}{a^2}+\frac{y_o m}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}-1\right)=0.$

De raaklijnen door P staan loodrecht op elkaar als het product van de worteis van de bovenstaande vierkantsvergelijking (in m) -1 is. Dit is het geval als

$$\frac{y_o^2}{b^4}-\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}-1\right)=-\left\{\frac{x_o^2}{a^4}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}-1\right)\right\}$$

geldt; of anders gerangschikt

$$\frac{x_o^2}{a^2b^2}+\frac{y_o^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

De meetkundige plaats is derhalve de cirkel $x^2+y^2=a^2+b^2$.
De hoekpunten van de rechthoek gevormd door de topraaklijnen liggen zoals verwacht kan worden op deze cirkel. Men spreekt wel van de orthoptische cirkel of de cirkel van Monge.

§ 35. De ellips en haar hoofdcirkel.

De meetkundige plaats van het voetpunt van de loodlijn uit een brandpunt neergelaten op een raaklijn is de cirkel $x^2+y^2=a^2$, welke de hoofdcirkel van de ellips heet.
Bewijs van het eerste gedeelte van de bewering.
Stel P(a cos τ , b cos τ) (dus P op de ellips), de raaklijn heeft dan tot vergelijking $xb\cos\tau + ya\sin\tau = ab$ en de loodlijn uit $F_{1,2}(\pm c,0)$ wordt $xa\sin\tau - yb\cos\tau = \pm ac\sin\tau$
Linker en rechter leden kwadrateren en optellen geeft

$$(x^2+y^2)(a^2\sin^2\tau+b^2\cos^2\tau)=a^2b^2+a^2c^2\sin^2\tau=a^2\left(b^2(\sin^2\tau+\cos^2\tau)+c^2\sin^2\tau\right)$$

dus daar $a^2\sin^2\tau+b^2\cos^2\tau>0$,

$$x^2+y^2=a^2.$$

Het product van de afstanden van de brandpunten tot een raaklijn is constant, nl. b^2.

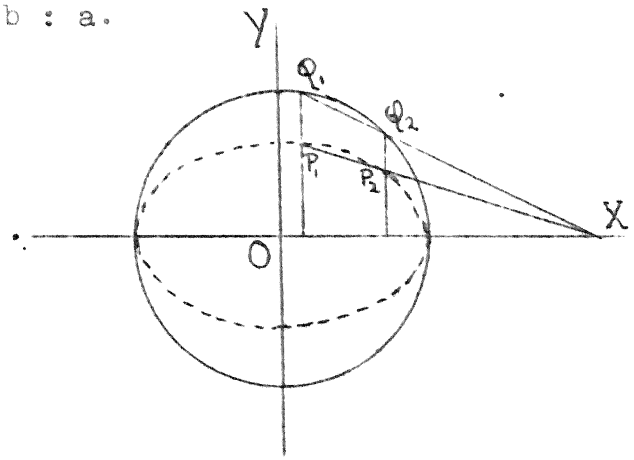
Bewijs: De vergelijking van de raaklijn in $P(x_o,y_o)$ luidt in de normaalvorm van Hesse

$$\frac{\frac{xx_o}{a^2}+\frac{yy_o}{b^2}-1}{\sqrt{\frac{x_o^2}{a^4}+\frac{y_o^2}{b^4}}} = 0$$

Het product van de afstanden van $F_1(c,0)$ en $F_2(-c,0)$ is dus

$$\frac{\left(\frac{cx_o}{a^2}-1\right)\left(\frac{-cx_o}{a^2}-1\right)}{\frac{x_o^2}{a^4}+\frac{y_o^2}{b^4}} = \frac{1-\frac{c^2x_o^2}{a^4}}{\frac{1}{b^2}-\frac{x_o^2}{a^2b^2}+\frac{x_o^2}{a^4}} = \frac{1-\frac{c^2x_o^2}{a^4}}{\frac{1}{b^2}-\frac{c^2x_o^2}{a^4b^2}} = b^2$$

Snijdt men de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en de (hoofd)cirkel $x^2+y^2=a^2$ met een rechte $x=x_o$ evenwijdig aan de y-as dan verhouden de y-coördinaten van de snijpunten $P_1(x_o, b\sqrt{1-\frac{x_o^2}{a^2}})$ en $Q_1(x_o,\sqrt{a^2-x^2})$ zich als b : a.



De ellips is dus het beeld van een cirkel bij de transformatie

$$x' = x$$
$$y' = \frac{b}{a}x$$

Dit is een affine transformatie.

Een punt-transformatie heet affien als ze één-éénduidig is, lijnen in lijnen overvoert en als de verbindingslijnen van corresponderende punten evenwijdig zijn, terwijl bovendien corresponderende lijnen elkaar op een vaste rechte, affiniteits-as genaamd, snijden.

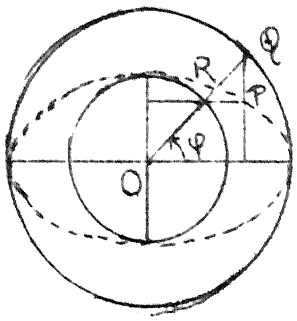
Opg. 104. Bewijs deze eigenschappen voor bovenstaande transformatie.

De affine transformatie is een bijzonder geval van de projectieve transformatie, welke alleen hierin verschilt, dat de verbindingslijn van corresponderende punten door een vast punt gaan dat niet oneigenlijk hoeft te zijn.

Opg. 105. Dualiseer het begrip van projectieve punttransformatie.

De affine transformatie $\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a}{b}x \\ y' &= y \end{aligned}\right\}$ voert de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ over in de cirkel $x^2+y^2=b^2$

Dit geeft in combinatie met de laatstgenoemde eigenschap van de hoofdcirkel een eenvoudige constructie van een punt van de ellips als de assen gegeven zijn.



Stel $\sphericalangle XOQ = \varphi$ (voor de betekenis der letters zie nevenstaande figuur)
Doorloopt P de ellips dan doorloopt φ het interval $(0,2\pi)$.
De coördinaten van P zijn i.v.m. het bovenstaande $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$.
Hier zien we dus de meetkundige betekenis van de op pag. 10 gegeven parametervoorstelling.

De parameter φ heet de excentrische anomalie van P.

Opg. 106. Bewijs

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 1 \\ \cos^2\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 1 \\ \cos^2\varphi_3 & \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 1 \\ \cos^2\varphi_4 & \cos\varphi_4 & \sin\varphi_4 & 1 \end{vmatrix} = -16 \sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} \sin\frac{\varphi_1-\varphi_3}{2} \sin\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2} \cdot$$

$$\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2} \sin\frac{\varphi_2-\varphi_4}{2} \sin\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2} \sin\frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4}{2}$$

Opg. 107. Bewijs dat de vier punten P_i ($i=1,2,3$ en 4) van de ellips dan en slechts dan concyclisch zijn (d.w.z. op een cirkel liggen) als voor de bijbehorende parameters φ_i ($i=1,2,3$ en 4) geldt $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 = 2k\pi$ (k geheel).

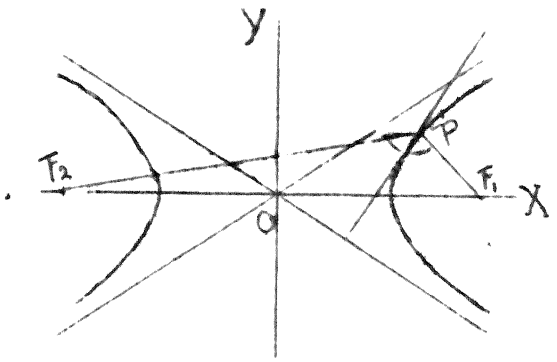
Opg. 108. Een lijnstuk AB met een vast punt P er op beweegt zich zodanig dat A op de x-as en B op de y-as blijft.
Gevraagd de meetkundige plaats van het punt P.

Opg. 109. Bewijs dat bij de affiniteit $x'=x$ en $y'=\frac{a}{b}y$ de raaklijn in P aan de ellips correspondeert met de raaklijn in P' aan de hoofdcirkel.

§ 36. De hyperbool.

De hyperbool is de meetkundige plaats van de punten P met de eigenschap dat het verschil tussen de afstanden tot twee vaste punten F_1 en F_2 constant is.
De punten F_1 en F_2 heten brandpunten.
Stel $F_1(c,0)$ en $F_2(-c,0)$ (met $c>0$) zijn de brandpunten en het constante verschil zij $2a$. Er moet dus gelden $2a<2c$.
Op analoge wijze als op pag.6 bij de ellips vindt men als vergelijking van de hyperbool

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ met $b = \sqrt{c^2-a^2}$.



Opg. 110. Doe zulke.
De hyperbool is evenals de ellips symmetrisch t.o.v. de x- en y-as. Er bestaat dus eveneens symmetrie t.o.v. de oorsprong. Ook hier heten de assen symmetrie-assen en hun snijpunt middelpunt.
De hyperbool heeft twee reële oneigenlijke punten, te weten (a,b,0) en (a,-b,0), dit zijn dus asymptotische richtingen.

Een rechte $bx-ay = \lambda$ heeft dus altijd een oneigenlijk snijpunt met de hyperbool. Door speciale keuze van λ kan men er voor zorgen dat het andere snijpunt daarmee samenvalt. De keuze is hier kennelijk $\lambda=0$
De lijn $bx=ay$ is een asymptoot van de hyperbool evenals de lijn $bx+ay=0$, dit zijn ook de enige asymptoten.
De beide asymptoten snijden elkaar in het middelpunt en de assen delen de door hen gevormde hoek middendoor. De punten (a,0) en (-a,0) heten de toppen, de hyperbool heeft slechts twee toppen.
Voor de hyperbool gelden tal van eigenschappen die geheel analoog zijn aan die van de ellips, ook de bewijzen lopen volgens dezelfde lijnen.
Vandaar
Opg. 111. Gegeven de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ met brandpunten $F_1(c,0)$ en $F_2(-c,0)$ $(c=\sqrt{a^2+b^2})$
en een punt $P(x_0,y_0)$ erop.
Bewijs 1°. De raaklijn in P heeft tot vergelijking $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

2°. De raaklijnen in de toppen staan loodrecht op de x-as.
(lange as)

3°. De lijn door F_1 (of F_2) loodrecht op PF_1(resp.PF_2) snijdt de raaklijn in P in een punt op de rechte $x= a^2/c$ (resp. $x= -a^2/c$). Deze lijnen heten de richtlijnen r_1 en r_2 behorende resp. bij F_1 en F_2. (dit laatste hoeft niet bewezen te worden).

4°. De afstanden van P tot $F_{1(2)}$ en $r_{1(2)}$ verhouden zich als c : a.

5°. De hyperbool is op te vatten als de meetkundige plaats van de punten P waarvoor de afstanden tot een vast punt en een vaste lijn een constante verhouding > 1 hebben.

6°. Een raaklijn in P deelt de hoek F_1PF_2 middendoor.

7°. De meetkundige plaats van het midden van alle koorden met een gemeenschappelijke richting (1,m,0) is de lijn

$$\frac{x}{a^2} = \frac{my}{b^2} .$$

Opm. Ook hier heten de richtingen (1,m,0) en (1, $\frac{b^2}{ma^2}$,0) toegevoegd evenals twee middellijnen met deze richtingen.

8°. Als middellijn n toegevoegd is aan middellijn m, dan is m toegevoegd aan n.

Opm. De cirkels $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2$ en $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2$ heten de richtcirkels resp. behorende bij F_1 en F_2 .

9°. De cirkel met middelpunt P gaande door F_i raakt aan de richtcirkel behorende bij F_{i+1} .

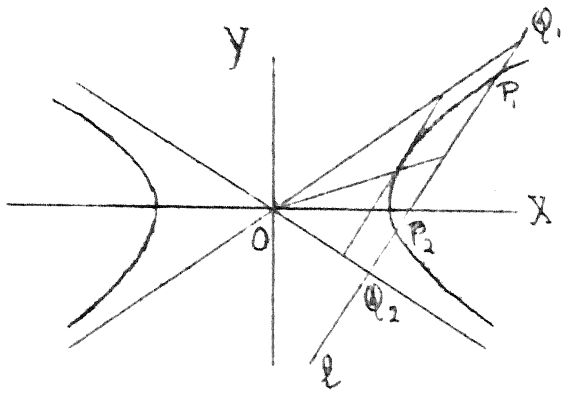
10°. De hyperbool is de meetkundige plaats van het middelpunt van de cirkel die in- of uitwendig raakt aan een gegeven cirkel en tevens gaat door een vast punt buiten die cirkel.

11°. De meetkundige plaats van de punten Q met de eigenschap dat de raaklijnen uit Q aan de hyperbool loodrecht op elkaar staan, is de cirkel $x^2+y^2 = a^2-b^2$.

12°. De meetkundige plaats van het voetpunt van de loodlijn uit een brandpunt neergelaten op een raaklijn aan de hyperbool is de cirkel $x^2+y^2 = a^2$.

13°. Het product van de loodlijnen uit de brandpunten op een raaklijn neergelaten is constant.

§ 37. De hyperbool en zijn asymptoten.



De rechte l (y=mx+n) snijde de hyperbool in $P_1(x_1,y_1)$ en $P_2(x_2,y_2)$ en de asymptoten in Q_1 (x_1',y_1') en Q_2 (x_2',y_2').

Te zullen bewijzen dat $P_1Q_1=Q_2P_2$.

Aan de gelijkheid is voldaan als

$x_1' - x_1 = x_2 - x_2'$ en omgekeerd; dus

$x_1' + x_2' = x_1 + x_2$.

De wortels van $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$ zijn x_1 en x_2 en die van

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 0$ zijn x_1' en x_2' , zodat inderdaad bovenstaande symmetrische functies gelijk zijn.

Deze eigenschap geeft eenvoudige constructie van de punten van de hyperbool ,als de asymptoten en een punt gegeven zijn.

Het oppervlak van de driehoek gevormd door de asymptoten en een raaklijn is constant.

Stel de snijpunten van de raaklijn $\frac{xx_o}{a^2} - \frac{yy_o}{b^2} = 1$ met de asymptoten zijn $Q_1(x_1,y_1)$ en $Q_2(x_2,y_2)$. De oppervlakte is dan

$$\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2).$$

Door snijding met $\frac{x}{a} = \frac{\pm y}{b}$ vindt men voor x_1, y_1, x_2 en y_2 resp.

$$\frac{a}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}, \quad \frac{b}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}, \quad \frac{+a}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} \text{ en } \frac{-b}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}.$$

Deze waarden ingevuld geeft voor de oppervlakte $\dfrac{-ab}{\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2}} = -ab$

Omgekeerd raakt een lijn die van de asymptoten een driehoek afsnijdt met oppervlakte ab aan de hyperbool. Hierbij moet er op gelet worden dat de driehoek binnen dezelfde hoek van de asymptoten ligt als de hyperbool.

De lijnen die een driehoek met oppervlakte ab afsnijden van de andere hoek die de asymptoten vormen, omhullen een kromme die een hyperbool blijkt te zijn.

Stel nl. $Q_\lambda(a\lambda, b\lambda)$ en $Q_\mu(a\mu, -b\mu)$ zijn punten op de asymptoten.

De vergelijking van de verbindingslijn is :

$$l = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\lambda & b\lambda & 1 \\ a\mu & -b\mu & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{De oppervlakte is : } \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a\lambda & b\lambda & 1 \\ a\mu & -b\mu & 1 \end{vmatrix} = -ab\lambda\mu .$$

Is $\lambda\mu = 1$ dan ligt de driehoek in "de hoek van de hyperbool" en als $\lambda\mu = -1$ in de neven hoek.

De vergelijking van l kunnen we schrijven als $l = \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ a\lambda & b\lambda & 1 \\ a\mu & -b\mu & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a\lambda & b\lambda & 1 \\ a\mu & -b\mu & 1 \end{vmatrix} = 0$

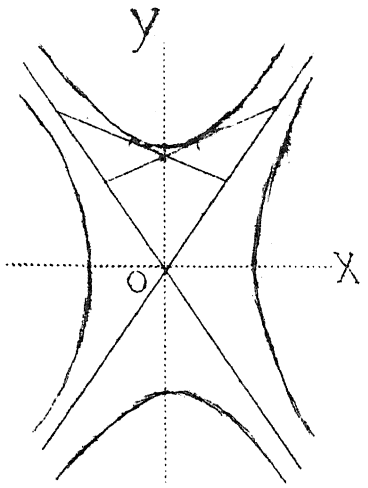
of wel, $\lambda\mu = -1$ stellend,

$$l = bx(\lambda^2 - 1) - ay(\lambda^2 + 1) + 2ab\lambda = 0$$

Dit stelt een verzameling lijnen voor, nl. voor elke waarde van λ één. Deze verzameling is geen waaier daar door elk punt P(x,y) twee exemplaren van de verzameling gaan. De verzameling heet daarom een kromme van de tweede klasse. Later zullen we hierop nader ingaan.

Wij zullen ons nu beperken tot het berekenen van de meetkundige plaats van de raakpunten.

De rechte snijdt dus een driehoek met opp ab af als $|\lambda\mu| = 1$.



Om een en ander algebraïsch te houden definiëren we hier een raakpunt als een punt met de eigenschap dat de lijnen van de klasse kromme die door dat punt gaan samenvallen. De coördinaten voldoen dus aan:
$a^2b^2 + (bx-ay)(bx+ay) = 0$ of, anders geschreven aan:
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Dit is, zoals blijkt door verwisseling van x- en y-as , een hyperbool met dezelfde asymptoten maar met verwisselde aslengten. Deze hyperbool heet de toegevoegde hyperbool.
Ingeval a=b geldt, is de toegevoegde hyperbool congruent met de hyperbool zelf. Men noemt de hyperbool dan gelijkzijdig of, daar de asymptoten loodrecht op elkaar staan, orthogonaal.
De lijnen x=y en x=-y zijn dan nl. de asymptoten en men kan dus het assenkruis om O zodanig draaien dat de assen daarmee samenvallen.
De transformatie formules zijn
$$x' = \tfrac{1}{2}(x-y)\sqrt{2}$$
$$y' = \tfrac{1}{2}(x+y)\sqrt{2}$$
De inverse transformatie luidt:
$$x = \tfrac{1}{2}(x'+y')\sqrt{2}$$
$$y = \tfrac{1}{2}(-x'+y')\sqrt{2}$$
Dit gesubstitueerd in de vergelijking $x^2-y^2 = a^2$, van de hyperbool geeft $xy = \frac{1}{2}a^2$.
(Grafiek van de wet van Boyle is dus een orthogonale hyperbool)
Opg. 112.
Laten m en n de asymptoten zijn van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Door een punt P (van de hyperbool) gaan de lijnen m' en n' met $m' /\!/ m$ en $n' /\!/ n$.
P' en P'' zijn resp. de snijpunten m en n' en van m' en n.
Bewijs dat PP'.PP'' onafhankelijk is van de keuze van P.
Hoe luidt de vergelijking van de hyperbool t.o.v. het scheve assenkruis gevormd door m en n.
Opg. 113. Twee onderling loodrechte lijnen s en t snijden de gelijkzijdige hyperbool resp. in P en S en in P en T,
Bewijs dat de raaklijn in P loodrecht staat op de lijn ST

§ 38 Appollonii.

De voetpunten van de normalen uit een punt $P(x_o,y_o)$ neergelaten op een ellips E liggen op een orthogonale hyperbool welke de hyperbool van

Appollonius van P t.o.v. E heet.
De vergelijking van een normaal in het punt (ξ,η) van de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ is : $\frac{x\eta}{b^2}-\frac{y\xi}{a^2}=\frac{c^2\xi\eta}{a^2b^2}$ en de eis dat deze door $P(x_o,y_o)$ gaat, geeft voor (ξ,η) de voorwaarde $c^2\xi\eta \quad b^2y_o \quad -a^2x_o \quad =0$
Dit is een orthogonale hyperbool daar de vergelijking in de vorm

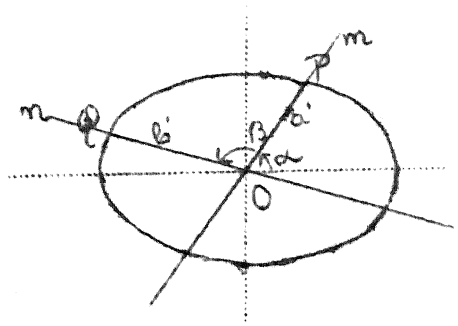
$$\left(\xi-\frac{a^2x_o}{c^2}\right)\left(\eta+\frac{b^2y_o}{c^2}\right)=\frac{-a^2b^2}{c^4}\,x_oy_o \quad \text{is te schrijven.}$$

Het middelpunt is dus $\left(\frac{a^2x_o}{c^2},\frac{-b^2y_o}{c^2}\right)$, de asymptoten zijn evenwijdig a

aan de assen van de ellips en hij gaat door het middelpunt (0,0) van de ellips en door P.
De snijpunten van ellips en deze hyperbool zijn dus de voetpunten van de normalen.
Er zijn altijd twee zulke snijpunten , daar de hyperbool een punt (O) binnen de ellips heeft en in tegenstelling tot de ellips niet begrensd is hebben ze zeker een punt gemeen en daar beide vergelijkingen reële coëfficiënten hebben , is er altijd een even aantal complexe wortels.
De bestaanbaarheid van de beide andere snijpunten hangt van P af.
Ingeval $x_o=y_o=0$ zijn zij allen reëel en b.v. in geval $x_o=0$ en
$y_o = 1{,}000001.\frac{c^2}{b}$ zijn er twee onbestaanbaar.
Opg. 114. Ga dit na.
M.b.v. continuïteitsoverwegingen, waarop we hier niet nader zullen ingaan, volgt hieruit dat het vlak in twee gebieden is verdeeld zodanig dat voor punten in het ene gebied(zoals O) er vier reële voetpunten zijn, terwijl voor punten in het andere gebied er slechts twee zijn.
De gebieden worden gescheiden door een kromme bestaande uit punten met eigenschap dat twee der voetpunten samenvallen.
De vergelijking(die we niet zullen afleiden)van deze kromme is

$$(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=c^{4/3},$$

het is de evolutie van de ellips,(zie Elan p.120 opg.112).
De raaklijnen uit P aan de evolute geven juist de normalen op de ellips.



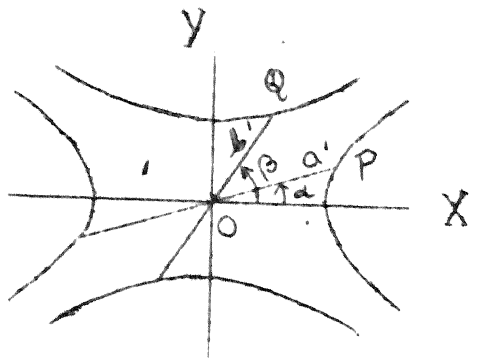
Laat P(a cos y,b sin y) een punt zijn van de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en Q een eindpunt van de aan OP toegevoegde middellijn.
De vergelijking van OP is:

$xb\sin\varphi = ya\cos\varphi$ en dus die van de toegevoegde middellijn
$-xb\cos\varphi = ya\sin\varphi$ hieraan voldoet $(a\sin\varphi, -b\cos\varphi)$ zodat Q de parameter $\varphi + 90^\circ$ heeft.
Stel $OP=a'$ en $OQ=b'$, $\sphericalangle XOP=\alpha$ en $\sphericalangle XOQ=\beta$ dan geldt:

$$a'\cos\alpha = a\cos\varphi \qquad b'\cos\beta = a\sin\varphi$$
$$a'\sin\alpha = b\sin\varphi \qquad b'\sin\beta = -b\cos\varphi$$

door kwadrateren en optellen volgt de stelling

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$



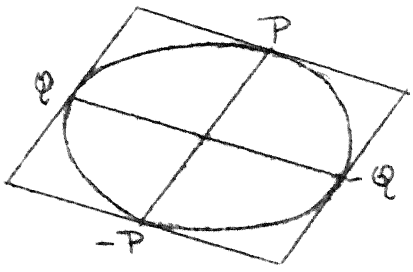
Door voor de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
de parametervoorstelling
$x = \frac{a}{\cos\varphi}$ $y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi$ te gebruiken
en de toegevoegde middellijn van OP met de toegevoegde hyperbool te snijden krijgt men $Q(a\,\mathrm{tg}\,\varphi, b\sec\varphi)$
Men vindt dan

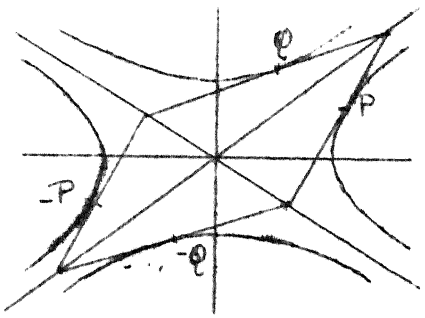
$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

(Voor notatie zie figuur).
De stelling heet de eerste stelling van Appollonius voor ellips en hyperbool.
Stel $\sphericalangle QOP = \chi$. Het oppervlak van het omgeschreven parallelogram met zijden // aan OP en OQ is $4a_1b_1\sin\chi = 4a'b'\sin(\alpha-\beta) =$

$$4a'b'\sin\alpha\cos\beta - 4a'b'\cos\alpha\sin\beta = 4ab\cos^2\varphi + 4ab\sin^2\varphi = 4ab.$$

Dus het oppervlak van een in toegevoegde richtingen omgeschreven parallelogram is constant. Dit geldt ook voor het parallelogram bestaande uit de raaklijnen aan de hyperbool in P en -P en de raaklijnen in Q en -Q aan de toegevoegde hyperbool.
De stelling heet de tweede stelling van Apollonius voor ellips en hyperbool





Opg. 115. Bepaal de meetkundige plaats van de hoekpunten van bovenstaande parallelogrammen.
Opg. 116. Reken beide stellingen na voor de hyperbool.
Opg. 117. Bewijs de tweede stelling van Apollonius voor de ellips met behulp van de affine transformatie van pag. 43.

§39 De algemene tweedegraadskromme.

De tot nu toe beschouwde krommen (cirkel, parabool, ellips en hyperbool) waren altijd van de tweede graad, d.w.z. zij hadden twee snijpunten met een willekeurige rechte lijn.
Wij zullen nu onderzoeken in hoeverre omgekeerd een tweedegraadsvergelijking altijd een kromme van bovengenoemde soort voorstelt.
Wij zullen nu echter ook de figuur gevormd door twee rechten $l_1(x,y)=0$ en $l_2(x,y)=0$ in de beschouwing **moeten betrekken.**
Immers de vergelijking van $l_1(x,y) \cdot l_2(x,y)=0$ is ook van de tweede graad (ontaarde tweedegraadskromme).
De algemene vergelijking van de tweede graad is

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

of homogeen geschreven

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

de coëfficiënten veronderstellen wij reëel.
Wij zullen **het probleem eerst met elementaire middelen aanpakken en later de hulp van de matrixrekening inroepen.**

A. Indien $a_{12}=0$ en $a_{11}a_{22} \neq 0$ kan men de vergelijking schrijven als

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33} = a.$$

Door evenwijdige verschuiving van het assenkruis met de oorsprong naar $O'\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}, \frac{-a_{23}}{a_{22}}\right)$ vindt men met behulp van de transformatie-formules

$$\bar{x} = x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad , \quad \bar{y} = y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \quad ;$$

$$a_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 = a.$$

We onderscheiden nog de volgende gevallen

A_1 $a_{11} \cdot a_{22} > 0$

$A_1\alpha$ $a = 0$ Dan is O' het enige punt dat aan de vergelijking voldoet men spreekt van ontaarde ellips, i.h.b. als $a_{11}=a_{22}$ van een nulcirkel.
Men kan het ook opvatten als twee imaginaire, snijdende rechten.

$A_1\beta$ $a \neq 0$ en $aa_{11} > 0$. Dan hebben we met een ellips te doen, assen // x- en y-as ter lengte $\sqrt{\frac{a}{a_{11}}}$ en $\sqrt{\frac{a}{a_{22}}}$; middelpunt O'.
Is i.h.b. $a_{11}=a_{22}$ dan een cirkel.

$A_{1\gamma}$ $a \neq 0$ en $aa_{11} < 0$. Er voldoet dan geen enkel punt aan de vergelijking, men spreekt van imaginaire ellips.(resp. cirkel als $a_{11}=a_{22}$)

A_2 $a_{11} \cdot a_{22} < 0$.

$A_{2\alpha}$ $a = 0$. De vergelijking is te ontbinden in

$\left(\sqrt{|a_{11}|}\, x + \sqrt{|a_{22}|}\, y\right)\left(\sqrt{|a_{11}|}\, x - \sqrt{|a_{22}|}\, y\right) = 0$ Het zijn dus twee reële snijdende rechten, met $\bar{x}$- en $\bar{y}$-as als bisectrice.

$A_{2\beta}$ $a \neq 0$ en $a_{11}a > 0$ De vergelijking stelt een hyperbool voor met reële as // x-as. Middelpunt O' en aslengte $\sqrt{\frac{a}{a_{11}}}$ en $\sqrt{\frac{-a}{a_{22}}}$

$A_{2\gamma}$ $a \neq 0$ en $a_{11}a < 0$. Een hyperbool met reële as // y-as, middelpunt O' en aslengten $\sqrt{\frac{-a}{a_{11}}}$ en $\sqrt{\frac{a}{a_{22}}}$

$(\beta\gamma)$ Is i.h.b. $a_{11} = -a_{22}$ dan is het een gelijkzijdige hyperbool.

B. $a_{12} = 0$ $a_{11} \neq 0$ $a_{22} = 0$

We schrijven de vergelijking nu als

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + 2a_{23}y + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} = 0 \text{ , stel } \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - a_{33} = a.$$

B_1 $a_{13}=0$

$B_{1\alpha}$ $a = 0$. De vergelijking stelt de dubbel-tellende rechte $x + \frac{a_{13}}{a_{11}} = 0$ voor.

$B_{1\beta}$ $aa_{11} > 0$. De twee evenwijdige rechten $x + \frac{a_{13}}{a_{11}} = \pm\sqrt{\frac{a}{a_{11}}}$

$B_{1\gamma}$ $aa_{11} < 0$. Geen enkel punt voldoet, de "figuur" is op te vatten als twee evenwijdige imaginaire rechten.

B_2 $a_{13} \neq 0$. Door de transformatie (verschuiving van de oorsprong naar $O'\left(\frac{-a_{13}}{a_{11}}, \frac{a}{2a_{23}}\right)$) $\bar{x} = x + \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $\bar{y} = y - \frac{a}{2a_{23}}$

vindt men: $a_{11}\bar{x}^2 = -2a_{13}\bar{y}$. Dit stelt een parabool voor met as // y-as en top in O', welke al naar gelang $a_{11}a_{23} > 0$ of < 0 "beneden" of "boven" de x-as ligt.

C. $a_{12}=0$, $a_{11}=0$ en $a_{22} \neq 0$

Door verwisseling van x- en y-as gaat dit geval in het vorige over.

D. $a_{12} \neq 0$.

We zullen door draaiïng van het assen-kruis dit geval herleiden tot één der vorige gevallen. Stel de draaiïngshoek is φ.

De transformatie-formules luiden dan

$$x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi$$
$$y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi.$$

Door dit in te vullen in de vergelijking krijgen we een nieuwe vergelijking

$$\bar{a}_{11}\bar{x}^2 + 2\bar{a}_{12}\bar{x}\bar{y} + \bar{a}_{22}\bar{y}^2 + 2\bar{a}_{13}\bar{x} + 2\bar{a}_{23}\bar{y} + \bar{a}_{33} = 0$$ waarbij de

coëfficiënten $\bar{a}_{ij}$ afhangen van de coëfficiënten a_{ij} en de hoek φ.
Zo geldt bijvoorbeeld:

$$2\bar{a}_{12} = -2a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + 2a_{22}\sin\varphi\cos\varphi + 2a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$= 2a_{12}\cos 2\varphi - (a_{11}-a_{22})\sin 2\varphi .$$

Door geschikte keuze van φ kan men nu bereiken dat $\bar{a}_{12}=0$. φ voldoet dan aan

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} .$$

Hierdoor is ook dit geval afgedaan. Wij kunnen dus in principe uitmaken welke kromme door een gegeven tweedegraadsvergelijking wordt voorgesteld. De methode is echter onhandig. In de volgende §§ zullen wij een snellere klassificatie-methode geven.

§ 40 Poolverwantschap.

Stel gegeven een tweedegraads kromme

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

en een punt $P(x_o, y_o, z_o)$.
Op analoge wijze als bij de cirkel(§ 21 p.22) kan men nu bewijzen dat de lijn $l = a_{11}xx_o + a_{12}(xy_o+yx_o) + a_{22}yy_o + a_{13}(xz_o+zx_o) + a_{23}(yz_o+zy_o) + a_{33}zz_o = 0$

de meetkundige plaats is van het punt Q dat het 4e harmonische punt is t.o.v. P en de snijpunten S_1 en S_2 van de kromme met een lijn door P.
Men noemt l de poollijn van P (t.o.v. de 2e graads kromme). Met behulp van de matrixrekening loopt het bewijs zonder al het rekenwerk. Wij hebben een punt $P(x_o, y_o, z_o)$ al eerder (pag.31) opgevat als een kolomvector of matrix met 3 rijen en 1 kolom. De transformatieformules kregen dan een zeer eenvoudige gedaante nl. $x = A\bar{x}$ en $\bar{x} = A^{-1}x$.
De vergelijking van de rechte $r=ax+by+cx = 0$ wordt

$(a,b,c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$, afgekort $ax = 0$. Zo is het duidelijk dat de

rechte r na de transformatie $x = A\bar{x}$ overgaat in $a(A\bar{x}) = (aA)\bar{x} = 0$.
Dit is dus weer een rechte. Wij hebben hier de associatieve wet van de matrixvermenigvuldiging gebruikt.

Hierbij behoeft A niet de vorm $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ te hebben.

Dezelfde eigenschap (nl. de invariantie van een lijn) komt dus een uitgebreidere groep transformaties toe.

Stel nu $H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ waarbij a_{ij} de coëfficiënten van een kwadratische vorm voorstellen. Er geldt dan blijkbaar:

$$x'Hx = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z \quad a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

De algemene tweede graadsvergelijking wordt dan $x'Hx = 0$.
Beschouw twee punten $P(x_o, y_o, z_o)$ $\left(\text{of liever } Px_o = P\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}\right)$ en $Q(x, y, z,)$

$(P \neq Q)$ met $x_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^*$. Een willekeurig punt R van de lijn PQ is dan $\lambda x + \mu x_o = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x_o \\ \lambda y + \mu y_o \\ \lambda z + \mu z_o \end{pmatrix}$. Twee van dergelijke punten $R_1(\lambda_1, \mu_1)$ en $R_2(\lambda_2, \mu_2)$ zullen met P en Q een harmonisch viertal vormen indien $(PQR_1R_2) = -1$. Uit $(PQR) = \dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} =$

$$= \frac{\dfrac{\lambda x + \mu x_o}{\lambda z + \mu z_o} - \dfrac{x_o}{z_o}}{\dfrac{x}{z} - \dfrac{\lambda x + \mu x_o}{\lambda z + \mu z_o}} = \frac{z}{z_o} \cdot \frac{z_o(\lambda x + \mu x_o) - x_o(\lambda z + \mu z_o)}{x(\lambda z + \mu z_o) - z(\lambda x + \mu x_o)} =$$

$$= \frac{z}{z_o} \cdot \frac{\lambda(xz_o - zx_o)}{\mu(xz_o - zx_o)} = \frac{z}{z_o} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{volgt dat}$$

$(PQR_1R_2) = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} : \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$. (Dit kan men als definitie van dubbelverhouding nemen). Uit $(PQR_1R_2) = -1$ volgt dat dan $\dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = 0$ moet gelden.

In het geval dat R_1 en R_2 de snijpunten van de lijn PQ met $x'Hx = 0$ zijn, voldoen $\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}$ en $\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$ aan $(\lambda x + \mu x_o)'H(\lambda x + \mu x_o) =$

$$= \lambda^2 x'Hx + \lambda\mu(x'Hx_o + x'_oHx) + \mu^2 x'_oHx_o = 0$$

Eist men dat PQ en R_1R_2 harmonisch liggen dan geeft dit bij vaste

*In deze §§ zullen nu geen onderscheid maken tussen reële en imaginaire punten.

$P(x_o)$ voor $Q(x)$ de voorwaarde $x'_oHx = 0$, immers

$$x'Hx_o + x'_oHx = (x'_oHx)' + x'_oHx = 2x'_oHx \ ).$$

Een rechte $x'_oHx = 0$ is de poollijn van $P(x_o)$ t.o.v. H

Wegens $x'_oHx = x'Hx_o$ geldt: ligt Q op de poollijn van P dan ligt P op de poollijn van Q.

De coëfficiënten van x,y en z zijn resp.

$a_{11}x_o+a_{12}y_o+a_{13}z_o$ $a_{12}x_o+a_{22}y_o+a_{23}z_o$ $a_{13}x_o+a_{23}y_o+a_{33}z_o$

Gemakkelijk blijkbaar geldt $x_oH = \frac{1}{2}(f_{x_o}\ f_{y_o}\ f_{z_o})$ waarbij $f(x_o,y_o,z_o)=x'_oHx_o$

en $f_{x_o} = \frac{\partial f}{\partial x_o}$, enz. De poollijn kan men dus schrijven als

$$f_{x_o}x + f_{y_o}y + f_{z_o}z = 0, \quad \text{maar ook als}$$

$$f_xx_o + f_yy_o + f_zz_o = 0.$$

Punten $P_1(x_1)$ en $P_2(x_2)$ die op elkaars poollijn liggen heten toegevoegd t.o.v. H, dus als $x_1'Hx_2 = x'_2Hx_1 = 0$ geldt. De door $x'Hx=0$ voorgestelde kromme is dan de meetkundige plaats van de aan zich zelf toegevoegde punten.

De poollijn van $P(x_o)$ is alleen dan onbepaald als $x'_o H = 0$ $(=(0,0,0))$. Dit zijn drie homogene vergelijkingen in de onbekenden x_o,y_o en z_o.

Aan deze vergelijking is alleen te voldoen als rang $H < 3$ geldt.

Wij merken eerst op:

1e. Is $P(x)$ toegevoegd aan $Q_1(x_1)$ en aan $Q_2(x_2)$ dan is $P(x)$ toegevoegd aan ieder punt van de lijn door Q_1 en Q_2 immers uit $x'hx_1=0$ en $x'Hx_2=0$ volgt $x'H(\lambda x_1+\mu x_2) = 0$.

2e. Is $P_o(x_o)$ toegevoegd aan elk punt van het vlak (dus $x_o'H=0$) en is $Q(x)$ een punt van $x'Hx=0$ dan ligt elk punt van de lijn PQ op $x'Hx = 0$. Immers uit $x'Hx=0$ en $x'_oH=0$ volgt

$$(\lambda x+\mu x_o)'H(\lambda x+\mu x_o) = \lambda^2x'Hx+\mu(x'_oH)(\lambda x+\mu x_o)+\lambda\mu x'Hx_o = 0.$$

A. Rang $H = 1$. Er zijn dan ∞^1 oplossingen van $x'_oH=0$, deze hangen lineair af van twee onafhankelijke oplossingen

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. En dus liggen zij op één rechte $l = (a)(x)= 0$.

De punten van die rechte zijn toegevoegd aan ieder punt van het vlak dus i.h.b. aan zich zelf en l ligt dus op de kromme. Lag er op de kromme nu nog een punt P dat niet op l ligt, dan zou volgens 2e. alle punten van elke rechte die P met een punt van l verbindt op de kromme liggen, dwz. elk punt van het vlak zou voldoen.

Dit kan alleen als $a_{ij} = 0$ voor alle i en j.
De kromme bestaat dus alleen uit $(a)(x) = 0$, deze rechte moeten we echter dubbel tellen daar $x'Hx$ van de tweede graad is. Er geldt dus

$$\rho\{(a)(x)\}^2 = x'Hx.$$

Daar omgekeerd de rang van de matrix $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ van de kwadratische vorm $(ax+by+cz)^2$ gelijk 1 is gaan beide eigenschappen samen.

B. Rang H = 2. Er bestaat dan juist één punt $P(x_0)$ dat aan elk punt van het vlak is toegevoegd. Op een rechte niet door P liggen twee van P verschillende punten R_1 en R_2 van de kromme. Volgens opmerking 2e behoren dus alle punten van de lijnen $l_1=PR_1$ en $l_2=PR_2$ tot de kromme. $l_1 \neq l_2$ daar anders rang H = 1.
De kromme kan geen punt R_3 buiten l_1 en l_2 bezitten daar anders $l_3=PR_3$ ook er op zou liggen, wat niet kan daar de graad twee is.

Er geldt dus: $x'Hx = \rho l_1 l_2 = \rho(a_1x+b_1y+c_1z)(a_2x+b_2y+c_2z) = 0$

Omgekeerd is de rang van de matrix van de vorm $(a_1x)(a_2x)$ gelijk aan 2, zodat voor de tweedegraadskromme het ontaard zijn in twee verschillende rechten en het bezitten van een matrix met rang 2 twee equivalente eigenschappen zijn.

C. Rang H = 3. Dan is de kromme dus niet ontbindbaar.
De punten die toegevoegd zijn aan alle punten van het vlak zijn krachtens het voorgaande punten met de eigenschap dat elke lijn er door twee samenvallende punten met de kromme gemeen heeft. Zij worden dubbelpunten genoemd . De punten PR_1 en R_2 vallen dan dus samen ,zodat $(PQR_1R_2) = -1$ geldt voor elk punt van het vlak.
Deze resultaten hangen niet af van de plaats van het coördinatenstelsel, dat wil dus o.a. zeggen dat de rang van de matrix $\tilde{H}$ van de getransformeerde vergelijking hetzelfde blijft; rang $\tilde{H}$ = rang H.
Laat $x = A\tilde{x}$ de coördinaten transformatie zijn. De vergelijking $x'Hx = 0$ wordt na substitutie

$$(A\tilde{x})'H(A\tilde{x}) = (\tilde{x}'A')H(A\tilde{x}) = \tilde{x}'(A'HA)\tilde{x} = \tilde{x}'\tilde{H}\tilde{x}$$ zodat de matrix $\tilde{H}$ van de getransformeerde vergelijking voldoet aan

$$\tilde{H} = A'HA.$$

In verband met $\det A = \pm 1$ hebben wij dus $\det \tilde{H} = \det H$.
De determinant $\det H$ heet de determinant van Hesse.
De kromme is dus ontaard als $\det H = 0$ en omgekeerd.

Opg. 118. Bewijs dat de poollijn van een punt van de kromme, de raaklijn is in dat punt.

§44. De 2e graads kromme en de oneigenlijke rechte.

Als we de 2e graads kromme met de oneigenlijke rechte z=0 snijden, dan vinden we:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$ Dit is te schrijven als:

$$(xy)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = (xy)\,D\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = 0$$

Afgekort $x'Dx = 0$.

Opg. 119. Bewijs dat det D invariant is t.o.v. de transformatie

$x = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x} = A\,\bar{x}$ door op te merken dat als $\bar{H} = A'HA$ is dan $\bar{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ is.

Dus te bewijzen $d = \det D = \det \bar{D}$.

Opg. 120. Bewijs dat onder dezelfde transformatie $\omega = a_{11}+a_{22}$ invariant is.

Opg. 121. Bewijs dat onder de transformatie $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x}$ zelfs geldt

$$D = \bar{D}$$

Wij onderscheiden drie gevallen nl.

1e. <u>det D > 0</u>: Er zijn dan geen reële x en y die aan $(xy)\,D\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = 0$ voldoen. Al naar gelang de rang van H 3 of 2 is, hebben we te doen met een ellips of een ontaarde ellips (N.B. rang H ⩾ 2)

2e. <u>det D = 0</u>: Er is dan juist een stel waarden $x = \lambda x_0$ en $y = \lambda y_0$ met reële x_0 en y_0. De kromme heeft dus één oneigenlijk punt, en de vergelijking stelt voor: als rang H = 3 een parabool
als rang H = 2 twee evenwijdige rechten
als rang H = 1 twee samenvallende rechten.

3e. <u>det D < 0</u>: Er zijn dan twee verschillende oneigenlijke punten. De kromme is als rang H = 3 een hyperbool
en als rang H = 2 twee rechten. (N.B. rang H ⩾ 2)

We zien nu dat, als we det D en de rang van H kennen, we weten wat de vergelijking voorstelt.

We gaan nu het (eventuele) middelpunt en de eventuele assen zoeken van een 2e graads kromme zonder eerst het assenkruis te draaien.

Het middelpunt $M(x_o)$ heeft de eigenschap dat het elke koorde (door M) midden door deelt. Stel l is een rechte door M en laat N het oneigenlijke punt van l zijn. Noem de snijpunten van l met de kromme $x'Hx=0$ resp. R_1 en R_2. Dan geldt $(MNR_1R_2) = -1$ (zie elam pag 27 opg 64.) voor elke rechte l door M. Dit betekent dat de oneigenlijke rechte de poollijn is van het middelpunt, dus $x'_oA = (0\ 0\ \lambda)$

De coördinaten voldoen dus aan $f_x = 0$ en $f_y = 0$ of voluit geschreven.

$$\text{aan} \qquad a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13}z_o = 0 \quad \text{en}$$
$$a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_{23}z_o = 0$$

Ingeval $\det D \neq 0$ (elliptisch en hyperbolisch geval) is er juist één (eigenlijk) punt M te vinden dat hieraan voldoet. Dit punt ligt niet op de kromme als rang H = 3 . Immers was dit zo dan hadden we

$$x_1'Hx_o = (f_{x_o}\ f_{y_o}\ f_{z_o}) \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} = f_{z_o}\ z_o = 0$$

en daar $z_o \neq 0$ moest $f_{z_o} = 0$ zijn. De drie homogene vergelijkingen $x_o'H = 0$ hadden dan een oplossing (ongelijk aan de nul oplossing) wat niet kan als rang H = 3 is.

Opg. 122. Bewijs dat als rang $H < 3$ en $\det D \neq 0$ de pool van z=0 op de kromme ligt. Geef een algebraïsch en een meetkundig bewijs.

Ingeval D=0 en rang H =3 (parabool) is

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2$$ (anders $\det H = 0$). Er is dus een oneigenlijk punt $M(x_o, y_o, 0)$ dat voldoet. Dit is geen middelpunt in gewone in. Het gevonden punt ligt bovendien op de kromme daar

$$x_o'Hx_o = (f_{x_o}, f_{y_o}, f_{z_o}) \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ 0 \end{pmatrix} = (0,0,f_{z_o}) \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Het stelt dus de asrichting van de parabool voor.

Is rang $H < 3$ dan is $\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 1$

Opg. 123. Bewijs dit. N.B. H is symmetrisch.

Er zijn dan oneindig veel middelpunten die op een rechte liggen.

Is i.h.b. rang H = 1 dan ligt deze rechte op de kromme. De laatste eigenschappen zijn meetkundig gemakkelijk in te zien.

Opg. 124. Bepaal het middelpunt van de volgende krommen:

$3x^2+14xy+8y^2-6xz-14yz+2z^2 = 0$

$3x^2+14xy+8y^2-6xz-14yz+3z^2 = 0$

$x^2+ 2xy+2y^2-2xz- 2yz+2z^2 = 0$

Verschuift men in het geval er een eigenlijk middelpunt is het assen-kruis met de oorsprong naar het middelpunt dan krijgt H de vorm

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} \end{pmatrix}$$ daar $(0\ 0,1)H = (0\ 0\ \lambda)$ moet gelden

en daar D invariant is bij verschuivingen.

Opg. 125. Bewijs dit door de $\bar{H} = A'\,H\,A$ geheel uit te rekenen.

Noem $M(x_0,y_0,1)$ het middelpunt en gebruik de relaties

$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$ en $a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De constante $\bar{a}_{33}$ laat zich gemakkelijk berekenen

uit $h = \det \bar{H} = \bar{a}_{33} \det \bar{D} = \bar{a}_{33}d$ nl. $\bar{a}_{33} = \frac{h}{d}$

In § 39 zagen we reeds dat door draaiing van het assen-kruis (als $D \neq 0$) $\bar{D}$ op de gedaante $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} \end{pmatrix}$ gebracht kan worden. We zijn nu in staat

direct de α_1 en α_2 te berekenen. Wegens de invariantie van ω geldt

$\alpha_1 + \alpha_2 = \omega$ en wegens de invariantie van det D geldt

$$d = \det D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2$$ zodat α_1 en α_2 de

wortels zijn van de vierkantsvergelijking $\lambda^2 - \omega\lambda + d = 0$.

Anders geschreven luidt deze vergelijking $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Als vergelijking op de assen vinden we dus

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 = \frac{h}{d}$$ i.h.b. als $h \neq 0$

$$\frac{d\alpha_1 x^2}{h} + \frac{d\alpha_2 y^2}{h} = 1.$$ de richting van de assen

vinden we zo niet.

Alvorens deze op te sporen zullen we het begrip van de toegevoegde richtingen van uit een hoger standpunt bezien. Zij $N(x_0,y_0,0)$ een gegeven richting (oneigenlijk punt) en laten R_1 en R_2 de snijpunten zijn van een rechte l door N. Voor het midden M van R_1 en R_2 geldt nu weer

$(NMR_1R_2) = -1$, hieruit volgt dat de meetkundige plaats van M als l de waaier met top N doorloopt (evenwijdig verschuift) de poollijn van N is. Daar N op z=0 ligt gaat zijn poollijn door de pool van z=0 d.i. het middelpunt (toegevoegde middellijn). De vergelijking van de toegevoegde middellijn is dus $f_{x_0}.x + f_{y_0}.y + f_{z_0}.z = x_0f_x + y_0f_y = 0$.

Opg. 126. Ga na waar deze lijn terecht komt in de gevallen
$D = 0$ rang $H = k = 3$; $D = 0$ $k=2$ en $D = 0$, $k=1$.

Opg. 127. Bereken opnieuw de aan de richting $tg\varphi = m$ toegevoegde middellijn bij

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{en} \quad y^2 = 2px.$$

Om zinvol over assen te kunnen spreken moeten we ons beperken tot het geval $d \neq 0$

De assen zijn toegevoegde middellijnen die loodrecht op elkaar staan. Is $N(x_o, y_o, 0)$ de richting van de ene, dan vindt men die van de andere uit

$$z=0 \quad \text{en} \quad (x_o\ y_o\ 0)H(x) = (x)'H\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

De toegevoegde richting is dan $(-f_{y_o}' \quad f_{x_o} \quad 0)$ Zij staan loodrecht op elkaar als $\frac{f_{x_o}}{x_o} = \frac{f_{y_o}}{y_o}$, of anders genoteerd als $(f_{x_o}, f_{y_o}) = \lambda(x_o\ y_o)$

Daar dit alles zich op de oneigenlijke rechte afspeelt, werken we feitelijk een dimensie lager. Dit zien we duidelijk als we het assenkruis met oorsprong naar het (in dit geval eigenlijke) middelpunt verplaatst denken.

$\bar{H} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ met $a = \frac{h}{d}$. De vergelijking $x'Hx = 0$ vereenvoudigt zich tot $(xy)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + az^2 = 0$ en daar we op $z=0$ werken hebben we voor de x en y $(xy)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. De toegevoegde richting van $(x_o\ y_o\ 0)$ is nu $(x_o\ y_o)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. De richtingen staan dan loodrecht op elkaar als $(f_{x_o}\ f_{y_o}) = (x_o\ y_o)D = \lambda(x_o\ y_o)$. Dit zijn twee homogene lineaire vergelijkingen

nl. $(x_o y_o)\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = 0$

Deze hebben alleen een oplossing als aan $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ voldaan is.

Bij elk van de wortels λ_1 en λ_2 vinden we dan een richting, en wel $(x_1y_1 0)$ bij λ_1 en $(x_2y_2 0)$ bij λ_2.

De richtingen staan loodrecht op elkaar, immers

$$x_1x_2 + y_1y_2 = (x_1y_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1y_1}{\lambda_1}D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x_1y_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ (N.B.

$\lambda_{1(2)} \neq 0$ daar $D \neq 0$) en hieruit volgt als $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dat $(x_1y_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$

moet gelden, wat juist de loodrechte stand geeft. $\lambda_1 = \lambda_2$ kan alleen optreden als discriminant $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{22} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{22})^2 - 4d =$

$= (a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}^2 = 0$ en dit is alleen oneelijk als $a_{11}=a_{22}$ en $a_{12}=0$ dan geldt dus $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11}$ en de rang van $\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$ is dan nul, wat aanleiding geeft tot ∞^1 oplossingen. Dit wordt vanzelfsprekend als men bedenkt dat de kromme dan een cirkel is.
In het algemene geval vinden we dus bij λ_1 en $\lambda_2(\neq \lambda_1)$ de richtingen $(x_1, y_1\ 0)$ resp. $(x_2 y_2 0)$ welke voldoen aan $(x_1 y_1)D = \lambda_1(x_1 y_1)$ resp. $(x_2 y_2)D = \lambda_2(x_2 y_2)$. De richtingen bleken loodrecht op elkaar te staan.
De punten $(\varrho x_1\ \varrho x_2\ 1)$ resp. $(\sigma x_2\ \sigma y_2\ 1)$ liggen op de lijn door O in de 1e resp. 2e richting.
Snijding met $(xy)D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-h}{d}$ geeft

$$\frac{-h}{d} = (\varrho x_1\ \varrho y_1)\, D \begin{pmatrix} \varrho x_1 \\ \varrho y_1 \end{pmatrix} = -\varrho^2 (x_1 y_1)\, D \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \varrho^2 \lambda_1 (x_1 y_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \varrho^2 \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2)$$

Voor het kwadraat van de afstand van de snijpunten tot de oorsprong vinden we

$$\varrho^2(x_1^2+y_1^2) = \frac{-h}{d\lambda_1} \quad \text{resp.} \quad \sigma^2(x_2^2+y_2^2) = \frac{-h}{d\lambda_2}$$ zodat we tot de

as-vergelijking $\dfrac{-d\lambda_1 x^2}{h} \quad \dfrac{-d\lambda_2 y^2}{h} = 1$ mogen besluiten (mits $h \neq 0$).

Opg. 128. Bepaal de vergelijking op de assen van
$$66x^2+24xy+59y^2+180x+260y+200 = 0.$$

In het parabolische geval d=0 is het middelpunt oneigenlijk.
Men kan dan dus door verschuiving niet bereiken dat $\bar{a}_{13} = \bar{a}_{23} = 0$ is.
Voor de richting van de toppraaklijn geldt dat zij loodrecht staat op de as-richting, toppraaklijn en as zijn toegevoegde poollijnen. Met behulp van deze eigenschap zijn zij gemakkelijk te vinden. De vergelijking op as en toppraaklijn vinden we gemakkelijk als we bedenken dat zij de vorm $\alpha y^2 - 2\beta x = 0$ moet hebben, de matrix $\bar{H}$ heeft dan de gedaante

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Wegens de invariantie van

det H hebben we $-\alpha\beta^2 = h$ en wegens de invariantie van $\omega = a_{11}+a_{22}$ hebben we $\alpha = \omega$ de vergelijking is dus

$$\omega y^2 = 2\sqrt{\left|\frac{h}{\omega}\right|}\, x.$$ (bij geschikte keuze van de pos.x-richting).

Opg. 129. Bepaal de "eenvoudigste vergelijking" van
$$x^2-6xy+9y^2-40y\sqrt{10} = 0 .$$ Wat is de top?
De tweedegraads kromme is op te vatten als doorsnede van een vlak en een kegel(rechte cirkelkegel). Om de // rechten te krijgen moet men toelaten dat de kegel een oneigenlijke top heeft(cylinder).

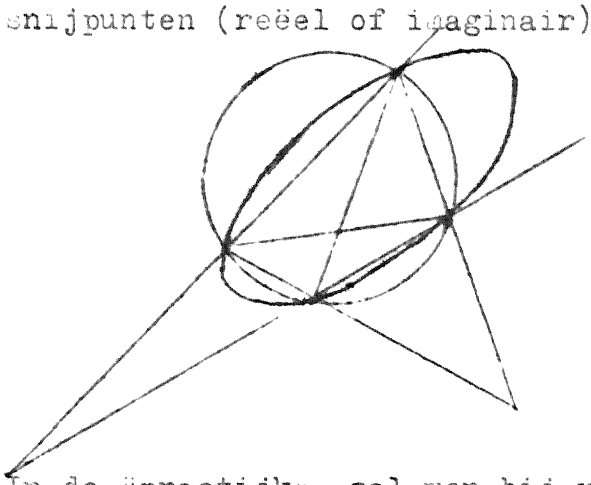
Men ziet zo ook duidelijk in dat de indeling van de niet ontaarde tweedegraads krommen in ellips, hyperbool en parabool uitsluitend geschiedt t.o.v. de oneigenlijke rechte.
De verschillende elementaire eigenschappen van de kegelsnede zijn gemakkelijk stereometrisch te bewijzen. Wij bevelen de uitvoering ter oefening warm aan.

§ 45. Kegelsneden⌒bundels.

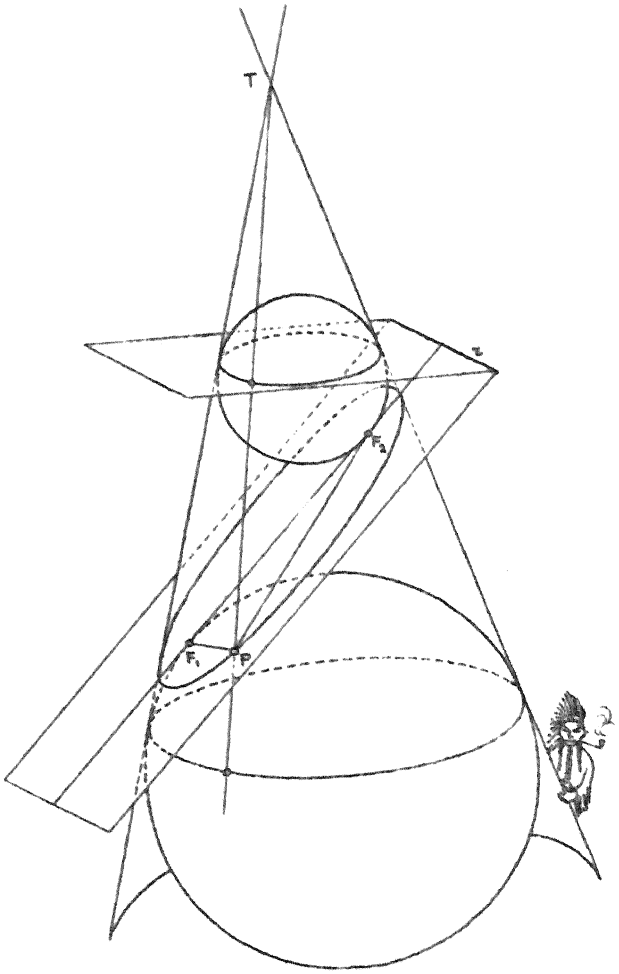
Laten $x'H_1x = K_1(x,y) = 0$ en $x'H_2x = K_2(xy) = 0$ de twee tweedegraads vergelijkingen zijn van de kegelsneden K_1 en K_2.
Voor alle λ en μ (niet beide nul) is dan

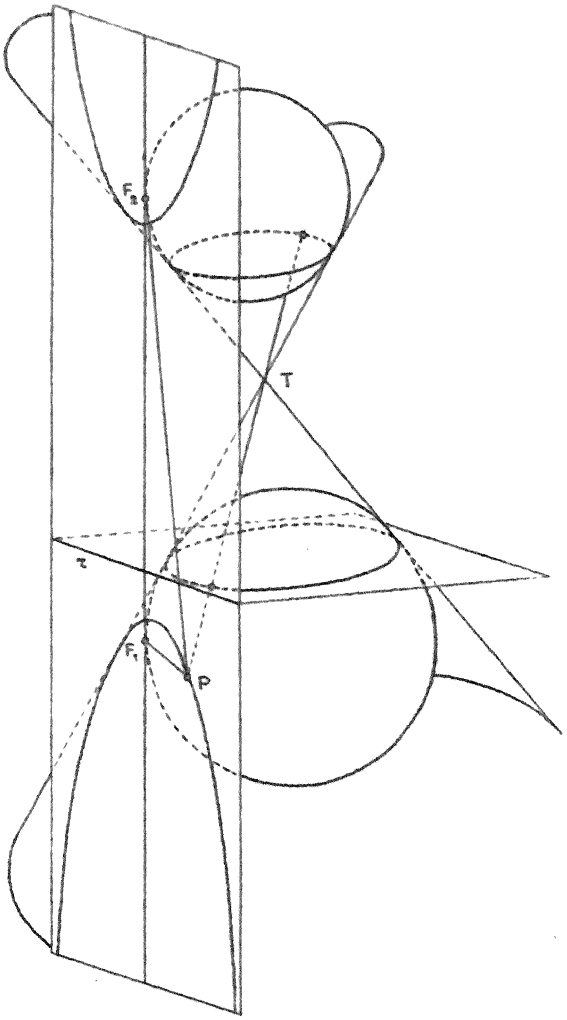
$$K(xy) = \lambda K_1(x,y) + \mu K_2(x,y) = 0$$ ook een kegelsnede.

De verzameling kegelsneden $\lambda K_1 + \mu K_2 = 0$ heet een kegelsnedenbundel.
Gemakkelijk ziet men in dat alle exemplaren van de bundel gaan door de snijpunten (reëel of imaginair) van K_1 en K_2 (die de basis exemplaren heten).

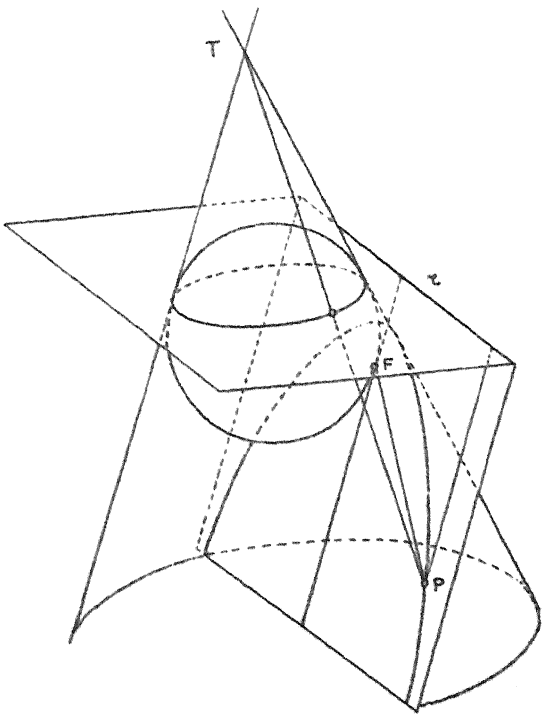


De ontaarde exemplaren vindt men uit: $\det(\lambda H_1 + \mu H_2) = 0$, dit is een derdegraads vergelijking in (λ,μ) en men vindt i.h.a. drie ontaarde exemplaren (zie figuur)
Als bij de cirkel⌒bundels bewijst men dat de bundel bepaald is door twee willekeurige verschillende exemplaren.
In de "practijk" zal men bij voorkeur ontaarde exemplaren gebruiken.
De vergelijking van een willekeurige kegelsnede bevat 6 willekeurige coëfficiënten(homogeen). Een voorwaarde voor de kegelsnede welke uit te drukken is als een lineaire vergelijking in de coëfficiënten heet lineair. (kwadratische voorwaarde analoog).
Bijv. de eis dat P(x) op de kegelsnede ligt geeft de voorwaarde $x'Hx=0$.
De eis dat P(x) toegevoegd is aan $\gamma(\bar{x})$ geeft eveneens een lineaire voorwaarde $\bar{x}'Hx=0$. (de vorige is er een bijzonder geval van).
Twee voorwaarden heten onafhankelijk als de corresponderende vergelijkingen in de coëfficiënten zulks zijn. Hieruit volgt dat een kegelsnede bepaald is door 5 lineaire onafhankelijke voorwaarden. Daar de ∞^1 oplossingen van 4 homogene lineaire vergelijkingen in zes onbekenden alle lineair afhangen van twee willekeurige verschillende oplossingen, is de verzameling van alle kegelsneden welke voldoen aan 4 onafhankelijke lineaire voorwaarden een bundel.
Voorbeelden van twee (onafhankelijke) lineaire voorwaarden zijn het geven van twee verschillende punten, het geven van een punt met de bijbehorende raaklijn, het geven van een pool en een poollijn, het geven van het middelpunt en het geven van twee paar toegevoegde punten.

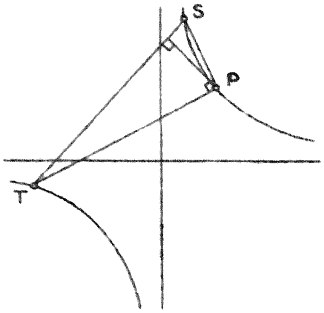




RENÉ DESCARTES
— 1596–1650 —



Opg. 130. Bewijs deze beweringen.
Alle kegelsneden die door twee verschillende punten P_1 en P_2 gaan en in een gegeven punt Q aan gegeven rechte l raken (Q op l) vormen een bundel mits l niet door P_1 of P_2 gaat.
We zullen hier de onafhankelijkheid van de voorwaarden niet bewijzen. Wel zullen we de bundel aangeven. We kunnen als basis exemplaren kiezen de lijnen paren P_1P_2 met l en P_1Q met P_2Q.
Opg. 131. Bepaal de bundel van de kegelsneden gaande door (2,0) en (0,3) rakend in (1,1) aan x-y=0. Bepaal daarna de kegelsnede door (2,0) (0,0) (0,3) rakend aan x-y in het punt (1,1).
Legt men aan de kegelsneden van een bundel nog een extra lineaire voorwaarde op dan is er in het algemeen één exemplaar dat hieraan voldoet. (soms oneindig veel, afhankelijkheid).
Een lineaire voorwaarde is bijv. de eis dat de kegelsnede een orthogonale hyperbool is nl. $a_{11}+a_{22}(=\omega) = 0$.
Elke bundel zal dus i.h.a. één orthogonale hyperbool bevatten. Bevat een bundel er twee, dan is elk exemplaar een orthogonale hyperbool(eventueel ontaard). Immers we kunnen de beide eerstgenoemde als basis exemplaren kiezen, zeg K_1 en K_2, en dan geldt $K = \lambda K_1 + \mu K_2$, maar dan is $\omega_K = \lambda\omega_{K_1} + \mu\omega_{K_2} = 0+0 = 0$. We kunnen nu ook opg. 113 gemakkelijk oplossen. We kunnen de raaklijn samen met TS nl. opvatten als exemplaar van de bundel met basis exemplaren 1e. de hyperbool en 2e. het lijnenpaar PS en PT. Deze zijn beide orthogonaal dus alle exemplaren, i.h.b. dus de raaklijn $\perp$ TS.



Opg. 132. Bewijs met behulp van bovengenoemde eigenschap dat de hoogtelijnen van een driehoek door een punt gaan.
Aan meerdere lineaire voorwaarden kan in het algemeen niet worden voldaan. De eis dat een kegelsnede een cirkel is, is equivalent met twee lineaire voorwaarden.($a_{12}=0$ en $a_{11}=a_{22}$) In het algemeen zal een bundel dus geen cirkel bevatten.
Opg. 133. Wat is het verband met cirkelbundels?
Stelling : Bevat een kegelsnedebundel een cirkel dan zijn de assen van alle exemplaren evenwijdig en zijn omgekeerd de assen van alle exemplaren evenwijdig dan bevat de bundel een cirkel.
Bewijs 1e. De bundel zij $K = \lambda H(xy) + \mu C(xy) = 0$ waarbij $H(x,y) = a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$ en $C(x,y) = x^2+y^2+2ax+2by+c = 0$. De asrichtingen van K kunnen bepaald worden (§39 p.53) uit

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\lambda a_{12}}{(\lambda a_{11}+\mu)-(\lambda a_{22}+\mu)} = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

(φ is de hoek van de as met de x-as)

Daar dit niet van λ en μ afhangt volgt het eerste gedeelte van de stelling 2e. Als de assen van twee verschillende exemplaren van de bundel evenwijdig zijn dan kunnen we de x- en y-as in dezelfde richting kiezend de basisexemplaren voorstellen met

$$K(xy) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

en $$K'(xy) = a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}xz + 2a'_{23}yz + a'_{33}z^2 = 0.$$

We zien zo ook dat dan alle exemplaren dezelfde asrichting hebben.
Opdat $K = \lambda K + \mu K'$ een cirkel zij moet gelden

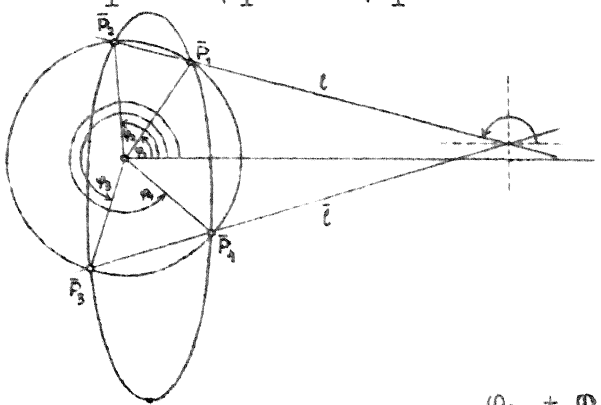
$$\lambda a_{11} + \mu a'_{11} = \lambda a_{22} + \mu a'_{22} \quad \text{dus} \quad \lambda : \mu = (a'_{11}-a'_{22}) : (a_{22}-a_{11}).$$

Tenzij alle exemplaren cirkels zijn geeft dit juist één oplossing (anders oneindig veel).
Als toepassing zullen we vraagstuk 107 behandelen.
Stel gegeven de ellips

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{en de cirkel } C = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

met de snijpunten $P_i(a\cos\varphi_i,\ b\sin\varphi_i)$.

Door de transformatie $\left.\begin{matrix} x = a\bar{x} \\ y = b\bar{y} \end{matrix}\right\}$ gaat E over in $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$ en C gaat over in een ellips met assen evenwijdig aan x- en y-as, terwijl P_i overgaat in $\bar{P}_i(\cos\varphi_i,\ \sin\varphi_i)$.



De kegelsnedebundel door de punten $\bar{P}_i$ bevat een cirkel ($x^2+y^2=1$) dus alle exemplaren hebbeb assen evenwijdig (hier aan x- en y-as).
Dus de x- en y-richting delen de hoek tussen $\bar{P}_1\bar{P}_2$ en $\bar{P}_3\bar{P}_4$ middendoor.
Nu geldt echter

$$\sphericalangle xl(\text{als } l=\bar{P}_1\bar{P}_2) = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + 90$$

en (als $l'=\bar{P}_3\bar{P}_4$) $\sphericalangle xl' = \sphericalangle \frac{\varphi_3+\varphi_4}{2} + 90$. Daar de x-as de hoek ll' middendoordeelt, $\sphericalangle l'x = \sphericalangle xl$, hebben we $\frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4}{2} + 180^\circ = 0$ (mod 360°) dus $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 = 0$ (mod 360°) q.e.d.

Ook opgave 100 wordt nu een zacht gekookt eitje.
Stel nl.

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{is de ellips. De voetpunten van de normalen}$$

door $P(x_o y_o)$ stellen we $P_i(x_i y_i)$ (i=1,2,3,4).

We hebben dan de relaties

$$a^2x_oy_i - b^2y_ox_i - c^2x_iy_i = 0$$

of na deling door x_iy_i

$$\frac{a^2x_o}{x_i} - \frac{b^2y_o}{y_i} = c^2 \qquad (i=1,2,3,4)$$

Trekt men de vierde relatie af van de i^e $(i=1,2,3)$ dan krijgt men

$$(\alpha_i) \equiv \frac{a^2x_o(x_4-x_i)}{x_ix_4} - \frac{b^2y_o(y_4-y_i)}{y_iy_4} = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

Daar P_i op E ligt $(i=1,2,3,4)$ geldt ook $\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} = 1$

Weer de vierde van de overige aftrekkend krijgen we

$$(\beta_i) \equiv \frac{x_i^2 - x_4^2}{a^2} + \frac{y_i^2 - y_4^2}{b^2} = 0 \quad (i=1,2,3)$$

Door combinatie van α_i en β_i vinden we $\frac{x_4x_i(x_4+x_i)}{a^4x_o} + \frac{y_4y_i(y_4+y_i)}{b^4y_o} = 0$

De kegelsnede $\frac{x_4x(x_4+x)}{a^4x_o} + \frac{y_4y(y_4+y)}{b^4y_o} = 0$ heeft de assen evenwijdig

x- en y-as (immers x.y ontbreekt)..De punten P_i $(i=1,2,3)$ liggen er volgens bovenstaande formules op, terwijl $P'_4(-x_4,-y_4)$ ook kennelijk voldoet. De bundel met basispunten P_1,P_2,P_3 en P'_4 moet nu een cirkel bevatten daar alle exemplaren de assen evenwijdig hebben q.e.d.
Deze stelling staat bekend als de stelling van Joachimsthal.
Het geven van een raaklijn van een kegelsnede is geen lineaire voorwaarde Ze leidt nl. tot een kwadratische vergelijking in de coëfficiënten. We kunnen om dat in te zien de x-as langs de gegeven rechte kiezen.
Stel op de gebruikelijke wijze de kegelsnede voor door $f(x,y,z) =$
$= a_{11}x^2 + \ldots\ldots\ldots = 0$. De x-as is raaklijn als zij door haar pool gaat.
De pool van de x-as vinden we uit $f_x=0$ en $f_z=0$ (poollijnen van (1,0,0) en (0,0,1)) of wel

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Aan deze vergelijkingen moet dan voldaan zijn door een punt (x,0,z),

dus $\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{13}z &= 0 \\ a_{13}x + a_{33}z &= 0 \end{aligned}\right\}$, wat alleen kan als $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0.$

Dit is dus inderdaad een kwadratische vergelijking.
Opg. 134. In een bundel zitten i.h.a. twee parabolen.

§ 46. De centrale kegelsnede.

De meetkundige plaats van de middelpunten van de kegelsneden van een bundel is een kegelsnede.

Bewijs: Stel de bundel is $h(x,y,z) = \lambda f(x,y,z) + \mu g(x,y,z) = 0$ met $f(x,y,z) = a_{11}x^2+\ldots.$; $g(x,y,z) = b_{11}x^2+\ldots.$ en $h(x,y,z) = c_{11}x^2+\ldots$

Het middelpunt van $h(x,y,z)=0$ voldoet aan

$$h_x = \lambda f_x + \mu g_x = 0$$

$$\text{en} \quad h_y = \lambda f_y + \mu g_y = 0$$

Eliminatie van λ en μ geeft

$$\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = f_x g_y - f_y g_x = 0.$$ Dit is

een tweedegraads vergelijking en de meetkundige plaats is inderdaad een kegelsnede. Zij heet de centrale kegelsnede van de bundel.

Stelling: De centrale kegelsnede is een ontaarde cirkel als alle exemplaren van de bundel gelijke asymptotische richtingen hebben en omgekeerd.

Het is een niet ontaarde cirkel als de bundel uitsluitend uit othogonale hyperbolen bestaat welke natuurlijk niet alle dezelfde asymptotische richtingen mogen hebben en omgekeerd.

Bewijs: Snijden we de bundel met $z=0$ dan krijgen we

$$c_{11}x^2+2c_{12}xy+c_{22}y^2 = (a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11})x^2+(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})xy+$$
$$+(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12})y^2 = 0.$$

Als alle exemplaren van de bundel dezelfde asymptotische richtingen hebben, dan geldt $\varrho a_{11} = \sigma b_{11}$, $\varrho a_{12} = \sigma b_{12}$ en $\varrho a_{22} = \sigma b_{22}$ (en omgekeerd) met ϱ en σ niet beide nul. In dit geval is $c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0$, zodat $h(x,y,z) = 0$ een ontaarde cirkel is.

Omgekeerd volgt uit $c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0$ dat de rang van

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{pmatrix} = L$$ gelijk 1 is, zodat er een ϱ en een σ te vinden zijn die aan bovenstaande voorwaarden voldoen. Indien de bundel uit orthogonale hyperbolen bestaat geldt $a_{11}+a_{22} = b_{11}+b_{22} = 0$ (en omgekeerd)

Nu is kennelijk $c_{12} = a_{11}(b_{11}+b_{22}) - b_{11}(a_{11}+a_{22}) = 0$ en

$$c_{11}-c_{22} = b_{12}(a_{11}+a_{22}) - a_{12}(b_{11}+b_{22}) = 0$$ en $h(x,y,z)=0$ is dus een cirkel, zij kan volgens het bovenstaande alleen ontaard zijn als rang $L < 2$. Omgekeerd volgt uit $c_{12} = 0$ dat

$a_{11} : b_{11} = a_{22} : b_{22} = (a_{11}+a_{22}) : (b_{11}+b_{22})$ en uit $c_{11}-c_{22}=0$ volgt

dat $(a_{11}+a_{22}) : (b_{11}+b_{22}) = a_{12}:b_{12}$. Daar $c_{11} \neq 0$ is (anders ontaarde cirkel) hebben we $a_{11} : b_{11} \neq a_{12} : b_{12}$ zodat $a_{11}+a_{22}=b_{11}+b_{22}= 0$ moet gelden. q.e.d.

Als in de bundel een cirkel voorkomt dan is de centrale kegelsnede een orthogonale hyperbool en omgekeerd.

Nemen we als basisexemplaren de cirkel $C = x^2+y^2+2axz+2byz+cz^2 = 0$ en de kegelsnede $f(x,y,z)=a_{11}x^2..... =0$ dan vinden we voor de doorsnijding van de centrale kegelsnede met z=0

$a_{12}x^2+(a_{22}-a_{11})xy-a_{12}y^2 = 0$ waaruit volgt dat deze een orthogonale hyperbool is.

Om het omgekeerde te bewijzen nemen we als basisexemplaren

$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2+.... = 0$ (dus we kiezen het assenkruis evenwijdig aan de assen van $f(x,y,z)=0$; dus $a_{12}=0$) en

$g(x,y,z) = b_{11}x^2+.....=0$ (willekeurig).

De centrale kegelsnede is nu orthogonaal dus:

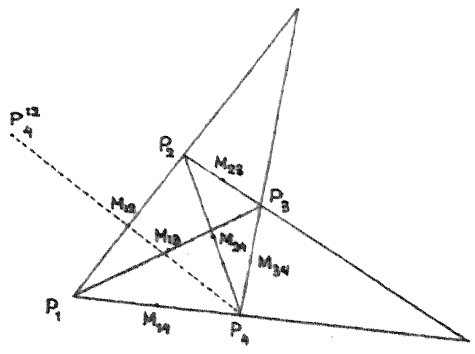
$$a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} + a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12} = b_{12}(a_{11}-a_{22}) = 0$$

dus $a_{11}-a_{22} = 0$ of $b_{12} = 0$ in het eerste geval is $f(x,y,z)=0$ een cirkel en in het tweede geval hebben de basisexemplaren de assen evenwijdig en dan moet de bundel eveneens een cirkel bevatten. q.e.d.

Als de centrale kegelsnede een orthogonale hyperbool is, dan staan de assen van de beide parabolen van de bundel loodrecht op elkaar, aangezien de asymptotische richtingen van de centrale kegelsnede de asrichtingen van de parabool voorstellen.

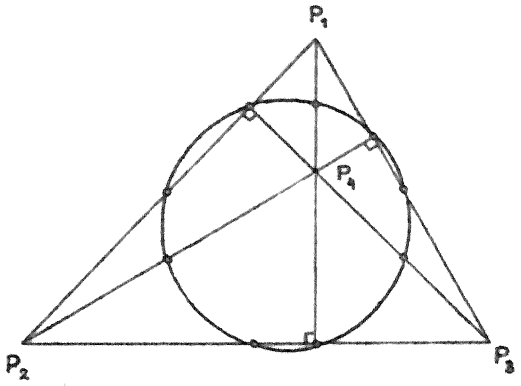
Opg. 135. Bewijs rechtstreeks. Als de bundel een cirkel bevat staan de assen van de parabolen loodrecht op elkaar. Hint(gentle). Neem als basisexemplaren de cirkel en een van de parabolen (kies ook het assenstelsel niet te argeloos).

Behalve de asrichtingen van de beide parabolen (van de bundel) bevat de centrale kegelsnede ook de dubbelpunten van de ontaarde exemplaren.



Laten P_1, P_2, P_3 en P_4 de basispunten van de bundel zijn en laat M_{ij} het midden van P_i en P_j zijn. ($M_{ij}=M_{ji}$) De 6 punten M_{ij} liggen ook op de centrale kegelsneden. Men ziet nl. gemakkelijk in dat ze als middelpunt optreden. Laat nl. P_k^{ij} het gespiegelde zijn van P_k t.o.v. M_{ij} ($k\neq i$ en $\neq j$) or is een kegelsnede in bundel welke door P_k^{ij} gaat en M_{ij} is haar middelpunt (pool van z=0). De centrale kegelsnede heet ook wel **elfpuntskromme.**

Toepassing: Neem voor de basispunten van de bundel de hoekpunten en het hoogtepunt van een driehoek. De centrale kegelsnede gaat dan door de voetpunten van de hoogtelijnen (dubbelpunten van de ontaardingen) en door de middens van de zijden en de stukken van de hoogtelijnen tussen hoogtepunt en hoekpunt. Daar de ontaardingen (hoogtelijnen en bijbehorende zijden) orthogonaal zijn, bevat de bundel uitsluitend orthogonale hyperbolen en krachtens het voorgaande is de centrale kegelsnede dan een cirkel. Zij staat bekend onder de naam negenpunts cirkel.

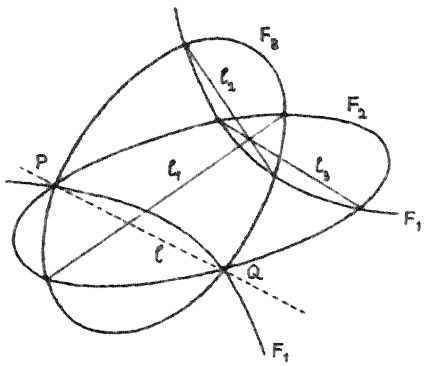


Opg. 136. Bewijs (meetkundig) dat de centrale kegelsnede ontaard is, als de bundel een ontaarde parabool bevat.

§ 47. De stellingen van Sturm en Pascal.

De stelling van Sturm luidt als volgt:

Als drie kegelsneden door twee punten P en Q gaan dan zijn de verbindingslijnen van de punten verschillend van P en Q die zij paarsgewijze gemeen hebben concurrent.

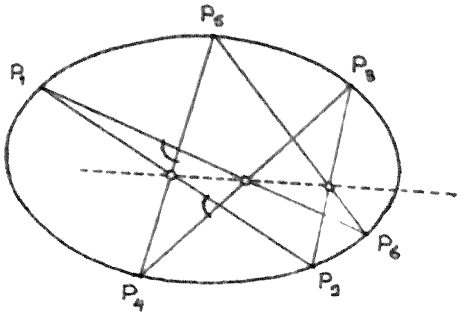


Bewijs: Stel de vergelijkingen van de kegelsneden resp. $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ en $F_3(x,y,z)=0$.
De lijn PQ zij $l(x,y,z)=0$, terwijl we de vergelijking van de gemeenschappelijke koorde van F_1 en F_2 met $l_3(x,y,z)=0$ zullen voorstellen. $l_1(x,y,z)=0$ en $l_2(x,y,z)=0$ cyclisch.
ll_3 komt voor in de bundel bepaald door F_1 en F_2 dus voor passend gekozen λ en μ

$\lambda F_1 + \mu F_2 = ll_3$ evenzo voor geschikt gekozen ϱ en σ

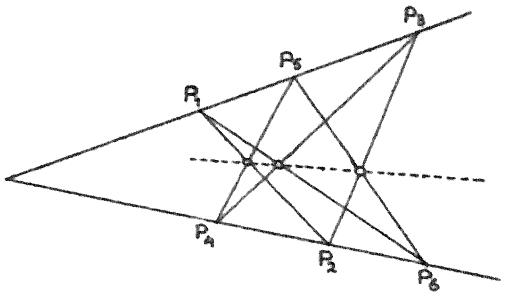
$\varrho F_2 + \sigma F_3 = ll_1$. Hieruit volgt dat

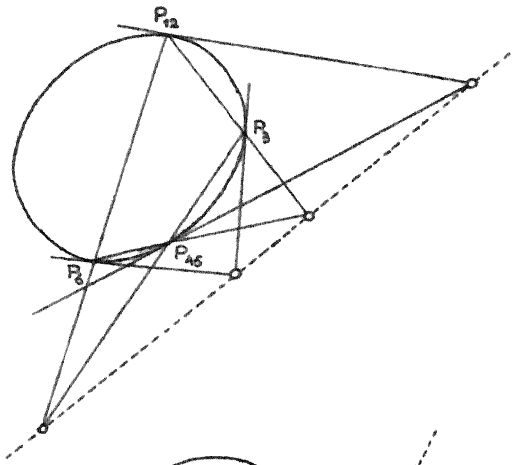
$\lambda\varrho F_1 - \sigma\mu F_3 = l(\varrho l_3 - \mu l_1)$, waaruit men ziet dat $l(\varrho l_3 - \mu l_1)=0$ een exemplaar is van de bundel door F_1 en F_3, maar dit ontaarde exemplaar moet dan $ll_2 \equiv 0$ zijn, zodat $\tau l_2 = \varrho l_3 - \mu l_1$ moet gelden.
De lijnen zijn dus concurrent q.e.d.
Neemt men voor P en Q de cirkelpunten (1,i,0) en 1,-i,0) dan krijgt men de stelling dat de machtlijnen van drie cirkels door één punt gaan.
Zij gegeven de zes punten $P_1, P_2, \ldots P_6$ op een kegelsnede K.
Verbindt men P_i met P_{i+1} $(i=1,\ldots 5)$ en P_6 met P_1 dan ontstaat een 6-hoek.

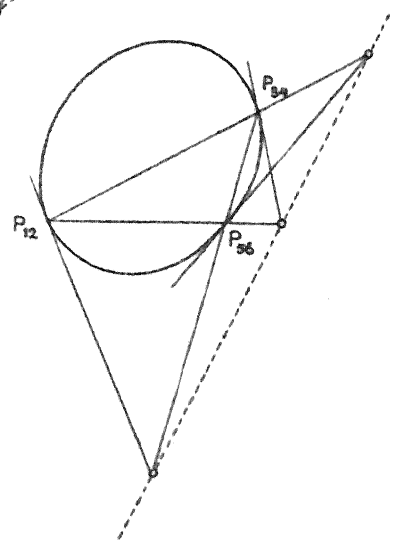


De stelling van Pascal zegt dat de snijpunten van de (3 paar) overstaande zijden collineair zijn.
De stelling volgt direct door toepassing van Sturm op de kegelsneden K, P_4P_3 met P_1P_2 en P_4P_5 met P_1P_6.
Deze drie gaan alle door P_1 en P_4

Als K ontaard is geldt de stelling natuurlijk ook, men noemt hem dan meestal de stelling van Pappus.







Bovenstaande figuren zijn een illustratie van enige ontaardingen van de stelling van Pascal.

§ 48. Poolverwantschap, dualiteit, lijncoördinaten.

Evenzo als bij de cirkel kan men bij de willekeurige kegelsnede $x'Hx=0$ de poolverwantschap definiëren. Aan elk punt (x_0,y_0,z_0) wordt dan een lijn nl. $x_0'Hx=0$ toegevoegd. Er geldt weer: als $P_i(x_i)$ $(i=1,2,3)$ drie collineaire punten zijn, dan zijn de lijnen $x_iHx = 0$ concurrent.
Opg. 137. Bewijs dit. (Hint: $P_1(x_1)$ $P_2(x_2)$ en $P_3(x_3)$ zijn dan en slechts dan collineair als $\lambda(x_1)+\mu(x_2)+\nu(x_3) = (0)$ (λ, μ en ν niet alle nul)).
Ook geldt: als vier punten een harmonisch viertal vormen dan vormen de poollijnen een harmonische vierstraal.
Opg. 138. Bewijs dit. (Hint: $P_1(x_1)$ $P_2(x_2)$ $P_3(x_3)$ en $P_4(x_4)$ liggen harmonisch als $(x_3)=(x_1)+(x_2)$ en $(x_4)=(x_1)-(x_2)$ geldt.
Analoog voor de lijnen $l_i=0$ $(i=1,..,4)$ met $l_3=l_1+l_2$ en $l_4=l_1-l_2$
(zie p.54 r.7v.o.).
Evenals vroeger (§22) toen H een cirkel was wordt de meetkunde afgebeeld op een duale meetkunde, met behoud van die stellingen welke slechts de begrippen snijding en dubbelverhouding bevatten. Thans kunnen we echter ook vragen wat er met een kegelsnede $x'Kx=0$ gebeurt (K veronderstellen we niet ontaard). Met elk punt ervan correspondeert een rechte. Met K correspondeert dus een verzameling rechten. De lijnen van deze verzameling (klasse kromme zie §37 p.47,48) welke door $P(\xi,\eta,\zeta)$ gaan vinden we door $(x_0y_0z_0)$ op te lossen uit: $x_0'H\xi = 0$ en $x_0'Kx_0=0$.
Dit geeft twee oplossingen (snijpunten van $\xi'Hx=0$ en $x'Kx=0$), dus door elk punt van het vlak gaan twee lijnen van de verzameling, weshalve deze van de tweede klasse heet te zijn (analoog aan de graad van een (punt)kromme).
De lijnen omhullen de meetkundige plaats van de raakpunten, dat zijn die punten waarvoor de beide lijnen (er door heen)samen vallen.
Stel $P(\xi,\eta,\zeta)$ is een raakpunt. Op de lijn $l=\xi'Hx=0$ kiezen we twee verschillende punten $Q(x_0)$ en $R(\bar{x}_0)$ en wel zo dat Q op K ligt, dus $\xi'Hx_0=0$ en $\xi'H\bar{x}_0=0$ en $x_0'Kx_0=0$.
Het andere snijpunt van l met K vinden we uit
$(\lambda x_0+\mu\bar{x}_0)'K(\lambda x_0+\mu\bar{x}_0) = 2\lambda\mu\, x_0'K\bar{x}_0+\mu^2x_0'Kx_0 = 0$. Opdat de beide snijpunten samenvallen is nodig en voldoende: $x_0'K\bar{x}_0 = 0$. Dan valt de lijn $x_0'Kx=0$ samen met $\xi'Hx=0$ (beide door Q en R) zodat
$\varrho\,\xi'H = x_0'K$. We kunnen het ook zo zeggen. Het punt $P(\xi)$ moet dusdanig gelegen zijn dat de lijn $\xi'Hx=0$ raakt aan K, dus dat er een punt $Q(x_0)$ bestaat met $x_0'Kx_0=0$ en $x_0'K \propto \xi'H$.
Uit $x_0'K = \varrho\,\xi'H$ (ϱ is een evenredigheidsconstante) volgt dat
$x_0 = K^{-1}H\xi\varrho$. De conditie $x_0'Kx_0=0$ geeft voor (ξ) de voorwaarde:

$\xi' H(K^{-1}H\xi) = \xi'(HK^{-1}H)\xi = 0.$

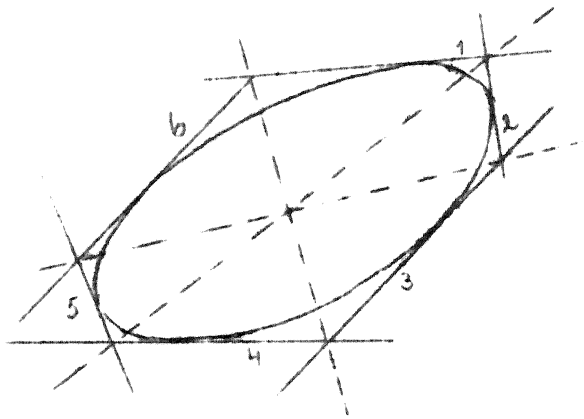
Deze voorwaarde is ook voldoende daar $x_0 = K^{-1}H\xi$ aan de aan Q gestelde eisen voldoet. De omhulde is dus een kegelsnede met als matrix $HK^{-1}H$. Men noemt deze kegelsnede wel de gepolariseerde van K.

Opg. 139 In de poolverwantschap t.o.v. $x^2-y^2=1$ gaat $x^2=2py$ over in een klassekromme. Bereken de omhulde rechtstreeks en vergelijk daarna deze uitkomst met het bovenstaande.

Opg. 140. Door nogmaals te polariseren gaat de omhulde van de klassekromme weer over in de oorspronkelijke kromme.

Opg. 141. Bewijs ook rechtstreeks dat een raaklijn van K overgaat in een punt van $(HK^{-1}H)$.

Door polarisatie gaat de stelling van Pascal over in die van Brianchon nl. zijn l_i $(i=1,\ldots,6)$ zes raaklijnen van een tweedegraads kromme met snijpunten P_{ij} daan gaan de verbindingslijnen van P_{12} met P_{45}, P_{23} met P_{56} en P_{34} met P_{61} door een punt.



Door één of meer paar raaklijnen samen te laten vallen krijgt men bijzondere gevallen van Brianchon.

Opg. 142. De raaklijnen in P en Q aan de parabool $y^2=2px$ snijden de y-as resp. in P' en Q'. Bewijs dat de lijn door P' // raaklijn in Q de lijn door Q' // raaklijn in P snijdt op de x-as.

Opg. 143. Beschouw bij de hyperbool de volgende raaklijnen: de asymptoten en twee raaklijnen p en q beide dubbel geteld. Formuleer de stellingen die uit Brianchon volgen bij de verschillende mogelijke nummeringen van de 6 raaklijnen.

Het is mogelijk de Analytische Meetkunde abstract zo op te bouwen dat o.a. de dualiteit er van het begin af in zit. Alle begrippen moeten dan echter gedefinieerd worden. Zodoende wordt de meetkunde een gedeelte van de getallentheorie. Men mag dan geen gebruik maken van meetkundige eigenschappen zoals bijv. op pag.4. Men kan het zo opvatten dat men met behulp van de getallencombinaties en van eigenschappen van getallen (welke eigenschappen een meetkundige naam krijgen) een model maakt dat aan de meetkundig axioma's voldoet.(dat het model aan de axioma's voldoet moet natuurlijk bewezen worden)

Zodoende is men er zeker van dat in dat axiomastelsel net zo min tegenstrijdigheid zit als in de getallentheorie(Een axiomastelsel kan strijdig zijn, man kan nl. te veel eisen, bijv. een axolotl met vijf staarten,met als gevolg dat er niets bestaat dat aan de eisen voldoet.

De begrippen voorkomend in een (meetkundige) axiomastelsel, zoals punt en lijn zijn formeel, zij stellen slechts entiteiten voor welke de (door de axioma's) geeiste eigenschappen hebben. Bij het maken van een model geeft men de entiteiten aan. Beschouw de verzameling van matrices van 1 kolom en 3 (4) rijen en de verzameling van matrices van 3 (4) kolommen en 1 rij. De staande matrices zullen punten en de liggende rijen zijn (let op de willekeur) (finesse: punten (lijnen) met evenredige matrix worden als niet verschillend beschouwd, $\binom{0}{0}$ en (ooo) worden verbannen) Definitie van het begrip incident:

Een punt $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ en een lijn $\ell(a,b,c)$ heten incident als $(abc)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$.

Opg. 144. Bewijs axioma 1. Door twee punten gaat één en slechts één lijn incident met beide.

Zo voortgaande elk nieuw begrip (listig) definiërend maakt men een meetkunde die aan de axioma's voldoet.

Wij zullen dit hier niet verder vervolgen.

Een punt hadden we al eerder voorgesteld door de matrix van zijn coördinaten. Ook de vergelijking $(a)(x) = 0$ voor de rechte kennen we reeds. De lijn $ax+by+cz = 0$ kan men dus voorstellen met de matrix (abc) (afgezien van de evenredigheidsfactor). De getallen (a,b,c) zullen we coördinaten van de lijn noemen.

Alle lijnen (u,v,w) door het punt (x_o,y_o,z_o) hebben de eigenschap dat

$(u\ v\ w)\begin{pmatrix}x_o\\y_o\\z_o\end{pmatrix} = x_ou + y_ov + z_ow = 0$ geldt m.a.w. een punt is een lineaire vergelijking in lijn coördinaten. De punten en lijnen blijken volkomen gelijkwaardig (dualiteit) mits we natuurlijk de oneigenlijke elementen mee laten doen. We zullen ook nog even de vergelijking laten zien waaraan de raaklijnen van de niet ontaarde kegelsnede $x'Kx=0$ voldoen. De raaklijn in (x_o) is $x_o'Kx = 0$ dus de lijn coördinaten zijn $(u_o) = x_o'K$ of te wel $x_o' = u_oK^{-1}$ en $x_o = K^{-1}u_o'$ dus voldoet u_o aan $u_oK^{-1}KK^{-1}u_o' = u_oK^{-1}u_o' = 0$. De vergelijking in lijnen coördinaten is dus $uK^{-1}u' = 0$

Opg. 145. Men ziet voor de vergelijking in lijnencoördinaten vaak de vorm:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & v\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & w\\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Laat zien dat dit hetzelfde is als $(u\ v\ w)\ K^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = 0$

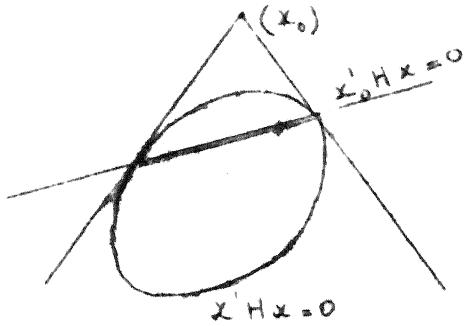
De dualiteit komt hier duidelijk uit. Men laat eenvoudig punt en lijn coördinaten verwisselen en wegens de symmetrie in de opbouw (welke dan natuurlijk bewezen moet zijn) blijven alle stellingen geldig.

Polariseert men t.o.v. $x^2+y^2+z^2 = 0$ dan vallen beide opvattingen

samen immers (x_o,y_o,z_o) correspondeert dan met $x_ox+y_oy+z_oz = 0$ dus met de lijn $(x_oy_oz_o)$.
Polariseren t.o.v. $x'Hx = 0$ is blijkbaar hetzelfde als eerst transformeren volgens $\bar{x}=Hx$ en daarna punten en lijnen verwisselen.
Ingeval H niet ontaard is volgt zo een nieuw bewijs van de formule $x'HK^{-1}Hx = 0$ voor de gepolariseerde van $x'Kx=0$.
Door de transformatie $\bar{x} = Hx$ gaat K nl. over in $\bar{x}'\ H^{-1}KH^{-1}\bar{x} = 0$.
Verwisseling van punt en lijncoördinaten geeft $uH^{-1}KH^{-1}u' = 0$, terwijl de vergelijking van deze klasse kromme in puntcoördinaten
$x'(H^{-1}KH^{-1})^{-1}x = x'(HK^{-1}H)x = 0$ is.
Een lineaire verzameling van klassekrommen heet een schaar. Het begrip is duaal met bundel, het is niet hetzelfde. Bijvoorbeeld de schaar $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda(u^2+v^2) = 0$ heeft in de puntcoördinaten de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} a^2+\lambda & 0 & 0 & x \\ 0 & b^2+\lambda & 0 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{of wel}$$

$x^2(b^2+\lambda) + y^2(a^2+\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)$. Dit zijn alle confocale kegelsneden $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ (confocaal wil zeggen met hetzelfde brandpunt). De verzameling is echter geen bundel, door elk punt gaan twee exemplaren, want voor een klassekromme is het gaan door een punt een kwadratische voorwaarde.
Een en ander wordt duidelijker als we weten dat de brandpunten opgevat kunnen worden als de (reële) snijpunten van de raaklijnen uit I(1,i,0) en J(1,-i,0) aan de kegelsnede. Er is een eenvoudige vergelijking voor het raaklijnenpaar uit $P(x_o)$ aan $x'Hx=0$.

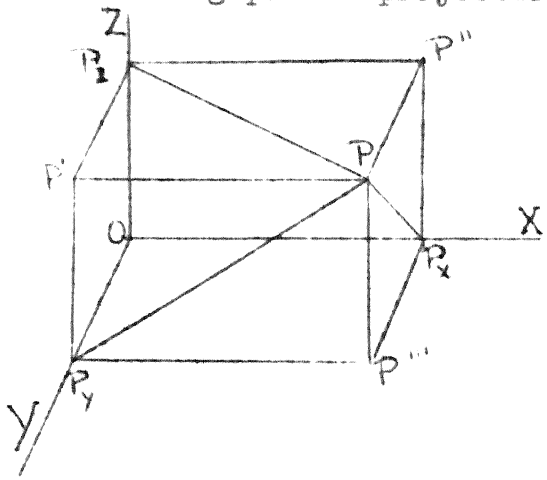


Het paar is nl. het exemplaar van de bundel $x'Hx + \lambda(x_o'Hx)^2 = 0$ dat door P gaat $x_o'Hx_o + \lambda(x_o'Hx_o)^2 = 0$ dus na eliminatie van λ
$(x_o'Hx_o)(x'Hx) - (x_o'Hx)^2 = 0$.
Dit toegepast op I en J bij $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ geeft direct voor de snijpunten $(\pm c,0)$ en $(0,\pm ic)$. De laatste punten heten wel imaginaire brandpunten.
Het geven van de brandpunten (beide reële of beide imaginaire) komt dus neer op op het geven van vier raaklijnen, dus vier lineaire voorwaarden voor de klassekromme, zodat er een schaar van klassekrommen aan voldoet.

Hoofdstuk III.
De ruimte.

§ 49. Coördinaten en de rechte lijn.

Om in de ruimte aan de punten coördinaten toe te kennen, voeren we een stelsel in bestaande uit een vast punt O (de oorsprong) met daardoor drie onderling loodrechte lijnen (resp. x-, y- en z-as genaamd) elk voorzien van een positieve richting.
De drie vlakken door de assen(2 aan 2) heten de coördinaatvlakken.
Een willekeurig punt P projecteren we op de assen.



Stel de projecties zijn P_x, P_y en P_z (waarbij de index op aanvoelbare wijze is gekozen). Stel $x=\vec{OP}_x$, $y=\vec{OP}_y$ en $z=\vec{OP}_z$. Men noemt x, y en z de coördinaten van P. Notatie P(x,y,z).
In de coördinaatvlakken O Y Z , O Z X en O X Y zijn met behulp van de daarin gelegen assen rechthoekige Cartesische coördinaten vastgelegd.

Laten P' , P'' en P''' resp. de projecties van P op die vlakken zijn, dan zijn de coördinaten van die punten (t.o.v. het stelsel in dat vlak) resp. (y,z) , (z, x) en (x,y).
De afstand van P tot de oorsprong is $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Opg. 146. Bewijs dat de afstand van $P_1(x_1,y_1,z_1)$ tot $P_2(x_2,y_2,z_2)$ gelijk is aan $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.
Zij gegeven de punten $P_o(x_o,y_o,z_o)$, in $P_1(x_1y_1z_1)$ en P(xyz) met $(P_oP_1P) = (\lambda:\mu)$ dan geldt, wegens de invariantie van de deelverhouding t.o.v. parallelprojectie, $x = \frac{\lambda x_1 + \mu x_o}{\lambda+\mu}$, $y = \frac{\lambda y_1 + \mu y_o}{\lambda+\mu}$ en $z = \frac{\lambda z_1 + \mu z_o}{\lambda+\mu}$ (vergelijk p.3)
In vector notatie $(\lambda+\mu)(x) - \mu(x_o) - \lambda(x_1) = 0$
Opg. 147. Bewijs dat als $\lambda(x_1) + \mu(x_2) + \nu(x_3) = 0$ geldt met $\lambda+\mu+\nu = 0$ de punten $P_i(x_i)$ (i=1,2,3) op een rechte liggen.
Voor het vierde harmonische punt $\bar{P}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ geldt:

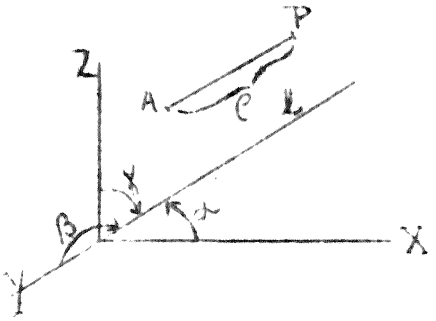
$$\bar{x} = \frac{\lambda x_1 - \mu x_o}{\lambda-\mu} \qquad \bar{y} = \frac{\lambda y_1 - \mu y_2}{\lambda-\mu} \qquad \bar{z} = \frac{\lambda z_1 - \mu z_o}{\lambda-\mu}$$

In het bijzonder geldt voor het midden van P_o en P_1

$\frac{x_o+x_1}{2}$, $\frac{y_o+y_1}{2}$, $\frac{z_o+z_1}{2}$. Voert men evenals bij het platte vlak oneigenlijke elementen in dan ziet men dat het oneigenlijke punt van de rechte door P_oP_1 de homogene coördinaten (x_1-x_o), (y_1-y_o), (z_1-z_o), moet geven.

De richting van een rechte l is volkomen vastgelegd door de hoeken

$\alpha = \sphericalangle$ X l $\beta = \sphericalangle$ Y l en $\gamma = \sphericalangle$ Z l.



Gaat l door A(a,b,c) dan is voor P(x,y,z) op l

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \varrho\cos\alpha \\ y &= b + \varrho\cos\beta \\ z &= c + \varrho\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{met } \varrho = \vec{AP}.$$

Dit is dus ook een parameter voorstelling van de rechte.(zie pag.9 onderaan)

De getallen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ en $\cos\gamma$ heten de richtingscosinussen van de rechte. De hoeken α , β en γ zijn niet onafhankelijk van elkaar.

We hebben nl. $\varrho^2 = (PA)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 =$

$$= \varrho^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

zodat de relatie $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ geldt.

Men kan de bovenstaande parameter voorstelling door eliminatie van ϱ herleiden tot twee vergelijkingen nl. $\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$ $(=\varrho)$.

Bij deze vergelijkingen komt het slechts op de verhouding van de noemers aan, zij zijn dus equivalent met de vergelijkingen

$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$ waarbij $A : B : C = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

A, B en C heten richtingsgetallen van de rechte. Blijkbaar geldt voor de richtingscosinussen $\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ en $\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Opg. 148. Bewijs dat voor de punten P(x,y,z) van de lijn door $P_o(x_o,y_o,z_o)$ en $P_1(x_1,y_1,z_1)$ geldt

$$\frac{x-x_o}{x_1-x_o} = \frac{x-y_o}{y_1-y_o} = \frac{x-z_o}{z_1-z_o} .$$

De hoek φ tussen de lijnen l_1 en l_2 met richtingscosinussen a_1,b_1,c_1 en a_2,b_2,c_2 voldoet aan $\cos\varphi = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

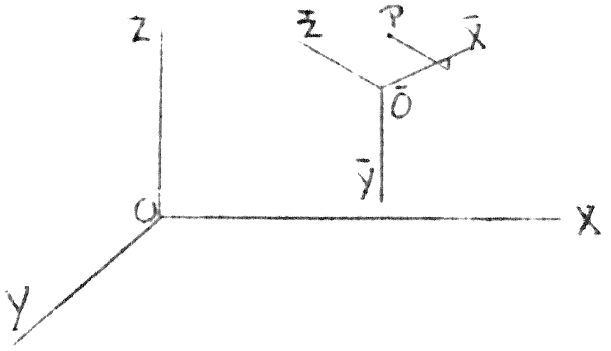
Opg. 149. Bewijs dit.

Aanwijzing: Gebruik de projectiestelling van pag.12, welke ook voor de ruimte geldt (bewijs?)

De voorwaarde voor loodrechte stand is $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Hierbij mogen de getallen a_i b_i c_i $(i=1,2)$ ook richtingsgetallen van de lijnen zijn.

§ 50. Coördinaten transformaties.



Laten twee assenkruisen gegeven zijn nl. OXYZ en $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ en stel de coördinaten van $\bar{O}$ zijn x_o, y_o en z_o terwijl de richtingscosinussen van de $\bar{x}$-as zijn resp. a_1, b_1 en c_1 (dus $a_1 = \cos \sphericalangle\, x\, \bar{x}$ enz.) van de $\bar{y}$-as a_2, b_2 en c_2 en van de $\bar{z}$-as a_3, b_3 en c_3.

Daar de getallen richtingscosinussen zijn geldt:

$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$ daar de nieuwe assen 2 aan 2 loodrecht op elkaar staan geldt bovendien:

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0.$

Door projectie van de coördinatentrek (van het nieuwe stelsel) op x-, y- en z-as vinden we

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1\bar{z} + x_o \\ y &= a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2\bar{z} + y_o \\ z &= a_3\bar{x} + b_3\bar{y} + c_3\bar{z} + z_o \end{aligned}\right\}$$

Draaien we het assenkruis niet, maar verschuiven we evenwijdig dan vereenvoudigen zich de formules tot

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_o \\ y &= \bar{y} + y_o \\ z &= \bar{z} + z_o \end{aligned}\right\}$$

In het geval van een zuivere draaiïng ($x_o=y_o=z_o=0$) kunnen we weer de matrixnotatie toepassen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

Opg. 149. Bereken de waarde van det A. Hint: bereken eerst AA'.
De matrix A heet orthogonaal (vanwege de relaties tussen haar elementen, zie elal.)

Schrijven we de coördinaten homogeen (met u als vierde coördinaat, dus $x \to \frac{x}{u}$ $y \to \frac{y}{u}$ $z \to \frac{z}{u}$) dan wordt de transformatie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_o \\ a_2 & b_2 & c_2 & y_o \\ a_3 & b_3 & c_3 & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

De inverse transformatie luidt

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\\ \bar{u}\end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \bar{x}_o\\ b_1 & b_2 & b_3 & \bar{y}_o\\ c_1 & c_2 & c_3 & \bar{z}_o\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{pmatrix}$$

waarbij $\bar{x}_o\ \bar{y}_o\ \bar{z}_o$ juist de coördinaten zijn van O t.o.v. het gestreepte stelsel nl.

$$\bar{x}_o = -a_1x_o - b_1y_o - c_1z_o$$
$$\bar{y}_o = -a_2x_o - b_2y_o - c_2z_o$$
$$\bar{z}_o = -a_3x_o - b_3y_o - c_3z_o$$

Voert men na elkaar twee transformaties nl. $x = A_1\bar{x}$ en $\bar{x} = A_2\bar{\bar{x}}$ uit dan is het resultaat $x = (A_1A_2)\bar{\bar{x}}$. Dus de transformatiematrix van een product is het product van de transformatiematrices.

Men kan de bovenstaande transformatieformules ook anders interpreteren nl. als een punttransformatie,(d.i. een afbeelding van de ruimte op zich zelf), waarbij aan $\bar{P}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u})$ het punt $P(x,y,z,u)$ wordt toegevoegd volgens $(x) = B\ (\bar{x})$.

Het is de beweging die OXYZ in $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ overvoert(zo nodig met een spiegeling gecombineerd). Een spiegeling t.o.v. het $\bar{Y}\bar{Z}$-vlak heeft tot transformatiematrix

$$S = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{met det } S = -1$$

Men ziet zo gemakkelijk de betekenis van het teken van det B in.

Zijn OXYZ en $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ gelijk georiënteerd (d.i. beide rechts draaiend of beide links draaiend) dan is er een beweging (zonder spiegeling) die OXYZ in $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ overvoert. Uit continuiteitsoverwegingen volgt dat voor zulk een beweging met matrix B geldt det B = 1.

Is het gestreepte stelsel anders georiënteerd dan is de transformatie A op te vatten als het product van een zuivere beweging (det +1) en een spiegeling (det -1), dus det B = -1.

Opg. 150. Is er bij elke transformatie van bovenstaande vorm een punt dat op zijn plaats blijft, dus met $P = \bar{P}$? Zo ja wanneer is dat punt oneigenlijk?(translatie).

Opg.151. Bewijs dat voor elk tweetal punten $P_i(x_iy_iz_iu_i)$ $(i=1,2)$ geldt

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{z}_1\bar{z}_2$$

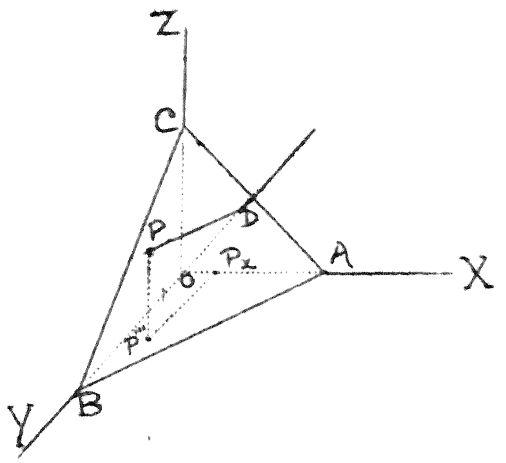
en $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = (\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_1-\bar{z}_2)^2$

waarbij $x = Bx$ en

$$(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) = A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad (\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}\bar{\bar{u}}) = B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ u\end{pmatrix},$$ voor A en B zie p.77.

§ 50. Het platte vlak.

We zullen laten zien dat de punten van een plat vlak in de ruimte voldoen aan een lineaire vergelijking en omgekeerd.



Laat V een vlak zijn en de éénduidig bepaalde rechte l door O loodrecht op V met de richtingscosinussen $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, $c = \cos\gamma$ snijde V in D met $\overrightarrow{OD} = d$.
Beschouw nu een willekeurig punt P(x,y,z) van V. Projecteer P op XOY en op OX, projecties resp. P''' en P_x. De projectie van de gebroken lijn OP_xP''' PD op l is d.

Dus geldt

$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$. Dit is een lineaire vergelijking in x,y en z. q.e.d. Is omgekeerd $Ax + By + Cz + D = 0$ een lineaire vergelijking in x , y en z (A, B en C dus niet alle nul) dan kan men de coëfficiënten A, B en C als richtingsgetallen van een lijn l opvatten. Men ziet na deling door $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ dat de vergelijking een vlak $\perp$ l voorstelt (op afstand $\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ van O).

N.B. de richtingscosinussen $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ en $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ leggen op l een richting vast.

We zullen nu een willekeurig vlak met vergelijking $Ax+By+Cz+D = 0$ nader beschouwen.

Uit het bovenstaande volgt direct, dat een lijn l met richtingsgetallen a, b en c dan en slechts dan loodrecht op V staat als $a:b:c = A:B:C$.

Uit de formule onderaan pag.76 volgt dat l dan en slechts dan evenwijdig aan V is als $Aa + Bb + Cc = 0$.

Opg. 152. Bewijs dat de hoek φ tussen l en V voldoet aan

$$\sin\varphi = \frac{Aa + Bb + Cc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}} .$$

Zijn twee der getellen A ,B en C nul bijv. A=B=0 dan is het vlak // XY vlak. Het snijpunt met de Z-as is $(0,0, \frac{-D}{C})$

Is een der getallen A,B en C nul bijv.A dan is het vlak // x-as, zoals ook te zien is aan het ontbreken van de term met x. De snijpunten met Y- en Z-as zijn resp. $(0, \frac{-D}{B},0)$ en $(0,0, \frac{-D}{C})$

Als A, B en C geen van alle nul zijn dan zijn de snijpunten met de assen resp. $(\frac{-D}{A},0,0)$, $(0,\frac{-D}{B},0)$, $(0,0,\frac{-D}{C})$.

Is nu D=0 dan gaat het vlak door O , is $D \neq 0$ dan kunnen we de vergelijking schrijven als $\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$.

Dit wordt de vergelijking op de assen genoemd. Het is ook direct in te zien dat een vlak dat van de assen resp. stukken p,q en r afsnijdt (alle $\neq 0$) de vergelijking $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ heeft.
Wegens de lineariteit is de vergelijking nl. een vlak en daar (p,0,0), (0,q,0) en (0,0,r) kennelijk voldoen heeft het de gewenste snijpunten met de assen.
Het geval $A = B = C = 0$ en $D \neq 0$ kan niet voorkomen tenzij we de vergelijking homogeen als $Ax + By + Cz + Du = 0$ schrijven, waarna het resultaat $Du = 0$ wordt.
Hieraan voldoen alle oneigenlijke punten (en geen andere), welke het oneigenlijke vlak vormen.
Nemen we dus de oneigenlijke elementen er bij dan kunnen we zeggen dat de (eigenlijke of oneigenlijke) punten van een vlak V voldoen aan een homogene lineaire vergelijking en omgekeerd.
Immers het oneigenlijke punt (a,b,c,0) (d.i. het gemeenschappelijke punt van de lijnen met de richtingsgetallen a, b, c) ligt in V als die lijnen // aan V zijn, d.i. als a,b,c,0 voldoet aan $Ax + By + Cz + Du = 0$ (vergelijking van V).
We zullen nu de vergelijking van een vlak door drie gegeven punten $P_o(x_i,y_i,z_i,u_i)$ (i=1,2,3) opstellen.
Een willekeurig punt P(x,y,z,u) ligt alleen dan coplanair met P_i(i=1,2,3) als er getallen A, B, C en D (niet alle nul) bestaan, dusdanig dat voldaan is aan

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Du_1 &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Du_2 &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + Du_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dit is alleen dan het geval als

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Opg. 152 Laat ook rechtstreeks zien dat deze vergelijking het gevraagde vlak voorstelt!
Van de homogene vergelijking $Ax + By + Cz + Du = 0$ in x,y,z en u zijn drie verschillende oplossingen (x_o,y_i,z_i,u_i) (i=1,2,3) bekend. Elke oplossing (x,y,z,u) is dus te schrijven als

$$(x,y,z,u) = \lambda(x_1y_1z_1u_1) + \mu(x_2y_2z_2u_2) + \nu(x_3y_3z_3u_3) \quad \text{waarbij}$$

λ, μ en ν niet alle nul zijn.
Men kan λ, μ en ν als homogene coördinaten in het vlak V opvatten.
Beperkt men zich tot eigenlijke punten dan worden de relaties

$$x = \frac{\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3}{\lambda + \mu + \nu} \qquad y = \frac{\lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3}{\lambda + \mu + \nu} \qquad z = \frac{\lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3}{\lambda + \mu + \nu}$$

Opg. 153. Voldoen de punten $P_i(x_i,y_i,z_i,u_i)$ $(i=1,2,3,4)$ aan

$$\sum_{i=1}^{4} K_i(x_i y_i z_i 1) = 0$$

dan liggen die punten in een vlak.

Opg. 154. Het vlak door $P(x_o,y_o,z_o) \perp$ op de lijn l met richtingsgetallen a,b,c is $a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o) = 0$.

Opg. 155. De hoek φ tussen twee vlakken $V_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ $(i=1,2)$ is gelijk aan de hoek tussen de normalen. Er geldt:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} :$$

Opg. 156. Bepaal de afstand van het punt P(a,b,c) tot het vlak $Ax + By + Cz + D = 0$. Aanwijzing: verschuif de oorsprong naar P en denk aan Hesse.

Het volume van het viervlak met als hoekpunten $P_i(x_i y_i z_i)$ $(i=1,2,\ldots,4)$ is $I = \left|\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_4 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}\right|$

Om dit te bewijzen merken we op dat I invariant is t.o.v. de transformaties

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ voor } B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & y_0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zie pag 77 [1])

Immers $I = \det B\, I'$ en $\det B = 1$.

Dit betekent dat we het assenstelsel zo mogen draaien en verschuiven dat $P_1 \equiv (0,0,0)$ $P_2 = (0,0,\bar{z}_2)$ $P_3 = (0,\bar{y}_3,\bar{z}_3)$ $P_4 = (\bar{x}_4,\bar{y}_4,\bar{z}_4)$.

[1]) De transformatieformules in het midden van pag.77 moeten zijn:

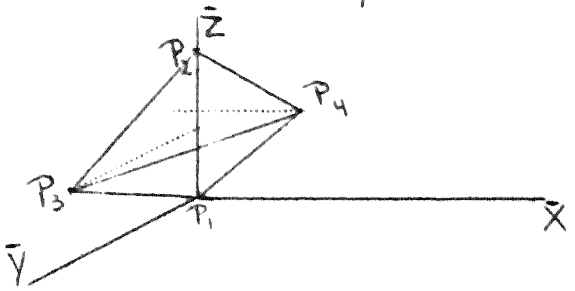
$$\begin{aligned} x &= a_1\bar{x} + a_2\bar{y} + a_3\bar{z} + x_o \\ y &= b_1\bar{x} + b_2\bar{y} + b_3\bar{z} + y_o \\ z &= c_1\bar{x} + c_2\bar{y} + c_3\bar{z} + z_o \end{aligned}$$

en de matrices A B en B^{-1} (op pag.78) moeten dan resp. worden

$$A' \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x_o \\ b_1 & b_2 & b_3 & y_o \\ c_1 & c_2 & c_3 & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \bar{x}_o \\ a_2 & b_2 & c_2 & \bar{y}_o \\ a_3 & b_3 & c_3 & \bar{z}_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maar dan is de inhoud gelijk aan

$$\left| \tfrac{1}{2} z_2 \cdot \bar{y}_3 \quad \tfrac{1}{3} \bar{x}_4 \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{z}_2 & 1 \\ 0 & \bar{y}_3 & \bar{z}_3 & 1 \\ \bar{x}_4 & \bar{y}_4 & \bar{z}_4 & 1 \end{vmatrix} \right| = I.$$



De voorwaarde I=0 betekent in overeenstemming met het resultaat van pag.80, dat de vier punten in een vlak liggen.

§ 51. Nogmaals de rechte lijn.

De rechte l door $P_1(x_1,y_1,z_1,u_1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2,u_2)$ ligt in alle vlakken door deze punten. Een vlak is geheel bepaald door de verhouding van de coëfficienten van haar vergelijking. We noemen deze daarom wel haar coördinaten.(vlakkencoördinaten analoog met de lijnencoördinaten in hoofdstuk II).Notatie: V(A,B,C,D) als $Ax+By+Cz+Du = 0$ de vergelijking van V is. Alle vlakken door P_1 en P_2 voldoen aan $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Du_1 = 0$ en $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Du_2 = 0$. Dit zijn in A B C en D twee homogene lineaire vergelijkingen, welke onafhankelijk zijn als $P_1 \neq P_2$.
De vergelijkingen hebben dus ∞^2 oplossingen (zie Elal) welke lineaire composita zijn van twee willekeurige verschillende oplossingen $V_1(A_1,B_1,C_1,D_1)$ en $V_2(A_2,B_2,C_2,D_2)$.

De algemene oplossing is dus $V(A,B,C,D) = V(\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_2 + \mu B_2 \lambda C_1 + \mu C_2, \lambda D_1 + \mu D_2)$ afgekort $V = \lambda V_1 + \mu V_2$.
Deze vlakkenverzameling noemen we een vlakkenwaaier. De vlakken V_1 en V_2 heten de basisexemplaren. Uit het bovenstaande is direct duidelijk dat elk tweetal als basisexemplaren van de waaier gekozen mogen worden. M.a.w. de waaier is door twee vlakken bepaald.
De punten van l liggen in alle vlakken van de waaier i.h.b. dus in V_1 en V_2.
Opg. 157. Bewijs algebraïsch dat alle punten $(x\ y\ z\ u) = \varrho(x_1y_1z_1u_1) + \sigma(x_2y_2z_2u_2)$ voldoen aan $V = \lambda V_1 + \mu V_2$ als $(x_i, y_i\ z_i\ u_i)$ voldoet aan V_j $(i,j = 1,2)$.
De lijn kan dus gegeven worden als doorsnijding van twee vlakken (bijv. de projecterende vlakken $y = ax+b$ en $z = cx+d$)

Opg. 158. Laat omgekeerd zien, dat alle punten in twee gegeven (verschillende)vlakken V_1 en V_2 voor te stellen zijn door

$$\varrho(x_1y_1z_1u_1) + \sigma(x_2y_2z_2u_2).$$

We zien zo dat er in de ruimte dualiteit heerst welke punten en vlakken verwisselt. De lijnen gaan in lijnen over; ze zijn zélf duaal.
Samenvattend hebben we voor een lijn de volgende voorstellingen

1. de parametervoorstelling in puntcoördinaten

$$(x,y,z,u) = \lambda(x_1y_1z_1u_1) + \mu(x_2y_2z_2u_2)$$ zie

of inhomogeen $x = \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda+\mu}$, $y = \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda+\mu}$, $z = \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda+\mu}$ pag. 75.

2. de parametervoorstelling in vlakkencoördinaten (vlakkenwaaier)

$V = \lambda V + \mu V_2$. zie boven

3. Als doorsnijding van twee vlakken

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1(u) &= 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2(u) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ zie boven

4. De parametervoorstelling

$$\begin{aligned} x &= a+\varrho\cos\alpha \\ y &= b+\varrho\cos\beta \\ z &= c+\varrho\cos\gamma \end{aligned}$$ zie pag.76

en daaruit afgeleid

5. $\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$ zie pag.76

Dit is dus een bijzonder geval van 3.

6. Het geven van twee punten is het duale van 3.

Speciale gevallen zijn $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}y=0\\z=0\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}z=0\\x=0\end{matrix}\right\}$ (alle 3.)

nl. de coördinaatassen en

$\left.\begin{matrix}x=a\\y=b\end{matrix}\right\}$ lijn // z-as enz.

of $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (5.) lijn door oorsprong en punt P(a,b,c) of anders opgevat lijn door O met richtingsgetallen (a,b,c) of als de lijn door O en het punt (a,b,c,0)
De richtingsgetallen van de rechte gegeven in 3. berekent men gemakkelijk als oplossing van de drie vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1u &= 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2u &= 0 \\ u &= 0 \end{aligned}\right\}$$ De richtingsgetallen zijn dus

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} .$$

Elk vlak geeft een lijn als doorsnijding met het oneigenlijke vlak. Samengevat, in het oneigenlijke vlak correspondeert met elke richting een punt (a,b,c,0) en met elk stel evenwijdige vlakken een rechte $Ax+By+Cz = 0$. De richting is evenwijdig aan de vlakken als $Aa+Bb+Cc=0$, zij staat er loodrecht op als $A:B:C = a:b:c$. Twee richtingen staan loodrecht op elkaar als $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$; en twee stel vlakken staan loodrecht op elkaar als $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 = 0$. Vat men de eerste drie coördinaten op als homogene coördinaten in een plat vlak, dan komt het er dus op neer dat loodrecht op elkaar staan hetzelfde is als toegevoegd zijn t.o.v. $x^2+y^2+z^2 = 0$.

Tot slot van deze § enige speciale problemen.
Zij gegeven de beide rechten l_1 en l_2 bijv. door

$$l_1 \begin{cases} V_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1u = 0 \\ V_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2u = 0 \end{cases} \qquad l_2 \begin{cases} V_3 = A_3x + B_3y + C_3z + D_3u = 0 \\ V_4 = A_4x + B_4y + C_4z + D_4u = 0 \end{cases}$$

of door $l_1 = \dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{b_1} = \dfrac{z-z_1}{c_1}$ en $l_2 = \dfrac{x-x_2}{a_2} = \dfrac{y-y_2}{b_2} = \dfrac{z-z_2}{c_2}$.

Wat is de voorwaarde dat beide lijnen in een vlak liggen.
Dit is het geval als er een punt bestaat dat voldoet aan $V_i = 0$ voor $i=1,2,3,4$ en dit kan alleen als

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

Men kan het ook anders zeggen. Als l_1 en l_2 in een vlak liggen dan hebben de waaiers $\lambda V_1+\mu V_2 = 0$ en $\varrho V_2+\sigma V_3 = 0$ een exemplaar gemeen. Dus voor geschikte keuze van $\lambda', \mu', \varrho', \sigma'$ geldt dan $\lambda'V_1+\mu'V_2-\varrho'V_3-\sigma'V_4 \equiv 0$ (identiek nul) dus

$$\left.\begin{aligned} \lambda'A_1+\mu'A_2-\varrho'A_3-\sigma'A_4 &= 0 \\ \lambda'B_1+\mu'B_2-\varrho'B_3-\sigma'B_4 &= 0 \\ \lambda'C_1+\mu'C_2-\varrho'C_3-\sigma'C_4 &= 0 \\ \lambda'D_1+\mu'D_2-\varrho'D_3-\sigma'D_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Hieruit volgt dus dat} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

Opg. 159. Hoe luidt de voorwaarde in het geval dat l_1 en l_2 op de tweede manier gegeven zijn ; en wat is dan de vergelijking van het vlak?
Opg. 160. Hoe luidt de vergelijking van het vlak door de lijn

$$\frac{x-a_1}{A_1} = \frac{y-b_1}{B_1} = \frac{z-c_1}{C_1}$$ evenwijdig aan de lijn $$\frac{x-a_2}{A_2} = \frac{y-b_2}{B_2} = \frac{z-c_2}{C_2}.$$

Wat is de afstand van beide rechten?

§ 52. De bol.

Alle punten P(xyz) op een afstand R van M(a,b,c) voldoen aan
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ en omgekeerd.
Alle punten van een bol voldoen dus aan een vergelijking van de vorm
$A(x^2+y^2+z^2) + 2Bx+2Cy+2Dz+E = 0$. Dit is een tweedegraadsvergelijking met als bijzonderheid dat de coëfficiënten van x^2, y^2 en z^2 gelijk zijn ($\neq 0$) en dat die van xy, yz en zx nul zijn.
Schrijven we de vergelijking homogeen als $A(x^2+y^2+z^2)+2Bxu+2Cyu+2Dzu+Eu^2=0$
dan zien we dat dit gelijkwaardig is met de voorwaarde dat het oppervlak door de absolute kegelsnede $\left.\begin{matrix} x^2+y^2+z^2 = 0 \\ u = 0 \end{matrix}\right\}$ gaat.

Wij zullen nu elk tweedegraads oppervlak door de absolute kegelsnede een bol noemen. Hieronder valt dan ook het geval A=0, dus
$u(2Bx+2Cy+2Dz+Eu) = 0$ d.i. een vlakkenpaar dat u=0 bevat. Wij noemen dit een ontaarde bol. Elk vlak vormt met het oneigenlijke vlak samen dus een (ontaarde) bol.
Ook de gevallen $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ en
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = -R^2$ vallen er nu onder.
In het eerste geval spreken we van een nulbol of puntbol, daar er slechts één reëel punt aan voldoet. en in het tweede geval van imaginaire bol, daar er geen enkel reëel punt aan voldoet (mits $R\neq 0$).

Een rechte lijn snijdt een bol i.h.a. in twee punten. Immers door gebruik te maken van een of andere parametervoorstelling van de rechte lijn bijv.

$$\begin{cases} x = a+\varrho\cos\alpha \\ y = b+\varrho\cos\beta \\ z = c+\varrho\cos\gamma \end{cases}$$

en door substitutie in de vergelijking van de bol vindt men een tweedegraadsvergelijking voor de parameter (ϱ). Als de beide snijpunten samenvallen spreekt men van een raaklijn (in dat punt). De raaklijnen in een punt (van de bol) liggen in een vlak.loodrecht op de voerstraal.
Bewijs: Kies het assenkruis zo, dat het punt de oorsprong is en dat (a,0,0) het middelpunt van de bol voorstelt. De vergelijking van de bol is dan $x^2+y^2+z^2-2ax = 0$. Een lijn door (0,0,0) geven we aan door $x = \varrho\cos\alpha$ $y = \varrho\cos\beta$ en $z = \varrho\cos\gamma$ met $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
De snijpunten met de bol vinden we dan uit:
$$\varrho^2\cos^2\alpha + \varrho^2\cos^2\beta + \varrho^2\cos^2\gamma - 2a\varrho\cos\alpha = 0.$$
Dus $\varrho = 0$ (de oorsprong) en $\varrho = 2a\cos\alpha$. Het tweede snijpunt valt dan en slechts dan met O samen als (N.B $a\neq 0$) $\cos\alpha = 0$, dus als de rechte in

het YZ vlak ligt. q.e.d.
We hebben hier een (eerste) voorbeeld van een meetkundige plaats van alle rechten die aan zekere voorwaarde(n) voldoen. Het bovenstaande zal in de volgende § nogmaals bewezen worden.
Het is nu niet moeilijk de vergelijking van het raakvlak in $P(x_o,y_o,z_o)$ aan $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ op te stellen.
De richtingsgetallen van de lijn PM(abc) zijn (x_o-a), (y_o-b) en (z_o-c) dus de vergelijking van het vlak door $P \perp$ op PM is

$$(x-x_o)(x_o-a) + (y-y_o)(y_o-b) + (z-z_o)(z_o-c) = 0$$

Daar P op de bol ligt kan men dit herleiden tot

$$(x-a)(x_o-a) + (y-b)(y_o-b) + (z-c)(z_o-c) = R^2.$$

Opg. 161. Hoe luidt de vergelijking van het raakvlak in het geval dat de bol gegeven is door de vergelijking :

$$A(x^2+y^2+z^2) + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

Opg. 162. Bewijs dat

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de vergelijking voorstelt van de bol door de punten $P_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$.
Een lijn l door een willekeurig punt $P(x_o,y_o,z_o)$ snijde de (niet ontaarde) bol $x^2+y^2+z^2 = R^2$ in de punten Q_1 en Q_2, dan geldt

$$\vec{PQ}_1 \cdot \vec{PQ}_2 = x_o^2+y_o^2+z_o^2-R^2$$

Bewijs: we nemen voor l de parametervoorstelling Q $(x= x_o+\varrho\cos\alpha,$ $y = y_o+\varrho\cos\beta$, $z = z_o+\varrho\cos\gamma)$ waarbij $\varrho = \vec{PQ}$ en $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
Substitutie in de vergelijking van de bol geeft

$$(x_o+\varrho\cos\alpha)^2 + (y_o+\varrho\cos\beta)^2 + (z_o+\varrho\cos\gamma)^2 - R^2 =$$
$$= \varrho^2 + 2\varrho(x_o\cos\alpha+y_o\cos\beta+z_o\cos\gamma) + x_o^2+y_o^2+z_o^2-R^2 = 0.$$

Hieruit volgt direct de relatie
$\vec{PQ}_1 \cdot \vec{PQ}_2 = \varrho_1\varrho_2 = x_o^2+y_o^2+z_o^2-R^2$. De constante waarde $x_o^2+y_o^2+z_o^2-R^2$ heet de macht van P t.o.v. de bol.
Stellen we de vergelijking van de bol B voor door $B(x,y,z) = 0$ dan is de macht van $P(x_o,y_o,z_o)$ gelijk aan $B(x_o,y_o,z_o)$ mits de vergelijking van B genormeerd is, d.w.z. de coëfficiënt van x^2 (y^2 en z^2) gelijk aan 1 is.
De meetkundige plaats van de punten welke gelijke macht hebben t.o.v. twee bollen is een plat vlak (machtvlak van de bollen).

Bewijs: als $B_1(x,y,z) = 0$ en $B_2(x,y,z) = 0$ de genormeerde vergelijkingen van de beide bollen zijn dan geldt voor de meetkundige plaats blijkbaar $B_1(x,y,z)-B_2(x,y,z)=0$, dit is een lineaire vergelijking daar de tweedegraads termen wegvallen.

Op volkomen analoge wijze als in het platte vlak bij de cirkelbundels kunnen we hier de bollenbundels invoeren als de verzameling bollen voorgesteld door $\lambda B_1(x,y,z) + \mu B_2(x,y,z) = 0$.

Opg. 163. Laat zien dat alle exemplaren van de bundel gaan door de doorsnijding van B_1 en B_2. Wat stelt die doorsnijding voor.

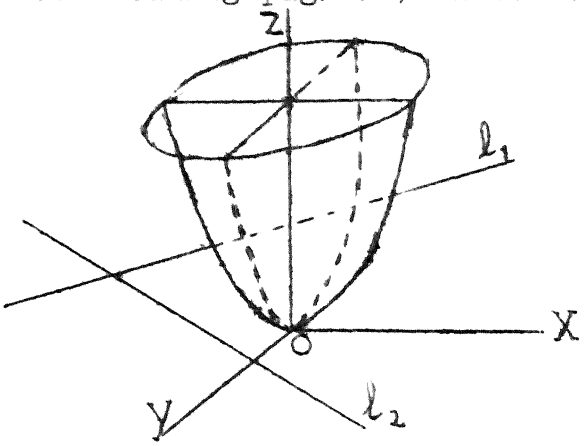
Opg. 164. Bevat een bundel i.h.a. een ontaard exemplaar? Komen er i.h.a. puntbollen in voor? Zo ja, hoeveel?

Opg. 165. Bespreek het verband tussen de realiteit van de doorsnijdingskromme en het bestaan van imaginaire bollen in de bundel.

Daar in de vergelijking van een bol 5 coëfficiënten homogeen voorkomen kunnen we verzamelingen bollen verzinnen die lineair afhangen van 2, 3, of 4 willekeurige bollen. Men zegt daarom wel dat alle bollen van de ruimte een vierdimensionale ruimte vormen, evenals de cirkels van het platte vlak zijn af te beelden op een driedimensionale ruimte.

De cirkel met vergelijking $x^2+y^2-2Ax-2By+C = 0$ kunnen we bijvoorbeeld met het punt (A,B,C) laten corresponderen. De coördinaten van het middelpunt zijn dan blijkbaar gelijk aan de xy coördinaten van het representerende punt.

Een cirkelbundel correspondeert blijkbaar met een rechte (zie parameter voorstelling pag. 75) en een cirkelnet met een plat vlak (zie pag 80)



De puntcirkels vormen een tweedegraads oppervlak nl. $X^2+Y^2-4Z = 0$ welke we later als omwentelingsparaboloïde zullen herkennen.

De reële cirkels liggen aan de ene en de imaginaire aan de andere zijde van het oppervlak. De ontaarde cirkels corresponderen met het oneigenlijke vlak. Hieruit lezen we o.a. direct af dat elke bundel een ontaarde cirkel bevat en dat (zie fig.) l_1 twee nulcirkels en dus reële en imaginaire cirkels telt en l_2 daarentegen alleen reële exemplaren heeft.

Opg. 166. Bewijs dat de hoek φ tussen de bollen B_i met middelpunten $M_i(a_i,b_i,c_i)$ en stralen R_i $(i=1,2)$ voldoet aan

$$\cos\varphi = \frac{R_1^2+R_2^2-(a_1-a_2)^2-(b_1-b_2)^2-(c_1-c_2)^2}{2R_1R_2}$$

Opg. 167. Leidt een voorwaarde af voor loodrechte snijding van de bovenstaande bollen.

Opg. 168. Geef een voorwaarde dat B_1 (zie opg. 165) B_2 halveert.

§ 53. Poolverwantschap.

Wij kunnen de(homogene) vergelijking $A(x^2+y^2+z^2)+ 2Bxu + 2Cyu + 2Dzu + Eu^2 = 0$ afgekort schrijven als $x'Bx = 0$

waarbij $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & A & 0 & C \\ 0 & 0 & A & D \\ B & C & D & E \end{pmatrix} = B'$.

In deze § zullen we echter, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld, alleen gebruiken dat B een symmetrische reële 4x4 matrix is.
De vergelijking $x'Bx = 0$ stelt dan een (algemeen) tweedegraads oppervlak voor. In deze notatie kan men een plat vlak weergeven met

$$(ABCD)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0 \quad \text{of} \quad Ax = 0$$

Juist als in § 40 bewijzen we nu de stelling: Stel $P_o(x_o y_o z_o u_o)$ is een vast punt en $x'Bx = 0$ is de tweedegraads vergelijking van een bol en laten Q_1 en Q_2 de snijpunten van een lijn l door P_o met de bol zijn. De meetkundige plaats van het aan P_o toegevoegde vierde harmonische punt t.o.v. Q_1 en Q_2 is het platte vlak $x_o'Bx = 0$.
Men noemt het vlak het poolvlak van P_o (t.o.v. de bol) en P_o de pool van het vlak. Zodoende wordt aan elk punt een vlak toegevoegd (Poolcorrelatie). De poolvlakken van de punten van een rechte l vormen een vlakke waaier gedragen door een rechte l'. Immers als de punten $x_o = \lambda x_1 + \mu x_2$ de rechte l voorstellen dan geldt voor de poolvlakken

$$x_o'Bx = \lambda x_1'Bx + \mu x_2'Bx = 0. \quad \text{q.e.d.}$$

Wegens de relatie $x_1'Bx_2 = (x_1'Bx_2)' = x_2'Bx_1$ geldt:
ligt P_1 in het poolvlak van P_2 dan ligt P_2 in het poolvlak van P_1.
Hieruit volgt dat de relatie tussen l en l' wederkerig is.
Ligt het punt P_o op de bol dan geldt: $x_o'Bx_o = 0$, dus dan ligt P_o in zijn poolvlak. Krachtens de definitie (of de algebraïsche afleiding) is het poolvlak in dit geval het raakvlak in P_o. Het poolvlak van het middelpunt is het oneigenlijke vlak.
Opg. 169. Reken dit ook na met behulp van de formule voor het poolvlak.
Opg. 170. De poolvlakken van alle punten van een rechte door het middelpunt zijn evenwijdig.

Opg. 171. Laat meetkundig zien dat de oneigenlijk rechte van het poolvlak t.o.v. een bol van een oneigenlijk punt poolverwant is met dat punt t.o.v. de absolute kegelsnede(N.B. elke bol gaat door de absolute kegelsnede).
Opg. 172. Concludeer uit bovenstaande opgaven dat het raakvlak in een punt van de bol loodrecht staat op de verbindingslijn van dat punt met het middelpunt.

Wij zullen hier niet nader ingaan op de theorie van de poolverwantschap welke in vele opzichten analoog met die van het platte vlak, verder ontwikkeld kan worden en welke een belangrijk hulpmiddel is bij de klassificatie van de tweedegraads oppervlakken.

§54. Ruimte-krommen.

De rechte lijn $\begin{cases} x = a+\varrho\cos\alpha \\ y = b+\varrho\cos\beta \\ z = c+\varrho\cos\gamma \end{cases}$ en de cirkel $\begin{array}{l} x = a+r\cos\varphi \\ y = b+r\sin\varphi \\ z = c \end{array}$

zijn voorbeelden van ruimte-krommen in parametervorm. Wij zullen hieronder een ruimte-kromme in parametervorm verstaan een verzameling van ∞^1 punten met coördinaten $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = k(t)$, welke afhangen van één parameter t. Wij zullen hier niet ingaan op de eisen welke we aan de functies f,g en h moeten stellen. Voorlopig veronderstellen we dat ze tweemaal differentieerbaar zijn.
De raaklijn in een punt $P_o(x_o,y_o,z_o)$ met $x_o=f(t_o)$ $y_o=g(t_o)$ en $z_o=h(t_o)$ is bepaald als limietstand van de verbindingslijn P_oP_1, waarbij $P_1(x_1,y_1,z_1)$ (met $x_1=f(t_1)$, $y_1=g(t_1)$ en $z_1=h(t_1)$) naar P_o nadert, dat wil zeggen waarbij t_1-t_o naar nul nadert.
De vergelijkingen van deze lijn zijn

$$\frac{x-x_o}{x_1-x_o} = \frac{y-y_1}{y_1-y_o} = \frac{z-z_o}{z_1-z_o}$$ dus daar $t_1 \to t_o$ vinden we voor de raaklijn

$$\frac{x-x_o}{f'(t_o)} = \frac{y-y_o}{g'(t_o)} = \frac{z-z_o}{h'(t_o)}$$. Dit alles is analoog met de vlakke krommen. Bij een ruimte-kromme hebben wij nog een begrip nl. het osculatievlak in een punt zeg P_o. Dit vlak is gedefinieerd als de limietstand van een vlak door P_o,P_1 en P_2 (P_2 analoog gedefinieerd als P_1) als P_1 en P_2 beide (onafhankelijk) naar P_o naderen.
Het vlak $P_oP_1P_2$ heeft tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_o & y_o & z_o & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_o-x_1 & y_o-y_1 & z_o-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Volgens de middelwaardestelling hebben we $x_1-x_o = (t_1-t_o)f'(\bar{t}_1)$ voor geschikte $\bar{t}_1$ tussen t_o en t_1 en $x_1-x_2 = (t_2-t_1)f'(\bar{t}_2)$ analoog voor g en h ($t_o \leqslant \bar{t}_2 \leqslant t_2$)
De vergelijking wordt dan (na deling van de 2e en 3e rij resp. door t_1-t_o en t_2-t_1)

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ f'(\bar{t}_1) & g'(\hat{t}_1) & h'(\breve{t}_1) \\ f'(\bar{t}_2) & g'(\hat{t}_2) & h'(\breve{t}_2) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{met} \quad t_o \leqslant \begin{Bmatrix} \bar{t}_1 \\ \hat{t}_1 \\ \breve{t}_1 \end{Bmatrix} \leqslant t_1$$

$$\text{en} \quad t_1 \leqslant \begin{Bmatrix} \bar{t}_2 \\ \hat{t}_2 \\ \breve{t}_2 \end{Bmatrix} \leqslant t_2$$

dit is te herleiden tot

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ f'(\bar{t}_1) & g'(\hat{t}_1) & h'(\breve{t}_1) \\ f''(\bar{t}_3) & g''(\hat{t}_3) & h''(\breve{t}_3) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{met} \quad t_1 \leqslant \begin{Bmatrix} \bar{t}_3 \\ \hat{t}_3 \\ \breve{t}_3 \end{Bmatrix} \leqslant t_2$$

Opg. 172 Voer dit uit bijv. door 2e rij van de 3e af te trekken en weer de middelwaardestelling toe te passen.
Hieruit volgt dat, daar $t_1 \to t_o$ en $t_2 \to t_o$, de vergelijking van het osculatievlak is

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ f'(t_o) & g'(t_o) & h'(t_o) \\ f''(t_o) & g''(t_o) & h''(t_o) \end{vmatrix} = 0$$

Opg. 173. Bepaal van de ruimtekromme $\left.\begin{matrix} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{matrix}\right\}$ die punten P(t) waarvoor het osculatievlak door (1,0,1) gaat.

Opg. 174. Bewijs dat de raaklijn in een punt van de kromme $\left.\begin{matrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=a\varphi \end{matrix}\right\}$ een vaste hoek met de z-as heeft.
Bewijs hetzelfde voor het osculatievlak. Schets de kromme.
Door eliminatie van de parameter t uit de vergelijkingen $x=f(t)$ $y=g(t)$ en $z=h(t)$ krijgt men de kromme als doorsnede van twee oppervlakken. De eliminatie geeft geeft nl. aanleiding tot twee vergelijkingen $\varphi(x,y,z)=0$ en $\psi(x,y,z)=0$. Bijv. in het geval van een cirkel $(x-a)^2+(y-b^2)-r^2=0$ en $z-c=0$.
In het algemeen kunnen twee oppervlakken door de kromme best meer gemeen hebben. Bijv. in het bovenstaande geval hebben de opp. $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2 = r^2+c^2$ en $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ ook nog de cirkel $\left.\begin{matrix} x=a+r\cos\varphi \\ y=b+r\sin\varphi \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ gemeen.

Opg. 175. Bepaal de meetkundige plaats (in parameter vorm) van het voetpunt van de loodlijn uit de oorsprong neergelaten op het osculatievlak van de kromme $\left.\begin{matrix} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \\ z=\varphi \end{matrix}\right\}$

§55 Oppervlakken.

In het algemeen vormen de punten die aan een vergelijking $F(x,y,z)=0$ voldoen een oppervlak in de ruimte. Ook hier zullen we niet ingaan op beschouwingen over de functie $F(x,y,z)=0$. We zullen veronderstellen dat de partiële afgeleiden naar x,y en z bestaan. Als voorbeeld hebben we al gezien de bol $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$ en het platte vlak $Ax+By+Cz+D = 0$.

Als de punten van een oppervlak gegeven zijn als functie van twee parameters, dus $x=f(s,t)$, $y=g(s,t)$ en $z=h(s,t)$ dan zeggen we dat het oppervlak in parametervorm gegeven is. Hier levert eliminatie van s,en t weer een vergelijking $F(x,y,z)=0$.

Voorbeeld bij de bol $\left.\begin{array}{l} x=a+R\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=b+R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=c+R\cos\vartheta \end{array}\right\}$

en bij het platte vlak

$$x = \frac{x_0+\lambda x_1+\mu x_2}{1+\lambda+\mu}$$

$$y = \frac{y_0+\lambda y_1+\mu y_2}{1+\lambda+\mu}$$

$$z = \frac{z_0+\lambda z_1+\mu z_2}{1+\lambda+\mu}$$

Stel gegeven het punt $P(x_0y_0z_0)$ op het oppervlak $F(x,y,z)=0$, dan zullen alle ruimtekrommen $\left.\begin{array}{l} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{array}\right.$ waarvoor geldt : $\left\{\begin{array}{l} x_0= f(t_0) \\ y_0= g(t_0) \\ z_0= h(t_0) \end{array}\right.$

en $F(f(t),g(t),h(t)) = 0$ (identiek in t) door P gaan en op het oppervlak liggen.De raaklijn in P aan zo'n kromme is

$$\frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y-g(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{z-h(t_0)}{h'(t_0)} \quad (=\varrho).$$ In verband met de relatie

$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}.f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}.g'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}.h'(t)$ volgt hieruit dat de raaklijn ligt in het vlak

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(z-z_0) = 0.$$

Dit vlak is onafhankelijk van f,g en h, het wordt het raakvlak genoemd van het oppervlak.

Opg. 176. Leidt opnieuw het raakvlak aan de bol af.

We zullen nu enige voorbeelden behandelen van oppervlakken "beschreven door een bewegende kromme".

Anders gezegd: voorbeelden van meetkundige plaatsen van de punten van zekere krommen welke aan bepaalde voorwaarden voldoen. Deze voorwaarden moeten zo zijn dat er ∞^1 krommen (van de gegeven soort) aan voldoen.

Dat wil zeggen dat de krommen afhangen van nog een parameter λ , zodat een punt P van een kromme met parameter λ de coördinaten heeft $x=f(t,\lambda)$ $y=g(t,\lambda)$ $z=h(t,\lambda)$. Eliminatie van t en λ geeft een vergelijking $\Phi(x,y,z)=0$ welke het oppervlak voorstelt. In het algemeen vormden de punten waarvan de coördinaten afhangen van twee parameters een oppervlak.

Voorbeelden: A. Omwentelingsoppervlakken.

Stel gegeven een kromme $\left.\begin{matrix} z=F(x) \\ y=0 \end{matrix}\right\}$

Gevraagd het oppervlak beschreven door de kromme bij wenteling om de z-as. Dit is dus de meetkundige plaats van de cirkels in een vlak loodrecht op de Z-as met middelpunt op de Z-as welke de kromme snijden.

De vergelijking van zo'n cirkel is

$\left.\begin{matrix} x=\varrho\cos\varphi \\ y=\varrho\sin\varphi \\ z=F(\varrho) \end{matrix}\right\}$ eliminatie van ϱ en φ levert $z=F(\sqrt{x^2+y^2})$.

Opg.177. Wentel de parabool $\left.\begin{matrix} y=0 \\ x^2=2z \end{matrix}\right\}$ om de Z-as.

Opg.178. Wentel de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ zowel om de X-as als om de Z-as.

Het ontstane oppervlak heet een omwentelings ellipsoïde. Door wenteling van de hyperbool $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ om een van haar symmetrie assen ontstaan resp. de oppervlakken

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{en} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

De eerste stelt een éénbladige (omwentelings) hyperboloïde voor en de tweede een tweebladige.

Opg.179. Wentel de cirkel $\begin{cases} y=0 \\ (x-a)^2+z^2=z^2 \end{cases}$ $(a\neq 0)$ om de Z-as.

De te wentelen kromme behoeft niet in een vlak door de as te liggen, zij behoeft zelfs niet vlak te zijn. Zo kunnen wij bv. de kromme $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ wentelen om een as door (x_o, y_o, z_o) met de richting (a,b,c). Elk punt $P(t)$ van de kromme beschrijft een cirkel met de vergelijkingen

$$\begin{cases} ax+by+cz=af(t)+bg(t)+ch(t) \\ (x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=(f(t)-x_o)^2+(g(t)-y_o)^2+(h(t)-z_o)^2. \end{cases}$$

Eliminatie van t geeft dan de vergelijking van het omwentelingsoppervlak. Daar in de linkerleden van bovenstaande vergelijkingen de t niet voorkomt zal het resultaat te schrijven zijn als

$$\Psi\left(\left\{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2\right\},\left\{ax+by+cz\right\}\right)=0.$$

Opg. 180. Bewijs, dat

$$A(x^2+y^2+z^2) + (Bx+Cy+Dz)^2 + Ex + Fy + Gz + H = 0$$

de algemene vorm is van een tweedegraads omwentelingsoppervlak. Er zijn dus ∞^7 omwentelingsoppervlakken van de tweede graad.

Als voorbeeld wentelen we de rechtse $\begin{cases} x = a \\ cy = az \end{cases}$ om de Z-as. Het oppervlak bestaat dus uit een stelsel cirkels $\begin{cases} z = \lambda \\ x^2+y^2+z^2 = \varrho^2 \end{cases}$ met $a^2 + \frac{\lambda^2 a^2}{c^2} + \lambda^2 = \varrho^2$.

Eliminatie van λ en ϱ geeft als vergelijking

$$a^2 + \frac{z^2a^2}{c^2} + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Anders geschreven

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ herkennen we een eenbladige omwentelings-hyperboloïde. We zien zo dus dat er rechte lijnen op dit oppervlak liggen, hierop komen we nog terug.

Opg. 181. Wentel de kromme $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ x^2 = 4y + 2 \end{cases}$ om de X-as.

§ 56. Enige regeloppervlakken.

Onder een regeloppervlak verstaan we een oppervlak beschreven door een rechte lijn. Een plat vlak is een voorbeeld. Als minder triviaal voorbeeld hebben we de eenbladige omwentelingshyperboloïde gehad. Gaan de beschrijvende rechten door één punt, dan spreekt men van een kegel, en in het geval dat dat punt oneigenlijk is, van een cylinder. Bv. alle rechten door een punt die bovendien nog een gegeven kromme snijden, vormen i.h.a. een kegel, de kromme heet dan de richtkromme. De richtkromme is natuurlijk niet door de kegel bepaald. Eenvoudige voorbeelden:

$x^2 + y^2 = r^2$ cylinder met $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases}$ als richtkromme en met beschrijvende in de richting van de Z-as.

$\varphi(x,y) = 0$ idem met $\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ als richtkromme.

Is $P(x_o, y_o, z_o)$ de (eigenlijke) top en $x=f(t)$ $y=g(t)$ $z=h(t)$ de richtkromme dan volgt de vergelijking van de kegel door eliminatie van t uit

$$\frac{x - x_o}{f(t) - x_o} \quad \frac{y - y_o}{g(t) - y_o} \quad \frac{z - z_o}{h(t) - z_o}.$$

Het resultaat zal een homogene functie van $(x-x_o)$, $(y-y_o)$ en $(z-z_o)$ zijn, daar ze in bovenstaande vergelijkingen ook homogeen voorkomen. In het geval dat de top oneigenlijk is nl. (a,b,c,0) volgt de vergelijking door eliminatie van t uit

$$\frac{x - f(t)}{a} = \frac{y - g(t)}{b} = \frac{z - h(t)}{c} .$$

Opg. 182. Bepaal de vergelijking van de kegel met top O en de omgeschreven cirkel van driehoek A(a,o,o), B(o,b,o), C(o,o,c) als richtkromme.

Opg. 183. Bepaal de vergelijking van de cylinder met beschrijvenden evenwijdig aan een lijn O(o,o,o) M(2,o,3) gaande door de cirkel met middelpunt M en straal 2 liggend in het vlak $x + z = 5$.

Opg. 184. Gegeven de ellips

$$E \begin{cases} \dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(z-n)^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

gevraagd de meetkundige plaats van de toppen der kegels met E als richtkromme die het vlak z=O volgens een cirkel snijden.

Behalve de kegels en de cylinders zullen we nog enige regeloppervlakken beschouwen welke beschreven worden door de rechten die drie gegeven krommen $K_i\big(x=f_i(t_i),\ y=g_i(t_i),\ z=h_i(t_i)\big)$ $(i=1,2,3)$ snijden. Het is meetkundig gemakkelijk in te zien dat de drie krommen i.h.a. een dusdanig oppervlak bepalen. De vergelijking krijgen we als volgt; Laat l een rechte zijn door de punten $P_1(t_1)$ en $P_2(t_2)$, dus

$$l \equiv \frac{x-f_1(t_1)}{f_2(t_2)-f_1(t_1)} = \frac{y-g_1(t_1)}{g_2(t_2)-g_1(t_1)} = \frac{z-h_1(t_1)}{h_2(t_2)-h_1(t_1)}$$

l behoort tot het oppervlak als zij de kromme K_3 snijdt, d.w.z. als er een t_3 bestaat zodat

$$\frac{f_3(t_3)-f_1(t_1)}{f_2(t_2)-f_1(t_1)} = \frac{g_3(t_3)-g_1(t_1)}{g_2(t_2)-g_1(t_1)} = \frac{h_3(t_3)-h_1(t_1)}{h_2(t_2)-h_1(t_1)}$$

en de gewenste vergelijking ontstaat dan na eliminatie van t_1, t_2 en t_3 uit de bovenstaande (4) vergelijkingen. Bij gegeven krommen is het vaak mogelijk vereenvoudigingen in de berekeningen aan te brengen, zoals we aan enige voorbeelden duidelijk zullen maken. Ook het geval dat een of meer van de richtkrommen niet in parametervorm is gegeven zullen we per voorbeeld afdoen. Het is mogelijk dat een richtkromme oneigenlijk is; men spreekt dan van een richtkegel, daar zij bepaald is als doorsnijding van het oneigenlijke vlak en een kegel met de oorsprong als top.

Is de kromme gegeven door $\begin{cases} u=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$ waarbij $\varphi(x,y,z)$ homogeen is in x,y en z, dan heeft de richtkegel de vergelijking $\varphi(x,y,z)=0$. Is de richtkegel een plat vlak dan spreekt men van een richtvlak. Ook deze gevallen zullen we met een voorbeeld toelichten.

1e. De richtkrommen zijn kruisende rechten, bijv.

$l_1\begin{cases} x=a \\ cy=bz \end{cases}$; $l_2\begin{cases} y=b \\ cx+az=0 \end{cases}$; en $l_3\begin{cases} 4bx-3ay=5ab \\ 5cx-3az=4ac \end{cases}$

We kunnen een punt op l_1 aangeven met $P_1(a, b\lambda, c\lambda)$ en op l_2 met $P_2(a\mu, b, -c\mu)$. De verbindingslijn is

$$\frac{x-a\mu}{a(1-\mu)} = \frac{y-b}{b(\lambda-1)} = \frac{z+c\mu}{c(\lambda+\mu)}.$$

De λ en μ moeten nu zo gekozen worden dat P_1P_2 de lijn l_3 snijdt. Op l_3 kiezen we twee punten bijv. $(0,5b,4c,-3)$ en $(3a,4b,5c,0)$. Als voorwaarde krijgen we dan:

$$\begin{vmatrix} a & b\lambda & c\lambda & 1 \\ a\mu & b & -c\mu & 1 \\ 0 & 5b & 4c & -3 \\ 3a & 4b & 5c & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ of wel } (\lambda+1)(\mu+1) = 2.$$

Met behulp van deze betrekking en de vergelijkingen van P_1P_2 kunnen we λ en μ elimineren. We hebben

$$\frac{\frac{x}{a}-\mu}{1-\mu} = \frac{\frac{y}{b}-1}{\lambda-1} = \frac{\frac{z}{c}+\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1}{2} \text{ en hieruit volgt}$$

$$\lambda+1 = \frac{2(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1} \text{ en } \mu+1 = \frac{2(\frac{z}{c}-\frac{y}{b})}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1} \text{ en de vergelijking van}$$

het oppervlak is dus

$$4(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}) = 2(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1)(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1) \text{ of uitgeschreven}$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Het oppervlak heet een eenbladige hyperboloïde. We kunnen aan deze vergelijking gemakkelijk zien dat het oppervlak rechte lijnen bevat en wel twee stel van ∞^1 lijnen

$$\left.\begin{aligned} (\tfrac{x}{a}-\tfrac{z}{c}) &= \lambda(1-\tfrac{y}{b}) \\ \lambda(\tfrac{x}{a}+\tfrac{z}{c}) &= (1+\tfrac{y}{b}) \end{aligned}\right\} \text{en} \quad \left.\begin{aligned} (\tfrac{x}{a}+\tfrac{z}{c}) &= \mu(1-\tfrac{y}{b}) \\ \mu(\tfrac{x}{a}-\tfrac{z}{c}) &= (1+\tfrac{y}{b}) \end{aligned}\right\}$$

Elke rechte van het ene stelsel snijdt elke rechte van het andere stelsel. Door elk punt P van het oppervlak gaan nl. twee rechten, van elk stelsel één. Het raakvlak in P snijdt het oppervlak volgens deze beide lijnen, immers het bevat de raaklijnen van alle op het oppervlak gelegen door P

gaande kromme en dus i.h.b. de beide rechten. Daar de doorsnijding van de tweede graad moet zijn kan ze niet meer bevatten.

We zullen nu nog volgens een enigszins andere methode het regeloppervlak met de richtlijnen

$l_1 \begin{cases} z = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ en $l_2 \begin{cases} 2x - az = ap \\ 2y + bz = bp \end{cases}$ en het richtvlak V(bx = ay) bepalen.

De vlakken $bx + ay + \lambda z = 0$ en $(2x - az - ap) + \mu(2y + bz - bp) = 0$ van de waaiers resp. door l_1 en l_2 bepalen de rechten welke l_1 en l_2 snijden. Zo'n rechte zal evenwijdig zijn aan V als zijn oneigenlijke punt

$\begin{vmatrix} a & \lambda \\ 2\mu & \mu b-a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & b \\ \mu b-a & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & a \\ 2 & 2\mu \end{vmatrix}$ voldoet aan $b\begin{vmatrix} a & \lambda \\ 2\mu & \mu b-a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} \lambda & b \\ \mu b-a & 2 \end{vmatrix}$

dus als $(b\mu + a)(\lambda - ab) = -2a^2b$ geldt.
Eliminatie van λ en μ geeft als vergelijking

$(bx + ay + abz)(-bx + ay + abz) = a^2bz(2y + bz - bp)$, uitgewerkt geeft dit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = pz$. Dit oppervlak heet hyperbolische paraboloïde.

Opg. 185. Laat ook rechtstreeks zien dat de hyperbolische paraboloïde rechte lijnen bevat. Wat wil het zeggen dat de doorsnijding met u = 0 ontaard is in de rechten

$\left.\begin{matrix} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ u = 0 \end{matrix}\right\}$ en $\left.\begin{matrix} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ u = 0 \end{matrix}\right\}$? Heeft dit oppervlak nog andere richtvlakken dan bx = ay ?

Opg. 186. Bepaal de vergelijking van het regeloppervlak bestaande uit alle rechten evenwijdig aan y = 0, welke de rechte $\begin{cases} x=0 \\ z=b \end{cases}$ en de cirkel

$\begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 = a^2 \end{cases}$ snijden. (Wig van Mijnheer Wallis).

Opg. 187. Bepaal het regeloppervlak met de richtlijnen

$\left.\begin{matrix} y = b \\ (x-a)^2 + z^2 = r^2 \end{matrix}\right\}$; $\left.\begin{matrix} y = -b \\ (x+a)^2 + z^2 = r^2 \end{matrix}\right\}$ en $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ z = 0. \end{matrix}\right\}$ (scheef tongewelf).

Opg. 188. Bepaal de meetkundige plaats van de raaklijnen aan de bol $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (met $a > R$) welke de Z-as snijden en evenwijdig zij aan z = 0. Rechte bolconoïde.

Opg. 189. Gevraagd de vergelijking van het regelvlak met de richtlijnen $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ en het richtvlak x = 0.

Opg. 190. Gevraagd het raaklijnen oppervlak van $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Opg. 191. Gevraagd de meetkundige plaats van de rechten welke de parabool $\left.\begin{matrix} x^2 = 2pz \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ loodrecht snijden en door de rechte $\left.\begin{matrix} z=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\}$ gaan.

Hoofdstuk IV.

De vierde dimensie. (zie figuur)

§ 57. Inleiding.

figuur

Het is mogelijk om met behulp van een passend gekozen axiomastelsel een vier-dimensionale meetkunde op te bouwen. Er moet dan natuurlijk een existentie axioma bij de axioma's van de drie-dimensionale meetkunde in de vorm van; er bestaan vijf punten welke niet alle in een drie-dimensionale ruimte liggen. Aangezien de begrippen (zoals punt, vlak e.d.) in een abstract axioma stelsel onbenoemd zijn, is het overbodig om zo'n vijfde punt met een mystiek gezicht ergens te zoeken.
Is de meetkunde eenmaal opgebouwd dan kunnen we zoals we dat gewend zijn coördinaten invoeren om zodoende tot een vier-dimensionale analytische meetkunde te geraken. Elk punt krijgt dan vier coördinaten (of vijf homogene), enz. Door identificatie van de punten met de bijbehorende coördinaten wordt dan tevens een model voor het axiomastelsel verkregen. Wij zullen hier de vier-dimensionale meetkunde invoeren als zo'n (analytisch) model. Beschouw daartoe de matrices met 5 rijen en 1 kolom $(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix}$ (x,y, enz. reële getallen). Een klasse van evenredige matrices zullen we een punt noemen, en wel indien $v \neq 0$ een eigenlijk punt en als $v = 0$ een oneigenlijk punt. Notatie P(x,y,z,u,v) of kortweg P(x). Onder een rechte lijn (door $P_1(x_1)$ en $P_2(x_2)$) verstaan we de verzameling van punten $(x) = \lambda(x_1) + \mu(x_2)$.
Onder een plat vlak (door $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ en $P_3(x_3)$) verstaan we de verzameling van punten $(x) = \lambda(x_1) + \mu(x_2) + \nu(x_3)$.

Onder een plat hypervlak (door $P_i(x_i)$, i = 1,..,4) verstaan we de verzameling $(x) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i(x_i)$.

Opg. 192. Bewijs dat twee vlakken elkaar in een punt snijden.
Opg. 193. Bewijs dat een lijn en een hypervlak elkaar in één punt snijden.
Opg. 194. Een vlak en een hypervlak snijden elkaar volgens een lijn.
Opg. 195. Twee hypervlakken snijden elkaar volgens een vlak.
Opg. 196. De punten van een hypervlak voldoen aan een lineaire vergelijking, en omgekeerd.
Een vlak is bepaald door twee onafhankelijke lineaire vergelijkingen en een lijn door drie onafhankelijke lineaire vergelijkingen.
Als we ons beperken tot de eigenlijke punten, dus met $v \neq 0$ dan kunnen we de coördinaten genormeerd nemen door ze door v te delen. De vijfde coördinaat is dan altijd 1.
De oneigenlijke punten voldoen allen aan de vergelijking v = 0. Evenwijdigheid van lijnen en vlakken en hypervlakken kan dan met behulp van de gemeenschappelijke oneigenlijke punten worden gedefiniëerd.
Opg. 197. Hoe zou U dit doen?
De punten van de rechte door $P_1(x_1)$ en $P_2(x_2)$ zijn(genormeerd)

$$(x) = \frac{\lambda(x_1) + \mu(x_2)}{\lambda + \mu}$$ en zij voldoen aan (elimineer λ en μ)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{u-u_1}{u_2-u_1}$$ (dit zijn conform opg. 196 drie onafhankelijke vergelijkingen).

De verhoudingsgetallen (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, u_2-u_1) noemen we de richtingsgetallen.
Opg. 198. Bewijs dat de richtingsgetallen aangevuld met een 0 de coördinaten van het oneigenlijke punt van de rechte zijn. Normeert men de richtingsgetallen (a,b,c,d) van een rechte zodanig dat $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ dan spreekt men van de richtingscosinussen. De hoek φ tussen twee rechten l_1 en l_2 met richtingscosinussen (a_i,b_i,c_i,d_i) (i=1,2) zal voldoen aan $\cos\varphi = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$, de lijnen staan dus (volgens deze definitie) loodrecht op elkaar als

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2 = 0$. Dit is dus het geval als de oneigenlijke punten polair verwant zijn t.o.v. het tweede graads oppervlak.

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+u^2 &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}\right\}$$ welke de absolute kwadriek wordt genoemd.

Twee vlakken staan loodrecht op elkaar als hun oneigenlijke lijnen toegevoegd zijn t.o.v. de absolute kwadriek. Daar deze lijnen elkaar wederkerig bepalen zien we dat door een punt P juist één vlak loodrecht op een gegeven vlak V staat (projecterend vlak, het snijpunt heet de projectie van P op V).

Ook zien we direct in dat als twee vlakken loodrecht op elkaar staan elke lijn in het ene vlak loodrecht staat op elke lijn in het andere vlak, de loodrechte stand van twee vlakken is hier dus fraaier dan in de derde dimensie.

Een lijn l staat loodrecht op een hypervlak α als het oneigenlijke punt van l de pool t.o.v. de absolute kwadriek is van het oneigenlijke vlak van α, de lijn l staat loodrecht op elke lijn van α. Er is door een punt P altijd een lijn loodrecht op een hypervlak (projecterende lijn, snijpunt met α heet de projectie).

Een vlak V heet loodrecht op een hypervlak α te staan als er in V een stelsel evenwijdige lijnen bestaat, welke loodrecht op α staan.

Onder de afstand van twee punten $P_1(x_1,y_1,z_1,u_1,1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2,u_2,1)$ verstaan we het positieve getal

$$P_1P_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(u_1-u_2)^2}.$$

De meetkundige plaats van alle punten welke een afstand R hebben tot $P_1(x_o,y_o,z_o,u_o,1)$ is $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2+(u-u_o)^2 = R^2$, hyperbol genaamd. Meetkundig is direct duidelijk dat elk hypervlak door P_o de hyperbol volgens een bol snijdt. Deze snijbollen heten de grote bollen van de hyperbol. Een willekeurig hypervlak snijdt de hyperbol volgens een kleine bol.

Opg. 199. Wat is de doorsnijding van twee hyperbollen?

Vanzelfsprekend kunnen we hier niet verder op de vierde dimensie ingaan, het bovenstaande is verre van compleet en is dan ook alleen bedoeld om een indruk te geven van de mogelijkheden en problemen welke er in dit soort meetkunde rijzen

Tot slot nog een kroon opgave:

opg. 200. Schrijf de inleiding van hoofdstuk 5.

INHOUD.

Hoofdstuk I. De rechte lijn.

1. De rechte lijn. p.1
2. Coördinaten op de rechte lijn. p.1
3. Deelverhouding. p.2
4. Dubbelverhouding. p.3

Hoofdstuk II. Het platte vlak.

5. Coördinaten in het platte vlak. p.5
6. Afstand van twee punten. p.5
7. De cirkel. p.6
8. De rechte lijn. p.8
9. Parameter voorstelling. p.9
10. Stellingen van Menelaos en Ceva p.10
11. Gerichte hoeken. p.11
12. De hoek tussen twee rechten. p.12
13. Afstand van punt tot rechte. p.13
14. Snijpunten van lijnen. p.14
15. Oppervlakte van een driehoek. p.15
16. Cirkelbundels. p.16
17. Macht van punt t.o.v. cirkel. p.17
18. Vervolg "Cirkelbundels" p.18
19. Vervolg "Cirkelbundels". p.19
20. Raaklijn aan cirkel. p.21
21. Poollijn en pool. p.22
22. Poolverwantschap. p.23
23. Dualiteit. p.24
24. Oneigenlijke elementen. p.25
25. Dualiteit (vervolg). p.27
26. Homogene Cartesische coördinaten. p.27
27. Homogene vergelijkingen. p.29
28. De isotrope punten. p.30
29. Coördinatentransformaties. p.30
30 Punttransformaties. p.33
31. Inversie. p.34
32. Poolcoördianten. p.36

Gemengde opgaven.

33. De parabool. p.37
34. De ellips. p.39
35. De ellips en haar hoofdcirkel. p.42
36. De hyperbool. p.44
37. De hyperbool en zijn asymptoten. p.46
38. Apollonia. p.48
39. De tweedegraadskromme. p.51

40. Poolverwantschap. p.53
41-43. Ontbreekt.
44. De tweedegraadskromme en de oneigenlijke rechte. p.57
45. Kegelsnedebundels. p.62
46. De centrale kegelsnede p.67
47. De stellingen van Sturm en Pascal. p.69
48. Poolverwantschap, dualiteit, lijncoördianten. p.71

Hoofdstuk III. De ruimte.

49. Coördinaten en de rechte lijn. p.75
50. Coördinatentransformaties. p.77
50a. Het platte vlak. p.79
51. Nogmaals de rechte lijn. p.82
52. De bol. p.85
53. Poolverwantschap. p.88
54. Ruimte-krommen. p.89
55. Oppervlakken. p.91
56. Enige regeloppervlakken. p.93

Hoofdstuk IV. De vierde dimensie.

57. Inleiding. p.97