STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 27

Differentiaalrekenen en differentievergelijkingen.

Cursus Eindhoven 1954:55.

H.J.A.Duparc.

1955

Inhoudsopgave

Differentierekening en differentievergelijkingen

door

Dr.H.J.A. Duparc

1954

Differentierekening en differentievergelijkingen.

cursus gegeven te

Eindhoven

door

Dr H.J.A. Duparc.

§1. Inleiding.

Er bestaat een grote analogie tussen de resultaten uit de differentiaalrekening en de differentierekening. Hoewel men gewoonlijk meer vertrouwd is met die uit het eerste gebied zou men toch kunnen verdedigen, dat die uit het tweede gebied eenvoudiger zijn. Immers, terwijl in de differentiaalrekening het begrip afgeleide functie

$$f'(x)=Df(x)= \lim_{h\to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

een centrale rol speelt, treedt in de differentierekening als belangrijkste begrip op de uitdrukking

$$\underset{h}{\Delta} f(x) = f(x+h) - f(x),$$

welke uit functiewaarden van f(x) berekend kan worden slechts door af te trekken; bij de berekening van Df(x) daarentegen is afgezien van de deling nog een extra limietovergang nodig. Anderzijds heeft het feit, dat deze limietovergang bij de berekening van $\underset{h}{\Delta} f(x)$ achterwege blijft, ten gevolge dat $\underset{h}{\Delta} f(x)$ een functie is van twee veranderlijken x en h. Hierdoor zijn sommige formules in de differentierekening weer iets gecompliceerder dan de corresponderende in de differentiaalrekening, zelfs als men ze beschouwt voor constante h. Reeds Newton beschouwde uitdrukkingen, die gelijken op de hier ingevoerde verschillen, nl. uitdrukkingen, die wij in onze notatie zouden kunnen aangeven met $\frac{1}{h}\underset{h}{\Delta} f(x)$. Wij zullen echter voor dergelijke uitdrukkingen, die men gedeelde verschillen noemt, een wat andere notatie bezigen en, de punten x en x+h resp. met x_1 en x_2 aanduidende, schrijven.

$$f\,[x_1 x_2] = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

Verdere uitwerking van deze gedachtengang voert tot de theorie der interpolatieformules, in zekere zin op te vatten als de analoga van de reeksen van Taylor of Mac Laurin uit de differentiaalrekening. Verwant hiermede zijn de zgn.faculteitenreeksen, die men als het analogon van de machtreeksen uit de analyse kan opvatten.

Evenals naast de differentiaalrekening een integraalrekening bestaat, is er naast de differentierekening een sommatierekening. Naast de theorie der differentiaalvergelijkingen staat die der differentievergelijkingen.

In het volgende zal aan elk dezer onderwerpen enige aandacht worden besteed. Soms wordt bij de afleiding van resultaten - naar men zou kunnen oordelen: ten onrechte of onnodig- gebruik gemaakt van resultaten uit de differentiaal- en integraalrekening.

§2. Differentieoperatoren.

Onder $\underset{h}{\Delta} f(x)$ verstaat men,zoals al in de inleiding werd opgemerkt, de uitdrukking

$$f(x+h) - f(x).$$

In het geval, dat men h = 1 neemt, schrijft men kortweg

$$\Delta f(x) = f(x+1)-f(x).$$

Naast deze operatoren is het nog van belang om in te voeren de verschuivingsoperator E, gedefiniëerd door

$$Ef(x) = f(x+1).$$

Bij gevolg is

$$\Delta f(x) = Ef(x)-f(x) =(E - 1)f(x).$$

In operatorentaal geschreven krijgt men

$$\Delta = E-1 .$$

Men kan voor natuurlijke h de operatoren Δ^h en E^h met volledige inductie definiëren en vindt dan bv. $E^h f(x)=f(x+h)$. De laatste formule is ook als definitie van E^h op te vatten voor niet gehele h.

Opgave 1: Bewijs $E^h E^k = E^{h+k}$ voor alle h en k. Men vindt nu de volgende operatorenformule

$$\underset{h}{\Delta} = E^h - 1 .$$

Men kan voorts schrijven

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \underset{h}{\Delta} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{E^h - 1}{h} f(x),$$

vooropgesteld natuurlijk, dat de beschouwde limieten bestaan. Men pleegt dit laatste resultaat wel te schrijven in de symbolische gedaante

$$D = \lim_{h\to 0} \frac{E^h - 1}{h},$$

waarbij het de bedoeling is, dat beide resultaten op een functie $f(x)$ worden toegepast en men voor

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{E^h - 1}{h}\right) f(x) \text{ leze } \lim_{h\to 0} \left(\frac{E^h - 1}{h} f(x)\right).$$

Waar in de toekomst weer dergelijke limietovergangen optreden is het de bedoeling er dan eenzelfde interpretatie aan te geven, dwz. met de operatorenformule

$$F = \lim G$$

wordt bedoeld

$$\lim G\big(f(x)\big) = (\lim G)\, f(x) = F\, f(x),$$

vooropgesteld, dat de limiet in het linkerlid voor functies van zekere klasse of soms zelfs voor alle functies bestaat. Zo heeft men voor de functie $f(x) = a^x$, indien $a \neq 1$ de formule

$$\left(\sum_{n=0}^{N} E^n\right) a^x = \sum_{n=0}^{N} \left(E^n a^x\right) = \sum_{n=0}^{N} a^{x+n} = \frac{a^{x+N+1} - a^x}{a - 1}$$

en als $|a| < 1$ vindt men zelfs

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} E^n\right) a^x = \frac{a^x}{1-a}.$$

Men kan nog verder gaan en opmerken, dat

$$(1 - E)\frac{a^x}{1-a} = a^x$$

is, en vindt dan

$$(1-E)\left(\sum_{n=0}^{\infty} E^n\right) a^x = a^x \quad \text{en ook} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} E^n\right)(1-E)a^x = a^x$$

zodat men hier zou kunnen gaan schrijven

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} E^n\right)(1-E) = 1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} E^n = (1-E)^{-1}.$$

Deze laatste formule heeft slechts voor sommige functies betekenis. Bovendien zij er nog op gewezen dat de operator $(1-E)^{-1}$ niet ondubbelzinnig is vastgelegd. Immers naar zijn definitie is dit die operator, die aan een functie $(1-E)f(x)$ de functie $f(x)$ zelve toevoegt. Indien men echter bij $f(x)$ een functie met periode 1 optelt, bv. $\sin 2\pi x$, dan verandert $(1-E)f(x)$ niet, maar $f(x)$ wel. Het is zelfs zo dat

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} E^n\right) a^x$$

voor $|a|>1$ divergeert, maar dat men ook nu nog aan

$$(1-E)^{-1}\, a^x$$

wel degelijk een (en dus meer dan een) betekenis kan hechten, nl. bijvoorbeeld

$$\frac{a^x}{1-a} \quad \text{of} \quad \frac{a^x}{1-a} + \sin 2\pi x.$$

Wij willen nog een voorbeeld geven van een door een oneindige reeks voorgestelde operator. Gaan wij uit van de hierboven gegeven formule

$$D = \lim_{h\to 0} \frac{E^h - 1}{h}$$

en van het bekende resultaat uit de analyse, dat bv. voor $a>0$ geldt

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a,$$

dan zou men er behagen in kunnen scheppen om te schrijven $D = \log E$. Wie dan nog verder zou willen gaan, zou kunnen schrijven $E = e^D$, $E^x = e^{xD}$ en daarna

$$E^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n D^n}{n!}$$

om ten slotte op te merken dat, als men de operatoren in beide leden van deze relatie toepast op een functie f, die een in het punt x convergente MacLaurinontwikkeling bezit, het juiste resultaat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!}$$

wordt verkregen. Het behoeft geen betoog dat het bovenstaande - in eerste instantie - slechts heuristische waarde bezit.

Men definiëert verder de terugwaartse differenties door

$$\nabla_h f(x) = f(x) - f(x-h), \text{ i.h.b. } \nabla_1 f(x) = \nabla f(x),$$

zodat men heeft

$$\nabla_h = 1 - E^{-h}; \quad E^h \nabla_h = \nabla_h E^h = \Delta_h .$$

Uit

$\Delta = E-1$ vindt men voorts

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{h=o}^{n} \binom{n}{h} E^h (-)^{n-h}$$

en analoog

$$E^n = (\Delta+1)^n = \sum_{h=o}^{n} \binom{n}{h} \Delta^h.$$

Hiermede is het mogelijk om elke operator van de gedaante

$$\sum_{j=o}^{n} a_j \Delta^j$$

in de gedaante

$$\sum_{j=o}^{n} b_j E^j$$ te schrijven en omgekeerd elke operator van de tweede gedaante in de eerste.

Naast de operatoren E, Δ en ∇ voeren wij er nog een aantal in, die voor het vervolg van belang zijn.

De operator van het gemiddelde M_h wordt gedefiniëerd door

$$M_h f(x) = \tfrac{1}{2}\left(f(x)+f(x+h)\right).$$

Kennelijk heeft men $M_h = \frac{1}{2}(1+E^h)$.

Op grond van de verwantschap der symbolen Δ en ∇ zou men naast de operator M ook nog een operator W verwachten, welke gedefiniëerd is door

$$W_h f(x) = \tfrac{1}{2}\left(f(x)+f(x-h)\right),$$

dus $W_h = \frac{1}{2}(1+E^{-h}) = E^{-h}M_h$.

Deze operator treedt echter vrijwel nergens op in de theorie.

Tenslotte voeren wij nog in de centrale differentieoperator gedefiniëerd door $\delta_h f(x) = f(x+\frac{1}{2}h)-f(x-\frac{1}{2}h)$, dus door

$$\delta_h = E^{\frac{1}{2}h} - E^{-\frac{1}{2}h}$$

en de centrale operator van het gemiddelde gedefiniëerd door

$$\mu_h f(x) = \tfrac{1}{2}\left(f(x+\tfrac{1}{2}h) + f(x-\tfrac{1}{2}h)\right),$$

dus door

$$\mu_h = \tfrac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}h} + E^{-\frac{1}{2}h}\right).$$

Indien de onderindex bij een der nieuw gedefiniëerde operatoren gelijk is aan 1, zullen wij deze veelal weglaten.

Er bestaan uiteraard tal van relaties tussen de hier ingevoerde operatoren Δ_h , ∇_h , M_h , W_h , δ_h en μ_h , welke systematisch kunnen worden gevonden door eliminatie van E uit de grondformules, waarmede al deze operatoren worden uitgedrukt in de operator E. Wij volstaan hier met slechts een aantal der meest voorkomende resultaten te vermelden;

$$M_h = 1+\tfrac{1}{2}\Delta_h \quad ; \quad \mu_h = E^{-\frac{1}{2}h} + \tfrac{1}{2}\delta_h \, ; \quad \mu_h^{\,2} = 1 + \tfrac{1}{4}\delta_h^{\,2} \quad ;$$

$$\delta_h = E^{-\frac{1}{2}h}\Delta_h \quad ; \quad \mu_h = E^{-\frac{1}{2}h} M_h .$$

Wij merken nu reeds op, dat men de waarde van een functie $f(x)$ kan vinden bv.uit $f(x-1)$ en $\Delta f(x-1)$, dus ook uit $f(x-2)$, $\Delta f(x-2)$, $\Delta^2 f(x-2)$, enz.

Opgave 2.

Druk $f(x+n)$ uit in $f(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$,...., $\Delta^n f(x)$.
Bij het uitwerken van deze opgave kan men vaak met vrucht het volgende schema gebruiken, waarbij steeds het verschil tussen twee onder elkaar staande waarden geschreven is op hun middenloodlijn , rechts van die waarden.

$f(x-2)$				
	$\Delta f(x-2)$			
$f(x-1)$		$\Delta^2 f(x-2)$		
	$\Delta f(x-1)$		$\Delta^3 f(x-2)$	
$f(x)$		$\Delta^2 f(x-1)$		$\Delta^4 f(x-2)$
	$\Delta f(x)$		$\Delta^3 f(x-1)$	
$f(x+1)$		$\Delta^2 f(x)$		
	$\Delta f(x+1)$			
$f(x+2)$				

Ditzelfde schema is nog op diverse andere wijzen te schrijven Allereerst geven wij het met terugwaartse differenties.

$f(x-2)$				
	$\nabla f(x-1)$			
$f(x-1)$		$\nabla^2 f(x)$		
	$\nabla f(x)$		$\nabla^3 f(x+1)$	
$f(x)$		$\nabla^2 f(x+1)$		$\nabla^4 f(x+2)$
	$\nabla f(x+1)$		$\nabla^3 f(x+2)$	
$f(x+1)$		$\nabla^2 f(x+2)$		
	$\nabla f(x+2)$			
$f(x+2)$				

Beide schema's hebben het nadeel van een zekere asymmetrie. Dit nadeel valt weg, als men zich bedient van de centrale differentieoperator δ . Dan krijgt men het volgende schema:

$$
\begin{array}{lllll}
f(x-2) & & & & \\
 & \delta f(x-\tfrac{3}{2}) & & & \\
f(x-1) & & \delta^2 f(x-1) & & \\
 & \delta f(x-\tfrac{1}{2}) & & \delta^3 f(x-\tfrac{1}{2}) & \\
f(x) & & \delta^2 f(x) & & \delta^4 f(x) \\
 & \delta f(x+\tfrac{1}{2}) & & \delta^3 f(x+\tfrac{1}{2}) & \\
f(x+1) & & \delta^2 f(x+1) & & \\
 & \delta f(x+\tfrac{3}{2}) & & & \\
f(x+2) & & & &
\end{array}
$$

Hier valt nog op te merken, dat in de drie gegeven schema's op corresponderende plaatsen dezelfde (numerieke) waarden staan, die in de drie schema's slechts in notatie verschillen.

Wij kunnen de schema's ook nog in operatorenvorm geven, waarbij het dan de bedoeling is, dat overal achter een operator in het schema eenzelfde functiewaarde, in casu $f(x)$, wordt gedacht.

$$
\begin{array}{lllll}
E^{-2} & & & & \\
 & \Delta E^{-2} & & & \\
E^{-1} & & \Delta^2 E^{-2} & & \\
 & \Delta E^{-1} & & \Delta^3 E^{-2} & \\
1 & & \Delta^2 E^{-1} & & \Delta^4 E^{-2} \\
 & \Delta & & \Delta^3 E^{-1} & \\
E & & \Delta^2 & & \\
 & \Delta E & & & \\
E^2 & & & &
\end{array}
$$

<u>Opgave 3</u>. Geef ook de operatorennotatie van het hierboven neergeschreven tweede en derde schema.

Verder merken wij nog op dat men bij functies van meer variabelen, analoog aan de partiëele differentiaalquotiënten uit de analyse, partiëele differentiequotiënten kan vormen. Wij schrijven

$$\underset{h}{\Delta}{}_x\, f(x,y) = f(x+h,y)-f(x,y)$$
$$\underset{k}{\Delta}{}_y\, f(x,y) = f(x,y+k)-f(x,y).$$

De formule $\underset{h}{\Delta}{}_x \underset{k}{\Delta}{}_y = \underset{k}{\Delta}{}_y \underset{h}{\Delta}{}_x$ is een trivialiteit, in tegenstelling tot de corresponderende formule uit de differentiaalrekening. Soms is het wel gebruikelijk om nog zgn. totale verschillen te definiëren:

$$\underset{hk}{\Delta}\, f(x,y) = f(x+h,y+k)-f(x,y)$$

zodat men heeft

$$\underset{h,k}{\Delta}\, f(x,y) = \underset{h}{\Delta}{}_x\, f(x,y+k) + \underset{k}{\Delta}{}_y\, f(x,y)$$
$$= \underset{k}{\Delta}{}_y\, f(x+h,y) + \underset{h}{\Delta}{}_x\, f(x,y).$$

De corresponderende verschuivingsoperatoren definiëren we nu door

$$E_x^h f(x,y) = f(x+h,y);\quad E_y^k f(x,y) = f(x,y+k).$$

Men heeft dan de operatorrelaties.

$$\underset{h}{\Delta}_x = E_x^h - 1;\quad \underset{k}{\Delta}_y = E_y^k - 1;\quad \underset{h,k}{\Delta} = E_x^h E_y^k - 1.$$

§3. Grondformules.

In deze paragraaf geven wij een aantal grondformules van de differentierekening, waarbij steeds duidelijk de analogie met de corresponderende formules uit de differentiaalrekening naar voren wordt gebracht.

Allereerst heeft men voor een constante c naast $Dc = o$ ook de formule $\underset{h}{\Delta} c = o$.

Analoog aan de formules

$$D(f\pm g) = Df \pm Dg,\quad Dcf = cDf \text{ (c constant)}$$

heeft men in de differentierekening

$$\underset{h}{\Delta}(f\pm g) = \underset{h}{\Delta} f \pm \underset{h}{\Delta} g,\quad \underset{h}{\Delta} cf = c\underset{h}{\Delta} f \text{ (c constant)}.$$

De formule

$$D(fg) = gDf + fDg$$

heeft echter niet zo'n eenvoudig analogon, hetgeen belangrijke consequenties zal blijken te hebben.

Immers

$$\underset{h}{\Delta}(fg) = (E^h-1)(fg) = (E^h-1)f.\ E^h g + f(E^h-1)g$$
$$= E^h g.\ \underset{h}{\Delta} f + f\ \underset{h}{\Delta} g$$

en dus ook

$$\underset{h}{\Delta}(fg) = E^h f.\ \underset{h}{\Delta} g + g.\ \underset{h}{\Delta} f.$$

Hier treedt dus in het rechterlid de operator E^h extra op. De gevolgen blijven niet uit: Terwijl men heeft

$$Df^2 = 2f.Df$$

vinden wij hier

$$\underset{h}{\Delta} f^2 = (E^h f + f)\ \underset{h}{\Delta} f = 2\underset{h}{M} f.\ \underset{h}{\Delta} f.$$

Zo vindt men naast $Dx^2 = 2x$ het resultaat

$$\underset{h}{\Delta} x^2 = (2x+h)h.$$

Dit zou het ogenblik zijn om het berekenen van differenties te staken, ware het niet dat men, niet alleen ter wille van de formele analogie, een nieuw symbool had ingevoerd, waardoor tal van formules uit de differentierekening toch overeenkomst vertonen met de corresponderende uit de differentiaalrekening. Men schrijft

$$x^{(1)} = x; \quad x^{(2)} = x(x-1), \quad x^{(3)} = x(x-1)(x-2); \ldots,$$

i.h.a. voor natuurlijke n

$$x^{(n)} = x^{(n-1)}(x-n).$$

Men vindt nu

$$\Delta x^{(n)} = (x+1)^{(n)} - x^{(n)} = n.x^{(n-1)},$$

zodat de analogie nu gered is. Evengoed als voor $Dx^{(n)}$ geen eenvoudige formule bestaat, bestaat er dan ook geen voor Δx^n.

Het hier ingevoerde symbool $x^{(n)}$ is een bijzonder geval van het algemenere $x^{(n;h)} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h)$; $x^{(o;h)} = 1$.
Kennelijk heeft men $x^{(n;1)} = x^{(n)}$.

Opgave 1. Schrijf het product $x(x+h)\ldots(x+nh)$ ook met behulp der nieuw ingevoerde symbolen.

Alvorens de theorie der differentieoperatoren voort te zetten gaan wij nu eerst van een aantal bekende formules van machtsverheffing na of zij ook gelden voor de nieuw ingevoerde machten die wij ook wel pseudo machten zullen noemen. Wij hebben hier op het oog de formules

$$x^n x^m = x^{n+m}; \quad (x^n)^m = x^{nm}; \quad (x+y)^n = \sum_{h=o}^{n} \binom{n}{h} x^h y^{n-h}.$$

De eerste der formules geldt kennelijk niet zonder meer als men de machten door pseudomachten vervangt. Wel geldt echter

(1). $$x^{(n;h)} . E^{-nh}\, x^{(m;h)} = x^{(n+m;h)},$$

dus in het bijzonder $x^{(n)}\, E^{-n}\, x^{(m)} = x^{(n+m)}$.

Opgave 2. Bewijs dit.
Opgave 3. Bewijs $D^n x^a = a^{(n)} x^{a-n}$.
Opgave 4. Bewijs $(xh)^{(n;h)} = x^{(n)} h^n$.

Voor de tweede formule is geen eenvoudig analogon met pseudomachten te geven, wel echter van de derde. Men heeft nl. de volgende formule (formule van Van der Monde)

$$(x+y)^{(n;h)} = \sum_{m=o}^{n} \binom{n}{m} x^{(m;h)} y^{(n-m;h)}.$$

Een eerste bewijs geschiede door volledige inductie naar n. Voor n = 1 is de bewering triviaal en, als zij reeds bewezen is voor zekere natuurlijke n, vindt men voor n+1

$$(x+y)^{(n+1;h)} = (x+y)^{(n;h)}(x+y-nh).$$

Gebruik makende van het al bekende resultaat voor $(x+y)^{(n;h)}$, vindt men hieruit gemakkelijk de gewenste formule indien men verder nog de factor $x + y - nh$ op passende wijze in twee gedeelten splitst. Dit bewijs is dus in feite analoog aan het bewijs van de formule van Newton voor gewone machten. Ook hier wordt gebruik gemaakt van het bekende additietheorema van binomiaal coëfficiënten.

Een tweede bewijs is te leveren door op twee manieren de n^e afgeleide naar u uit te rekenen van de functie
$u^{\frac{x+y}{h}} = u^{\frac{x}{h}} u^{\frac{y}{h}}$. Enerzijds is deze n^e afgeleide (verg.opg.3) gelijk aan

$$\frac{x+y}{h}\left(\frac{x+y}{h} - 1\right) \dots \left(\frac{x+y}{h} - n+1\right) u^{\frac{x+y}{h} - n} = h^{-n} (x+y)^{(n;h)} u^{\frac{x+y}{h} -n}$$

en anderzijds vindt men door toepassing van de formule van Leibnitz

$$D^n u^{\frac{x}{h}} u^{\frac{y}{h}} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (D^m u^{\frac{x}{h}})(D^{n-m} u^{\frac{y}{h}}),$$

waaruit het gewenste resultaat gemakkelijk volgt.

Opg.5. Bewijs

$$\left(\sum_{i=0}^{r} x_i\right)^{(n;h)} = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} x_1^{(n_1;h)} x_2^{(n_2;h)} \dots x_r^{(n_r;h)},$$

waarbij de som wordt uitgestrekt over alle niet negatieve gehele $n_1,\dots,n_r$ met som n.

Men definieert verder voor natuurlijke n

$$x^{(-n;h)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)} ; \quad x^{(-n)} = \frac{1}{(x+1)\dots(x+h)} .$$

Opg.6. Bewijs de formule (1) voor willekeurige gehele m en n.

Opg.7. Bewijs $x(x+h)\dots(x+nh)=(-)^{n+1}(-x)^{(n;h)}$.

Opg.8. Bewijs $\frac{1}{x^{(-n;h)}} = (-)^n (-x-h)^{(n;h)}$.

Met gebruikmaking van de Γ-functie kan men voor willekeurige n een definitie geven van $x^{(n;h)}$. Men definieert nl.

$$x^{(n;h)} = h^n \frac{\Gamma(\frac{x}{h}+1)}{\Gamma(\frac{x}{h}-n+1)},$$

dus in het bijzonder

$$x^{(n)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} .$$

Opg.9. Laat zien dat de nieuwe definitie overeenstemt met de oude voor gehele n.

Opg.10. Bewijs voor $x > 0$ de formule

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n!\; x^{(-n)} .$$

Opg.11. Bewijs $2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}}{n!}$.

Een veelterm is op te vatten als een lineaire combinatie met constante coëfficiënten van een eindig aantal der functies $1, x, x^2, x^3, \ldots$ Het is zonder meer duidelijk dat men een veelterm eveneens kan schrijven als een lineair compositum der functies $1, x, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$, terwijl omgekeerd zo'n compositum natuurlijk ook weer te schrijven is als combinatie van de gewone machten $1, x, x^2, \ldots$. Om deze transformaties over en weer systematisch af te leiden, is het goed over formules te beschikken, die x^N uitdrukken in $1, x, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$ en die $x^{(N)}$ uitdrukken in $1, x, x^2, \ldots, x^N$. Men definieert de getallen van Stirling $S^{(n)}_m$ van de eerste soort door

$$x^{(N)} = \sum_{m=0}^{N} S^{(N)}_m \; x^m$$

en die van de tweede soort door

$$x^N = \sum_{m=0}^{N} \sigma^{(N)}_m \; x^{(m)} .$$

Tussen deze getallen bestaan tal van gemakkelijk af te leiden relaties, waarop wij hier niet nader ingaan.

Opg.12. Bewijs $\sum_{m=h}^{N} S^{(N)}_m \sigma^{(m)}_h = 0$ voor $N \neq h$
$= 1$ voor $N = h$.

Opg.13. Bewijs $S^{(N+1)}_m = S^{(N)}_{m-1} - N\, S^{(N)}_m$.

Opg.14. Bepaal een analoge relatie tussen getallen $\sigma^{(N)}_m$.

Met behulp van de recurrente relaties van opg.12 en 13 is het gemakkelijk om de getallen $S^{(N)}_m$ resp. $\sigma^{(N)}_m$ te berekenen. Dit kan met een schema geschieden dat analoog is aan het bekende schema van de driehoek van Pascal. Wij geven het hier voor de getallen $S^{(N)}_m$ voor $N = 0,1,\ldots,5$.

1
1 -1
1 -3 2
1 -6 11 -6
1 -10 35 -50 24
1 -15 85 225 274 -120

Opg.15. Bepaal de eerste 6 regels van het corresponderende schema voor de getallen $\sigma_m^{(N)}$.

Wij keren na dit intermezzo over getallen van Stirling terug tot het afleiden van differentieformules voor de belangrijkste elementaire functies.

Met behulp van het bovenstaande zijn differenties van polynomen gemakkelijk neer te schrijven.

Opg.16. Bereken $\Delta \sum_{h=0}^{n} a_h x^h$.

Verder herinneren wij aan het resultaat

$$\underset{h}{\Delta}\, x^{-(n;h)} = - nh\, x^{-(n+1;h)} \quad .$$

De differentieformule voor gebroken rationale functies zullen wij later bepalen. Eerst beschouwen wij nog de exponentiële functie. Men heeft

$$\underset{h}{\Delta}\, a^x = (a^h-1)a^x,$$

zodat de functie a^x zich zowel na differentiatie als na differentie nemen op een constante factor na reproduceert.

Naast $De^x = e^x$ heeft men bv. $\Delta 2^x = 2^x$.

Opg.17. Bepaal $\underset{h}{\Delta}\, a^{bx}$.

Opg.18. Bereken $\underset{h}{\Delta} \sin ax$, $\underset{h}{\Delta} \cos ax$, $\underset{h}{\Delta} \sinh ax$, $\underset{h}{\Delta} \cosh ax$.

De functie log x is in de differentiaalrekening o.a. van fundamenteel belang omdat haar afgeleide gelijk is aan $\frac{1}{x}$. Beschouwt men verder de functie bg tg x (welke overigens gemakkelijk uit te drukken is in logarithmen), waarvan de afgeleide gelijk is aan $\frac{1}{x^2+1}$, dan kan omgekeerd iedere gebroken rationale functie worden geïntegreerd. Dit is dus in de analyse reeds het geval zodra men maar het begrip logarithme heeft ingevoerd.

In de differentierekening kan men zich met analoge problemen bezig houden. Wij zullen ons allereerst afvragen van welke functie f(x) de differentie gelijk is aan $\frac{1}{x}$, dus wij trachten de differentievergelijking

$$\Delta f(x) = \frac{1}{x}$$

op te lossen. Reeds eerder zagen wij dat zo'n functie bepaald is op een additieve functie met periode 1 na. Wij hebben dus slechts 1 oplossing der gezochte vergelijking op te sporen, om daarna de volledige oplossing te kennen.

Beschouwen wij nu de Γ-functie , die voor $x > 0$ te definieren is door

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dx$$

en voor dergelijke x voldoet aan $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ en die men voor negatieve x ($\neq -1, -2, -3, \ldots$) met de laatste formule kan definieren, uitgaande van de bekende waarden voor positieve x, dan ziet men gemakkelijk in dat

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

waaruit volgt dat de functie $f(x) = D\,\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = D \log \Gamma(x)$ in de differentierekening de rol van $\log x$ in de differentiaalrekening overneemt.

Opg.19. Bepaal een oplossing der vergelijking

$$\underset{h}{\Delta} f(x) = \frac{1}{x}.$$

Wij merken verder nog op dat de functie

$$f(x) = \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)!}\, D^{n-1} \log \Gamma(x)$$

voldoet aan

$$\Delta f(x) = \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)!}\, D^{n-1} (\log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x))$$

$$= \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)!}\, D^{n-1} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n},$$

waarmee in principe bij iedere rationale functie u(x) alleen met behulp van gebroken rationale functies en de Γ-functie en haar afgeleiden een functie is aan te geven waarvan u(x) de differentie is.

Opg.20. Bepaal functies waarvan de differentie gelijk is aan

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $\frac{x+1}{x^3-3x+2}$

c) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

d) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Tenslotte leiden wij nog een aantal formules af over hogere differenties. Men bewijst gemakkelijk door volledige inductie naar het natuurlijke getal n dat

$$\underset{h}{\Delta}^{n}\, x^{(m;h)} = (mh)^{(n;h)}\ x^{(m-n;h)}$$

waarbij het in de eerste factor in het rechterlid de bedoeling is dat de machtsverheffingsoperator op de variabele m wordt toegepast. In het bijzonder heeft men

$$\Delta^{n}\, x^{(m)} = m^{(n)}\ x^{(m-n)} .$$

Opg.21. Bereken $\underset{h}{\Delta}^{n}\ a^{x}$.

Wij geven voorts een analogon van de formule van Leibnitz welke luidt

$$D^{n}\, uv = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (D^{h}u)(D^{N-n}v).$$

In de differentierekening heeft men

$$\underset{h}{\Delta}^{N}(uv) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (\underset{h}{\Delta}^{n}u)(E^{nh}\ \underset{h}{\Delta}^{N-n}v)^{h},$$

welke formule gemakkelijk door volledige inductie naar N af te leiden is. Men heeft dus in het bijzonder

$$\Delta^{2}(uv) = \Delta^{2}u\ E^{2}v + 2\,\Delta u . E\Delta v + u . \Delta^{2} v.$$

Opg.22. Leid voor $\Delta^{N}(u^{n})$ uit het voorgaande een formule af.

Opg.23. Bewijs

$$\delta^{N}(uv) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} E^{\frac{1}{2}(n-N)}\, \delta^{n}u .\ E^{\frac{1}{2}n}\, \delta^{N-n}v.$$

Wij bewijzen nu nog de formule

$$F(E^{h})a^{x} = a^{x}F(a^{h}),$$

waarbij F een veelterm met constante (d.i. van x onafhankelijke) coëfficiënten voorstelt. Inderdaad, stelt men

$$F(u) = \sum_{n=0}^{N} b_{n}u^{n} ,$$

dan geldt

$$F(E^{h})b^{x} = \sum_{n=0}^{N} b_{n}E^{nh}a^{x} = \sum_{n=0}^{N} b_{n}a^{x+nh} = a^{x} \sum_{n=0}^{N} b_{h}a^{nh} = a^{x}F(a^{h}).$$

Opg.24. Bewijs voor bovenstaand type veeltermen

$$F(E^{h})u(x) = a^{x}F(a^{h}E^{h})(a^{-x}u(x)),$$

dus in het bijzonder

$$\underset{h}{\Delta}u(x) = a^{x}\,(a^{h}\underset{h}{\Delta} + a^{h}-1)(a^{-x}u(x)).$$

Opg.25. Leid de met het vorige resultaat corresponderende formule uit de differentiaalrekening

$$Du(x) = e^{nx}\,(D+n)(e^{-nx}u(x))$$

af uit dat resultaat.

Opg.26. Bewijs voor veeltermen F van het bovenbeschouwde type de . relatie

$$F(\underset{h}{\Delta})u(x) = a^x F(a^h \underset{h}{\Delta} + a^h - 1)(a^{-x}u(x)).$$

en breng haar in verband met de corresponderende formule uit de differentiaalrekening.

Opg.27. Bewijs voor $a \neq 0$ de formule

$$\frac{1}{\underset{h}{\Delta}+1-a^{-h}}\ w(x) = a^{h-x}\ \frac{1}{\underset{h}{\Delta}}\ (w(x).a^x),$$

waarbij onder

$$\frac{1}{\underset{h}{\Delta}+k}\ w(x)$$ een oplossing $u(x)$ wordt verstaan van de

differentievergelijking $\underset{h}{\Delta}u(x)+ku(x) = w(x)$.

Opg.28.

$$\frac{1}{\Delta-b}\ w(x) = (b+1)^{x-1}\ \frac{1}{\Delta}\ (w(x).(b+1)^{-x})\quad (b\neq -1).$$

Opg.29. Bepaal met behulp van het bovenstaande een oplossing van de differentievergelijking

$$\Delta u(x)-bu(x) = 1.$$

§4. Bernoulliaansch intermezzo.

Voor het vervolg hebben wij gebruik te maken van veeltermen van Bernoulli, welke wij thans eerst gaan beschouwen.

De functie

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx}$$

is voor $|t| < 2\pi$ en gehele niet negatieve n in een convergente machtreeks in t te ontwikkelen waarvan de coëfficiënten afhangen van de hier als parameters op te vatten grootheden n en x. Wij schrijven

$$(1)\qquad \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h^{(n)}(x)t^h}{h!}\quad .$$

De uitdrukkingen $B_h^{(n)}(x)$ zijn, zoals men gemakkelijk inziet, veeltermen in x van de graad h.

Opg.1. Bewijs dit.

Deze veeltermen worden gegeneraliseerde veeltermen van Bernoulli genoemd. De (gewone) veeltermen van Bernoulli verkrijgt men in het geval $n = 1$; men duidt ze kortweg aan met $B_h(x)$ i.p.v. $B_h^{(1)}(x)$. De grootheden $B_h^{(n)}(0)$ geeft men kortweg aan met $B_h^{(n)}$ (dus $B_h(0)$ met B_h) ; zij worden gegeneraliseerde getallen van Bernoulli (resp. getallen van Bernoulli) genoemd.

Wij bewijzen thans een optellingstheorema voor de gegeneraliseerde veeltermen van Bernoulli. Men heeft allereerst

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{t(x+y)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h^{(n)}(x+y)}{h!} t^h ,$$

en verder ook

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{t(x+y)} = e^{ty}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k y^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^{(n)}(x)}{m!} t^m .$$

De coëfficiënt van t^h in het laatste product is gelijk aan

$$\sum_{\substack{k,m=0\\k+m=h}}^{h} \frac{y^k}{k!} \frac{B_m^{(n)}(x)}{m!} ,$$

anderzijds is deze gelijk aan $B_h^{(n)}(x+y)/h!$. Dus verkrijgt men

$$B_h^{(n)}(x+y) = \sum_{k=0}^{h} \frac{h!}{k!(h-k)!} y^k B_{h-k}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} y^k B_{h-k}^{(n)}(x)$$

dus

(2) $$B_h^{(n)}(x+y) \backsim \left(B^{(n)}(x)+y\right)^h ,$$

waarbij het blijkbaar de bedoeling is dat in de laatste symbolisch te interpreteren uitdrukking de gewone binomiale ontwikkeling volgens het theorema van Newton wordt genomen en daarna voor $(B^{(n)}(x))^q$ wo.. gelezen $B_q^{(n)}(x)$.

Uit dit optellingstheorema volgt in het bijzonder

(3) $$B_h^{(n)}(x) \backsim (B^{(n)}+x)^h ,$$

zodat de coëfficiënten in de (gegeneraliseerde)veeltermen van Bernoulli worden gevonden als producten van de (gegeneraliseerde)getallen van Bernoulli en binomiaalcoëfficiënten.

Verder vindt men uit

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx+t} - \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx} = t\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{n-1} e^{tx}$$

met (1) de relatie

$$B_h^{(n)}(x+1) - B_h^{(n)}(x) = h B_{h-1}^{(n-1)}(x)$$

dus

(4) $$\Delta B_h^{(n)}(x) = h B_{h-1}^{(n-1)}(x).$$

Opg.2. Leid hieruit af $B_h(1) = B_h(0)$.

Gebruikt men (3) met n = x = 1 dan vindt men in verband met het resultaat van opg.2

$$\sum_{z=0}^{h-1} \binom{h}{z} B_z = 0 ,$$

waarmede successievelijk $B_1, B_2 \ldots$ kunnen worden bepaald. Hiermee is met (3) voor n=1 ook de formule voor $B_h(x)$ gevonden.

Ook voor de afgeleide van $B_h^{(n)}(x)$ is gemakkelijk een resultaat te vinden. Men heeft nl.

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{d}{dx} B_h^{(n)}(x) \frac{t^h}{h!} = \frac{d}{dx} \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx}$$

$$= t\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx} = \sum_{h=0}^{\infty} B_h^{(n)}(x) \frac{t^{h+1}}{h!},$$

dus

(5) $$DB_h^{(n)}(x) = hB_{h-1}^{(n)}(x) \quad \text{en} \quad DB_h^{(n)}(x) = \Delta B_h^{(n+1)}(x).$$

Opg.3. Bewijs dit resultaat ook uit relatie (3).

Opg.4. $B_h^{(0)}(x) = x^h$.

Uit het resultaat van opg.4 en uit relatie (4) volgt

$$\Delta B_{h+1}(x) = (h+1)x^h,$$

dus

(5) $$\sum_{n=1}^{N} n^h = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta B_{h+1}(n)}{h+1} = \frac{B_{h+1}(N+1)-B_{h+1}}{h+1}.$$

Opg.5. Bewijs

$$\sum_{t=a}^{x} B_h^{(n)}(t) = \frac{B_{h+1}^{(n+1)}(x+1)-B_{h+1}^{(n+1)}(a)}{h+1} \qquad \text{(x en a geheel)}$$

en

$$\int_a^x B_h^{(n)}(t)dt = \frac{B_{h+1}^{(n)}(x)-B_{h+1}^{(n)}(a)}{h+1}.$$

Opg.6. Bewijs $\Delta^n B_h^{(n)}(x) = h(h-1)\dots(h-n+1)\, x^{h-n}$

Wij bewijzen nu de relatie

(6) $$B_h^{(n)}(n-x) = (-)^h B_h^{(n)}(x).$$

Men heeft

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h^{(n)}(n-x)}{h!} t^h = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{(n-x)t} = \left(\frac{-t}{e^{-t}-1}\right)^n e^{x(-t)} =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h^{(n)}(x)(-t)^h}{h!},$$

waaruit de gewenste relatie direct volgt.

In het bijzonder heeft men

$$B_h(1-x) = -B_h(x)\ ; \quad B_{2h}^{(n)}(n) = B_{2h}^{(n)}.$$

Opg.7. Bewijs $B_{2h+1}^{(n)}(\tfrac{1}{2}n) = 0$.

Differentieert men beide leden van (1) naar t dan krijgt men

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{B_h^{(n)}(x)t^{h-1}}{(h-1)!} = x\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n e^{tx} + ne^{tx}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{te^t}{(e^t-1)^2}\right)$$

$$= \frac{xt^n}{(e^t-1)^n}e^{tx} + \frac{n}{t}\frac{t^n}{(e^t-1)^n}e^{tx} - \frac{n}{t}\frac{t^{n+1}}{(e^t-1)^{n+1}}e^{tx} - n.e^{tx}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^n =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty}\left\{\frac{xB_h^{(n)}(x)}{h!} + \frac{n}{t}\frac{B_h^{(n)}(x)}{h!} - \frac{n}{t}\frac{B_h^{(n+1)}(x)}{h!} - n\frac{B_h^{(n)}(x)}{h!}\right\}t^h.$$

Dus

$$B_h^{(n)}(x) = (x-n)B_{h-1}^{(n)}(x) + \frac{n}{h}B_h^{(n)}(x) - \frac{n}{h}B_h^{(n+1)}(x)$$

waaruit tenslotte volgt

(7) $B_h^{(n+1)}(x) = \left(1-\frac{h}{n}\right)B_h^{(n)}(x) + h\left(\frac{x}{n}-1\right)B_{h-1}^{(n)}(x).$

Opg.8. Bewijs: $B_h^{(n+1)}(1) = \left(1-\frac{h}{n}\right)B_h^{(n)}$.

Hiermede zijn de veeltermen $B_h^{(n)}(x)$ te vinden uit de veeltermen met lagere bovenindex. Men heeft $B_h^{(0)}(x) = x^h$. Nadat, zoals hierboven werd aangegeven, de veeltermen $B_h(x)$ eenmaal bepaald zijn, kan men uit (7) de veeltermen $B_h^{(n)}(x)$ voor iedere natuurlijke n vinden. Met behulp der gegeneraliseerde veeltermen van Bernoulli kunnen wij opnieuw $x^{(n)}$ als veelterm in x schrijven en omgekeerd x^n als compositum van x, $x^{(2)}$,

Uit (7) volgt nl. voor h = n

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-n)B_{n-1}^{(n)}(x),$$

dus

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-n)(x-n+1)\dots(x-1)B_0^{(1)}(x) =$$
$$= (x-1)^{(n)}.$$

Dus

$$D^hx^{(n)} = D^hB_n^{(n+1)}(x+1) = n^{(h)}B_{n-h}^{(n+1)}(x+1)$$

en met gebruik der formule van Mac Laurin en het resultaat uit opgave 8

$$x^{(n)} = \sum_{h=0}^{n}\frac{x^h}{h!}\left(D^hx^{(n)}\right)_{x=0} = \sum_{h=0}^{n}\frac{x^h}{h!}n^{(h)}B_{n-h}^{(n+1)}(1) =$$

$$= \sum_{h=0}^{n}\frac{x^h}{h!}\frac{n!}{(n-h)!}\frac{h}{n}B_{n-h}^{(n)} = \sum_{h=0}^{n}\binom{n-1}{h-1}B_{n-h}^{(n)}x^h.$$

Om omgekeerd x^n uit te drukken in symbolische machten van x gaan wij uit van de formule

$$f(x) = \sum_{s=0}^{h}\frac{1}{s!}x^{(s)}\Delta^{(s)}f(0),$$

geldig voor veeltermen van een graad $\leq h$. Hoewel wij deze later uitvoeriger zullen beschouwen geven wij nu hier een korte afleiding. Wij weten dat zo'n veelterm f(x) te schrijven is in de gedaante

$$f(x)=\sum_{s=0}^{h} \frac{a_s}{s!} x^{(s)}$$

en vinden dan voor $j = 0,\ldots,h$

$$\Delta^j f(x) = \sum_{s=0}^{h} \frac{a_s}{s!} s(s-1)\ldots(s-j+1)x^{(s-j)},$$

$$= \sum_{s=j}^{h} \frac{a_s}{(s-j)!} x^{(s-j)} ,$$

dus $\Delta^j f(0) = a_j$,

waaruit de gewenste hulpformule volgt.

Vervolgens heeft men dan

$$x^h = B_h^{(0)} (x)= \sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} x^{(s)} \quad \Delta^{(s)} B_h^{(0)}(0) =$$

$$= \sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} x^{(s)} B_{h-s}^{(-s)} ,$$

waarmede de gezochte voorstelling van x^h is gevonden.
Wij zien dus

$$s_k^{(h)} =\binom{h-1}{k-1} B_{h-k}^{(h)} \ ; \quad \sigma_k^{(h)} = \frac{1}{k!} B_{h-k}^{(-k)} .$$

Om nog een verder later te gebruiken resultaat af te leiden gaan wij uit van de formule

$$(9) \qquad (1+t)^{x-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x-1)\ldots(x-h)}{h!} t^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} B_h^{(h+1)} (x).$$

Differentieert men dit resultaat n keer naar x, dan vindt men

$$(1+t)^{x-1} \log^n(1+t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} h(h-1)\ldots(h-n+1)B_{h-n}^{(h+1)} (x) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{h+n}}{h!} B_h^{(h+n+1)} (x).$$

Neemt men $x=1$ dan verkrijgt men, alweer (8) gebruikende,

$$(10) \qquad \left(\frac{\log(1+t)}{t}\right)^n = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} B_h^{(h+n+1)} (1)= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} \frac{t^n}{h+n} B_n^{(h+n)}.$$

Opg.9. Bewijs deze formule voor $n=1$ rechtstreeks.

Integreert men de beide leden van (9) van x naar $x+1$ dan vindt men

$$\frac{(1+t)^{x-1}t}{\log (1+t)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} \frac{1}{h+1} \left(B_{h+1}^{(h+1)}(x+1) - B_{h+1}^{(h+1)} (x)\right) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} B_h^{(h)}(x).$$

dus naar x integreren verkrijgt men

$$(11) \qquad \frac{(1+t)^{x-1}t^n}{\log^n(1+t)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} B_h^{(h-n+1)}(x),$$

en in het bijzonder

$$\frac{t^n}{(1+t)\log^n(1+t)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} B_h^{(h-n+1)} .$$

Het geval n=1 levert ons de voortbrengende functie der getallen $B_h^{(h)}$

$$\frac{t}{(1+t)\log(1+t)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} B_h^{(h)}.$$

Voor x=1 levert (11) in verband met (8)

$$\left(\frac{t}{\log(1+t)}\right)^n = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} B_h^{(h-n+1)}(1) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} \frac{n}{n-h} B_h^{(h-n)}$$

zodat (10) ook voor negatieve gehele n juist blijkt.

Wij geven tenslotte nog enige formules die gemakkelijk uit het voorgaande zijn af te leiden

$B_0^{(n)} = 1$; $B_1^{(n)} = -\frac{1}{2}n$; $B_2^{(n)} = \frac{1}{12}n(3n-1)$; $B_3^{(n)} = -\frac{1}{8}n^2(n-1)$;

$B_4^{(n)} = \frac{1}{240}n(15n^3-30n^2+5n+2)$; $B_5^{(n)} = -\frac{1}{96}n^2(n-1)(3n^2-7n-2)$;

$B_6^{(n)} = \frac{1}{4032}n(63n^5-315n^4+315n^3+91n^2-42n-16)$.

$B_0^{(0)} = 1$; $B_1^{(1)} = -\frac{1}{2}$; $B_2^{(2)} = \frac{5}{6}$; $B_3^{(3)} = \frac{-9}{4}$; $B_4^{(4)} = \frac{251}{30}$; $B_5^{(5)} = -\frac{475}{12}$;

$B_6^{(6)} = \frac{19087}{84}$; $B_7^{(7)} = -\frac{36799}{24}$; $B_8^{(8)} = \frac{1070017}{90}$; $B_9^{(9)} = -\frac{2082753}{20}$;

$B_{10}^{(10)} = \frac{134211265}{132}$.

$B_0(x) = 1$; $B_1(x) = x-\frac{1}{2}$; $B_2(x) = x^2-x+\frac{1}{6}$; $B_3(x) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})$;

$B_4(x) = x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$; $B_5(x) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})(x^2-x-\frac{1}{3})$;

$B_6(x) = x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$.

In verband met enige later te gebruiken resultaten besteden wij nog wat extra aandacht aan de veeltermen $B_h(x)$. Uit (1) volgt gemakkelijk

$$(12) \qquad \frac{t}{2} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h t^h}{h!} = \tfrac{1}{2}t \, \frac{e^t+1}{e^t-1} .$$

Daar het rechterlid een even functie van t is, geldt dus

$$(13) \qquad B_1 = -\tfrac{1}{2} \; ; \; B_{2k+1} = 0 \; (k=1,2,\ldots) .$$

Verder vinden wij door $t = 2iu$ te stellen

$$(14) \qquad \cot u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k B_{2k} 2^{2k}}{(2k)!} u^{2k-1} .$$

Opg.10. Bewijs hieruit

$$\mathrm{tg}\, u = \sum_{k=0}^{\infty} (-)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} u^{2k-1} .$$

Uit het resultaat

$$\pi z \cot \pi z = 1 + 2z^2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-h^2} = 1-2 \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{h^{2n}}$$

volgt dan

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{2n}} = \frac{(-)^{n-1}(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!} ,$$

waaruit onder meer blijkt dat $(-)^n B_{2n} < 0$ is voor $n=1,2,\ldots$
Uit formule (6) volgt

$$B_h(1-x) = (-)^h B_h(x) .$$

Bijgevolg bezit voor $k=1,2,\ldots$ de functie $B_{2k}(x)-B_{2k}$ nulpunten in $x=0$ en $x=1$ terwijl voorts geldt $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$ en $B_{2k+1}(1) = -B_{2k+1} = 0$. De functie $B_{2k+1}(x)$ heeft dus de nulpunten 0, $\frac{1}{2}$ en 1 en de functie $B_{2k}(x)-B_{2k}$ de nulpunten 0 en 1. We laten zien dat dit hun enige nulpunten zijn in het segment (0,1). Stel de bewering is bewezen voor zekere k. Had nu $B_{2k+2}(x)-B_{2k}$ nog een nulpunt $\neq \frac{1}{2}$ in (0,1) dan had de afgeleide dezer functie, dat is $(2k+2) B_{2k+1}(x)$ volgens het theorema van Rolle nog een nulpunt in één der intervallen $(0,\frac{1}{2})$ of $(\frac{1}{2},1)$ in strijd met de inductieonderstelling. Had voorts $B_{2k+3}(x)$ nog een van 0, $\frac{1}{2}$ en 1 verschillend nulpunt (0,1) dus in $(0,\frac{1}{2})$, dan had de eerste afgeleide $(2k+3) B_{2k+2}(x)$ er alweer volgens het theorema van Rolle, tenminste twee in $(0, \frac{1}{2})$ en de tweede afgeleide $(2k+3)(2k+2) B_{2k+1}(x)$ er ten minste één in $(0,\frac{1}{2})$ in strijd met de inductieonderstelling.

§ 5. De sommatieformule van Euler Mac Laurin.

In het vervolg zal het voor ons nodig zijn om uitdrukkingen van de gedaante

$$F(N) = \sum_{n=0}^{N} f(n) \text{ en } G(N) = \int_a^N f(x)dx$$

met elkaar te vergelijken en hun verschil uit te drukken in $f(N), f'(N), f''(N), \ldots$ Symbolisch geschreven heeft men $f = \Delta F = DG$, dwz. wij trachten $F = \frac{1}{\Delta} f = \frac{1}{e^D-1} f$ uit te drukken in $G = \frac{1}{D} f, f, Df, D^2f, \ldots$

Wij zoeken dus een relatie van het type

$$\frac{1}{e^D-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n D^n .$$

Kennelijk voldoen hieraan de getallen $c_n = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}$, zodat wij dus pogen F(N) te schrijven in de gedaante

$$\int_a^N f(x)\,dx + B_1 f(N) + \frac{B_2}{2!} f''(N) + \dots$$

Uit deze heuristische methode blijkt nog niets aangaande convergentie van de hier neergeschreven oneindige reeks. Om hierover- d.w.z. over de restterm die ontstaat als men die reeks ergens afbreekt- meer te weten te komen, zetten wij de berekening iets anders op.

Wij gaan uit van de integraal

$$I_h = \int_0^1 \frac{B_h(x)}{h!} f^{(h)}(x)\,dx,$$

welke bij partiële integratie met gebruik making van de formules (5), (6) en (13) uit de vorige paragraaf overgaat in de gedaante

$$I_h = \left.\frac{B_h(x) f^{(h-1)}(x)}{h!}\right|_0^1 - I_{h-1} =$$

$$\begin{cases} = B_h \dfrac{\Delta f^{(h-1)}(0)}{h!} & \text{voor even } h \\ = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) & \text{in het geval } h=1 \\ = 0 & \text{als } h \text{ oneven en} \neq 1 \text{ is.} \end{cases}$$

Bijgevolg heeft men

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = I_0 = \tfrac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \frac{B_2}{2!}\Delta f'(0) - \frac{B_4}{4!}\Delta f'''(0) \\ \displaystyle\dots - \frac{B_{2m}}{(2m)!}\Delta f^{(2m-1)}(0) + \int_0^1 \frac{B_{2m}(x)}{(2m)!} f^{(2m)}(x)\,dx. \end{cases}$$

en na verschuiving

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f(n)+f(n+1)) - \frac{B_2}{2!}\Delta f'(n) - \frac{B_4}{4!}\Delta f'''(n) - \dots$$
$$- \frac{B_{2m}}{(2m)!}\Delta f^{(2m-1)}(n) + \int_n^{n+1} \frac{B_{2m}(x-[x]) f^{(2m)}(x)}{(2m)!}\,dx.$$

Na sommatie over n vindt men dan voor gehele a en b met $a < b$

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{h=a}^{b}{}' f(h) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) \\ \displaystyle + \int_a^b \frac{B_{2m}(x-[x]) f^{(2m)}(x)}{(2m)!}\,dx. \end{cases}$$

Hierin betekent het teken Σ' dat men in de som de eerste en laatste term slechts half te rekenen heeft.

Ook voor niet gehele a en b is een analoog resultaat te vinden, zoals blijkt uit de volgende

Opg. 1. Bewijs voor b = a+Nh (N geheel, positief)

$$\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N}{}' f(a+nh) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k-1}\{f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\} + R_{2m} \quad (3)$$

waarin

$$R_{2m} = h^{2m}\int_a^b \frac{B_{2m}\left(\frac{x-a}{h}-\left[\frac{x-a}{h}\right]\right)f^{(2m)}(x)}{(2m)!}\,dx.$$

Wij merken nog op dat men in (1) door nog eenmaal partiëel te integreren de laatste integraal ook mag vervangen door

$$-\int_0^1 \frac{B_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)}{(2m+1)!}\,dx.$$

Een analoge wijziging kan hierdoor nog in de formules (2) en (3) worden aangebracht.

In het bovenstaande is inderdaad een verband van het gewenste type gelegd tussen som en integraal.

Wij passen het gevondene eens toe op de functie $f(x) = x^r$ voor $r > 0$. Neemt men in (1) het getal m zodat $2m \leq r < 2m+2$ dan krijgt men

$$\frac{1}{r+1} = \tfrac{1}{2} - \frac{B_2}{2!}r - \frac{B_4}{4!}r^{(3)} - \dots - \frac{B_{2m}}{(2m)!}r^{(2m-1)} + r^{(2m)}\int_0^1 \frac{B_{2m}(x)x^{r-2m}}{(2m)!}\,dx$$

Opg. 2. Gan na hoe dit resultaat luidt voor r = 0.

Is r = 2m, dan is de laatste integraal nul, want zij is dan te schrijven in de gedaante

$$\int_0^1 \frac{B_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx = \frac{B_{2m+1}(1)-B_{2m+1}(0)}{(2m+1)!} = 0 \quad ;$$

is r = 2m+1 dan gaat zij na partiële integratie over in

$$-(r-2m)\int_0^1 \frac{B_{2m+1}(x)\,dx}{(2m+1)!} = -\frac{B_{2m+2}(1)-B_{2m+2}(0)}{(2m+2)!} = 0.$$

Voor willekeurige gehele r vinden wij derhalve

$$\frac{1}{r+1} = \tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{[\frac{r}{2}]} \frac{B_{2k}}{(2k)!}r^{(2k-1)} = \tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{[\frac{r}{2}]} \binom{r}{2k}\frac{B_{2k}}{r+1} .$$

Opg. 3. Ga na dat dit resultaat vroeger al eerder werd gevonden.

Opg. 4. Pas formule (1) toe op de functie $f(x) = B_r(x)$.

Met behulp van de middelwaardestelling uit de integraalrekening kan men de integraal in het rechterlid van (1) nog anders schrijven.

Men heeft n.l. (door de formule (1) met m+1 inplaats van m te nemen)

$$R_{2m} = -\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\,\Delta f^{(2m+1)}(0)+\int_0^1 \frac{B_{2m+2}(x)}{(2m+2)!}\,f^{(2m+2)}(x)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{B_{2m+2}(x)-B_{2m+2}}{(2m+2)!}\,f^{(2m+2)}(x)dx.$$

Nu weten wij uit het in de vorige paragraaf behandelde dat de teller $B_{2m+2}(x)-B_{2m+2}$ tekenvast is in het interval $(0,1)$. Volgens de eerste middelwaardestelling uit de integraalrekening bestaat er dan een getal ϑ met $0 < \vartheta < 1$, zodanig dat

$$R_{2m} = f^{(2m+2)}(\vartheta).\int_0^1 \frac{B_{2m+2}(x)-B_{2m+2}}{(2m+2)!}\,dx$$

$$= f^{(2m+2)}(\vartheta).\quad \frac{B_{2m+3}(1)-B_{2m+3}(0)}{(2m+3)!} - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}$$

$$= -\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\,f^{(2m+2)}(\vartheta).$$

Wij vinden dan

$$(4)\quad \int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2}(f(0)+f(1))-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\,\Delta f^{(2k-1)}(0)-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\vartheta)$$

waarbij ϑ een geschikt gekozen getal tussen 0 en 1 aangeeft. Hieruit vindt men onmiddellijk

$$\int_0^N f(x)dx = \sum_{n=0}^{N}{}' f(n) - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(N)-f^{(2k-1)}(0)\right)$$
$$-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\sum_{n=0}^{N-1} f^{(2m+2)}(\vartheta_n),$$

waarin ϑ_n een geschikt gekozen getal voorstelt in het interval $(n,n+1)$. Omdat de functie $f^{(2m+2)}(x)$ continu is in $(0,N)$ bezit zij er een minimum A en een maximum B. De laatste som ligt dus tussen NA en NB. Er is alweer volgens de continuïteit van $Nf^{(2m+2)}(x)$ een punt ξ in $(0,1)$ te vinden zodanig dat die som juist gelijk is aan $Nf^{(2m+2)}(\xi)$. We vinden dus

$$(5)\int_0^N f(x)dx= \sum_{n=0}^{N}{}' f(n)-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{2k-1)}(N)-f^{(2k-1)}(0)\right)-\frac{B_{2m+2}N}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi),$$

waarbij ξ een geschikt gekozen punt voorstelt van het interval $(0,N)$. Tenslotte kunnen wij nu voor $a < b$ en $b-a=Nh$ nog de som $\int_a^b f(x)dx$ op een analoge wijze schrijven. Stelt men $x = a+uh$ en $f(x) = g(u)$ dan vindt men

$$\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx = \int_0^N g(u)du= \sum_{n=0}^{N}{}' g(n)-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(g^{2k-1)}(N)-g^{(2k-1)}(0)\right)$$
$$-\frac{B_{2m+2}N}{(2m+2)!}\,g^{(2m+2)}(\lambda),$$

waarin λ een passend gekozen getal is tussen 0 en N. Dus geldt

$$(6)\ \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N}{}' f(a+nh) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}h^{2k-1}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right) - \frac{B_{2m+2}Nh^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi),$$

waarin ξ een passend gekozen getal aangeeft tussen a en b.
Toepassing: $f(x) = x^{-s}$. Men vindt uit (2) met a = 1 en b = N

$$\frac{1-N^{1-s}}{s-1} = \sum_{n=1}^{N} n^{-s} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}N^{-s} - \sum_{k=1}^{m} B_{2k}\frac{s(s+1)\ldots(s+2k-2)}{(2k)!}\left(1-\frac{1}{N^{s+2k-1}}\right) + \frac{1}{(2m+2)!}\int_1^N \frac{B_{2m}(x-[x])\,s(s+1)\ldots(s+2m-1)}{(2m)!\quad x^{s+2m}}\,dx$$

In het bijzonder vindt men voor $N \to \infty$ (aannemende dat $s > 1$ is)

$$\frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \tfrac{1}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k}\binom{s+2k-2}{2k-1} + \binom{s+2m-1}{2m}\int_1^{\infty}\frac{B_{2m}(x-[x])}{x^{s+2m}}\,dx.$$

Opg.5. Ga het geval s = 1 apart na.
Opg.6. Bereken met het bovenstaande de som $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ in 3 decimalen nauwkeurig door in formule (2) voor $f(x) = \frac{1}{x^2}$ te nemen a=2, b= ∞ en m = 2.

Wij nemen tenslotte nog $f(z) = \log \Gamma(z+t)$. Dan is

$$\int_0^1 \log \Gamma(z+t)\,dt = \int_z^{z+1} \log \Gamma(t)\,dt.$$

Van de laatste functie is de afgeleide gelijk aan

$$\log \Gamma(z+1) - \log\Gamma(z) = \log z$$

dus is die functie afgezien van een nader te bepalen integratieconstante C gelijk aan

$$\int_1^z \log t\,dt = z \log z - z.$$

Deze integratieconstante kan worden bepaald door gebruikmaking van de verdubbelingsformule der Γ-functie

$$\Gamma(2u) = \Gamma(u)\,\Gamma(u+\tfrac{1}{2})\,2^{2u-1}\,\pi^{-\frac{1}{2}},$$

waarna men vindt $C = \frac{1}{2}\log 2\pi$.
Toepassing van formule (1) geeft ons voor $|\arg z| \leq A < \frac{\pi}{2}$ wegens

$$\Delta f^{(2k-1)}(0) = \Delta D^{2k-1}\log\Gamma(z+t)_{t=0} = D^{2k-1}\log(z+t)_{t=0} -$$

$$= \frac{(-)^{2k-1}}{z^{2k-1}} \quad (2k-2)!$$

het resultaat

$$z \log z - z + \tfrac{1}{2} \log 2\pi = \tfrac{1}{2} \log \Gamma(z) + \tfrac{1}{2} \log \Gamma(z+1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} - R_m ,$$

dus

$$(7) \quad \log \Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2}) \log z - z + \tfrac{1}{2} \log 2\pi - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + R_m ,$$

waarin

$$R_m = \int_0^1 \frac{B_{2m}(t)(\log \Gamma(t+z))^{(2m)}}{(2m)!} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{B_{2m}(t)}{(2m)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!}{(t+z+n)^{2m}} \, dt$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{B_{2m}(t-[t])}{(t+z)^{2m}} \, dt ,$$

dus

$$|R_m| \leq \frac{1}{2m} |B_{2m}| \int_0^{\infty} \frac{dt}{|t+z|^{2m}}$$

$$= \frac{1}{2m} |B_{2m}| \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{\{(t+x)^2+y^2\}^m} < \frac{1}{2m} |B_{2m}| \int_0^{\infty} \frac{t+x}{x} \frac{dt}{((t+x)^2+y^2)^m}$$

$$= \frac{1}{2m(2m-2)} |B_{2m}| \frac{1}{x} \left. \frac{-1}{\{(t+x)^2+y^2\}^{m-1}} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2m(2m-2)} |B_{2m}| \frac{1}{x(x^2+y^2)^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{2m(2m-2)} |B_{2m}| \frac{1}{\cos A \; |z|^{2m-1}}$$

Voor het geval $\cos A = 0$, d.w.z. $z > 0$ vinden wij uit (4) direct

$$R_m = \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\vartheta) = \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^{2m+2}(2m+1)!}{(n+x)^{2m+2}} ,$$

dus $(-)^m R_m < 0$ en $\frac{R_{m+1}}{R_m} < 0$, zodat de eerst weggelaten term in de reeks in het rechterlid van (7) met x in plaats van z van de gedaante ϑR is, waarbij ϑ een passend gekozen getal is tussen 0 en 1 gelegen. Bijgevolg heeft men

$$\log \Gamma(x) = (x-\tfrac{1}{2}) \log x - x + \tfrac{1}{2} \log 2\pi - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}} -$$

$$- \vartheta \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)x^{2m+1}} ,$$

(verg. de cursus functietheorie Eindhoven 1953/54, blz. 108-111).
Wij vinden dus in het bijzonder

$$\log n! = (n+\tfrac{1}{2}) \log (n+1)-n-1+\tfrac{1}{2} \log 2\pi - \frac{\vartheta B_2}{2n}$$

dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 \qquad \text{(Stirling)}$$

en

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\; e^{\frac{\vartheta_1}{12n}},$$

waarin ook ϑ_1 een geschikt gekozen getal tussen 0 en 1 aangeeft.

In verband met verdere toepassingen geven wij een nog iets "verschoven" formule van Euler-MacLaurin. Daarbij beschouwen we de integraal

$$J_k = \int_0^1 \frac{P_k(\vartheta-t)}{k!} f^{(k)}(t)dt$$

waarbij $0<\vartheta<1$ en $P_k(u)=B_k(u)$ voor $0<u<1$ en $P_m(u)=P_m(v)$ als $u\equiv v \pmod 1$. De functie $P_k(u)$ is dan continu aan te vullen voor gehele u behalve in het geval $k=1$. Dan heeft men nl.

$$\lim_{x\uparrow 1} P_1(x) = \lim_{x\downarrow 0} P_1(x)+1.$$

Kennelijk geldt weer $DP_k(u) = kP_{k-1}(u)$ voor $k=2,3,\ldots$ en dit resultaat geldt ook voor $k=1$ mits u niet geheel is.

Wij vonden nu na partiële integratie voor $k=2,3,\ldots$

$$J_k = \frac{P_k(\vartheta-t)}{k!} f^{(k-1)}(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{P_k(\vartheta-t)}{(k-1)!} f^{(k-1)}(t)dt = \frac{B_k(\vartheta)\Delta f^{(k-1)}(0)}{k!} + J_{k-1},$$

terwijl het geval $k=1$ ons leert dat

$$J_1 = \int_0^1 P_1(\vartheta-t)f'(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^{\vartheta-\varepsilon} + \int_{\vartheta+\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{ P_1(\vartheta-t)f(t)\Big|_0^{\vartheta-\varepsilon} + P_1(\vartheta-t)f(t)\Big|_{\vartheta+\varepsilon}^1 + \int_0^{\vartheta-\varepsilon} P_0(\vartheta-t)f(t)dt + \int_{\vartheta+\varepsilon}^1 P_0(\vartheta-t)f(t)dt\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{ f(\vartheta-\varepsilon)P_1(\varepsilon) - f(\vartheta+\varepsilon)P_1(-\varepsilon)\right\} + P_1(\vartheta)\Delta f(0) + \int_0^1 f(t)\,dt =$$

$$= -f(\vartheta) + P_1(\vartheta)\Delta f(0) + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Bij gevolg heeft men

$$(8) \qquad f(\vartheta) = \int_0^1 f(t)dt + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k(\vartheta)\Delta f^{(k-1)}(0)}{k!} - \int_0^1 \frac{P_m(\vartheta-t)}{m!} f^{(m)}(t)dt.$$

Voor $\vartheta \to 0$ vindt men hieruit het eerder gevonden resultaat

$$(9) \qquad f(0) = \int_0^1 f(t)dt + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k\Delta f^{(k-1)}(0)}{k!} - \int_0^1 \frac{P_m(-t)}{m!} f^{(m)}(t)dt.$$

§ 6. Sommen.

De differentievergelijking

(1) $$\underset{h}{\Delta}\, u(x) = f(x),$$

bezit, zoals bekend is, oneindig veel oplossingen, welke uit een particuliere oplossing $u_0(x)$ ontstaan door hierbij een willekeurige periodieke functie met periode h op te tellen. Al deze oplossingen behoeven, functietheoretisch gesproken, niet van eenzelfde type te zijn. In het geval dat f(x) een polynoom is, is er onder alle oplossingen van de differentievergelijking juist één, afgezien van een additieve constante, die zelf weer een polynoom is, alle overige oplossingen zijn transcendente functies (immers het verschil van twee oplossingen is periodiek en is dus geen polynoom, tenzij het constant is). Men kan zich de vraag stellen of er een procédé aan te geven is, dat ons juist de polynoomoplossing der vergelijking oplevert.

Van dat eventuele procédé verwachten wij nog meer. Het is duidelijk dat men een oplossing $u_0(x)$ van de vergelijking willekeurig kan voorschrijven voor alle x die voldoen aan $x_0 \leqq x < x_0 + h$. Dan is door de vergelijking die oplossing bepaald voor alle reële x. Het is nu echter geenszins gezegd, dat die oplossing in de punten $x_0 + nh$ (n geheel) continu is, ook niet als ze continu is in $x_0 \leqq x < x_0 + h$. Uiteraard vraagt men zich af of die functie $u_0(x)$ zo gekozen kan worden dat de functie in alle punten $x_0 + nh$ (n geheel) continu is, of zelfs bv. differentieerbaar of analytisch is. Graag zagen wij dat het gewenste procédé ons automatisch zulke oplossingen gaf en niet die met (de) discontinuïteiten.

Nörlund heeft ons inderdaad een dergelijk procédé gegeven, waarmee men oplossingen vindt die zich functietheoretisch gesproken onderscheiden van de andere; de oplossingen die men ermee vindt noemen wij hoofdoplossingen.

Om dit procédé uiteen te zetten gaan wij uit van de oorspronkelijke vergelijking, welke wij schrijven in de gedaante

$$(E^h - 1)\, u(x) = f(x);$$

de oplossing schrijven wij dan in de gedaante

$$u(x) = \frac{1}{E^h - 1}\, f(x),$$

hetgeen men soms als volgt kan herleiden

$$u(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} E^{nh} f(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} f(x+nh) \quad .$$

Het kan echter zeer goed geschieden dat deze reeks niet convergeert, zodat dan dit procédé niet werkt. Nu kan men uiteraard aan onze u(x) nog een integratieconstante toevoegen. Kiest men hiervoor $h^{-1}\int_c^\infty f(t)dt$, dan vindt men de oplossing

$$u(x)= h^{-1}\int_c^\infty f(t)dt - \sum_{n=0}^\infty f(x+nh).$$

Het is niet ondenkbaar dat noch de integraal, noch de som convergeert, maar wel de uitdrukking

$$\lim_{N\to\infty}\left\{h^{-1}\int_c^{N_1} f(t)dt - \sum_{n=0}^{N} f(x+nh)\right\},$$

waarbij N_1 een geschikt gekozen functie van N is die met N naar oneindig gaat. In dit geval hebben wij dan al iets gewonnen. Dit treedt bv. op in het geval $f(x) = \frac{1}{x}$. Dan heeft men nl. (bij geschikt gekozen ϑ tussen 0 en 1) met $N = N_1 -1$

$$h^{-1}\int_n^{n+1} f(t)dt - f(x+nh) = h^{-1}\log(1+\tfrac{1}{n}) - \frac{1}{x+nh}$$

$$= \frac{1}{nh} - \frac{\vartheta}{2n^2h} - \frac{1}{x+nh} = \frac{x}{nh(x+nh)} - \frac{\vartheta}{2n^2h} = O(\tfrac{1}{n^2}),$$

dus de gezochte limiet bestaat inderdaad.

Opg.1. Ga het geval f(x)=K(K constant) na. Men vindt als limiet $\frac{x-h}{c} - \frac{1}{2}$

Er zijn echter gemakkelijk gevallen aan te geven, waarin ook nu nog geen (convergente) oplossing u(x) wordt gevonden, bv. in het geval f(x) = x. Weliswaar kennen wij dan op grond van het vroeger gevondene de algemene oplossing $\frac{1}{2}x^{(2;h)} + \omega(x)$, waarbij $\omega(x)$ een willekeurige functie is met periode h, maar het bovenstaande procédé levert ons geen convergente uitdrukking voor de hoofdoplossing $\frac{1}{2}x(x-h)$ op. Na echter nog een kleine wijziging in bovenstaand procédé van Nörlund te hebben aangebracht, verkrijgen wij wél een bruikbare methode om de hoofdoplossing voor dit (en een ruime klasse van andere) geval(len) af te leiden.

Wij voeren hiertoe een functie $f(x,\lambda)$ in die de eigenschap heeft dat uniform in x geldt

(2) $$\lim_{\lambda\to 0} f(x,\lambda) = f(x)$$

en behandelen de differentievergelijking

$$\Delta v(x) = f(x,\lambda)$$

volgens het zoeven gegeven procédé. Daarna nemen wij de limiet van de hierbij verkregen oplossing v(x) voor $\lambda\to 0$; als deze limiet bestaat, voldoet deze kennelijk aan de oorspronkelijke differentievergelijking (1). In formule, wij bepalen

$$u(x) = \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \frac{1}{h} \int_c^{\infty} f(t,\lambda)dt - \sum_{n=0}^{\infty} f(x+nh,\lambda) \right\}.$$

In aansluiting aan de integraalrekening schrijven wij hiervoor ook wel

$$u(x) = \underset{c}{\overset{x}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t.$$

Voorbeeld. Beschouw de differentievergelijking

$$\underset{h}{\Delta} u(x) = x .$$

Wij hebben dan, indien men $f(x,\lambda) = xe^{-\lambda x}$ stelt,

$$u(x) = \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \frac{1}{h} \int_c^{\infty} te^{-\lambda t}dt - \sum_{n=0}^{\infty} (x+nh)e^{-\lambda(x+nh)} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \frac{1}{h} e^{-t\lambda} \left(- \frac{t}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\right) \Big|_c^{\infty} - \frac{(x-h)e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda h}} - h.\frac{e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda h})^2} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \frac{1}{h} e^{-c\lambda} \left(\frac{c}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{(x-h)e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda h}} - h \frac{e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda h})^2} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x h + \frac{1}{12} h^2 - \frac{1}{2} c^2}{h}$$

$$= \frac{1}{2} h B_2\left(\frac{x}{h}\right) - \frac{c^2}{2h} .$$

Opg.2. Bewijs $\underset{c}{\overset{x}{S}} e^{-t} \underset{h}{\Delta} t = \frac{e-c}{h} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-h}}$.

Thans gaan wij bewijzen dat de som $\underset{c}{\overset{x}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t$ bestaat voor functies $f(x)$, waarvoor een natuurlijk getal m te vinden is zodanig dat geldt:

I. Voor $x \geqq c$ bestaat $D^m f(x)$ en is continu;

II. de som $\sum_{r=0}^{\infty} D^m f(x+nh)$

convergeert uniform in het interval $c \leqq x \leqq c+h$.

Uit II volgt onmiddellijk dat

III. $\lim_{x \to \infty} D^m f(x) = 0.$

Hieruit laat zich voor ieder geheel getal k met $0 \leqq k \leqq m$ concluderen dat

IV. $$\lim_{x \to \infty} \frac{D^{m-k}f(x)}{x^k} = 0.$$

Immers voor $k = 0$ is de bewering juist. Laat zij juist zijn voor zekere $k \geqq 0$ en $< m$. Dan bestaat er bij gegeven positieve ε een getal x_0 zodanig dat

$$\left| \frac{D^{m-k}f(x)}{x^k} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{als } x \geqq x_0.$$

Bij gevolg heeft men voor $x > x_0$

$$\left| D^{m-k-1} f(x) - D^{m-k-1} f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} D^{m-k} f(u)du \right| < \frac{\varepsilon}{2} (x^{k+1} - x_0^{k+1})$$

dus

$$\left| \frac{D^{m-k-1}f(x)}{x^{k+1}} \right| \leqq \left| \frac{D^{m-k-1}f(x_0)}{x^{k+1}} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{k+1}\right) < \varepsilon$$

als x voldoende groot wordt gekozen.

Verder merken wij op dat II ook juist is voor $c \leqq x \leqq b$, waarbij b een willekeurig getal $> c$ voorstelt. Immers is $\left[\frac{x-c}{h}\right] = s$, dus $x = sh + y$ met $c \leqq y < c + h$, dan geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+nh) = \sum_{r=0}^{\infty} D^m f(y+(s+n)h)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(y+nh) - \sum_{n=0}^{s-1} D^m f(y+nh)$$

waarbij de eerste som op grond van II en van $c \leqq y < c + h$ uniform convergeert en de tweede eindige som die uniforme convergentie niet kan verstoren.

Tenslotte leiden wij nog uit II met b+h in plaats van c+h af dat de integraal

V. $\int_0^{\infty} P_m(-t)\, f^{(m)}(x+ht)dt$ gelijkmatig bestaat voor $c \leqq x \leqq b$.

Immers men heeft

$$\int_n^{n+p} P_m(-t)\, f^{(m)}(x+ht)dt = \sum_{s=n}^{n+p-1} \int_s^{s+1} P_m(-t)\, f^{(m)}(x+ht)dt$$

$$= \sum_{s=n}^{n+p-1} \int_0^1 P_m(-t)\, f^{(m)}(x+hs+ht)dt = \int_0^1 P_m(-t) \sum_{s=n}^{n+p-1} f^{(m)}(x+hs+ht)$$

en als n voldoende groot is, is voor iedere $p > 1$ de laatste som willekeurig klein, zodat dit op grond van de begrensdheid van $P_m(-t)$ ook het geval is met de laatste integraal, dus met de oorspronkelijke integraal.

Als een voorbeeld van functies waarvoor de voorwaarden I en II vervuld zijn noemen wij de verzameling der functies f(x) waarvoor de m^e afgeleide bestaat en voldoet aan

$$\lim_{x\to\infty} x^{1+\varepsilon} f^{(m)}(x) = 0 .$$

Opg.3. Bewijs dit.

Thans gaan wij de sommatieformule (8) van Euler-MacLaurin uit de vorige paragraaph gebruiken om aan te tonen dat bij de keuze

$$f(x,\lambda) = f(x)e^{-\lambda x}$$

voor een functie f(x), die aan I en II voldoet, de uitdrukking

$$\mathop{S}_{c}^{x} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t$$

bestaat. Tevens vinden wij dan nog een andere voorstelling voor die uitdrukking.

Wij passen die formule voor $x \geq c$ toe met $f(x+hs+ht)e^{-\lambda(x+hs+ht)}$ in plaats van f(t); hierbij stelt s een geheel getal ≥ 0 voor. Door differentiaties naar t om te zetten in differentiaties naar x, welke wij hier verder met D zullen aanduiden, vinden wij

$$(3) \qquad f(x+h\vartheta+hs)e^{-\lambda(x+h\vartheta+hs)} = \int_0^1 f(x+hs+ht)e^{-\lambda(x+hs+ht)}dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k(\vartheta) \mathop{\Delta}_{s} D^{k-1}\left\{f(x+hs)e^{-\lambda(x+hs)}\right\} - \frac{h^m}{m!} I_m,$$

waarin

$$I_m = \int_0^1 P_m(\vartheta-t)D^m\left\{f(x+hs+ht)e^{-\lambda(x+hs+ht)}\right\} dt.$$

De hierbij optredende integralen bestaan omdat f(x) voor $x \geq c$ volgens I zeker m keer continu differentieerbaar is.

De eerste integraal in het rechterlid van (3) is te schrijven in de gedaante

$$\frac{1}{h} \int_{x+hs}^{x+h(s+1)} f(u)\, e^{-\lambda u}\, du,$$

terwijl

$$I_m = \int_s^{s+1} P_m(\vartheta-t)\, D^m\left\{f(x+ht)e^{-\lambda(x+ht)}\right\} dt .$$

Neemt men nu in (3) achtereenvolgens $s = 0,1,\dots,n-1$ en telt men de zo verkregen resultaten op, dan vindt men

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+hn} f(u)e^{-\lambda u}du - \sum_{s=0}^{n-1} f(x+h\vartheta+hs)e^{-\lambda(x+h\vartheta+hs)} = -S + \frac{h^m}{m!}\mathfrak{J}_m,$$

waarin

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k(\vartheta) D^{k-1}\left\{f(x+nh-h)e^{-\lambda(x+nh-h)} - f(x)e^{-\lambda x}\right\}$$

en

$$J_m = \int_0^n P_m(\vartheta-t) D^m\left\{f(x+ht)e^{-\lambda(x+ht)}\right\}dt.$$

Gaat men hierin over tot de limiet $n \to \infty$ dan vindt men allereerst

$$\lim_{n\to\infty} S = -\sum_{k=1}^{m} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k(\vartheta) D^{k-1}\left\{f(x)\, e^{-\lambda x}\right\},$$

want op grond van IV heeft men

$$\lim_{n\to\infty} D^{k-1}\left\{f(x+nh-h)e^{-\lambda(x+nh-h)}\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j}(-\lambda)^j e^{-\lambda(x+nh-h)} D^{k-j} f(x+nh-h)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j}(-\lambda)^j e^{-\lambda(x+nh-h)}(x+nh-h)^j \frac{D^{k-j}f(x+nh-h)}{(x+nh-h)^j} = 0.$$

Voorts vindt men

$$\lim_{n\to\infty} J_m = \int_0^\infty P_m(\vartheta-t)\, D^m\left\{f(x+ht)\, e^{-\lambda(x+ht)}\right\} dt,$$

omdat

$$\int_n^{n+p} P_m(\vartheta-t) D^m\left\{f(x+ht)e^{-\lambda(x+ht)}\right\}dt$$

$$= \sum_{s=0}^{p-1} \int_0^1 P_m(\vartheta-t) D^m\left\{f(x+hn+ht+hs)e^{-\lambda(x+hn+ht+hs)}\right\}dt$$

$$= \sum_{s=0}^{p-1} \int_0^1 P_m(\vartheta-t) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}(-\lambda)^j e^{-\lambda(x+hn+ht+hs)} D^{m-j} f(x+hn+ht+hs)\,dt$$

en op grond alweer van IV is deze dubbelsom voor voldoende grote n en elke positieve p willekeurig klein.

Wij vinden derhalve

$$(4) \qquad \mathop{S}_{c}^{x+h\vartheta} f(t,\lambda)\mathop{\Delta}_{h} t = \frac{1}{h}\int_c^x f(t)e^{-\lambda t}dt + \sum_{k=1}^{m}\frac{h^{k-1}}{k!} B_k(\vartheta) D^{k-1}\left\{f(x)e^{-\lambda x}\right\} +$$
$$+ \frac{h^m}{m!}\int_0^\infty P_m(\vartheta-t) D^m\left\{f(x+ht)e^{-\lambda(x+ht)}\right\}dt.$$

Wij hebben thans nog "slechts" na te gaan of het rechterlid (dus dan ook het linkerlid) voor $\lambda \to 0$ een limiet bezit. Het is zonder meer duidelijk dat op grond van I de eerste integraal en som in het rechterlid tot limiet bezitten

$$\int_c^x f(t)dt \text{ resp. } \sum_{k=1}^{m} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k(\vartheta) D^{k-1} f(x),$$

zodat we ons onderzoek kunnen voltooien door de limiet voor $\lambda \to 0$ van de laatste integraal te onderzoeken. Deze schrijven wij daartoe in de gedaante

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-\lambda)^j \quad A_j(\lambda)\ e^{-\lambda x}$$

waarin

$$A_j(\lambda) = \int_0^\infty P_m(\vartheta - t)\ e^{-\lambda h t}\ D^{m-j}\ f(x+ht).dt.$$

Het slotonderzoek verloopt nu verschillend voor $j > 0$ en $j = 0$. Nemen wij eerst de gevallen $\lambda > 0$.

Wij stellen nu

$$\psi(u) = \int_u^\infty P_m(\vartheta - t) e^{-\lambda h t}\ dt. \qquad (u \geqq 0,\ \lambda > 0).$$

Dan geldt kennelijk $\psi(\infty) = 0$. Verder geldt

$$\psi_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u+n}^{u+n+1} P_m(\vartheta - t) e^{-\lambda h t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda h(u+n)} \int_0^1 P_m(\vartheta - t - u) e^{-\lambda h t} dt =$$

$$= \frac{e^{-\lambda h u}}{1 - e^{-\lambda h}} \int_0^1 P_m(\vartheta - t - u) e^{-\lambda h t} dt =$$

$$= \frac{e^{-\lambda h u}}{1 - e^{-\lambda h}} \left\{ - \frac{P_{m+1}(\vartheta - t - u)}{m+1} e^{-\lambda h t} \Big|_0^1 - \frac{\lambda h}{m+1} \int_0^1 P_{m+1}(\vartheta - t - u) e^{-\lambda h t} dt \right\} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda h u}}{m+1} \left\{ P_{m+1}(\vartheta - u) - \frac{\lambda h}{1 - e^{-\lambda h}} \int_0^1 P_{m+1}(\vartheta - t - u) e^{-\lambda h t} dt \right\}.$$

Enerzijds volgt hieruit

$$\lim_{\lambda \to 0} \psi_\lambda(u) = \frac{1}{m+1} \left\{ P_{m+1}(\vartheta - u) - \int_0^1 P_{m+1}(\vartheta - t - u) dt \right\} = \frac{P_{m+1}(\vartheta - u)}{m+1}.$$

Anderzijds heeft men

$$\psi_\lambda(u) = \frac{e^{-\lambda h u}}{m+1} \left(P_{m+1}(\vartheta - u) - \frac{\lambda h}{1 - e^{-\lambda h}} q_\lambda(u) \right),$$

met

$$|q_\lambda(u)| \leqq P \int_0^1 e^{-\lambda h t} dt = P \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda h},$$

waarin P de bovengrens is van de begrensde functie $|P_{m+1}(\vartheta - u)|$.

Dus

(5) $$|\psi_\lambda(u)| < C\, e^{-\lambda h u},$$

waarin C een constante voorstelt, die onafhankelijk is van u en λ.

Nu geldt

$$A_j(\lambda) = -\int_0^\infty \psi_\lambda'(t)\, D^{m-j} f(x+ht)dt$$

$$= -\psi_\lambda(t)\, D^{m-j} f(x+ht)\Big|_0^\infty + h\int_0^\infty \psi_\lambda(t)\, D^{m-j+1} f(x+ht)dt$$

Wegens (5) en IV geldt $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_\lambda(t)\, D^{m-j} f(x+ht) = 0$. Dus

(6) $$\lambda^j A_j(\lambda) = \lambda^j \frac{P_{m+1}(\vartheta-u)}{m+1} D^{m-j} f(x) + h\int_0^\infty \lambda^j \psi_\lambda(t) D^{m-j+1} f(x+ht)\,dt.$$

Volgens IV bestaat er een getal $v = v(\varepsilon)$, zodanig dat voor $t \geq v$ geldt $|D^{m-j+1} f(x+ht)| \leq \varepsilon |x+ht|^{j-1}$, dus als ook nog volgt $v > \frac{|x|}{h}$,

$$\left|\int_v^\infty \lambda^j \psi_\lambda(t) D^{m-j+1} f(x+ht)dt\right| \leq C\varepsilon \int_v^\infty \lambda^j e^{-\lambda ht} |x+ht|^{j-1} dt$$

$$< C\varepsilon \int_0^\infty \lambda^j e^{-\lambda th} (2ht)^{j-1} dt = \frac{C}{h}(j-1)!\, 2^{j-1}\varepsilon.$$

Uiteraard geldt in verband met (5)

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^j \int_0^v \psi_\lambda(t)\, D^{m-j+1} f(x+ht)dt = 0.$$

Bijgevolg leert (6)

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^j A_j(\lambda) = 0.$$

Wij beschouwen nu het geval $j = 0$, dus de uitdrukking

$$I(\lambda) = \int_0^\infty P_m(\vartheta - t)\, e^{-\lambda ht}\, D^m f(x+ht)dt.$$

Stelt men

$$\chi(u) = \int_u^\infty P_m(\vartheta - t)\, D^m f(x+ht)dt,$$

(op grond van V bestaat $\chi(u)$), dan geldt $\chi(\infty) = 0$ en verder

$$I(\lambda) = -\int_0^\infty \chi'(t)\, e^{-\lambda ht}\, dt$$

$$= -\chi(t)e^{-\lambda ht}\Big|_0^\infty - \lambda h \int_0^\infty \chi(t)\, e^{-\lambda ht}\, dt$$

$$= \chi(0) - \lambda h \int_0^\infty \chi(t)\, e^{-\lambda ht}\, dt.$$

Wegens $\chi(\infty) = 0$ ziet men gemakkelijk in dat voor $\lambda \to 0$ de met λ vermenigvuldigde laatste integraal tot nul nadert, dus

$$\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = \chi(0) = \int_0^\infty P_m(\vartheta - t)\, D^m f(x+ht)\,dt$$

en wegens (5)

$$(7) \quad \underset{c}{\overset{x+h\vartheta}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{1}{h}\int_c^x f(t)dt + \sum_{k=1}^m \frac{h^{k-1}}{k!} B_k(\vartheta) D^{k-1} f(x) + \frac{h^m}{m!}\int_0^\infty P_m(\vartheta - t) D^m f(x+ht)\,dt ,$$

ofwel

$$(8) \quad \underset{c}{\overset{x+h\vartheta}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{1}{h}\int_c^x f(t)dt + \sum_{k=1}^m \frac{h^{k-1}}{k!} B_k(\vartheta) D^{k-1} f(x) + \frac{h^m}{m!}\int_0^1 P_m(\vartheta - t) \sum_{n=0}^\infty D^m f(x+hn+ht)\,dt.$$

In het bijzonder geldt dus

$$(9) \quad \underset{c}{\overset{x}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{1}{h}\int_c^x f(t)dt + \sum_{k=1}^m \frac{h^{k-1}}{k!} B_k D^{k-1} f(x) + \frac{h^m}{m!}\int_0^\infty P_m(-t) D^m f(x+ht)\,dt.$$

Wij hebben de voor de afleiding van (9) overbodige parameter ϑ meegesleept omdat wij in de volgende paragraaph de formule (7) zullen gebruiken voor de afleiding van verdere eigenschappen.

§ 7. Eigenschappen van sommen.

Wij gaan thans de afgeleide van de som naar haar bovengrens bepalen en daartoe kunnen wij het beste formule (8) uit de vorige paragraaph differentieeren naar ϑ . Wij vinden dan, die afgeleide nemende voor $\vartheta = 0$,

$$\frac{d}{dx} \underset{c}{\overset{x}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{1}{h}\left(\frac{d}{d\vartheta} \underset{c}{\overset{x+h\vartheta}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t\right)_{\vartheta=0}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^m \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} B_{k-1} D^{k-1} f(x) + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^1 P_{m-1}(-t) \sum_{n=0}^\infty D^m f(x+hn+ht)\,dt$$

$$= \frac{f(x)}{h} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k D^{k-1} f'(x) + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^\infty P_{m-1}(-t) D^{m-1} f'(x+hn+ht)\,dt$$

dus

$$(1) \qquad \frac{d}{dx} \underset{c}{\overset{x}{S}} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \underset{c}{\overset{x}{S}} f'(t) \underset{h}{\Delta} t + \frac{1}{h} f(c).$$

Deze belangrijke formule leert ons dat de som een differentieerbare functie is van x. Wij herinneren - uiteraard overbodig - aan het triviale resultaat

$$\underset{h}{\Delta} \int_c^x f(t) \underset{h}{\Delta} t = f(x).$$

Opg. 1. Bewijs voor $n = 1,\ldots,m-1$

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_c^x f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{1}{h} f^{(n-1)}(c) + \int_c^x f^{(n)}(t) \underset{h}{\Delta} t$$

Het resultaat van opg 1 leert ons in het bijzonder

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \int_c^{x+h\vartheta} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{1}{h} f^{(m-2)}(c) + \int_c^{x+h\vartheta} f^{(m-1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{h} f^{(m-2)}(c) + B_1(\vartheta) f^{(m-1)}(x) + h\int_0^1 P_1(\vartheta - t) \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+hn+ht)\,dt,$$

waarbij de laatste integraal geschreven kan worden in de gedaante

$$\int_0^1 (\vartheta - t - \tfrac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+hn+ht)\,dt - \int_{\vartheta}^1 \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+hn+ht)\,dt.$$

Dus

$$\frac{d^m}{dx^m} \int_c^x f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{f^{(m-1)}(x)}{h} + \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+nh+ht)\,dt - \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+nh)$$

$$= \frac{f^{(m-1)}(x)}{h} + \int_0^{\infty} D^m f(x+ht)\,dt - \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+nh)$$

dus

$$(2) \qquad \frac{d^m}{dx^m} \int_c^x f(t) \underset{h}{\Delta} t = \frac{1}{h} \lim_{u\to\infty} D^{m-1} f(u) - \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x+nh),$$

mits de hier genoemde limiet bestaat. Dit laatste feit volgt uit de onderstelling II. Immers zij $v > u \geq c$. Stel $v = u + ph$ $N = [p]$, dus $p = N + \vartheta$ met $0 \leq \vartheta < 1$. Dan geldt

$$D^{m-1} f(v) - D^{m-1} f(u) = \int_u^v D^m f(t)\,dt = \int_u^{u+Nh} D^m f(t)\,dt + \int_{u+Nh}^{u+Nh+\vartheta h} D^m f(t)\,dt.$$

De laatste integraal is willekeurig klein als maar u voldoende groot wordt gekozen, omdat haar integrand een term is van een convergente reeks. De eerste is absoluut genomen ten hoogste gelijk aan

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{u+nh}^{u+(n+1)h} D^m f(t)\,dt \right| \leq \int_0^h \left| \sum_{n=0}^{N-1} D^m f(u+nh+t) \right| dt$$

en dus op grond van II ook willekeurig klein als alweer u maar voldoende groot wordt genomen. Bijgevolg bestaat $\lim_{u\to\infty} D^{m-1} f(u)$.

Uit (2) volgt nog dat de m^e afgeleide der som

$$\mathop{S}_{c}^{x} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t$$

voor $x \to \infty$ naar een eindige limiet gaat (in casu $\frac{1}{h} \lim_{u\to\infty} f^{(m-1)}(u)$). De som is de enige oplossing van onze differentievergelijking, want elke andere verschilt hierin van een periodieke functie met periode h en de m^e afgeleide van dit verschil heeft slechts dan een eindige limiet in het oneindige als het verschil een constante is. Het feit dat de limiet voor $x \to \infty$ van de som $\mathop{S}_{c}^{x} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t$ bestaat is dus, afgezien van een additieve constante, karakteriserend voor de som als oplossing van onze differentievergelijking.

Uit formule (8) van § 6 volgt nog

$$\mathop{S}_{c}^{x} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t = Q_m(x) + R_m(x)$$

met

$$Q_m(x) = \frac{1}{h} \int_c^x f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{m} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k D^{k-1} f(x)$$

en

$$R_m(x) = \frac{h^m}{m!} \int_0^1 P_m(-t) \sum_{n=0}^{\infty} D^m f(x + hn + ht)dt,$$

dus als x voldoende groot wordt gekozen, is $|R_m(x)|$ op grond van voorwaarde II uit § 6 willekeurig klein te maken. Bijgevolg geldt asymptotisch ten aanzien van x

$$\mathop{S}_{c}^{x} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t \backsim Q_m(t).$$

Toepassingen. 1^o: $f(x) = x^r$. Voor $m = r+1$ is voldaan aan I en II. Men heeft dan $R_m(x) = 0$, dus

$$\mathop{S}_{c}^{x} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t = \frac{1}{h(r+1)} (x^{r+1} - c^{r+1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r+1} \frac{h^{k-1}}{k!} B_k \cdot \frac{r!}{(r-k+1)!} x^{r-k+1}$$

$$= - \frac{c^{r+1}}{h(r+1)} + \frac{1}{h(r+1)} \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} B_k x^{r-k+1} h^{k-1}$$

$$= - \frac{c^{r+1}}{h(r+1)} + \frac{h^r}{r+1} B_k \left(\frac{x}{h}\right)$$

2°: $f(x) = \frac{1}{x}$. Kennelijk kan men hier nemen $m = 1$. Dan vindt men voor grote x

$$\mathop{S}_{c}^{x} \frac{1}{t} \mathop{\Delta}_{h} t \sim \frac{\log x - \log c}{h} - \frac{1}{2x} .$$

Het is interessant om op te merken dat de ψ-functie juist de hoofdoplossing is van de differentievergelijking $\Delta u = \frac{1}{x}$. Immers men heeft

$$\mathop{S}_{1}^{x} \frac{1}{t} \Delta t = \lim_{N\to\infty} \left(- \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{x+n} + \int_{1}^{N} \frac{dt}{t}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(- \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{x+n} + \log N\right)$$

$$= - \frac{1}{x} - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right) - \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N\right) = \gamma - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right) = \psi(x).$$

Wij vinden en passant

$$\psi(x) \sim \log x - \frac{1}{2x} .$$

3°: $f(x) = \log x$. Hier neme men $m = 2$ en vindt dan voor grote x

$$\mathop{S}_{c}^{x} \log t \mathop{\Delta}_{h} t \sim \frac{x(\log x - 1) - c(\log c - 1)}{h} - \frac{1}{2} \log x + \frac{h}{12x} .$$

In het bijzonder

$$\mathop{S}_{0}^{x} \log t \, \Delta t \sim (x - \tfrac{1}{2}) \log x + \frac{1}{12x} .$$

Anderzijds heeft men wegens (1)

$$\frac{d}{dx} \mathop{S}_{1}^{x} \log t . \Delta t = \mathop{S}_{1}^{x} \frac{1}{t} \Delta t = \psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) .$$

Dus

$$\mathop{S}_{1}^{x} \log t . \Delta t = \log \Gamma(x) + c,$$

waaruit volgt

$$\mathop{S}_{0}^{x} \log t . \Delta t = \log \Gamma(x) + c - 1 .$$

Kennelijk is dus de Γ-functie de hoofdoplossing van de differentievergelijking $\Delta u(x) = \log x$.

Wij wijzen thans op een aantal eigenschappen van sommen, waarvan een aantal analogie vertoont met de corresponderende eigenschappen van bepaalde integralen.

1°: Splitsing van de sommatieweg:

$$\mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \mathop{S}\limits_{b}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t + \frac{1}{h} \int_{c}^{b} f(t)\, dt \,.$$

2°: Verschuiving van de sommatieweg

$$\mathop{S}\limits_{c}^{x+a} f(t) \underset{h}{\Delta} t = \mathop{S}\limits_{c-a}^{x} f(t+a) \underset{h}{\Delta} t \,.$$

3°: $$\mathop{S}\limits_{c}^{x} kf(t) \underset{h}{\Delta} t = k \mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t \,.$$

4°: $$\mathop{S}\limits_{c}^{x} \left\{ f(t) + g(t) \right\} \underset{h}{\Delta} t = \mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t + \mathop{S}\limits_{c}^{x} g(t) \underset{h}{\Delta} t.$$

Bij gevolg is de operator $\mathop{S}$ een lineaire operator, d.w.z. de s van een lineair compositum van sommeerbare functies is gelijk aan hetzelfde lineaire compositum van de sommen dier functies.

Opg.2. Bewijs bovengenoemde vier eigenschappen.

Opg.3. Bewijs dat $\mathop{S}\limits_{c}^{c} f(t) \underset{h}{\Delta} t$ geenszins nul behoeft te zijn.

5°: Hierboven zagen wij dat

$$\underset{h}{\Delta} \mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t = f(x).$$

Thans beschouwen wij

$$\begin{aligned}
\mathop{S}\limits_{c}^{x} \underset{h}{\Delta} f(t) \cdot \underset{h}{\Delta} t &= \mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t+h) \underset{h}{\Delta} t - \mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t \\
&= \mathop{S}\limits_{c+h}^{x+h} f(t) \underset{h}{\Delta} t - \mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t \\
&= \mathop{S}\limits_{c+h}^{x+h} f(t) \underset{h}{\Delta} t - \mathop{S}\limits_{c+h}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t + \mathop{S}\limits_{c+h}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t - \mathop{S}\limits_{c}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t \\
&= \underset{h}{\Delta} x \mathop{S}\limits_{c+h}^{x} f(t) \underset{h}{\Delta} t - \frac{1}{h} \int_{c}^{c+h} f(t)\, dt \\
&= f(x) - \frac{1}{h} \int_{c}^{c+h} f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Dit resultaat gebruiken wij om een formule over partiële sommatie af te leiden.

Zij

$$f(t) = u(t) \mathop{S}_{c}^{t} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s.$$

Dan is

$$\begin{aligned}\mathop{\Delta}_{h} f(t) &= u(t+h) \mathop{S}_{c}^{t+h} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s - u(t) \mathop{S}_{c}^{t} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s \\ &= \left\{\mathop{\Delta}_{h} u(t)\right\} \mathop{S}_{c}^{t+h} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s + u(t) \mathop{\Delta}_{h\,t} \left\{ \mathop{S}_{c}^{t} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s \right\} \\ &= \left\{\mathop{\Delta}_{h} u(t)\right\} \mathop{S}_{c}^{t+h} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s + u(t)\, v(t).\end{aligned}$$

Bij gevolg

$$\begin{aligned}\mathop{S}_{c}^{x} u(t) v(t) \mathop{\Delta}_{h} t &= \mathop{S}_{c}^{x} \mathop{\Delta}_{h} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t - \mathop{S}_{c}^{x} \left\{\mathop{\Delta}_{h} u(t)\right\} \mathop{S}_{c}^{t+h} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s . \mathop{\Delta}_{h} t \\ &= u(x) \mathop{S}_{c}^{x} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s - \frac{1}{h} \int_{c}^{c+h} u(t) \mathop{S}_{c}^{t} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s . dt \\ &\quad - \mathop{S}_{c}^{x} \left\{\mathop{\Delta}_{h} u(t)\right\} \mathop{S}_{c}^{t+h} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s . \mathop{\Delta}_{h} t .\end{aligned}$$

De formule neemt een wat overzichtelijker gedaante aan als men stelt $V(t) = \mathop{S}_{c}^{t} v(s) \mathop{\Delta}_{h} s$. Dan krijgt men dus $v(t) = \mathop{\Delta}_{h} V(t)$ en

$$\mathop{S}_{c}^{x} u(t) v(t) \mathop{\Delta}_{h} t = u(x) V(x) - \mathop{S}_{c}^{x} V(t+h) \left\{\mathop{\Delta}_{h} u(t)\right\} \mathop{\Delta}_{h} t - \frac{1}{h} \int_{c}^{c+h} u(t) V(t)\, dt .$$

(formule van partiële sommatie).

<u>Toepassing.</u>

$$\begin{aligned}\mathop{S}_{c}^{x} t e^{-t} \mathop{\Delta}_{h} t &= x\left(\frac{e^{-c}}{h} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-h}}\right) - h \mathop{S}_{c}^{x} \left(\frac{e^{-c}}{h} - \frac{e^{-t-h}}{1-e^{-h}}\right) \mathop{\Delta}_{h} t - \frac{1}{h} \int_{c}^{c+h} t\left(\frac{e^{-c}}{h} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-h}}\right) dt \\ &= x\left(\frac{e^{-c}}{h} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-h}}\right) - e^{-c}\left(\frac{x}{h} - \frac{c}{h} - \frac{1}{2}\right) + \frac{h}{e^{h}-1}\left(\frac{e^{-c}}{h} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-h}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{h}(h+2c) e^{-c} - \frac{1}{h(1-e^{-h})} \left\{ (1+c+h) e^{-c-h} - (1+c) e^{-c} \right\} \\ &= -\frac{x e^{-x}}{1-e^{-h}} - \frac{h e^{-x-h}}{(1-e^{-h})^2} + (c+1) e^{-c} .\end{aligned}$$

6^{o}: Multiplicatietheorema van de som.

$$\mathop{S}_{c}^{x} f(t) \mathop{\Delta}_{h} t = \sum_{s=0}^{n-1} \mathop{S}_{c}^{x} f(t+sh) \mathop{\Delta}_{h} nt .$$

<u>Opg.4.</u> Bewijs deze formule.

§ 8. Interpolatieformules.

Beschouw een functie $f(x)$, die gedefinieerd is in de punten $x_0, x_1, \ldots$. Men definieert de gedeelde verschillen dezer functie als volgt

$$f[x_0] = f(x_0); \quad f[x_0 x_1 \ldots x_n] = \frac{f[x_0 x_1 \ldots x_{n-1}] - f[x_0 x_1 \ldots x_{n-2} x_n]}{x_{n-1} - x_n}$$

Voor het eerste gedeelde verschil $f[x_0 x_1]$ vindt men dus $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$; voor het tweede $\dfrac{f[x_0 x_1] - f[x_0 x_2]}{x_1 - x_2}$, enz.

Wij bewijzen thans de formule

$$(1) \quad f[x_0 \ldots x_n] = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1)\ldots(x_\nu - x_n)} ,$$

waarbij het uiteraard de bedoeling is dat in de noemer de factor $x_\nu - x_\nu$ wordt weggelaten.

Voor $n = 0$ is de formule triviaal. Onderstelt men haar juist voor zekere gehele $n \geqq 0$, dan vindt men met gebruik van de definitie van gedeelde verschillen

$$f[x_0 \ldots x_{n+1}] = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)\ldots(x_\nu - x_n)(x_n - x_{n+1})} -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)\ldots(x_\nu - x_{n-1})(x_\nu - x_{n+1})(x_n - x_{n+1})} +$$

$$+ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1})} - \frac{f(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)\ldots(x_{n+1} - x_{n-1})(x_n - x_{n+1})} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{f(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)\ldots(x_\nu - x_{n+1})} .$$

Een andere schrijfwijze voor gedeelde verschillen volgt hieruit direct door gebruik te maken van de stelling van Vandermonde over determinanten. Men vindt daarmede gemakkelijk

$$(2) \quad f[x_0 \ldots x_n] = \begin{vmatrix} f(x_0) & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_n) & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0^n & \ldots & x_0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^n & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

Hieruit volgt direct dat $f[x_0 \ldots x_n]$ een symmetrische functie is van de grootheden $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Opg. 1. Bereken $f[x_0 \ldots x_n]$ voor $f(x) = x^m$ in de gevallen $m = -1, 0, 1, \ldots, n, n+1$.

Wij bewijzen thans de interpolatieformule van Newton.

$$(3) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (x-x_1)\ldots(x-x_\nu) f[x_1 x_2 \ldots x_{\nu+1}] + R_n(x)$$

waarin

$$R_n(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n) f[x x_1 \ldots x_n] .$$

Bewijs: Voor n = 1 is de formule triviaal. Laat ze juist zijn voor zekere natuurlijke n. Dan geldt

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (x-x_1)\ldots(x-x_\nu) f[x_1\ldots x_{\nu+1}] + S(x),$$

waarin

$$S(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)f[xx_1\ldots x_n] - (x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x_1\ldots x_n x_{n+1}]$$

$$= (x-x_1)\ldots(x-x_{n+1})f[xx_1\ldots x_{n+1}] = R_{n+1}(x).$$

Toepassing. Als f(x) een veelterm is van de n^e graad (waarvoor uiteraard geldt $f[xx_1\ldots x_{n+1}] = R_{n+1}(x) = 0$) heeft men

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (x-x_1)\ldots(x-x_\nu) f[x_1\ldots x_{\nu+1}].$$

Zo kan men b.v. een cubische functie f(x) berekenen uit haar waarden in 4 gegeven punten.

Voorbeeld: Gevraagd de waarde van een cubische functie f(x) voor x=4 als gegeven is f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8.

Men vindt

$f[01] = 1$; $f[12] = 2$; $f[23] = 4$, dus $f[012] = \frac{1}{2}$; $f[123] = 1$ en $f[0123] = \frac{1}{6}$. Bijgevolg is

$$f(4) = 1 + 4.1 + 12.\tfrac{1}{2} + 24.\tfrac{1}{6} = 15.$$

Wij onderstellen thans dat f(x) n keer differentieerbaar is in een interval dat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bevat. We schrijven nu de formule van Newton in de gedaante

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x),$$

waarin $P_{n-1}(x)$ een polynoom in x is van de graad n-1, met "eerste" coëfficiënt $f[x_1\ldots x_n]$. Aangezien uit de voorstelling van $R_n(x)$ gemakkelijk volgt dat $R_n(x_1) = \ldots = R_n(x_n) = 0$ is, ligt er in het kleinste interval, dat $x_1, \ldots, x_n$ bevat, volgens de stelling van Rolle zeker een punt ξ, zodanig dat $R_n^{(n-1)}(\xi) = 0$. Voor dit punt ξ geldt dus

$$f^{(n-1)}(\xi) = (n-1)!\,f[x_1\ldots x_n],$$

waarmede een verband is gelegd tussen gedeelde verschillen en afgeleiden.

Onderstellen wij thans dat f(x) in een interval dat $x, x_1, \ldots, x_n$ bevat n keer differentieerbaar is. Dan bestaat er volgens het zojuist gevondene een punt ξ in het kleinste interval dat $x, x_1, \ldots, x_n$ bevat, waarvoor geldt $f^{(n)}(\xi) = n!\,f[xx_1\ldots x_n]$, zodat de formule van Newton dan luidt

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (x-x_1)\ldots(x-x_\nu) f[x_1 x_2\ldots x_{\nu+1}] + (x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Toepassing. Bepaal sin 20° met behulp van de bekende formules

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1),\quad \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\quad \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}.$$

Men heeft hier het volgende schema van verschillen en gedeelde verschillen

x^0	$\sin x^0$		
18	0,30902		
		0,01637	
$22\frac{1}{2}$	0,38268		$-$ 0,00006
		0,01564	
30	0,50000		

Bijgevolg geldt

$$\sin 20^0 = 0{,}30902+2.0{,}01637+2.(-2\tfrac{1}{2})(-0{,}00006)+R_3 = 0{,}3420+R_3$$

waarin $R_3 = 2(-2\frac{1}{2})(-10).(\sin \xi)''' = -50(\frac{\pi}{180})^3 \cos\xi$ voor passende ξ tussen 18 en 30. Dus

$$0 > R_3 > -\frac{50.\pi^3}{180^3} = 0{,}00003.$$

Indien wij $f(x)$ voldoende vaak differentieerbaar onderstellen, kunnen wij, zoals zoëven bleek, het n^e gedeelde verschil in de vorm van een n^e afgeleide schrijven. Hieruit volgt allereerst dat wij in ons interpolatieschema ook met samengevallen ("confluente") punten x_ν kunnen werken mits wij de gedeelde verschillen maar goed integreren. Zo heeft men dan

$$f[x_1x_1] = f'(x_1),\quad f[x_1x_1x_1] = \tfrac{1}{2}f''(x_1),\quad f[x_1x_1x_2] = \frac{f'(x_1)-f[x_1x_2]}{x_1-x_2}$$

Opg.2. Toon aan

$$f[x_1x_1x_2x_2] = \frac{\tfrac{1}{2}f''(x_1)-2f[x_1x_2]+\tfrac{1}{2}f''(x_2)}{(x_1-x_2)^2}.$$

Opg.3. Schrijf $f[x_1x_1x_1x_2x_2]$ als quotiënt van twee determinanten, analoog aan (2).

In het geval dat $x_1=x_2=\ldots=x_n$ wordt genomen levert Newtons formule ons de reeks van Taylor op.

Een belangrijke toepassing van het gevondene is de interpolatieformule van Lagrange, die de waarde van een n^e graads veelterm $f(x)$ in een punt x bepaalt uit de $n+1$ gegeven waarden $f(x_1),\ldots f(x_{n+1})$ van $f(x)$ in $n+1$ gegeven punten $x_1,\ldots x_n$. Deze volgt direct uit de formule (1) door deze toe te passen op de $n+2$ punten $x,x_1,\ldots,x_{n+1}$ en te bedenken dat voor zo'n polynoom de uitdrukking $f[x_0x_1\ldots x_{n+1}] = 0$ is. Derhalve

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_\nu-x_1)\ldots(x_\nu-x_{n+1})} f(x_\nu),$$

waarbij in de producten in teller en noemer de factor $x-x_\nu$ resp. $x_\nu - x_\nu$ wordt weggelaten.

Thans gaan wij de formule over gedeelde verschillen beschouwen voor aequidistante punten $x_\nu = x_0 + \nu h$ $(\nu = 0,1,2,\ldots)$.

Wij bewijzen allereerst

$$f[x_0x_1\ldots x_n] = \frac{1}{n!h^n} \mathop{\Delta}_h^n f(x_0).$$

Immers voor $n = 0$ is de bewering triviaal en voor $n+1$ heeft men, haar voor n aannemende,

$$f[x_0 \ldots x_{n+1}] = \frac{f[x_0 \ldots x_n] - f[x_1 \ldots x_{n+1}]}{x_0 - x_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{n!h^n(n+1)h} \cdot \left\{ \underset{h}{\Delta}^n f(x_1) - \underset{h}{\Delta}^n f(x_0) \right\} = \frac{\underset{h}{\Delta}^{n+1} f(x_0)}{h^{n+1}(n+1)!}$$

Opg.4. Bewijs: $f[x_0 \ldots x_{n+1}] = \frac{1}{n!h^n} \quad \underset{h}{\Delta}^n f(x_\nu) \quad (\nu = 0,\ldots,n+1)$.

In het bijzonder leert ons het voorafgaande dan dat bij een n keer differentieerbare functie $f(x)$ er een punt ξ met $x_0 \leqq \xi \leqq x_0+(n-1)h$ bestaat zodanig dat

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\underset{h}{\Delta}^n f(x_0)}{h^n}.$$

Voor de beschouwde aequidistante punten krijgt de interpolatieformule (3) van Newton ook een eenvoudiger vorm. De formule gaat dan over in

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(x-x_1)^{(h;\nu)}}{\nu! h^\nu} \underset{h}{\Delta}^\nu f(x_1) + R_n(x),$$

waarin

$$R_n(x) = (x-x_1)^{(h;n)} f[xx_1 \ldots x_n] = \frac{(x-x_1)^{(h;n)}}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

mits $f(x)$ n keer differentieerbaar is; hierin stelt ξ een passend gekozen punt voor gelegen in een interval dat $x_1, x_1+(n-1)h$ en x bevat. Stelt men nog $\frac{x-x_1}{h} = p$ dan is de formule te schrijven in de gedaante

$$(4) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{p}{\nu} \underset{h}{\Delta}^\nu f(x_1) + R_n(x)$$

met

$$R_n(x) = \binom{p}{n} h^n f^{(n)}(\xi).$$

In het bijzonder vindt men voor $h = 1$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{x-x_1}{\nu} \Delta^\nu f(x_1) + R_n(x)$$

met

$$R_n(x) = \binom{x-x_1}{n} f^{(n)}(\xi).$$

Symbolisch kan men schrijven

$$f(x) = (1+\Delta)^p_{n-1} f(x_1) + R_n(x),$$

waarbij het de bedoeling is dat men $(1+\Delta)^p_{n-1}$ volgens de binomiaalformule van Newton voor $(1+\Delta)^p$ uitwerkt tot en met de $n-1^e$ graads term en dit resultaat toepast op $f(x)$.

Op grond van het voorafgaande is het duidelijk dat voor $h \to 0$ de formule (4) ons andermaal de reeks van Taylor oplevert.

Analoog aan (4) kan men een formule maken met terugwaartse differenties. In (3) neme men daartoe $x_\nu = x_0 - h\nu$ $(\nu = 0,1,\ldots)$ of, wat op hetzelfde neerkomt, in (4) vervange men h door -h. Er komt dan

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{p+\nu-1}{\nu} \underset{h}{\nabla}^{\nu} f(x_1)+R_n(x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{p+\nu-1}{\nu} \underset{h}{\Delta}^{\nu} f(x_1-\nu h) + R_n(x) ,$$

waarin

$$R_n(x) = \binom{p+n-1}{n} (-h)^n f^{(n)}(\xi)$$

en ξ een passend gekozen punt is in een interval dat $x_1, x_1-(n-1)h$ en x bevat.

Symbolisch luidt deze formule

$$f(x) = (1-\nabla)^{-p}_{n-1} f(x_1) + R_n(x).$$

Wij leiden thans de sommatieformule van Gauss af uit de formule (1) door te nemen

$$x_{2n+1} = x_1-nh;\ x_{2n} = x_1+nh \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Dan geldt

$$f[x_1x_2\ldots x_{2n}] = \frac{1}{(2n-1)!h^{2n-1}} \cdot \underset{h}{\Delta}^{2n-1} f(x_1-(n-1)h) =$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!h^{2n-1}} \underset{h}{\delta}^{2n-1} f(x_1+\tfrac{1}{2}h);$$

$$f[x_1\ldots x_{2n+1}] = \frac{1}{(2n)!h^{2n}} \underset{h}{\Delta}^{2n} f(x_1-nh) = \frac{1}{(2n)!h^{2n}} \underset{h}{\delta}^{2n} f(x_1);$$

$$(x-x_1)\ldots(x-x_{2n}) = (x-x_1+(n-1)h)^{(2n;h)} = \binom{p+n-1}{2n}(2n)!h^{2n};$$

$$(x-x_1)\ldots(x-x_{2n+1}) = (x-x_1+nh)^{(2n+1;h)} = \binom{p+n}{2n+1}(2n+1)!h^{2n+1} .$$

Bijgevolg

$$f(x) = f(x_1) + \binom{p}{1} \underset{h}{\delta} f(x_1+\tfrac{1}{2}h) + \binom{p}{2} \underset{h}{\delta}^2 f(x_1) + \binom{p+1}{3} \underset{h}{\delta}^3 f(x_1+\tfrac{1}{2}h) + \binom{p+1}{4} \underset{h}{\delta}^4 f(x_1) +$$

$$+ \ldots + R_n(x).$$

Voor n=2m vindt men

$$(5) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{p+\nu}{2\nu+1} \underset{h}{\delta}^{2\nu+1} f(x_1+\tfrac{1}{2}h) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{p+\nu-1}{2\nu} \underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1) + R_{2m}(x)$$

met

$$R_{2m}(x) = \binom{p+m-1}{2m} h^{2m} f^{(2m)}(\xi_1) .$$

Hier en in het vervolg stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ passend gekozen getallen voor die gelegen zijn in het kleinste interval dat $x, x_1, x_1+h, \ldots, x_1+nh$ bevat. Evenzo vindt men voor $n= 2m+1$

$$(6) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{p+\nu}{2\nu+1} \underset{h}{\delta}^{2\nu+1} f(x_1+\tfrac{1}{2}h) + \sum_{\nu=0}^{m} \binom{p+\nu-1}{2\nu} \underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1) + R_{2m+1}(x)$$

met

$$R_{2m+1}(x) = \binom{p+m}{2m+1} h^{2m+1} f^{(2m+1)}(\xi_2).$$

Op geheel analoge wijze zijn formules te maken die f(x) uitdrukken in centrale differenties van f(x) in x_1 en $x_1-\frac{1}{2}h$ (terugwaartse interpolatieformule van Gauss).

Men vindt dan

$$(7)\quad f(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{p+\nu}{2\nu+1}\delta_h^{2\nu+1}f(x_1-\tfrac{1}{2}h)+\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{p+\nu}{2\nu}\delta_h^{2\nu}f(x_1)+$$
$$+\binom{p+m}{2m}h^{2m}f^{(2m)}(\xi_3)$$

en

$$(8)\quad f(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{p+\nu}{2\nu+1}\delta_h^{2\nu+1}f(x_1-\tfrac{1}{2}h)+\sum_{\nu=0}^{m}\binom{p+\nu}{2\nu}\delta_h^{2\nu}f(x_1)+$$
$$\binom{p+m}{2m+1}h^{2m+1}f^{(2m+1)}(\xi_4)\;.$$

Wij nemen thans het gemiddelde der leden van de formules (6) en (8) en vinden dan de interpolatieformule van Stirling. Deze luidt

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{p+\nu}{2\nu+1}\mu_h\delta_h^{2\nu+1}f(x_1)+\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{m}\left\{\binom{p+\nu-1}{2\nu}+\binom{p+\nu}{2\nu}\right\}\delta_h^{2\nu}f(x_1)+$$
$$+\binom{p+m}{2m+1}h^{2m+1}f^{(2m+1)}(\xi_5)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{p(p^2-1^2)\dots(p^2-\nu^2)}{(2\nu+1)!}\mu_h\delta_h^{2\nu+1}f(x_1)+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m}\frac{p^2(p^2-1^2)\dots(p^2-(\nu-1)^2)}{(2\nu)!}\delta_h^{2\nu}f(x_1)+$$

$$+\frac{p(p^2-1)\dots(p^2-m^2)}{(2m+1)!}h^{2m+1}f^{(2m+1)}(\xi_5)\;.$$

Een analoge formule is uit (5) en (7) af te leiden; deze eindigt met een differentie van oneven orde. [Verder geven wij nog de interpolatieformule van Bessel, die ontstaat door het gemiddelde te nemen van de formules (5) en (7), waarbij echter in (7) x_1 vervangen is door x_1+h, dus $p=\dfrac{x-x_1}{h}$ door $\dfrac{x-x_1-h}{h}=p-1$. Wij vinden dan

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{p+\nu-1}{2\nu}\frac{p-\frac{1}{2}}{2\nu+1}\delta_h^{2\nu+1}f(x_1+\tfrac{1}{2}h)+\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{p+\nu-1}{2\nu}\mu_h\delta_h^{2\nu}f(x_1+\tfrac{1}{2}h)+$$
$$+\binom{p+m-1}{2m}h^{2m}f^{(2m)}(\xi_6)\;.$$

Ook hier kan een analoge formule worden afgeleid; die eindigt dan met een differentie van even orde.

Tenslotte geven wij nog de interpolatieformule van Everett. Hiertoe gaan wij uit van formule (5), welke wij schrijven in de vorm

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\left\{\binom{p+\nu}{2\nu+1}\delta_h^{2\nu+1}f(x_1+\tfrac{1}{2}h)+\binom{p+\nu-1}{2\nu}\delta_h^{2\nu}f(x_1)\right\}+\binom{p+m-1}{2m}h^{2m}f^{(2m)}(\xi_1)$$

De uitdrukking tussen accoladen is te schrijven in de gedaante

$$\frac{1}{(p-\nu-1)}\binom{p+\nu-1}{2\nu+1}\left\{(p+\nu)\,\underset{h}{\delta}^{2\nu+1} f(x_1+\tfrac{1}{2}h)+(2\nu+1)\,\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1)\right\}$$

en de laatste uitdrukking tussen accoladen in de vorm

$$(p+\nu)\,\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1+h)-(p+\nu)\,\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1)+(2\nu+1)\,\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1) =$$

$$= (p+\nu)\,\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1+h)-(p-\nu-1)\,\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1)\ .$$

Dus

$$f(x)=f(x_1)+p\,\underset{h}{\delta}\, f(x_1+\tfrac{1}{2}h)+\sum_{\nu=1}^{m-1}\left\{\binom{p+\nu}{2\nu+1}\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1+h)-\binom{p+\nu-1}{2\nu+1}\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1)\right\}+$$

$$+\binom{p+m-1}{2m}h^{2m}f^{(2m)}(\xi_1).$$

Schrijft men nog $p'=1-p=\frac{x_1+h-x}{h}$ en bedenkt men dat

$$\binom{p+\nu-1}{2\nu+1}=-\binom{p'+\nu}{2\nu+1}\quad ,$$

dan vindt men tenslotte de interpolatieformule van Everett,

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\left\{\binom{p+\nu}{2\nu+1}\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1+h)+\binom{p'+\nu}{2\nu+1}\underset{h}{\delta}^{2\nu} f(x_1)\right\}+\binom{p+m-1}{2m}h^{2m}f^{(2m)}(\xi_1).$$

Duidt men $f(x_1+nh)$ aan met u_n dan maken de diverse interpolatieformules gebruik van de volgende schema's:

Newton (voorwaarts)	u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	....
Newton (terugwaarts)	u_0	∇u_0	$\nabla^2 u_0$	$\nabla^3 u_0$	....
Gauss (voorwaarts)	u_0	$\delta u_{\frac{1}{2}}$	$\delta^2 u_0$	$\delta^3 u_{\frac{1}{2}}$	....
Gauss (terugwaarts)	u_0	$\delta u_{-\frac{1}{2}}$	$\delta^2 u_0$	$\delta^3 u_{-\frac{1}{2}}$	....
Stirling	u_0	$\mu\delta u_0$	$\delta^2 u_0$	$\mu\delta^3 u_0$	....
Bessel	$\mu u_{\frac{1}{2}}$	$\delta u_{\frac{1}{2}}$	$\mu\delta^2 u_{\frac{1}{2}}$	$\delta^3 u_{\frac{1}{2}}$	....
Everett	u_0	u_1	$\delta^2 u_0$	$\delta^2 u_1$	....

Op verdere interpolatieformules en methoden gaan wij hier niet in; wij volstaan met te verwijzen naar de meer genoemde boeken van Milne-Thomson en Jordan.

§ 9. Faculteitenreeksen.

Wij behandelen thans het analogon van het begrip machtreeks uit de analyse. Terwijl daar reeksen van het type $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ worden beschouwd gaan wij nu uiteraard reeksen beschouwen van het type $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{(n)}$. Wij zullen de coëfficiënten iets anders aangeven en beschouwen reeksen

$$(1) \quad A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(x-1)^{(n)} = a_0 + a_1 \frac{x-1}{1!} + a_2 \frac{(x-1)(x-2)}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(x-n)}{\Gamma(x).n!}$$

$$(2) \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!(x-1)^{(-n-1)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1 1!}{x(x+1)} + \frac{a_2 . 2!}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x}\binom{x+n}{n}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!\, \Gamma(x)}{\Gamma(x+n+1)},$$

welke resp. worden genoemd faculteitenreeksen van de tweede en de eerste soort.

Allereerst bewijzen wij de volgende stelling.

De reeksen

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n . n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \text{en} \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_n \frac{(x-1)\dots(x-n)}{n!}$$

zijn voor dezelfde niet gehele x tegelijk convergent of divergent.

Bewijs: Stel $p_n = \dfrac{a_n n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ en $q_n = (-)^n a_n \dfrac{(x-1)\dots(x-n)}{n!}$

dan geldt voor

$$r_n = \frac{q_n}{p_n} = (-)^n \frac{x(x^2-1^2)\dots(x^2-n^2)}{n!n!} = x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

de bekende relatie $\lim_{n\to\infty} r_n = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$. Bijgevolg bestaat er een constante K zodanig dat voor voldoende grote n geldt

$$|r_n| < K \quad \text{en} \quad |r_{n+1} - r_n| < \frac{|x|^2}{(n+1)^2} K$$

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (r_{n+1} - r_n)$ is dus absoluut convergent.

Wij gebruiken thans een stelling van Abel dat uit de absolute convergentie van een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (r_{n+1} - r_n)$ en de convergentie van een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ de convergentie volgt van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} r_n s_n$.

(Immers stelt men $\sum_{n=0}^{N} s_n = S_N$, dan heeft men

$$\sum_{n=k}^{k+h} r_n s_n = \sum_{n=k}^{k+h} r_n(S_n - S_{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=k}^{k+h} S_n(r_n - r_{n+1}) - r_k S_{k-1} + r_{k+h+1} S_{k+h} .$$

Wegens $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ is de laatste som, absoluut genomen, ten hoogste gelijk aan $(S+1)\sum_{n=k}^{k+h} |r_n - r_{n+1}|$, dus willekeurig klein als k voldoende groot is en h willekeurig > 0; hieruit volgt de bewering gemakkelijk). Deze stelling leert ons nu dat uit de convergentie van de reeks $P(x)$, die van de reeks $Q(x)$ volgt.

Omgekeerd is $Q(x)$ convergent, dan stelle men $t_n = \frac{p_n}{q_n}$ en heeft dan

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad |t_{n+1} - t_n| < \frac{1}{K} \cdot \frac{|x|^2}{(n+1)^2 - |x|^2},$$

dus $\sum_{n=0}^{\infty} (t_{n+1} - t_n)$ convergeert absoluut en analoog aan het voorafgaande leert de stelling van Abel nu dat $P(x)$ convergent is.

Om thans de convergentie van elk van beide soorten faculteitenreeksen nader te onderzoeken releveren wij een eigenschap van de Γ —functie. Wij beschouwen nl. de functie

$$u_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)}$$

Wij gaan uit van de formule (7) van blz.27, genomen voor m=1. Deze luidt (voor $z=x+iy$)

$$\log \Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \frac{B_2}{2z} + R_1 ,$$

waarin

$$|R_1| \leq \tfrac{1}{2}B_2 \int_0^\infty \frac{dt}{(t+x)^2 + y^2}$$

Wij onderstellen verder dat $x = \operatorname{Re} z > 0$ en vinden als wij $t = u|z|$ stellen,

$$|R_1| \leq \frac{1}{12} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + |z|^2} = \frac{1}{12|z|} \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{24|z|} .$$

Wij vinden dus voor $x = \operatorname{Re} z > 0$ de relatie

$$\log \Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + O(\tfrac{1}{x}) .$$

Onderstelt men ook $a = \operatorname{Re} c > 0$ dan geldt een soortgelijke formule voor $z+c$ in plaats van z, waarbij de restterm ook in de gedaante $O(\frac{1}{x})$ te schrijven is. Derhalve

$$\log \frac{\Gamma(z+c)}{\Gamma(z)} = (z+c-\tfrac{1}{2})\log \frac{z+c}{z} + c \log z - c + O(\tfrac{1}{x})$$

$$= (z+c-\tfrac{1}{2})(\frac{c}{z} + O(\frac{1}{z^2})) + c \log z - c + O(\tfrac{1}{x})$$

$$= c \log z + O(\tfrac{1}{x}) ,$$

dus

$$\frac{\Gamma(z+c)}{\Gamma(z)} = z^c e^{O(\frac{1}{x})} = z^c(1+O(\tfrac{1}{x})).$$

Wij keren nu terug tot de beschouwing van de faculteitenreeksen. Laat de reeks

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \text{met } u_n = \frac{a_n \cdot n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \frac{a_n n!\,\Gamma(z)}{\Gamma(z+n)}$$

convergeren in een punt z_o. Stelt men

$$w_n = u_n(z):u_n(z_o) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} \frac{\Gamma(z_o+n)}{\Gamma(z+n)} .$$

dan geldt voor voldoende grote n

$$w_n = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} \cdot (z_o+n)^{z_o-z}(1+O(\tfrac{1}{n})) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} n^{z_o-z}(1+O(\tfrac{1}{n}))$$

Zij allereerst $\sigma = \mathrm{Re}(z-z_o) > 1$. Dan geldt

$$\sum w_n \ll 2 \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} \sum n^{-\sigma}$$

dus de reeks $\sum w_n$ is absoluut convergent en de reeks

$$\sum u_n(z) = \sum w_n(z) u_n(z_o)$$

dus ook.

Zij vervolgens $0 < \sigma = \mathrm{Re}(z-z_o) \leq 1$. Men heeft dan

$$w_{n+1}-w_n = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} \frac{\Gamma(z_o+n)\{(z_o+n)-(z+n)\}}{\Gamma(z+n+1)} =$$

$$= \frac{(z_o-z)\,\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} \frac{\Gamma(z_o+n)}{\Gamma(z+n+1)}$$

Dus

$$w_{n+1}-w_n = \frac{(z_o-z)\,\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} (z_o+n)^{z_o-z-1}(1+O(\tfrac{1}{n})) =$$

$$= \frac{(z_o-z)\,\Gamma(z)}{\Gamma(z_o)} n^{-\sigma-1}(1+O(\tfrac{1}{n})) .$$

er blijkt dus dat $\sum (w_{n+1}-w_n)$ absoluut convergent is en als boven blijkt nu dat $\sum u_n(z)$ convergeert.

Is gegeven dat $\sum u_n(z_o)$ absoluut convergeert dan is dat uiteraard ook het geval met $\sum u_n(z)$ voor $\mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,z_o$, want nu geldt

$$\sum u_n(z) = \sum w_n(z)u_n(z_0) \ll \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z_0)} \sum u_n(z_0).$$

Wij zien dus:

Convergeert de reeks (2) (resp.(1)) in een punt z_0, dan convergeert ze ook voor alle z met $\text{Re}z > \text{Re}z_0$ en ze convergeert absoluut voor $\text{Re}z > \text{Re}z_0 + 1$. Convergeert de reeks absoluut in z_0, dan convergeert ze ook absoluut voor alle z met $\text{Re}z > \text{Re}z_0$.

Evenals in de theorie der machtreeksen een convergentiestraal gevonden wordt, bepalen wij nu voor de faculteitenreeksen een convergentie-abscis. Hiertoe verdelen wij de verzameling van alle reële getallen (afgezien van $0,-1,-2,\ldots$) in twee klassen L en R zodanig dat de reeks (1) (of (2)) convergeert in een punt van R en divergeert in een punt van L. Op grond van het bovenstaande ligt dan elk punt van R rechts van elk punt van L. Bijgevolg leert de theorie van Dedekind dat er een getal λ bestaat zodanig dat voor iedere z met $\text{Re}z > \lambda$ de reeks convergeert en voor iedere z met $\text{Re}z < \lambda$ divergeert. Het getal λ heet de convergentieabscis der reeks.

Geheel op analoge wijze vindt men het bestaan van een getal dat de abscis is van absolute convergentie. Verder volgt nog uit het gevondene dat $0 \leqq \mu - \lambda \leqq 1$.

Evenals men bij de reeksen een voorstelling heeft voor de convergentiestraal R (nl. $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$) bestaat er een formule voor de convergentieabscis λ.

Over de convergentieabscis van de reeksen (1) en (2) bewijzen wij thans de volgende

<u>Stelling van Landau</u>

Zij $\alpha = \overline{\lim_{N\to\infty}} \dfrac{\log|\sum_{0}^{N} a_n|}{\log N}$; $\beta = \overline{\lim_{N\to\infty}} \dfrac{\log|\sum_{n=N}^{\infty} a_n|}{\log N}$.

Indien de convergentieabscis λ van de reeksen (1) en (2) voldoet aan $\lambda \geqq 0$, dan is $\lambda = \alpha$. Indien echter < 0, dan is $\lambda = \beta$.

<u>Opmerking</u>. In het laatste geval zijn de reeksen (1) en (2) convergent voor $z = 0$, d.w.z. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent en het getal β bestaat òf $\beta = -\infty$.

<u>Bewijs</u>: Wij beschouwen de reeks

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q_n , \quad q_n = (-)^n a_n \binom{z-1}{n} .$$

$$\text{Stel} \qquad t_n = (-)^n \binom{z-1}{n} = \frac{\Gamma(n-z+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1-z)} .$$

Dan geldt $q_n = a_n t_n$ en verder

$$\frac{t_n-t_{n+1}}{t_n} = 1-\frac{n-z+1}{n+2} = \frac{z+1}{n+2}\ ,\ t_n = \frac{n^{-z}}{\Gamma(1-z)}\,(1+O(\tfrac{1}{n}))\ .$$

Onderstel nu dat α eindig is. Dan leren de gevonden relaties voor een punt z met $\mathrm{Re}z = \alpha+\varepsilon$ voor voldoende grote n

$$(3)\qquad |t_n| < Kn^{-\alpha-\varepsilon}\ ;\quad |t_{n+1}-t_n| < Kn^{-\alpha-\varepsilon-1}\ ,$$

waarbij K (evenals elk der hierna in te voeren getallen $K_1, K_2, \ldots$) onafhankelijk is van n.

Stel verder $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Uit de definitie van α volgt voor voldoende grote N

$$|A_N| \leqq N^{\alpha+\frac{1}{2}\varepsilon}\ .$$

Dan leert partiële sommatie

$$\sum_{n=h}^{k} q_n = \sum_{n=h}^{k} a_n t_n = \sum_{n=h}^{k} (t_n-t_{n+1})A_n - t_h A_{h-1} + t_{k+1}A_k\ ,$$

dus voor voldoende grote h

$$(4)\qquad \left|\sum_{n=h}^{k} q_n\right| \leqq K\sum_{n=h}^{k} n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon} + K_1 h^{-\frac{1}{2}\varepsilon} + Kk^{-\frac{1}{2}\varepsilon}$$

$$\leqq K_2\left(\frac{k^{-\frac{1}{2}\varepsilon}}{\frac{1}{2}\varepsilon} + h^{-\frac{1}{2}\varepsilon} + k^{-\frac{1}{2}\varepsilon}\right) \to 0 \text{ voor } h\to\infty.$$

Het convergentiecriterium van Cauchy leert ons dan de convergentie van de reeks (1).

Onderstel thans dat β eindig is. Dan leren de gevonden relaties voor een punt z met $\mathrm{Re}z = \beta+\varepsilon$ voor voldoende grote n

$$|t_n| < K_3 n^{-\beta-\varepsilon}\ ,\quad |t_{n+1}-t_n| < K_3 n^{-\beta-\varepsilon-1}\ .$$

Stelt men $B_N = \sum_{n=N}^{\infty} b_n$, dan geldt op grond van de definitie van β voor voldoende grote N

$$|B_N| \leqq N^{\beta+\frac{1}{2}\varepsilon}\ .$$

Partiële sommatie leert nu

$$\sum_{n=h}^{k} q_n = \sum_{n=h}^{k} a_n t_n = \sum_{n=h}^{k-1} (t_{n+1}-t_n)B_{n+1} + t_h B_h - t_k B_{k+1}\ .$$

Hieruit volgt wederom relatie (4) met eventueel een andere constante K_3 in plaats van K_2. Dus ook nu convergeert de reeks (1). De resultaten samenvattende zien wij dus dat de reeks (1) convergeert in een punt $\alpha+\varepsilon$ (als α eindig is) resp. $\beta+\varepsilon$ (als β eindig is), dus

$$\lambda \leqq \alpha \text{ (als } \alpha \text{ eindig is) en } \lambda \leqq \beta \text{ (als } \beta \text{ eindig is).}$$

Thans bewijzen wij de relaties $\lambda \geqq \alpha$ resp. $\lambda \geqq \beta$ al naar $\lambda \geqq 0$ of < 0 is.

Stel hiertoe $r_n = \frac{(-)^n n!}{(z-1)\ldots(z-n)}$.

Dan geldt $a_n = q_n r_n$ en verder

$$\frac{r_{n+1}-r_n}{r_n} = -\frac{n+1}{z-n-1} - 1 = \frac{z}{n+1-z}\ ;\ r_n = n^z\,\Gamma(1-z)(1+O(\tfrac{1}{n}))\ .$$

Derhalve

$$|r_n| < K_4 n^x\ ;\ |r_{n+1}-r_n| < K_4 n^{x-1}$$

voor voldoende grote n.

Stel verder $Q_N = Q_N(z) = \sum_{n=0}^{N} q_n$. Partiële sommatie leert hier

$$\sum_{n=h}^{k} a_n = \sum_{n=h}^{k-1} (r_{n+1}-r_n)Q_{n+1} - r_h Q_h + r_k Q_{k+1}\ .$$

Beschouw thans een punt z, waarvoor de reeks (1) convergeert, dus waarvoor $|Q_N(z)| < \varepsilon$ als N voldoende groot is. Hiervoor heeft men dan

(5) $$\Big|\sum_{n=h}^{k} a_n\Big| \leqq \varepsilon K_5 \Big(\sum_{n=h}^{k-1} n^{x-1} + h^x + k^x\Big).$$

Wij onderscheiden thans 3 gevallen.

1°: $x > 0$. Dan heeft men $\sum_{n=h}^{k-1} n^{x-1} < \frac{k^x}{x}$, dus

$$\Big|\sum_{n=0}^{k} a_n\Big| \leqq \Big|\sum_{n=0}^{h-1} a_n\Big| + \varepsilon K_5\Big(\frac{k^x}{x} + k^x + h^x\Big),$$

dus

(6) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\Big|\sum_{n=0}^{k} a_n\Big|}{k^x} = 0$$

2°: $x = 0$. Dan heeft men $\sum_{n=h}^{k-1} n^{-1} < \log k$, waaruit eveneens (6) volgt.

3°: $x < 0$. Dan vindt men door $k \to \infty$ te nemen uit (5)

$$\frac{\Big|\sum_{n=h}^{\infty} a_n\Big|}{h^x} \leqq \frac{\varepsilon K_5}{h^x}\Big(\sum_{n=h}^{\infty} n^{x-1} + 1\Big),$$

dus

(7) $$\lim_{h\to\infty} \frac{\Big|\sum_{n=h}^{\infty} a_n\Big|}{h^x} = 0\ .$$

Uit relatie (6) volgt nu verder voor voldoende grote k

$$\log\ \Big|\sum_{n=0}^{k} a_n\Big| < \log\varepsilon + x\log k\ ,$$

dus $\alpha \leqq x$, bijgevolg $\alpha \leqq \lambda$.

Uit relatie (7) besluit men evenzo tot $\beta \leqq \lambda$.

Wij vatten thans de gevonden resultaten samen.

Als $\lambda \geqq 0$ dan geldt $\lambda \geqq \alpha$; als $\lambda < 0$ dan geldt $\lambda \geqq \beta$.
Als α eindig is geldt $\lambda \leqq \alpha$; als β eindig is geldt $\lambda \leqq \beta$.
Deze resultaten zijn nog anders samen te vatten.

I. Onderstel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent. De definitie van β leert nu direct dat $\beta \leqq 0$. Verder houdt die convergentie in dat de reeks (1) convergeert voor $z = 0$, dus $\lambda \leqq 0$. Is $\lambda < 0$ dan geldt $\lambda \geqq \beta$ en, als bovendien $\beta \neq -\infty$ is, ook nog $\lambda \leqq \beta$, dus $\lambda = \beta$. Is echter $\lambda = 0$ dan geldt alweer als $\beta \neq -\infty$ is, de relatie $\beta \geqq \lambda = 0$, dus op grond van $\beta \leqq 0$ vindt men ook nu $\beta = \lambda$. Is $\beta = -\infty$ dan ziet men gemakkelijk in dat ook $\lambda = -\infty$. Immers men heeft dan
$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = O(N^{-t})$ voor elke positieve t. Dus ook $\sum_{n=N-1}^{\infty} a_n =$
$= O(N^{-t})$, derhalve $a_N = O(N^{-t})$.
Dan heeft men voor $\mathrm{Re} z = -t-2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)}$$

$$\ll K_6 \sum_{n=0}^{\infty} N^{-t-z-2} < \infty ,$$

dus voor elke eindige z zijn de reeksen (1) en (2) convergent. Bijgevolg heeft men bij convergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ steeds $\lambda = \beta \leqq 0$.
Beschouw nu het geval dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent is. Dan divergeert dus de reeks (1) voor $z = 0$; bijgevolg $\lambda \geqq 0$, dus $\lambda \geqq \alpha$. Is voorts $\alpha \neq \infty$, dan geldt ook nog $\lambda \leqq \alpha$, dus $\alpha = \lambda$. In het geval dat $\alpha = \infty$ is leert een analoge redenering als hierboven bij het geval $\beta = -\infty$ dat dan ook $\lambda = \infty$. Bijgevolg heeft men in het geval van divergentie van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ steeds $\alpha = \lambda \geqq 0$.

Wij zien dus tevens dat in het geval $\lambda > 0$ moet gelden $\lambda = \alpha$ en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeert. In het geval $\lambda < 0$ geldt $\lambda = \beta$ en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert. In het geval $\lambda = 0$ is het gedrag van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ onbeslist (vergelijk het a priori onbeslist zijn van de convergentie van een machtreeks op zijn convergentiecirkel).

Als voorbeeld van de theorie geven wij de formule van Waring.

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z(z+1)} + \frac{a(a+1)}{z(z+1)(z+2)} + \ldots$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^{(n)}}{(-z)^{(n+1)}} .$$

Stelt men

$$\frac{1}{z-a} = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-a)^n}{(-z)^{(n+1)}} + R_N \,,$$

dan vindt men gemakkelijk met volledige inductie of met behulp van opg. 1 blz.42

$$R_N = \frac{a(a+1)\ldots(a+N)}{z(z+1)\ldots(z+N)(z-a)} = \frac{\Gamma(z)}{(z-a)\,\Gamma(a)} \; \frac{\Gamma(a+N+1)}{\Gamma(z+N+1)} \,,$$

dus

$$R_N = \frac{\Gamma(z)}{(z-a)\,\Gamma(a)} \, N^{a-z} \, (1+O(\tfrac{1}{N})).$$

Derhalve $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = 0$ indien $\mathrm{Re}\, z > a$ en de convergentieabscis λ van de gevonden faculteitenreeks voor $\frac{1}{z-a}$ is dus gelijk aan a.

Bij de theorie der machtreeksen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ heeft men de bekende schatting van Cauchy $|a_n| < \frac{M}{R^n}$, waarbij R de convergentiestraal van de machtreeks voorstelt en M een passend gekozen constante. Wij leiden hier voor de faculteitenreeksen een analogon van dit theorema af.

In de bovenstaande theorie vonden wij voor de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

dat als $\lambda \geqq 0$, dan $\lambda = \alpha = \limsup\limits_{N\to\infty} \dfrac{\log |\sum_{n=0}^{N} a_n|}{\log N}$. Is echter $\lambda < 0$ dan vonden wij $\lambda = \beta < 0$. Stelt men nu $\lambda' = \max(0, \lambda)$, dan heeft men voor voldoende grote N

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| < N^{\lambda'+\varepsilon}.$$

Wegens

$$\binom{\lambda'+\varepsilon+N}{N} = \frac{\Gamma(\lambda'+\varepsilon+N+1)}{\Gamma(N+1)\,\Gamma(\lambda'+\varepsilon+1)} = \frac{N^{\lambda'+\varepsilon}}{\Gamma(\lambda'+\varepsilon+1)} \, (1+O(\tfrac{1}{N}))$$

geldt dus voor voldoende grote N

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| < K\binom{\lambda'+\varepsilon+N}{N} \,.$$

Hiermede is een analogon van Cauchy's formule gevonden, weliswaar dus niet voor a_N maar voor $\sum_{n=0}^{N} a_n$. Evenals de Cauchy-formule voor de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de majorantenformule

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ll M \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{z}{R})^n = \frac{MR}{z-R} = \frac{K}{z-R}$$

geeft, is er hier een dergelijke majorantenformule voor faculteitenreeksen waarbij we gebruik maken van de ontwikkeling van de analoge uitdrukking $\frac{K}{z-\lambda'-\varepsilon}$ in een faculteitenreeks. Wij gebruiken daartoe de formule van Waring

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \text{ voor } \frac{K}{z-\lambda'-\varepsilon}$$

welke absoluut convergent is voor $\mathrm{Re}\, z > \lambda' + \varepsilon$, waarbij

$$b_n = \frac{K(\lambda'+\varepsilon)\ldots(\lambda'+\varepsilon+n-1)}{n!} .$$

Zoals men gemakkelijk door volledige inductie aantoont, geldt

$$\sum_{n=0}^{N} b_n = K\binom{\lambda'+\varepsilon+N}{N} .$$

Bijgevolg heeft men

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| < \sum_{n=0}^{N} b_n$$

en de reeks van Waring treedt hier in zekere zin op als majorante van de beschouwde faculteitenreeks. Het majorantenprincipe van gewone reeksen (hetgeen inhoudt dat uit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergent is als $|a_n| < b_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergent is) geldt m.m. ook voor faculteitenreeksen.

Zij n.l. de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

convergent in een punt z_0, dat niet op de convergentieabscis λ_b, die wij positief onderstellen, ligt. Zij verder

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| < \left|\sum_{n=0}^{N} b_n\right| .$$

Dan is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \text{ ook convergent in } z_0.$$

Immers als de convergentieabscis λ_a van de a-reeks < 0 is, is de bewering triviaal. Is echter $\lambda_a \geqq 0$, dan heeft men

$$\mathrm{Re}\, z_0 > \lambda_b = \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\log\left|\sum_{n=0}^{N} b_n\right|}{\log N} \geqq \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\log\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right|}{\log N} = \lambda_a,$$

dus de a-reeks convergeert voor $z = z_0$.

Tenslotte merken wij nog op dat de ontwikkeling van een functie $f(z)$ in de gedaante $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$ eenduidig is. Immers had deze functie ook een ontwikkeling met coëfficiënten b_n in plaats van a_n, dan vindt men voor $\mathrm{Re}\, z \to \infty$ de relatie $a_0 = b_0$. Beschouw nu $z(f(z)-a_0)$. Voor $\mathrm{Re}\, z \to \infty$ vindt men nu $a_1 = b_1$, enz.

Als een voorbeeld van een ontwikkeling in faculteitenreeksen behandelen wij het quotiënt van $z^{(m+1)}$ en z^{m+1} voor natuurlijke m en $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Uit de formule

$$\Gamma(m+1) = \int_0^\infty e^{-u} u^m \, du$$

volgt gemakkelijk door de substitutie $u = -z \log t$

$$\frac{\Gamma(m+1)}{z^{m+1}} = \int_0^1 t^{z-1} (\log \tfrac{1}{t})^m dt.$$

Thans gebruiken wij de formule (10) van blz. 19, welke ons (met t in plaats van t+1) voor $|t-1| < 1$ leert

$$\left(\frac{\log t}{t-1}\right)^m = \sum_{h=0}^\infty \frac{(t-1)^h}{h!} \frac{m}{h+m} B_h^{(h+m)} ,$$

dus

$$\frac{\Gamma(m+1)}{z^{m+1}} = \int_0^1 \sum_{h=0}^\infty \frac{(1-t)^{m+h}(-)^h t^{z-1}}{h!} \frac{m}{h+m} B_h^{(h+m)} dt$$

$$= \sum_{h=0}^\infty \frac{\Gamma(m+h+1)\,\Gamma(z)}{\Gamma(z+m+h+1)} \frac{(-)^h m}{h!(h+m)} B_h^{(h+m)} .$$

Bij gevolg heeft men

$$\frac{z^{(m+1)}}{z^{m+1}} = \frac{\Gamma(z+m+1)}{z^{m+1}\,\Gamma(z)} = \sum_{h=0}^\infty \frac{(-)^h m}{h+m} B_h^{(h+m)} \frac{\Gamma(m+h+1)}{h!\,\Gamma(m+1)} \cdot \frac{\Gamma(m+z+1)}{\Gamma(m+z+h+1)}$$

$$= \sum_{h=0}^\infty \binom{-m}{h} B_h^{(h+m)} (m+z)^{(-h)} .$$

§ 10. De operatoren R en P.

Bij het oplossen van zeker type differentievergelijkingen blijkt het nuttig gebruik te maken van twee nog niet eerder ingevoerde operatoren P en R, die wij reeds hier willen beschouwen en die ook voor de theorie der faculteitenreeksen van belang zijn.

Definitie. $R\, u(x) = (x-r)u(x-1)$ (r vast)

Opmerking. Is eenmaal het vaste getal r gekozen dan schrijven wij voortaan wel $x' = x-r$.

Gevolg. $R\, u(x) = \dfrac{\Gamma(x-r+1)}{\Gamma(x-r)} E^{-1} u(x) = \dfrac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x')} E^{-1} u(x).$

Hieruit volgt verder voor willekeurige natuurlijke m

(1) $$R^m u(x) = \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} E^{-m} u(x) ,$$

zoals men gemakkelijk door volledige inductie bewijst.

Opg. 1. Voer dit uit.

Ook voor willekeurige m wordt $R^m u(x)$ gedefinieerd en wel met de formule (1).

Stelling. $R^{m+n}u(x) = R^m R^n u(x)$, geldig voor willekeurige m en n.

Bewijs: $R^m R^n u(x) = \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} E^{-m}\left(\frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-n)} E^{-n}u(x)\right)$

$$= \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} \frac{\Gamma(x'+1-m)}{\Gamma(x'+1-m-n)} E^{-m-n}u(x) = R^{m+n}u(x) .$$

Verder heeft men nog

$$R^m(u+v) = R^m u + R^m v;\ R^m cu = cR^m u \quad (c \text{ constant}).$$

Opg. 2. Bewijs dit.

Definitie. $R^m = R^m 1$.

Gevolg. $R^m = \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} = x'^{(m)}$.

Een belangrijk verder resultaat dat hieruit volgt is dat de faculteitenreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n)}$ nu in de gedaante

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad (\text{met } x' = x)$$

geschreven kan worden. Voor de faculteitenreeks van de tweede soort $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(-n)}$ heeft men dan de gedaante

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(-n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^{-n} .$$

Met behulp van de operator R zijn faculteitenreeksen dus formeel als machtreeksen te schrijven.

Thans voeren wij ook nog de operator P in, welke weliswaar minder te maken heeft met de faculteitenreeksen maar wel met de operator R. Ook de operator P hangt af van r. Wij definiëren

$$Pu(x) = x' \nabla u(x) \qquad (x' = x-r).$$

Verder definiëren wij door volledige inductie $P^n u(x)$ voor natuurlijke n en wel bv. $P^{n+1}u(x) = PP^n u(x)$. Dan geldt

Stelling. $P^{n+m}u(x) = P^n P^m u(x)$.

Bewijs: Voor n = 1 volgt deze eigenschap uit de vorige definitie, terwijl men, als ze voor zekere n geldt, vindt

$$P^{n+m+1}u(x) = PP^{n+m}u(x) = PP^n P^m u(x) = P^{n+1}P^m u(x).$$

Verder heeft men $P(u+v) = Pu+Pv$ en voor constante c ook nog $P(cu) = cPu$.

Stelling. $(P+R)u(x) = x'u(x)$.

Bewijs: $(P+R)u(x) = x' \nabla u(x) + x'E^{-1}u(x) = x'u(x)$.

Stelling. $P^n R^m u(x) = R^m (P+m)^n u(x)$.
Bewijs: Wij tonen de stelling aan voor $n = 1$. Is dit nl. geschied, dan heeft men de stelling voor gehele $n \geq 0$ aannemende

$$P^{n+1} R^m u(x) = P P^n R^m u(x) = P R^m (P+m)^n u(x) = R^m (P+m)(P+m)^n u(x)$$
$$= R^m (P+m)^{n+1} u(x).$$

Thans dus het bewijs voor $n = 1$. Men heeft dan

$$PR^m u(x) = P \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} E^{-m} u(x) = x' \nabla \left\{ \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} E^{-m} u(x) \right\}$$

$$= x'(E^{-m-1} u(x)) \nabla \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} + x' \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} E^{-m} \nabla u(x)$$

$$= m \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} E^{-m-1} u(x) + \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} x'.E^{-m} \nabla u(x)$$

$$= m \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} E^{-m} u(x) + \frac{\Gamma(x'+1)}{\Gamma(x'+1-m)} (x'-m) E^{-m} \nabla u(x)$$

$$= R^m (m+P) u(x).$$

Stelling. $P^{(n)} u(x) = x'^{(n)}. \nabla^n u(x)$.
Bewijs: Voor $n = 1$ is de bewering triviaal. Uit haar geldigheid voor zekere natuurlijke n volgt

$$P^{(n+1)} u(x) = P^{(n)} (P-n) u(x) = P^{(n)} (x' \nabla u(x) - n u(x))$$

$$= x'^{(n)} \nabla^n \left\{ x' \nabla u(x) - n u(x) \right\} = x'^{(n)} \left\{ x' \nabla^{n+1} u(x) + n \nabla^n E^{-1} u(x) - \right.$$
$$\left. - n \nabla^n u(x) \right\}$$

$$= x'^{(n)} \left\{ x' \nabla^{n+1} u(x) - n \nabla^{n+1} u(x) \right\} = x'^{(n+1)} \nabla^{n+1} u(x).$$

Tenslotte merken wij nog op dat $P = P.1 = 0$, dus $P^n = P^n.1 = 0$ voor $n > 0$. Hieruit vindt men direct

$$P^n R^m = R^m (P+m)^n = R^m m^n = m^n R^m.$$

Als gevolg hiervan heeft men voor veeltermen $f(t)$ de belangrijke relatie

(2) $$f(P) R^m = f(m) R^m.$$

Toepassing. Gevraagd wordt de functie $(x^2+3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n)}$ als faculteitenreeks te schrijven. Dit geschiedt nu als volgt

$$(x^2+3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n)} = ((P+R)(P+R)+3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$= (P^2+RP+PR+R^2+3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^2 R^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n R^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n R^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n R^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n^2+n+4)a_n+(n-1)a_{n-1}+a_{n-2}\right\}R^n \qquad (\text{met } a_{-1}=a_{-2}=0).$$

Wij gebruiken thans nog de eigenschap

$$(R+P)^{(n)} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} R^h P^{(n-h)} .$$

Opg.3. Bewijs deze.

Als gevolg hiervan kan men het product van twee faculteitenreeksen weer in de gedaante van een faculteitenreeks schrijven. Immers men heeft

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (R+P)^{(n)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m R^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{n} a_n b_m \binom{n}{h} R^h P^{(n-h)} R^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{n} a_n b_m \binom{n}{h} R^{h+m} m^{(n-h)}$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=h}^{\infty} a_n b_m \binom{n}{h} m^{(n-h)} R^{h+m}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R^k . \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=k-m}^{\infty} a_n b_m \binom{n}{k-m} m^{(n+m-k)} .$$

Dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(n)} . \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{(k)}$$

met

$$c_k = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=k-m}^{\infty} a_n b_m \binom{n}{k-m} m^{(n+m-k)} .$$

Voor natuurlijke n voeren wij nog het symbool P^{-n} in. Het is voldoende om P^{-1} in te voeren. Dan volgt $P^{-n}u$ uit $P^{-n}u=P^{-1}P^{-(n-1)}u$.

Men wenst verder $P^{-1}u = v$ dan en slechts dan als $u = Pv$, dus $u = x' \nabla v$ is. Dus $\nabla v = u/x'$ en $\Delta v = \frac{u(x+1)}{x'+1}$. Hoewel hiermede v niet bepaald is zullen wij afspreken dat $P^{-1}u$ een hoofdoplossing dezer differentievergelijking is, d.w.z.

$$P^{-1}u(x) = \mathop{S}_{c}^{x} \frac{u(t+1)}{t-r+1}\,\Delta t.$$

§ 11. Differentievergelijkingen (inleiding).

In deze en de volgende paragraaf houden wij ons bezig met het oplossen van differentievergelijkingen, dat zijn relaties die een verband uitdrukken tussen een nader op te sporen functie $u(x)$, haar differenties $\Delta u(x),\ldots,\Delta^n u(x)$ en de onafhankelijk veranderlijke x, of, wat op hetzelfde neerkomt, tussen $u(x)$, $Eu(x),\ldots,E^n u(x)$ en x. De eigenaardige problemen die zich hierbij kunnen voordoen merkten wij in § 6 reeds op bij de allereenvoudigste differentievergelijking $\Delta u(x)=f(x)$, waarbij $f(x)$ een gegeven functie voorstelt. Evenals men bij het oplossen van een differentiaalvergelijking tevreden is als men deze terugbrengt tot een aantal integraties, stellen wij ons hier tevreden met de reductie van het probleem tot dat van een sommatieprobleem in de zin van § 6, dus het oplossen van een vergelijking van het type $\Delta u(x)=f(x)$. Bijvoorbeeld bij de differentievergelijking $x\,\Delta u+u=\sin x$ merken wij op, dat $\Delta((x-1)u) = x\,\Delta u+u$, dus men heeft

$$(1)\qquad \Delta((x-1)u) = \sin x\,.$$

bijgevolg

$$(x-1)u = \mathop{S}_{c}^{x} \sin t\,\Delta t$$

en

$$u = \frac{1}{x-1}\mathop{S}_{c}^{x} \sin t\,\Delta t.$$

Het is hier van belang op te merken, dat de som $\mathop{S}^{x} \sin t\,\Delta t$ niet de enige oplossing is van (1), maar dat iedere functie die hierin verschilt in een functie $\omega(x)$ die periodiek is met periode 1 eveneens aan (1) voldoet, zodat wij de meer algemene oplossing

$$u = \frac{1}{x-1}\left\{\mathop{S}_{c}^{x} \sin t\,\Delta t + \omega(x)\right\}$$

vinden. Dat wij hiermee de meest algemene oplossing hebben gevonden zal later blijken; in het onderhavige geval is dit trouwens zonneklaar.

Bovenstaand voorbeeld is vooral van belang om te laten uitkomen dat de rol die integratieconstanten spelen in de theorie der differentiaalvergelijkingen in de theorie der differentievergelijkingen wordt gespeeld door een functie $\omega(x)$ die periodiek is met periode 1. Wij zullen voortaan dergelijke functies kortweg ω-functies noemen en soms kortweg ω in plaats van $\omega(x)$ schrijven.

Een andere analogie dient hierbij vermeld te worden. Vraagt men naar de differentiaalvergelijking waarvan de algemene oplossing luidt

$f(x,y,c)=0$ dan vindt men deze zoals bekend is door eliminatie van c uit $f(x,y,c)=0$ en de relatie

$$\frac{\partial f(x,y,c)}{\partial x} + y'\frac{\partial f(x,y,c)}{\partial y} = 0$$

die hieruit door differentiëren ontstaat. Natuurlijk voldoet de betrekking $f(x,y,c)=0$ ook aan het eliminatie resultaat dat men krijgt door eliminatie van c uit $f(x,y,c)=0$ en de hieruit door differentienemen verkregen relatie. Het is echter duidelijk, dat men hetzelfde eliminatieresultaat vindt als men ω elimineert uit $f(x,y,\omega)=0$ en het hieruit door differentienemen verkregen resultaat (of zo men wil het resultaat dat hieruit wordt gevonden door x door $x+1$ te vervangen).

Voorbeeld 1. $u(x)=\omega x+\omega^2$. Na differentienemen vindt men $\Delta u(x)=\omega$, dus na eliminatie $u=x\,\Delta u+(\Delta u)^2$.

Opgave 1. Behandel het analoge geval bij differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 2. $u(x)=\omega_1 x+\omega_2 x^3+1$. Men verkrijgt hier uiteraard een differentievergelijking van de tweede orde, omdat de twee functies ω_1 en ω_2 geëlimineerd moeten worden. Wij vinden

$$Eu = \omega_1(x+1) + \omega_2(x+1)^3 + 1,$$

$$E^2u= \omega_1(x+2) + \omega_2(x+2)^3 + 1,$$

dus na eliminatie van ω_1 en ω_2 uit het nu verkregen drietal lineaire relaties in ω_1 en ω_2

$$\begin{vmatrix} u-1 & x & x^3 \\ Eu-1 & x+1 & (x+1)^3 \\ E^2u-1 & x+2 & (x+2)^3 \end{vmatrix} = 0,$$

hetgeen zich, afgezien van de factor $x+1$, laat schrijven in de gedaante

$$x(2x+1)\,E^2u - 4x(x+2)\,Eu + (x+2)(2x+3)u = 6$$

of, met behulp van de operator Δ, in de vorm

$$x(2x+1)\,\Delta^2u - 6x\,\Delta u + 6u = 6$$

Gaarne zagen wij nu omgekeerd een systematisch procédé om bovenstaande differentievergelijking op te lossen.

Opgave 2. Construeer de differentiaalvergelijking met als algemene oplossing

$$y = c_1x+c_2x^2+1.$$

Zoals men de differentiaalvergelijkingen indeelt naar orde (dat is de orde der hoogste erin optredende afgeleide) en graad (waarbij vooral de lineaire van belang zijn; dat zijn die waarin $y,y',\dots,y^{(n)}$

lineair optreden), kan men ook de differentievergelijkingen op analoge wijze indelen naar orde en graad. Hierbij is speciaal van belang (en ook wat de theorie betreft, het verste ontwikkeld) de lineaire differentievergelijking (van willekeurige eindige orde) al of niet met constante coëfficiënten. Terwijl de betreffende differentiaalvergelijkingen volgens de theorie van Frobenius met machtreeksen worden opgelost, geschiedt de oplossing dezer differentievergelijkingen met behulp van faculteitenreeksen (verg. § 13). Vooraf laten wij echter gaan de theorie der lineaire differentievergelijking van de eerste orde en van de lineaire differentievergelijking met constante coëfficiënten.

Er is nog een belangrijke opmerking te maken bij de theorie der differentievergelijkingen. Beschouw als illustratie de differentievergelijking van de eerste orde

$$(2) \qquad \Delta u = f(u,x).$$

Is de waarde van u voorgeschreven in een interval $a \leqq x < a+1$ (of bij complexe z in plaats van x in een strook $a \leqq \operatorname{Re} z < a+1$), dan wordt door (2) de waarde van u overal vastgelegd. Daartoe is dus een verder gaand gegeven nodig dan - zoals dat in de theorie der differentiaalvergelijkingen geschiedt - alleen het voorschrijven van de waarde van $u(x)$ in één gegeven punt.

Indien echter uit (2) slechts de waarde van $u(x)$ voor gehele waarden van x behoeft te worden bepaald, dan is natuurlijk het voorschrijven van de waarde van $u(x)$ in één gegeven punt x_o (x_o geheel) wel voldoende en verkeert men in een geval dat meer overeenkomst heeft met dat der differentiaalvergelijkingen. Wij zullen dergelijke gevallen later nog wel tegenkomen, maar geven nu reeds een

Voorbeeld. Bepaal de waarde van $u(x)$ voor gehele x uit $u(o)=1$, $\Delta u(x) = xu(x)$.

Oplossing. Men heeft $u(x+1) = (x+1)\, u(x)$, dus uit $u(o)=1$ vindt men direct $u(x) = (x+1)! = \Gamma(x+2)$.

Opmerking. De hier gevonden oplossing is voor niet gehele x geenszins de meest algemene oplossing van de gegeven differentievergelijking met beginvoorwaarde. De functie $\Gamma(x+2)e^{\sin 2\pi x}$ voldoet bijvoorbeeld ook.

§ 12. Lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde.

Wij beschouwen thans de differentievergelijking

$$(1) \quad a(x)\, \Delta u(x) + b(x)u(x) = r(x).$$

en laten zien, dat deze op een soortgelijke wijze kan worden behandeld als de differentiaalvergelijking

$$a(x)y' + b(x)y = r(x).$$

Opgave 1. Los deze differentiaalvergelijking op.

Onderstellen wij, dat een particuliere oplossing $u_1(x)$ van (1) is gevonden, dan vindt men voor $v(x) = u(x) - u_1(x)$ de homogene relatie

$$(2) \qquad a(x) \Delta v(x) + b(x) v(x) = 0.$$

Omgekeerd geeft elke oplossing v van deze vergelijking aanleiding tot een oplossing $v+u_1$ van (1). (Dit is trouwens een bijzonder geval van een algemene stelling bij lineaire inhomogene differentievergelijkingen; zie § 13).

De vergelijking (2) is te schrijven in de vorm

$$v(x+1) - A(x)\, v(x) = 0$$

met

$$A(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x)}.$$ Hieruit vindt men

$$(3) \qquad \Delta \log v(x) = \log v(x+1) - \log v(x) = \log A(x).$$

Is eenmaal één oplossing $v_1(x)$ gevonden, die aan deze vergelijking voldoet, dan vindt men

$$\Delta \log \frac{v(x)}{v_1(x)} = 0,$$

dus $\log \frac{v(x)}{v_1(x)}$ is een ω-functie, $v(x) = v_1(x)\,\omega(x)$ en

$$(4) \qquad u(x) = u_1(x) + \omega(x)v_1(x).$$

Het bepalen van een particuliere oplossing v_1 van (3) gaat soms direct, soms echter slechts door te schrijven

$$\log v_1(x) = \mathop{\mathrm{S}}_c^x \log A(t) \,\Delta t \quad .$$

Men vindt dan dus

$$v(x) = \omega(x) \; e^{\mathop{\mathrm{S}}_c^x \log A(t) \,\Delta t}$$

Voor complexe x is de laatste e-macht zoals wij in § 7 zagen onder bepaalde onderstellingen over $A(t)$ een analytische functie van x, dat is dan ook het geval met $v(x)$ zodra $\omega(x)$ het is.

Om nu de vergelijking (1) op te lossen schrijft men $u(x)=v(x)w(x)$, waarbij voor $v(x)$ een oplossing van (2) wordt genomen. Dan vindt men na inzetten in (1) onder gebruikmaking van (2)

$$(av - bv)\Delta w = r,$$

dus

$$w = \omega + \mathop{S}_{c}^{x} \frac{r}{(a-b)v} \, \Delta t$$

en tenslotte (vergelijk (4))

$$u = e^{\mathop{S}_{c}^{x} \log \frac{a-b}{a} \, \Delta t} \left\{ \omega + \mathop{S}_{c}^{x} \frac{r}{(a-b)} \, e^{-\mathop{S}_{c}^{t} \log \frac{a-b}{a} \, \Delta s} \, \Delta t \right\}$$

Voorbeeld.

$$x \, \Delta u + u = x^2 .$$

De oplossing v der bijbehorende homogene vergelijking voldoet aan

$$x \, v(x+1) = (x-1) \, v(x).$$

Men ziet onmiddellijk dat een oplossing hiervan luidt

$$v(x) = \frac{1}{x-1} .$$

Stelt men nu $u = vu_1$ dan vindt men $\Delta u_1 = \frac{x^2}{(x-1)v} = x^2$.

Dus $u_1 = \frac{1}{3} B_3(x)$ en

$$u = \frac{1}{x-1} \left\{ \frac{1}{3} B_3(x) + \omega \right\} .$$

De differentievergelijking

$$u(x+1) = a(x) \, u(x),$$

waarbij a(x) een rationale functie is

$$a(x) = c \, \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)\ldots(x-b_m)}$$

bezit kennelijk als oplossing

$$u(x) = c^x \, \frac{\Gamma(x-a_1)\ldots\Gamma(x-a_n)}{\Gamma(x-b_1)\ldots\Gamma(x-b_m)} ,$$

waaruit de meest algemene oplossing volgt na vermenigvuldiging met een ω-functie. Als toepassing geven wij de

Opgave 1. Los op de differentievergelijking

$$(ax+b) \, u(x+1) + (cx+d) \, u(x) = 0.$$

Wij vermelden thans zonder verder op de theorie in te gaan, dat analoog aan de theorie der totale differentiaalvergelijkingen een theorie van totale differentievergelijkingen bestaat, dat is een theorie van vergelijkingen van het type

$$A(x,u) + B(x,u,\Delta u)\Delta u=0$$

waarbij een functie $f(x,u)$ te vinden is zodanig, dat

$$\Delta f(x,u) = A(x,u) + B(x,u,\Delta u)\Delta u.$$

Bij niet totale differentievergelijkingen speelt natuurlijk de theorie der sommerende factoren ("multiplyers") een rol.

Andere uit de theorie der differentiaalvergelijkingen af te lezen beproefde methoden bieden ook hier wel eens hulp, zo b.v. het extra differentienemen. Zoals dat bij de differentiaalvergelijkingen van nut is voor de differentiaalvergelijking van Clairaut is dat hier van nut bij de analoge differentievergelijking

$$u = x\ \Delta u+f(\Delta u).$$

Hieruit vindt men dan $\Delta u=v$ stellende

$$v = (x+1)v(x+1)-xv(x) + f(v+\Delta v)-f(v),$$

dus

$$0 = (x+1)\ \Delta v + f(v+\Delta v) - f(v).$$

Hieruit volgt hetzij $\Delta v=0$, dus $v=\omega$ en $u=x\omega+f(\omega)$ hetzij

$$0 = x+1 + \frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta v},$$

hetgeen tot een singuliere oplossing leidt.

Voorbeeld. Wij beschouwen de in § 11 als voorbeeld 1 gestelde vergelijking

$$u = x\ \Delta u+ (\Delta u)^2.$$

Men vindt dan $u=\omega x+\omega^2$ en verder een singuliere oplossing uit

$$0 = x+1 + \frac{(v+\Delta v)^2-v^2}{\Delta v} = x+1+2v+\Delta v.$$

Bijgevolg

$$v(x+1)+v(x) = -x-1.$$

De theorie van de aanvang dezer paragraaf leert nu, dat de homogene vergelijking $v(x+1)+v(x)=0$ een oplossing $v(x)=(-)^x$ bezit en stelt men dan $v=(-)^x w$, dan vindt men voor $w(x)$ de differentievergelijking

$$\Delta w(x) = (-)^{x+1}\ (x+1).$$

Een oplossing hiervan is $(-)^x\ (\frac{x}{2}+\frac{1}{4})$; bijgevolg $v=\omega(-)^x-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$.

Eliminatie van v hieruit en uit de oorspronkelijke vergelijking (analoog dus aan de werkwijze bij Clairaut) levert ons

$$u = (\omega(-)^x - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{4}x^2.$$

Ook is een theorie ontwikkeld handelende over differentievergelijkingen van de eerste orde, waarin hetzij u, hetzij x ontbreekt en eveneens is het analogon van de differentiaalvergelijking van Riccati, hetwelk luidt

$$u(x)u(x+1)+p(x)u(x+1)+q(x)u(x)+r(x)=0,$$

nader onderzocht. Ook daarop gaan wij hier niet verder in.

Tenslotte merken wij nog op dat bij differentievergelijkingen van de n^e orde waarvan één oplossing u_1 bekend is de oplossing terug te brengen is tot die van een $(n-1)^e$ orde vergelijking door de uit de theorie der differentiaalvergelijkingen welbekende substitutie $u=u_1 v$.

§12. De lineaire differentievergelijking.

Wij beschouwen thans de lineaire differentievergelijking van de n^e orde

(1) $L(u)=a(z)$, met $L(u)= a_n(z)\ \Delta^n u(z)+\dots+a_1(z)\Delta u(z)+a_0(z)u(z)$.

Is $a(z)=0$, dan noemt men de vergelijking homogeen; is $a(z)\neq 0$ dan inhomogeen. Geheel als in de theorie der differentiaalvergelijkingen bewijst men dat de meest algemene oplossing van de inhomogene vergelijking te schrijven is in de gedaante $u_0(z)+u(z)$, waarbij $u_0(z)$ een particuliere oplossing is van de inhomogene vergelijking en $u(z)$ de meest algemene oplossing is van de homogene vergelijking. Immers men heeft

$$L(\omega u)= \omega L(u) \qquad (\omega \text{ is een } \omega\text{-functie}),$$
$$L(u_1+u_2)=L(u_1)+L(u_2),$$

dus uit $L(u)=a(z)$ en $L(u_0)=a(z)$ volgt $L(u-u_0)=L(u)-L(u_0)=0$ en omgekeerd leiden de relaties $L(u_0)=a(z)$ en $L(u)=0$ tot

$$L(u+u_0)=L(u)+L(u_0)=a(z).$$

De behandeling van het probleem komt dus neer op het bepalen van één particuliere oplossing u_0 der inhomogene vergelijking en de meest algemene u der homogene vergelijking.

De beschouwde differentievergelijking $L(u)=0$ kan men ook schrijven in de gedaante $b_n(z)u(z+n)+b_{n-1}(z)u(z+n-1)+\dots+b_1(z)u(z+1)+b(z)u(z)=0$

Dan neemt men hiervoor de volgende punten singulier:

1e: de nulpunten $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ van $b_0(z)$;
2e: de essentiële singulariteiten $\beta_1, \beta_2, \dots$ van $b_0(z), b_1(z), \dots, b_n(z)$;
3e: de nulpunten $\gamma_1, \gamma_2 \dots$ van $b_n(z-n)$.

De punten $\alpha_i - m$, $\beta_i - m$, $\beta_i + n + m$, $\gamma_i + m$ (m geheel) heten congruent met singuliere punten. (I.h.a. noemt men twee punten p en q congruent als p-q geheel is).

Is een oplossing $u(z)$ voorgeschreven in de strook $0 \leqq \mathrm{Re}\, z < n$, dan vindt men uit $L(u)=0$ door oplossen ook de waarde van $u(z+n)$, dus de waarde der oplossing in de strook $n \leqq \mathrm{Re}\, z < n+1$, enz. en door oplossen van $u(z)$ vindt men omgekeerd de waarde der oplossing in de strook $-1 \leqq \mathrm{Re}\, z < 0$, enz. Zo vindt men dus direct de functie $u(z)$ voor alle z (behalve de singuliere of daarmee congruente). Zou men b.v. in de strook $\nu-1 \leqq \mathrm{Re}\, z < \nu$ $(\nu = 1, \dots, n)$ hebben voorgeschreven dat $u(z)=\omega_\nu(z)$ moet zijn, dan vindt men direct dat $u(z)=\omega_1(z)u_1(z)+\dots+\omega_n(z)u_n(z)$ niet alleen geldt in de strook $0 \leqq \mathrm{Re}\, z < n$ (hier is $u_\nu(z)=1$ in $\nu-1 \leqq \mathrm{Re}\, z < \nu$ en elders in $0 \leqq \mathrm{Re}\, z < n$ geldt $u_\nu(z)=0$), maar op grond van de lineariteit van de operator L ook in alle z waar met het hierboven uiteengezette procédé $u(z)$ te vinden is. Natuurlijk behoeft de hier gevonden oplossing $u(z)$ geenszins continu te zijn op de rechten $\mathrm{Re}\, z = m$ (m geheel). Bij willekeurige (zelfs bij analytische) beginstrook-voorwaarden behoeft blijkbaar geen analytische oplossing te behoren.

Op grond van de ervaringen van de theorie der homogene lineaire differentiaalvergelijkingen verwacht men dat de meest algemene oplossing u der homogene vergelijking wel eens de gedaante

(2) $$u=\omega_1 u_1+\dots+\omega_n u_n$$

zou kunnen bezitten, waarbij $\omega_1, \dots, \omega_n$ willekeurige ω-functies zijn en van de functies $u_1, \dots, u_n$ wordt ondersteld dat ze ω-onafhankelijk zijn.

Hierbij noemt men n functies $u_1, \dots, u_n$ ω-onafhankelijk als er ω-functies $\omega_1, \dots, \omega_n$ (niet allen identiek nul) en een punt z bestaan zodanig dat

(3) $$\omega_1(z)u_1(z)+\dots+\omega_n(z)u_n(z)\neq 0$$

is. (Opmerking: Hier en in het vervolg wordt, tenzij het tegendeel wordt gemeld, ondersteld dat de beschouwde punten z niet congruent zijn met een singulier punt). Bestaat er niet zo'n punt z, dan heten die functies ω-afhankelijk. Om te onderzoeken of n gegeven functies, die voldoen aan de differentievergelijking $L(u)=0$ ω-onafhankelijk zijn, voeren wij de determinant

$$C(x)=\begin{vmatrix} u_1(z)\dots u_n(z) \\ \Delta u_1(z)\dots \Delta u_n(z) \\ \dots\dots\dots \\ \Delta^{n-1}u_1(z)\dots\Delta^{n-1}u_n(z)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(z)\dots u_n(z) \\ u_1(z+1)\dots u_n(z+1) \\ \dots\dots\dots \\ u_1(z+n-1)\dots u_n(z+n-1)\end{vmatrix}$$

van Casorati in. Hierover bewijzen wij allereerst de volgende

<u>Stelling</u>: Is $C(z)=0$, dan zijn $u_1(z),\ldots,u_n(z)$ ω-afhankelijk en omgekeerd.

<u>Bewijs</u>: Zij $C(z)=0$. Noem de minoren van de laatste rij van $C(z)$ resp. $m_1(z),\ldots,m_n(z)$. Dan heeft men

(4) $\quad m_1(z)u_1(z+\nu)+\ldots+m_n(z)u_n(z+\nu)=0 \quad (\nu=0,1,\ldots,n-1).$

De minoren van de eerste rij van $C(z)$ zijn kennelijk $m_1(z+1),\ldots,m_n(z+1)$. Daar bij een determinant die nul is volgens een bekende stelling de corresponderende minoren van verschillende rijen een evenredigheid vormen, heeft men

$$\frac{m_i(z+1)}{m_j(z+1)}=\frac{m_i(z)}{m_j(z)} \qquad (i,j=1,\ldots,n),$$

dus de functie $\dfrac{m_i(z)}{m_j(z)}$ is een ω-functie, die wij $\dfrac{\omega_i(z)}{\omega_j(z)}$ noemen. Dan leert (4)

(5) $\quad \omega_1(z)u_1(z)+\ldots+\omega_n(z)u_n(z)=0.$

Omgekeerd, laat $u_1(z),\ldots,u_n(z)$ ω-afhankelijk zijn. Dan geldt (5) voor $z,z+1,\ldots$ dus in het bijzonder

$$\omega_1(z)u_1(z+\nu)+\ldots+\omega_n(z)u_n(z+\nu)=0 \quad (\nu=0,1,\ldots,n-1).$$

Hieruit volgt direct $C(z)=0$.

Thans bewijzen wij het eerder vermelde resultaat, nl. dat men als $u_1(z),\ldots,u_n(z)$ ω-onafhankelijke oplossingen van $L(u)=0$ zijn en $u(z)$ hiervan een willekeurige oplossing is, heeft

$$u(z)=\omega_1(z)u_1(z)+\ldots+\omega_n(z)u_n(z).$$

Immers uit $L(u)=L(u_1)=\ldots=L(u_n)=0$ volgt

$$b_n(z)u_\nu(z+n)+\ldots+b_0(z)u_\nu(z)=0$$

geldig voor $\nu=1,2,\ldots,n$ en voor het geval de index ν wordt weggelaten. Uit de determinanttheorie volgt dan dat

$$\begin{vmatrix} u(z) & u_1(z) & \ldots & u_n(z) \\ u(z+1) & u_1(z+1) & \ldots & u_n(z+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u(z+n) & u_1(z+n) & \ldots & u_n(z+n) \end{vmatrix} = 0$$

is, dus op grond van het voorafgaande bestaan er ω-functies zodanig dat

$$\omega(z)u(z)+\omega_1(z)u_1(z)+\ldots+\omega_n(z)u_n(z)=0$$

is. Wegens $\omega(z)\neq 0$ (anders waren $u_1(z),\ldots,u_n(z)$ toch ω-afhankelijk in strijd met de onderstelling) volgt hieruit

$$u(z)=\omega_1^*(z)u_1(z)+\ldots+\omega_n^*(z)u_n(z),$$

waarbij ook de functie $\omega_i^*(z) = -\frac{\omega_i(z)}{\omega(z)}$ $(i=1,\ldots,n)$ een ω-functie is.

Wij bewijzen over de determinant van Casorati nog de

Stelling van Heymann

$$C(z+1) = (-)^n \frac{b_o(z)}{b_n(z)}\; C(z).$$

Bewijs: Men heeft

$$C(z+1) = \begin{vmatrix} u_1(z+1) & \ldots & u_n(z+1) \\ u_1(z+2) & \ldots & u_n(z+2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1(z+n) & \ldots & u_n(z+n) \end{vmatrix}$$

waarbij de elementen van de laatste rij op grond van $L(u_1) = \ldots = L(u_n) = 0$ lineaire composita zijn van die der vorige rijen en $u_1(z), \ldots, u_n(z)$. Eenvoudige eigenschappen van determinanten leren dan

$$C(z+1) = \frac{b_o(z)}{b_n(z)} \begin{vmatrix} u_1(z+1) & \ldots & u_n(z+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1(z+n-1) & \ldots & u_n(z+n-1) \\ -u_1(z) & \ldots & -u_n(z) \end{vmatrix} = (-)^n \frac{b_o(z)}{b_n(z)}\, C(z).$$

Gevolg: Is z niet congruent met een singulier punt dan volgt uit $C(z)=0$ de relatie $C(w)=0$ voor iedere w, die congruent is met z, en uit $C(z) \neq 0$ volgt $C(w) \neq 0$.

Zijn eenmaal n ω onafhankelijke oplossingen $u_1, \ldots, u_n$ van $L(u)=0$ gevonden, dan kan men volgens een methode van variatie der ω's een oplossing van $L(u) = a(x)$ vinden. Men schrijve nl. een oplossing u van de inhomogene vergelijking in de gedaante

$$u = \omega_1 u_1 + \ldots + \omega_n u_n,$$

waarbij hier de functies $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (bij uitzondering) geen ω-functies zijn. Dan heeft men

$$\begin{aligned}
u &= \omega_1 u_1 + \ldots + \omega_n u_n \\
\Delta u &= \omega_1 \Delta u_1 + \ldots + \omega_n \Delta u_n, \quad \text{mits } Eu_1 . \Delta\omega_1 + \ldots + Eu_n . \Delta\omega_n = 0; \\
\Delta^2 u &= \omega_1 \Delta^2 u_1 + \ldots + \omega_n \Delta^2 u_n, \quad \text{mits } E\Delta u_1 . \Delta\omega_1 + \ldots + E\Delta u_n . \Delta\omega_n = 0; \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^{n-1} u &= \omega_1 \Delta^{n-1} u_1 + \ldots + \omega_n \Delta^{n-1} u_n, \quad \text{mits } E\Delta^{n-2} u_1 . \Delta\omega_1 + \ldots + E\Delta^{n-2} u_n . \Delta\omega_n = 0 \\
\Delta^n u &= \omega_1 \Delta^n u_1 + \ldots + \omega_n \Delta^n u_n + E\Delta^{n-1} u_1 . \Delta\omega_1 + \ldots + E\Delta^{n-1} u_n . \Delta\omega_n,
\end{aligned}$$

dus na vermenigvuldigen van de voorste relatie resp. met $a_o, a_1, \ldots, a_n$ en optellen

$$\frac{-a(z)}{a_n(z)} = E\Delta^{n-1} u_1 . \Delta\omega_1 + \ldots + E\Delta^{n-1} u_n . \Delta\omega_n,$$

zodat men voor de functies $\Delta\omega_1, \ldots, \Delta\omega_n$ ten slotte n lineaire niet homogene relaties heeft gevonden. Hieruit zijn deze functies op te lossen, omdat de coëfficiëntendeterminant gelijk is aan EC(z), en dus $\neq 0$, want $u_1,\ldots,u_n$ zijn ω-onafhankelijk. Uit $\Delta\omega_1,\ldots,\Delta\omega_n$ vindt men tenslotte na sommatie $\omega_1,\ldots\omega_n$, afgezien van ω-functies, dus ook u. Weer vindt men hierbij het resultaat terug dat u de gedaante

$$u=u_o+\omega_1 u_1+\ldots+\omega_n u_n$$

heeft, waarbij nu weer $\omega_1,\ldots,\omega_n$ wél ω-functies zijn, waarbij $u_1,\ldots,u_n$ willekeurige ω-onafhankelijke oplossingen zijn van de homogene vergelijking $L(u)=0$ en u_o een particuliere oplossing is van $L(u)=a(z)$.

<u>Voorbeeld</u>. Bij de differentievergelijking

$$L(u)=z(z+1)\Delta^2 u+z\Delta u-u=z^2$$

heeft de corresponderende homogene vergelijking $L(u)=0$, zoals men gemakkelijk inziet, een oplossing $u_1=z$. Stelt men de tweede oplossing u_2 van deze vergelijking gelijk aan $vu_1=vz$, dan vindt men na substitutie voor v de vergelijking

$$(z+2)\Delta^2 v+3\,\Delta v=0.$$

Voor $w=\Delta v$ heeft men dus

$$\frac{w(z+1)}{w(z)}=\frac{z-1}{z+2},$$

dus

$$w=c\,\frac{\Gamma(z-1)}{\Gamma(z+2)}=\frac{c}{(z+1)z(z-1)}.$$

Wij kiezen ter vereenvoudiging der verdere berekening $c=-2$ en vinden dan uit $\Delta v=\dfrac{-2}{(z+1)z(z-1)}$ direct dat $v=\dfrac{1}{z(z-1)}$, dus $u_2=\dfrac{1}{z-1}$. Stel thans een particuliere oplossing u_o van $L(u)=z^2$ gelijk aan $u_o=\omega_1 u_1+\omega_2 u_2=$ $=\omega_1 z+\dfrac{\omega_2}{z-1}$. De methode der variantie der coëfficiënten leert nu

$$\Delta u_o=\omega_1-\frac{\omega_2}{z(z-1)} \qquad \text{mits } (z+1)\Delta\omega_1+\frac{1}{z}\Delta\omega_2=0$$

en verder

$$\Delta^2 u_o=+\frac{2\omega_2}{(z+1)z(z-1)}+\Delta\omega_1-\frac{\Delta\omega_2}{z(z+1)}.$$

Uit $L(u_o)=z^2$ vindt men dan

$$z(z+1)\Delta\omega_1-\Delta\omega_2=z^2,$$

bijgevolg

$$\Delta\omega_1=\frac{z}{2(z+1)};\quad \Delta\omega_2=-\tfrac{1}{2}z^2.$$

Dit levert

$$\omega_1=\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}\psi(z+1);\quad \omega_2=-\frac{1}{6}B_3(z),$$

dus de algemene oplossing der inhomogene differentievergelijking luidt:

$$u=\omega_1 z+\frac{\omega_2}{z-1}+\tfrac{1}{2}z^2-\tfrac{1}{2}z\psi(z+1)-\frac{1}{6}\,\frac{B_3(z)}{z-1}=\omega_1 z+\frac{\omega_2}{z-1}-\tfrac{1}{2}z\psi(z+1)+\frac{1}{3}z^2,$$

waarin ω_1 en ω_2 nu wel ω-functies zijn.

Wij beschouwen thans de homogene vergelijking

(6) $\qquad L(u)=a_n(z)\,\Delta^n u(z)+\ldots+a_1(z)\Delta u(z)+a_o(z)u(z)=0.$

Analoog aan de theorie der differentiaalvergelijkingen kan men zich afvragen of voor operatoren L van het hier beschouwde type een "hoofdstelling van de "algebra" " luidt, die inhoudt dat er n functies $\alpha_1(z),\ldots,\alpha_n(z)$ bestaan, zodanig dat

(7) $\qquad L=a_n(\Delta-\alpha_1)\ldots(\Delta-\alpha_n).$

Ook hier blijkt dit het geval te zijn, immers het is voldoende aan te tonen dat voor zo'n operator een ontbinding van het type $L=M(D-\alpha)$ geldt, waarna dit dan door volledige inductie blijkt (hierbij is M dan een operator van de $(n-1)^e$ orde in Δ met begincoëfficiënt a_n). Nu weten wij dat $L(u)=0$ zeker een oplossing van het type ωu_1 bezit, dus dat iedere oplossing van de vergelijking

$$(\Delta-\frac{\Delta u_1}{u_1})u=0$$

voldoet aan (6), waarna men door een deelprocédé (vgl. de toepassing van de theorie der reststelling bij de theorie der vergelijkingen in de algebra) vindt dat inderdaad geldt $L=M(\Delta-\frac{\Delta u_1}{u_1})$.

Omgekeerd levert de ontbinding (7) ons direct één oplossing van (6), nl. diegene die uit de lineaire vergelijking $(\Delta-\alpha_n)u=0$ volgt. In tegenstelling tot de theorie in de algebra is het hier in het algemeen niet zo dat ook uit $(\Delta-\alpha_{n-1})u=0$ een oplossing van (6) volgt. Dat is slechts dan zo als L ook een ontbinding $L=N(\Delta-\alpha_{n-1})$ bezit. Eenvoudige voorbeelden leren reeds dat niet steeds geldt

(8) $\qquad (\Delta-\alpha_1)(\Delta-\alpha_2)=(\Delta-\alpha_2)(\Delta-\alpha_1),$

immers men heeft

$$(\Delta-\alpha_1)(\Delta-\alpha_2)=\Delta^2-\alpha_1\Delta-\alpha_2\Delta+\alpha_1\alpha_2-(\Delta\alpha_2).E$$

en dus geldt (8) slechts als $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2$ is, d.w.z. als $\alpha_1-\alpha_2$ een ω-functie is.

Er is echter één geval waarin men zeker wel de volgorde der factoren in de ontbinding van L mag wijzigen, nl. het geval waarbij L constante coëfficiënten bezit. Hierop gaan wij in de volgende paragraaf verder in.

§ 13. De lineaire differentievergelijking met constante coëfficienten.

Wij beschouwen thans de differentievergelijking

(1) $L(u)=(a_n\Delta^n+\dots+a_1\Delta+a_0)u=a(z)$,

waarin $a_n,\dots,a_0$ constanten zijn. Zoals in de vorige paragraaf werd betoogd heeft nu de ontbinding

$$a_n\Delta^n+\dots+a_1\Delta+a_0=a_n(\Delta-\alpha_1)\dots(\Delta-\alpha_n)$$

van de operator L de eigenschap dat de factoren $\Delta-\alpha_\nu$ $(\nu=1,\dots,n)$ verwisseld mogen worden. Bij gevolg is desgewenst iedere factor als laatste factor toelaatbaar en leidt dus de vergelijking

$$(\Delta-\alpha_\nu)u=0 \qquad (\nu=1,\dots,n)$$

tot een oplossing u_ν der homogene differentievergelijking. Uit deze relatie vindt men direct

$$\frac{u(z+1)}{u(z)}=\alpha_\nu+1,$$

dus $u_\nu=(\alpha_\nu+1)^z$. Zijn de getallen α_ν twee aan twee verschillend, dan vindt men zo n verschillende oplossingen, welke bovendien ω-onafhankelijk zijn, want voor hun determinant van Casorati heeft men

$$C(z)=\begin{vmatrix} (\alpha_1+1)^z & \dots & (\alpha_n+1)^z \\ \alpha_1(\alpha_1+1)^z & \dots & \alpha_n(\alpha_n+1)^z \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1}(\alpha_1+1)^z & \dots & \alpha_n^{n-1}(\alpha_n+1)^z \end{vmatrix} = \prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu+1)^z\cdot\prod_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n}(\alpha_i-\alpha_j)=0.$$

Hier kan men wellicht beter met de operator E werken. Immers $L(\Delta)=L(E-1)$, dus als α_ν een nulpunt is van $L(\Delta)$ is $\beta_\nu=\alpha_\nu+1$ een nulpunt van $L(E-1)$ en uit de ontbinding

$$M(E)=L(E-1)=(E-\beta_1)\ \dots\ (E-\beta_n)$$

leest men dan direct de oplossingen $u_\nu=\beta_\nu^z$ $(\nu=1,\dots,n)$ af.

Evenals in de theorie der differentiaalvergelijkingen kan men bij complexe nulpunten van $L(\Delta)$ steeds twee toegevoegd complexe samennemen, zodanig dat hiervoor in de plaats twee andere reële basisoplossingen optreden.

Interessanter is het om na te gaan wat geschiedt bij meervoudige nulpunten van $M(E)$. Zij β een k-voudig nulpunt van $M(E)$. Op grond van heuristische overwegingen met limietovergangen of van analogieoverwegingen ten aanzien van de theorie der differentiaalvergelijkingen verwacht men dat dan naast β^z ook $z\beta^z$, $z^{(2)}\beta^z,\dots,z^{(k-1)}\beta^z$ als basisoplossingen zullen optreden. Inderdaad heeft men voor $\varkappa=0,1,\dots,k-1$

$$(E-\beta)(z^{(\kappa)}\beta^{z})=(\Delta z^{(\kappa)}).\beta^{z+1}=\kappa z^{(\kappa-1)}\beta^{z+1},$$

dus

$$(E-\beta)^{k}(z^{(\kappa)}\beta^{z})=0,\ \text{dus}\ M(E)(z^{(\kappa)}\beta^{z})=0.$$

Dat de gevonden k oplossingen onderling ω-onafhankelijk zijn, ja ook dat bij meer meervoudige nulpunten $\beta,\gamma,\ldots$ van $M(E)$ de daarbij zo te vinden basisoplossingen allen tezamen ω-onafhankelijk zijn bewijst men op analoge wijze als in de theorie der differentiaalvergelijkingen.

<u>Toepassing</u>: Bepaal voor gehele n de waarde van u_n uit de relaties

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,\ u_0=0,\ u_1=1. \qquad \text{(reeks van Fibonacci)}$$

Men heeft $M(E)=E^2-E-1$ met nulpunten $\beta_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, \beta_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Dus

$u_n=\omega_1\beta_1^{\,n}+\omega_2\beta_2^{\,n}$. Na substitutie der beginwaarden vindt men $0=\omega_1+\omega_2$, $1=\omega_1\beta_1+\omega_2\beta_2$, dus

$$\omega_1=\frac{1}{\beta_1-\beta_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \omega_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

en

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta_1^{\,n}-\beta_2^{\,n}).$$

<u>Opgave 1</u>: Bepaal u_n uit de relaties $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ met gegeven u_0 en u_1.

Het oplossen der inhomogene vergelijking (1) geschiedt nu als volgt. Men heeft voor een particuliere oplossing u_0 hiervan

$$u_0=\frac{1}{L(\Delta)}a(z)=\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\Delta-\alpha_\nu)}a(z).$$

Wij weten (vgl. opgave 28, blz. 18)) dat

$$\frac{1}{\Delta-\alpha}a(z)=(\alpha+1)^{z-1}\frac{1}{\Delta}(a(z)(\alpha+1)^{-z})=(\alpha+1)^{z-1}\mathop{S}_{c}^{z}a(t)(\alpha+1)^{-t}\Delta t,$$

mits $\alpha\neq-1$.

<u>Opgave 2</u>. Bereken ook $\frac{1}{\Delta+1}a(z)$.

Hiermede is dus $\frac{1}{L(\Delta)}a(z)$ door middel van sommaties te vinden. In het geval echter $a(z)=c^z$ is, heeft men

$$\frac{1}{M(E)}c^z=\frac{c^z}{M(c)},$$

mits $M(c)\neq0$ is.

<u>Opgave 3</u>. Als c een k-voudig nulpunt is van $M(E)$ dan heeft men

$$\frac{1}{M(E)}c^z=\frac{z^{(k)}c^{z-k}}{D^kM(c)}.$$

Soms kan men door formele ontwikkeling van $\frac{1}{L(\Delta)}$ in een machtreeks $l_0+l_1\Delta+\ldots$ ook $\frac{1}{L(\Delta)}a(z)$ uitrekenen. Dat is toelaatbaar zodra $\lim\limits_{N\to\infty}r_N(\Delta)a(z)=0$ is (waarbij $r_N(\Delta)=\frac{1}{L(\Delta)}-l_0-l_1\Delta-\ldots-l_{N-1}\Delta^{n-1}$ dus b.v.

bij polynomen a(z).

Opgave 4. Los op de vergelijking

$$\Delta^2 u-5\Delta u+4u=2^z+z^2.$$

Toepassing. (Opgave 63 der Wiskundige Opgaven, 17e deel van J.G. van der Corput)

Op een examen waarbij iedere vraag met ja of nee beantwoord moet worden, wordt iemand geëxamineerd die niets van het vak afweet, zodat bij iedere vraag de kans op een goed antwoord $\frac{1}{2}$ is. De eximinator herhaalt een goed beantwoorde vraag niet, doch een verkeerd beantwoorde vraag één- en slechts éénmaal, zodat bij de tweede keer het juiste antwoord wordt gegeven. Wat is gemiddeld genomen bij n vragen het aantal goede antwoorden?

Oplossing van C.J. Bouwkamp.

Laat u(m) de kans zijn dat het antwoord op de m^e vraag juist is. De kans dat het verkeerd is is dan 1-u(m). Is het m^e antwoord goed dan is de kans dat de volgende vraag juist wordt beantwoord, gelijk aan $\frac{1}{2}$; is het m^e antwoord verkeerd dan is deze kans gelijk aan 1. De totale kans dat het $(n+1)^e$ antwoord goed is, is dus

$$u(m+1)=\tfrac{1}{2}.u(m)+1.(1-u(m))=1-\tfrac{1}{2}.u(m).$$

Eerst lossen wij de homogene vergelijking

$$u(m+1)+\tfrac{1}{2}u(m)=0$$

op en vinden direct $u(m)=c(-\frac{1}{2})^m$. Een particuliere oplossing der inhomogene vergelijking is

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}.1=\frac{2}{3}.$$

De algemene oplossing luidt dus $u(m)=\frac{2}{3}+c(-\frac{1}{2})^m$. Verder heeft men de beginvoorwaarde $u(1)=\frac{1}{2}$, dus $\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}c$ en $c=\frac{1}{3}$, derhalve $u(m)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^m$. Bij n vragen zal het aantal juist beantwoorde vragen dus gemiddeld zijn

$$\sum_{m=1}^{n} u(m)=\frac{2}{3}n-\frac{1}{9}(1-(-\tfrac{1}{2})^n).$$

Bij grote waarden van n wordt dus gemiddeld $\frac{2}{3}$ der vragen goed beantwoord.

Opmerking van J.G. van der Corput.

Er wordt beweerd dat dit systeem bij sommige examens wordt toegepast en dat het laagste daarbij behaalde cijfer 7 is, als 10 het hoogste te behalen cijfer is. Dit blijkt inderdaad in overeenstemming met de uitkomst der berekening.

Wij merken nog op, dat de differentievergelijking

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z)\ \Delta^\nu w=0$$

niet alleen in de aequivalente gedaante

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu(z)E^\nu w=0$$

te brengen is, maar ook in de aequivalente vorm

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(z)\ \nabla^\nu w=0.$$

Voor het verdere onderzoek zal het nuttig zijn om van deze laatste gedaante uit te gaan.

Evenals naast de lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten de differentiaalvergelijking van Euler staat, bestaat er naast de zo even beschouwde differentievergelijkingen een type analoog aan de vergelijking van Euler. Dit type vergelijking luidt als volgt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{(\nu)}\ \nabla^\nu w=0,$$

waarbij de getallen $a_0,\dots,a_n$ constanten zijn en $a_n\neq 0$ wordt ondersteld. Wetende wat de oplossingen van de vergelijking van Euler zijn, komt men er hiertoe om te proberen $w=z^{(\alpha)}$. Men vindt dan na substitutie

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{(\nu)}\ \alpha^{(\nu)}(z-\nu)^{(\alpha-\nu)}=0,$$

dus

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\ \alpha^{(\nu)} z^{(\alpha)}=0,$$

dus

(2) $$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\ \alpha^{(\nu)}=0.$$

De n^e graads vergelijking (2) bezit n nulpunten $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Zijn ze allen verschillend, dan vindt men zo n oplossingen $w_\nu=z^{(\alpha_\nu)}$ $(\nu=1,\dots,n)$, welke, zoals men gemakkelijk inziet, ω-onafhankelijk zijn.
Opgave 5. Bewijs die laatste bewering.

Zodra echter onder de n nulpunten gelijke voorkomen, is het gevonden stel kennelijk niet meer ω-onafhankelijk. Heeft een nulpunt α van (2) de multipliciteit r, dan geeft dit aanleiding tot de r ω-onafhankelijke oplossingen

$$w_\rho = \frac{\partial^\rho}{\partial\alpha^\rho} z^{(\alpha)} \qquad (\rho = 0,1,\ldots,r-1).$$

Men heeft $w_0 = z^{(\alpha)}$, $w_1 = z^{(\alpha)}\psi(z-\alpha+1),\ldots$

Opgave 6 Bewijs dit.

§ 14. Oplossen door middel van reeksontwikkelingen.

In deze laatste paragraaf geven wij voor differentievergelijkingen het analogon van de methode der reeksontwikkelingen bij differentiaalvergelijkingen. Het behoeft nauwelijks betoogd te worden, dat wij hier geen machtreeksontwikkelingen zullen proberen te vinden, maar faculteitenreeksen.

Wij herinneren eerst nog aan de overeenkomstige resultaten uit de theorie (van Frobenius) der differentiaalvergelijkingen.

Bij de vergelijking

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \ldots + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0$$

levert substitutie van een reeks $w = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ recurrente betrekkingen op (waarbij als coëfficiënten optreden de coëfficiënten van de reeksontwikkelingen der bekende functies $a_{n-1}(z),\ldots,a_0(z)$) voor de onbekende coëfficiënten c_h. Uit gegeven voorgeschreven waarden voor b.v. $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ is de reeks voor w ondubbelzinnig bepaald. Men kan aantonen, dat de zo verkregen reeksontwikkeling voor w convergeert overal waar de ontwikkeling van elk der n functies $a_{n-1}(z),\ldots,a_0(z)$ convergent is.

Voorbeeld

(1) $$w'' + zw' + \frac{1}{1-z}w = 0$$

Men kan practischer werken met

$$(1-z)w'' + z(1-z)w' + w = 0$$

en vindt dan uit $w = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ na substitutie

$$\sum_{h=-2}^{\infty}\left\{(h+2)(h+1)c_{h+2} - (h+1)hc_{h+1} + hc_h - (h-1)c_{h-1} + c_h\right\}z^h = 0 \quad (\text{met } c_{-1} = c_{-2} = 0)$$

dus

(2) $$(h+1)(h+2)c_{h+2} = h(h+1)c_{h+1} - (h+1)c_h + (h-1)c_{h-1},$$

waaruit successievelijk $c_2, c_3, \ldots$ kunnen worden bepaald.

Men zou natuurlijk ook kunnen werken met de vergelijking

$$w'' + zw' + \sum_{k=0}^{\infty} z^k w = 0,$$

en vindt dan

$$(h+1)(h+2)c_{h+2}+hc_h+\sum_{k=0}^{h} c_k=0.$$

Gemakkelijk volgt b.v. uit (2) door volledige inductie dat $|c_h| < M$ (waarbij M een van h onafhankelijke constante is), zodat $w=\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ zeker voor $|z| < 1$ convergent is, overeenkomstig met het feit, dat ook $\frac{1}{1-z}$, dus elk der optredende coëfficiënten in (1)), aldaar een convergente reeksontwikkeling naar machten van z bezit.

Men kan deze theorie, die als het ware een uitbreiding is van die van de lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, nog iets generaliseren om andere differentiaalvergelijkingen, die een uitbreiding zijn van de reeds eerder genoemde differentiaalvergelijking van Euler, op te lossen. Dit andere type luidt als volgt:

$$(3)\quad z^n w^{(n)}+a_{n-1}(z)z^{n-1}w^{(n-1)}+\ldots+a_1(z)zw'+a_0(z)w=0.$$

Het Eulerse geval treedt op als de functies $a_\nu(z)$ allen constant $(=a_\nu)$ zijn. In het Eulerse geval vindt men oplossingen van het type z^α, waarbij α een passend gekozen getal is, in casu een wortel van de vergelijking

$$\alpha^{(n)}+a_{n-1}\alpha^{(n-1)}+\ldots+a_1\alpha+a_0=0$$

is. Zo komt men ertoe om bij (3) oplossingen te zoeken van het type

$$w=\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^{h+\alpha},$$

waarbij α een nader te bepalen constante is en natuurlijk ook de coëfficiënten c_h nader moeten worden bepaald. Het blijkt, dat als men stelt $a_\nu(z)=\sum_{h=0}^{\infty} a_{\nu h} z^h$, dat α moet voldoen aan de vergelijking

$$(4)\qquad \alpha^{(n)}+a_{n-1,0}\,\alpha^{(n-1)}+\ldots+a_{10}\alpha+a_{00}=0,$$

welke de indiciaalvergelijking (of exponentenvergelijking) wordt genoemd. Bij elk der n wortels α dezer vergelijking vindt men dan i.h.a. ondubbelzinnig de waarden van $c_0, c_1, \ldots$ Hier zijn dus i.h.a. niet de waarden van $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ of een aantal dezer grootheden voor te schrijven. Uitzonderingsgevallen treden slechts op zodra de vergelijking (4) wortels bezit met een geheel verschil. Zijn b.v. α_1 en $\alpha_2=\alpha_1-3$ wortels van (4), maar bezit (4) verder geen wortels, die een geheel verschil met α_1 hebben, dan vindt men allereerst een oplossing

$$w_1=\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^{h+\alpha_1}$$

en verder een van het type

$$w_2 = c w_1 \log z + \sum_{h=0}^{\infty} d_h z^{h+\alpha_2} .$$

De constante c kan nul zijn, maar is het zeker niet in het geval, dat $\alpha_1=\alpha_2$ is. De hier optredende oplossing w_1 is van het al eerder hier gevonden type. Zo'n oplossing treedt nl. steeds op bij de grootste van een stel (mod 1) congruente wortels van de vergelijking (4). Bij de andere van zo'n stel kunnen logarithmische oplossingen optreden (vergelijk ook de vergelijking van Euler zelve). Van de aggregaten van het type

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h , \quad \sum_{h=0}^{\infty} d_h z^h , \ \ldots ,$$

zoals ze in bovenstaand schetsmatig overzicht werden aangegeven, kan men aantonen, dat zij convergente reeksontwikkelingen bezitten in het gebied, waarin alle functies $a_\nu(z)$ $(\nu=0,\ldots,n-1)$ convergente reeksontwikkelingen bezitten.

Voorbeeld. $z^2w'' + zw' + (z^2-n^2)w=0$ (verg. van Bessel).

Men probere

$$w=\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^{h+\alpha}$$

en vindt na substitutie

$$(h+\alpha)(h+\alpha-1)c_h+(h+\alpha)c_h+c_{h-2}-n^2c_h=0 \qquad (h=0,1,\ldots)$$

dus

$$\left\{(h+\alpha)^2-n^2\right\}c_h+c_{h-2}=0 \qquad (h=0,1,\ldots).$$

Neemt men allereerst h=0, dan vindt men de indiciaalvergelijking

$$\alpha^2-n^2=0.$$

Voor $\alpha=n$ vindt men dan verder

$$h(h+2n)c_h+c_{h-2}=0$$

en na enig gereken

$$w_1= J_n(z)=\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-)^h\left(\frac{z}{2}\right)^{2h+n}}{h!\,\Gamma(h+n+1)} .$$

Is 2n niet geheel, dan verschillen de wortels van (4) geen geheel bedrag dan vindt men als tweede onafhankelijke oplossing $J_{-n}(z)$.
Is 2n wel geheel maar oneven (dus n niet geheel), dan zou een logarithmische term kúnnen optreden, maar dat blijkt hier niet het geval te zijn, zodat ook hier $J_n(z)$ en $J_{-n}(z)$ als lineair onafhankelijke oplossingen optreden. Dit is echter niet meer het geval als n geheel is. Dan geldt nl.

$$J_n(z)=(-)^n J_{-n}(z).$$

Opgave 1. Bewijs dit.

Naast $J_n(z)$ treedt dan wel een logarithmische oplossing op, die men pleegt aan te geven met $Y_n(z)$ (functie van Neumann). Alle gevonden aggregaten, dus in het bijzonder $J_n(z)$ zijn convergent daar waar de "coëfficiënten" 1 en $z^2 \cdot n^2$ het zijn, dus voor alle eindige z. De functies $J_n(z)$ zijn, dus eventueel afgezien van de factor z^n, gehele functies van z.

Na deze uitgebreide inleiding komen wij nu terug op de differentievergelijkingen, waarbij zich soortgelijke verschijnselen voordoen. Bij de verdere behandeling maken wij gebruik van het door Milne-Thomson ontwikkelde formele apparaat der factoren P en R, zoals dit in § 10 is uiteengezet. Terwille van de overzichtelijkheid, en ook omdat dit het meeste blijkt voor te komen, zullen wij ons beperken tot vergelijkingen van de tweede orde. Het kost echter geen moeite om analoge beschouwingen te geven voor differentievergelijkingen van hoger orde. Wij beschouwen maar direct het analogon van het laatstbesproken type differentiaalvergelijkingen en dus maar het geval van de tweede orde. Dan kunnen wij de vergelijking schrijven in de gedaante

$$(5)\quad z^{(2)}\,\nabla^2 w + p(z).z\,\nabla w + q(z)w=0,$$

waarin p(z) en q(z) in zeker halfvlak convergente faculteitenreeksontwikkelingen

$$p(z) = \sum_{h=0}^{\infty} p_h z^{(h)} = \sum_{h=0}^{\infty} p_h R^h;\quad q(z) = \sum_{h=0}^{\infty} q_h z^{(h)} = \sum_{h=0}^{\infty} q_h R^h$$

bezitten.

Gebruik makende van de rekenwijzen van § 10 vinden wij dan voor onze vergelijking

$$(6)\qquad \Big\{P(P-1) + \sum_{h=0}^{\infty} p_h R^h P + \sum_{h=0}^{\infty} q_h R^h\Big\}\, w=0.$$

Deze vergelijking is, alweer door gebruikmaking van de resultaten van § 10, te brengen in de gedaante

$$\{f_0(P) + f_1(P)R + \dots\}\, w=0$$

Deze gedaante noemt Milne-Thomson de canonische gedaante.

Opmerking. De laatste som tussen accoladen bevat slechts eindig veel termen indien de ontwikkelingen van p(z) en q(z) er slechts eindig veel bezitten.

Probeert men nu een oplossing w met de faculteitenreeksvoorstelling

$$w= \sum_{h=0}^{\infty} c_h R^{h+\alpha} \qquad (c_0 \neq 0),$$

dan vindt men wegens $f(P)R^n = f(n)R^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{n} c_h f_{n-h}(n+\alpha)\, R^{n+\alpha}=0,$$

zodat de coëfficiënten c_h en de exponent α dus hebben te voldoen aan

$$(7)\qquad \sum_{h=0}^{n} c_h f_{n-h}(n+\alpha)=0 \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Voor $n=0$ vindt men wegens $c_0\neq 0$ de indiciaalvergelijking

$$(8)\qquad f_0(\alpha)=0.$$

Opg.2. In geval (6) heeft de indiciaalvergelijking de gedaante

$$\alpha(\alpha-1)+p_0\alpha+q_0=0.$$

Voor iedere wortel α van (8) kan men uit (7) de waarde van c_h berekenen uit $c_{h-1},\ldots,c_0$ mits de coëfficiënt $f_0(h+\alpha)\neq 0$ is. Ons procédé levert ons dus bij iedere α een faculteitenreeks w op, mits α niet de kleinste is van twee congruente wortels van (8). In het uitzonderingsgeval treden, analoog aan wat men bij differentiaalvergelijkingen gewoon is, functies op van een afwijkende structuur, waarin een ψ-functie voorkomt.

De vraag blijft natuurlijk bestaan waar onze zo verkregen formele reeksen w convergeren. Met behulp van middelen analoog aan die bij differentiaalvergelijkingen laat zich aantonen, dat die reeksen overal daar convergeren waar de reeksen voor de coëfficiënten $p(z)$ en $q(z)$ het doen. Onder die hulpmiddelen valt natuurlijk ook hier een majorantenmethode en worden eigenschappen zoals die in § 9 (blz. 56 en 57) van majorantenreeksen van faculteitenreeksen gebruikt. Wij illustreren de theorie aan een voorbeeld:

$$(z-2)w(z)-(2z-3)w(z-1)-3(z-1)w(z-2)=0.$$

Wij schrijven met behulp van $E^{-1}=1-\nabla$ de vergelijking in de gedaante

$$3(z-1)\,\nabla^2 w-(8z-9)\,\nabla w+4(z-1)w=0,$$

en na vermenigvuldiging met z

$$\{3P(P-1)-(8P+8R-9)P+4(P+R)(P+R-1)\}\,w=0,$$

waaruit men als canonische gedaante vindt

$$(9)\qquad ((2P-P^2)+4R^2)w=0.$$

Als indiciaalvergelijking vindt men dan

$$\alpha^2-2\alpha=0,\ \text{dus}\ \ \alpha_1=2,\ \ \alpha_2=0.$$

Voor het ogenblik beperken wij ons tot de oplossing

$$w_1 = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^{(h+2)} = \sum_{h=0}^{\infty} c_h R^h .$$

Voor de coëfficiënten c_h vindt men dan de recurrente relatie

$$h(h-2)c_h = 4c_{h-2} \qquad (h=2,3,\ldots)$$

Bijgevolg

$$w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} R^{2k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(x-1)\ldots(x-2k-1)}{k!(k+1)!} .$$

Wij constateren nog dat w_1 een convergentieabscis $\lambda = -\infty$ heeft, geheel in overeenstemming met onze hierboven gedane mededelingen daarover; immers de faculteitenreeksontwikkelingen van de coëfficiënten $3z-9$ en $4z(z-1)$ convergeren ook overal in het eindige z-vlak.

Opmerking. De hier beschouwde vergelijking was ook direct in de canonische gedaante te brengen na vermenigvuldigd te zijn met z. Immers dan luidt ze

$$\left(-3R^2 - (2P+2R-3)R + (P+R)(P+R-2)\right) w=0,$$

waaruit (9) direct volgt.

Wij beschouwen nog een ander voorbeeld. De meergenoemde functies van Bessel

$$J_n(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-)^h (\frac{z}{2})^{2h+n}}{h!\,\Gamma(h+n+1)}$$

voldoen aan de recurrente betrekking

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z).$$

Vervangt men hierin z door t en n door z dan voldoen ze dus aan de relatie

$$w(z) - \frac{2(z-1)}{t} w(z-1) + w(z-2) = 0.$$

Opgave 3. Behandel deze vergelijking verder met het hier ontwikkelde procédé.

Opgave 4. Los op de differentievergelijking

$$z\,\Delta^2 u + (z-2)\,\Delta u - u = 0.$$

Tenslotte valt nog op te merken dat in die gevallen waarin men de gezochte oplossingen ontwikkelt in faculteitenreeksen van de eerste soort, men vaak een asymptotische ontwikkeling van die oplossingen vindt.

Hoewel hiermede de cursus beëindigd wordt, zal het de lezers duidelijk zijn, dat tal van andere onderwerpen uit de analyse een min of meer moeizame analoge behandeling kunnen krijgen in de gevallen dat de erin voorkomende afgeleiden worden vervangen door differenties. In het behandelde is dit voor die belangrijke gedeelten uit de analyse gegeven, waarvan de analoge theorie uit de differentierekening reeds tot een zekere standaard theorie was ontwikkeld.