STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 28a

Avondcursus wiskunde 1954-1956;

Analyse I.

C.G.Lekkerkerker.

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Avondcursus 1954-1955.

Analyse I.

door

C.G.Lekkerkerker.

De analyse, zoals die in deze cursus behandeld zal worden, houdt zich voornamelijk bezig met reële getallen. Daarbij interesseren ons niet zozeer individuele eigenschappen van getallen, maar operaties, waaraan men in het algemeen reële getallen kan onderwerpen, en zullen begrippen als functie, limiet, reeks voortdurend op de voorgrond staan.

Alvorens met de eigenlijke analyse te kunnen beginnen moeten we weten wat reële getallen zijn. Hierbij zullen we niet een (tijdrovende) constructieve opbouw van het systeem der reële getallen geven door achtereenvolgens de natuurlijke, gebroken, negatieve en irrationale getallen in te voeren. Maar we zullen - om toch tot een wetenschappelijk verantwoorde opzet te komen- de axiomatische methode volgen door enige grondeigenschappen van de reële getallen op te sommen in de vorm van axioma's en daaruit de overige ter sprake komende eigenschappen door logische redenering afleiden. Deze grondeigenschappen, die we nu achtereenvolgens zullen bespreken, vallen in drie groepen uiteen, te weten

A. lichaamseigenschappen (eigenschappen van de optelling en vermenigvuldiging).

B. ordeningseigenschappen.

C. eigenschap van de snede van Dedekind.

De verzameling der reële getallen zullen we in het vervolg steeds door Γ voorstellen.

§ 1. Lichaamseigenschappen.

In Γ is de optelling onbeperkt en ondubbelzinnig uitvoerbaar: bij elk tweetal getallen a en b is steeds één getal a+b bepaald, de som van die beide. Deze optelling bezit de volgende eigenschappen:

A_1. $a+b = b+a$ (commutativiteit van de optelling)

A_2. $a+(b+c)= (a+b)+c$ (associativiteit van de optelling)

A_3. de vergelijking $a+x = b$ bezit steeds een oplossing (mogelijkheid van de aftrekking).

We leiden direct enige consequenties af.

(1.1) Er is een reëel getal 0 ("nul"), zodat voor elk getal a geldt:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Bewijs. Neem (willekeurig) een getal a_1. Wegens A_3 is er een getal 0, zodat $a_1+0 = a_1$. Wegens A_1 is dan ook $0+a_1 = a_1$. We laten zien, dat het zo bepaalde getal 0 voldoet aan de betrekking $0+a = a$, welk getal we voor a ook nemen. Zij daartoe a willekeurig gekozen. Wegens A_3 is er een getal x_1, zodat $a_1+x_1 = a$. Dan hebben we, met toepassing van A_2,

$$\begin{aligned} 0+a &= 0+(a_1+x_1) = (0+a_1)+x_1 \\ &= a_1+x_1 = a. \end{aligned}$$

Tenslotte is dan ook $a+0 = a$.

(1.2) Er is slechts één getal 0 met de bovengenoemde eigenschap.
Bewijs: Laat voor twee getallen 0 en 0' gelden:

$$a+0 = a, \quad a+0' = a \qquad \text{voor alle } a.$$

Invulling van $a = 0'$ in de eerste betrekking en $a = 0$ in de tweede geeft respectievelijk

$$0'+0 = 0', \quad 0+0' = 0.$$

Daar $0'+0 = 0+0'$, hebben we dus $0' = 0$. Dus is er slechts één getal 0, dat de in (1.1) genoemde eigenschap heeft.

(1.3) Voor alle a, b heeft de vergelijking $a+x = b$ slechts één oplossing (ondubbelzinnigheid van de aftrekking).
Bewijs: Er is een getal $\bar{a}$, zodat $\bar{a}+a$ $(=a+\bar{a}) = 0$. Laten nu eens x en x' twee getallen zijn met de eigenschap

$$a+x = b, \quad a+x' = b.$$

Dan is

$$\begin{aligned} \bar{a}+b &= \bar{a}+(a+x) = (\bar{a}+a)+x = 0+x = x, \\ \bar{a}+b &= \bar{a}+(a+x') = (\bar{a}+a)+x' = 0+x' = x'. \end{aligned}$$

Dus is $x = x'$. Hieruit volgt de bewering.

Die ene oplossing van de vergelijking $a+x = b$ wordt het verschil van b en a genoemd en geschreven $b-a$. Speciaal de oplossing van de vergelijking $a+x = 0$ wordt het tegengestelde van a genoemd en geschreven $-a$. We hebben de regels

(1.4) $-(-a) = a$, daar a oplossing is van de vergelijking $(-a)+x = 0$.

(1.5) $$b-a = b+(-a),$$

daar $a+(b+(-a)) = a+((-a)+b) = (a+(-a))+b = 0+b = b$. Dus is steeds een verschil terug te brengen tot een som.

(1.6) $$-(a+b) = (-a) + (-b),$$

daar we hebben

$$\begin{aligned} (a+b)+((-a)+(-b)) &= (b+a)+((-a)+(-b)) = ((b+a)+(-a))+(-b) = \\ &= (b+(a+(-a)))+(-b) = (b+0)+(-b) = 0. \end{aligned}$$

Nu zijn alle uitdrukkingen te herleiden, waarin slechts sommen, verschillen en tegengestelden voorkomen.

In Γ is ook de vermenigvuldiging onbeperkt en ondubbelzinnig uitvoerbaar: bij elk tweetal getallen a en b is steeds één getal a.b, (ook geschreven ab), het product, bepaald. Deze vermenigvuldiging heeft de eigenschappen

A_4. $a.b = b.a$ (commutativiteit van de vermenigvuldiging)

A_5. $a.(b.c) = (a.b).c$ (associativiteit van de vermenigvuldiging)

A_6. er is behalve 0 nog minstens één ander reëel getal en de vergelijking $ax = b$ heeft steeds een oplossing, indien $a \neq 0$ (mogelijkheid van de deling),

terwijl ook nog geldt:

A_7. $a.(b+c) = a.b+a.c$ (distributiviteit van de vermenigvuldiging ten aanzien van de optelling).

We leiden analoge consequenties af.

(1.7) Er is een reëel getal 1 ("één"), zodat voor elke a geldt

$$a.1 = 1.a = a.$$

Bewijs: Kiezen we $a_1 \neq 0$. Wegens A_6 is er een getal 1, zodat $a_1.1 = a_1$; dan is ook $1.a_1 = a_1$. Zij nu a willekeurig. Wegens A_6 is er een getal x_1, zodat $a_1x_1 = a$. We hebben dan $1.a = 1.(a_1x_1) = (1.a_1).x_1 = a_1x_1 = a$. Ook is dan $a.1 = a$.

(1.8) Er is slechts één getal 1 met de bovengenoemde eigenschap.

Bewijs: Stel eens $a.1 = a$, $a.1' = a$ voor alle a. I.h.b. is dan $1'.1 = 1'$, $1.1' = 1$, en wegens $1'.1 = 1.1'$ dus ook $1' = 1$. Dit levert de bewering.

(1.9) Voor alle a,b met $a \neq 0$ heeft de vergelijking $a.x = b$ slechts één oplossing (ondubbelzinnigheid van de deling).

Bewijs: Daar $a \neq 0$ is, is er een getal $\bar{a}$, zodat $\bar{a}a = a\bar{a} = 1$. Laten nu x en x' twee getallen zijn, zodat $ax = b, ax' = b$. Dan is

$$\bar{a}b = \bar{a}.(ax) = (\bar{a}a).x = 1.x = x,$$
$$\bar{a}b = \bar{a}.(ax') = (\bar{a}a).x' = 1.x' = x'.$$

Dus $x = x'$. Hieruit volgt de bewering.

De ene oplossing van de vergelijking $ax = b$ (ingeval $a \neq 0$) heet quotiënt van b en a en wordt geschreven $\frac{b}{a}$. Speciaal de oplossing van de vergelijking $ax = 1 (a \neq 0)$ heet het omgekeerde van a, geschreven $\frac{1}{a}$ of a^{-1}.

We leiden nog enige eigenschappen omtrent vermenigvuldiging en deling af.

(1.10) $a(b-c) = ab-ac$.

Bewijs: Krachtens definitie van verschil is $c+(b-c) = b$. Dus is $ac+a(b-c) = a(c+(b-c)) = ab$, d.w.z. dat $a(b-c)$ het verschil is van ab en ac.

(1.11) $0.a = a.0 = 0$

Bewijs: We hebben $a-a = 0$, wegens (1.10) dus $a.0 = a(a-a) = a.a-a.a=0$. Dan is ook $0.a = a.0 = 0$.

(1.12) $(a+b)c = ac+bc$, $(a-b)c = ac-bc$.

Bewijs: Volgt uit A_7 en (1.10) door toepassing van A_4.

(1.13) $(-a)b= -ab$, $a.(-b) = -ab$, $(-a).(-b) = ab$.

Bewijs: We hebben $ab+(-a).b = \quad a+(-a) \quad .b = 0.b = 0$, krachtens (1.12) en de definitie van verschil. De andere relaties worden evenzo bewezen.

(1.14) is $ab = 0$, dan is minstens één der getallen a en b gelijk aan 0.

Opmerking. We drukken dit uit door te zeggen dat in geen nuldelers voorkomen.

Bewijs: Stel eens, dat geldt $ab = 0$, $a \neq 0$. Dan bestaat het omgekeerde a^{-1}; daarvoor geldt $a^{-1}.a = a.a^{-1} = 1$. Er volgt $a^{-1}.(ab) = a^{-1}.0=0$, wegens $a^{-1}.(ab) =(a^{-1}.a).\ b = 1.b = b$ dus $b = 0$. Op grond van A_4 weten we dan ook dat uit $ab = 0$, $b \neq 0$ volgt $a = 0$. Hiermee is de bewering aangetoond.

(1.15) zijn a en $b \neq 0$, dan is $(ab)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$, anders geschreven $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$.

Bewijs: We merken eerst op, dat uit $a \neq 0$, $b \neq 0$ krachtens (1.14) volgt $ab \neq 0$ .Daar nu $(ab).\ (a^{-1}.b^{-1}) = (ba).(a^{-1}.b^{-1})$

$$= (ba)a^{-1} \quad .b^{-1} = \quad b.(a.a^{-1}) \quad .b^{-1} = (b.1).b^{-1}$$
$$= b.b^{-1} = 1,$$

is $a^{-1}.b^{-1}$ de oplossing van de vergelijking $(ab).x = 1$. Let nog op de analogie met (1.b).

(1.16) zijn a en $b \neq 0$, dan is $(a-1)^{-1} = a, \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Bewijs: We merken eerst op, dat uit $a \neq 0$ en $a.a^{-1} = 1$ krachtens (1.14) volgt $a^{-1} \neq 0$. De eerste relatie volgt nu uit het feit dat a oplossing is van de vergelijking $a^{-1}.x = 1$. Wat de tweede relatie betreft, stellen we even $\frac{a}{b} = c$. Dan is c oplossing van $bx = a$. Dus $bc = a$, $c \neq 0$, $ac^{-1} = (bc).c^{-1} = b.(cc^{-1}) = b.1 = b$, dus c^{-1} oplossing van $ax = b$, dus $x = \frac{b}{a}$.

(1.17) is $b \neq 0$, $d \neq 0$, dan is $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Bewijs: Allereerst is $bd \neq 0$, krachtens (1.14). Krachtens definitie is $b.\frac{a}{b} = a$, $d.\frac{c}{d} = c$. Dus is $(bd).\ \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \ b.\frac{a}{b} \ . \ d.\frac{c}{d}$ $= ac$ (ga na), dus $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}$ oplossing van de vergelijking $(bd).x = ac$, d.w.z. $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

(1.18) is $a \neq 0$, dan is $\frac{a}{1} = a$, $\frac{a}{a} = 1$.

Bewijs: Volgt uit $1.a = a$, resp. $a.1 = a$.

(1.19) $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, mits $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Bewijs: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b}.1 = \frac{a}{b}$.

(1.20) is $b \neq 0$, $d \neq 0$, dan is $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Bewijs: Allereerst is $bd \neq 0$. Verder hebben we

$$(bd).\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = (bd).\frac{a}{b} + (bd).\frac{c}{d}$$

$$= d.\left(b.\frac{a}{b}\right) + b.\left(d.\frac{c}{d}\right) = da+bc = ad+bc,$$

hetgeen juist zeggen wil dat $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ het quotiënt is van $ad+bc$ en bd.

We maken nog enige slotopmerkingen. Krachtens A_2 is $a+(b+c) = (a+b)+c$. Het komt dus niet op de plaatsing van de haakjes aan. We kunnen die zonder gevaar voor misverstand weglaten en zullen dan ook voortaan zonder meer schrijven $a+b+c$. Evenzo mogen we krachtens A_5 in $a.(bc)$ de haakjes weglaten; we zullen voortaan dus schrijven abc.

De vergelijking $0.x = b$ heeft geen oplossing als $b \neq 0$ (als $b = 0$, dan is elk getal x oplossing). Wel heeft voor $a \neq 0$ de vergelijking $a.x = 0$ een oplossing, n.l. $x=0$; het quotiënt, dat we schrijven $\frac{0}{a}$, is gedefinieerd en we hebben $\frac{0}{a} = 0$.

§ 2. Ordeningseigenschappen.

Het is mogelijk in Γ een deel van de getallen a als groter dan 0 (ook wel: positief) aan te merken, in formule weergegeven door $a > 0$, op zodanige wijze dat de volgende eigenschappen gelden:

B_1. is $a \neq 0$, dan is òf $a > 0$ òf $-a > 0$.

B_2. is $a > 0$ en $b > 0$, dan is ook $a+b > 0$, $ab > 0$.

Definitie. Zijn a en b twee willekeurige getallen, dan noemen we a groter dan b, alsook b kleiner dan a, indien $a-b$ positief is; we schrijven: $a > b$, $b < a$. Het getal 0 wordt niet positief genoemd.

(2.1) Zijn a en b twee willekeurige getallen, dan treedt steeds één en slechts één van de volgende drie mogelijkheden op:

$$a = b, \quad a > b \quad , \quad a < b.$$

Bewijs: Beschouw het getal $a-b$. Krachtens B_1 geldt òf $a-b = 0$, òf $a-b > 0$, òf $-(a-b) > 0$. In het eerste geval is $a(= 0+b) = b$, in het tweede is krachtens definitie $a > b$. Tenslotte is $-(a-b) = b-a$ (ga dit na), zodat we in het derde geval hebben $b-a > 0$; krachtens definitie is dan $b > a$, alsook $a < b$. Hiermee is alles aangetoond.

(2.2) is $a \gtrless 0$, dan is $-a \lessgtr 0$, en omgekeerd.
Bewijs: $-a < 0$ betekent $0-(-a) > 0$. Daar $0-(-a) = 0+(-(-a)) = a$, zijn dus de beweringen $a > 0$ en $-a < 0$ aequivalent. Evenzo zijn de beweringen $-a > 0$ en $a < 0$ aequivalent.
Opmerking. In plaats van kleiner dan 0 zegt men ook negatief.

(2.3) is $a > b$ en $b > c$, dan is ook $a > c$.
Bewijs: Op grond van de definitie en de gegevens is $a-b > 0$ en $b-c > 0$. Passen we B_2 toe, dan vinden we

$$(a-b)+(b-c) = ((a-b)+b)+(-c) = a-c > 0, \text{ m.a.w. } a > c.$$

(2.4) is $a \neq 0$, dan is $a.a > 0$.
Bewijs: Voor $a > 0$ volgt de bewering meteen uit B_2. Is daarentegen $a < 0$, dan redeneren we als volgt. Uit (2.2) volgt $-a > 0$. Verder is $(-a).(-a) = a.a$, wegens (1.13). Dus, wegens het vorige geval, $a.a > 0$.

(2.5) $1 > 0$.
Bewijs: $1 = 1.1$; (2.4).

(2.6) is $a > b$ en c willekeurig, dan is $a+c > b+c$.
Bewijs: Uit $a-b > 0$ volgt $(a+c) - (b+c) = a-c > 0$.

(2.7) is $a > b$ en $c > d$, dan is $a+c > b+d$.
Bewijs: Uit $a > b$ volgt $a+c > b+c$, uit $c > d$ volgt $c+b > d+b$, ofwel $b+c > b+d$. Toepassing van (2.3) geeft dan $a+c > b+d$.

(2.8) is $a > b$ en $c > 0$, dan is $ac > bc$.
Bewijs: Het gegeven houdt in $a-b > 0$, $c > 0$. Krachtens B_2 is dan $(a-b)c = ac-bc > 0$, dus $ac > bc$.

(2.9) is $a > b$ en $c < o$, dan is $ac < bc$.
Bewijs: Nu is $a-b > 0$ en $-c > 0$, zie (2.2) . Dus is $(a-b).(-c) = a.(-c)-b.(-c) = -ac+(-b).(-c) = -ac+bc > 0$, dus $bc > ac$, ofwel $ac < bc$.

(2.10) is $a \gtrless 0$ en $b < 0$, dan is $ab \lessgtr 0$.
Bewijs: Is $a > 0$ en $b < 0$, dan is $-b > 0$, dus $a.(-b) = -ab > 0$, dus $ab < 0$. Is $a < 0$ en $b < 0$, dan is $-a > 0$ en $-b > 0$, dus $(-a).(-b) = ab > 0$.

(2.11) is $a > 0$, dan is ook $\frac{1}{a} > 0$.
Bewijs: We hebben $a.\frac{1}{a} = 1$ en $1 > 0$. Verder is òf $\frac{1}{a} > 0$, òf $\frac{1}{a} = 0$ òf $\frac{1}{a} < 0$. Uit $a > 0$ en $\frac{1}{a} = 0$ zou volgen $1 = 0$; uit $a > 0$ en $\frac{1}{a} < 0$ zou wegens (2.10) volgen $1 < 0$. Blijft slechts over de mogelijkheid $\frac{1}{a} > 0$.

N.B. Er geldt niet: uit $a > b$, $c > d$ volgt $ac > bd$, zelfs niet als a en c beide positief zijn. Men overtuige zich hiervan aan de hand van een getallenvoorbeeld.

Opgaven.

Opg. 1. $-(a-b) = b-a$.

Opg. 2. $(a+b)-c = a+(b-c)$.

Opg. 3. $(a-b)+(c-d) = a+c-(b+d)$.

Opg. 4. $(a+b+c)d = ad+bd+cd$.

Opg. 5. $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.

Opg. 6. $\frac{b}{a} = b.\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$.

Opg. 7. de regel: uit $a > b$ en $c > d$ volgt $ac > bd$ geldt wel, indien a,b,c,d allen positief zijn.

Opg. 8. $-0 = 0$, $a-0 = a$.

Opg. 9. uit $a+c > b+c$ volgt $a > b$.

Opg. 10. zijn a,b,c en $d > 0$, dan is $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ aequivalent met $ad < bc$.

Opg. 11. zijn a,b,c en $d > 0$, en is bovendien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dan is $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Opg. 12. $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ $(b,c,d \neq 0)$.

3. Natuurlijke getallen.

De bespreking van de laatste grondeigenschap stellen we nog even uit. We hebben tot nog toe niet gesproken over natuurlijke (= positieve, gehele) getallen, die toch deel uitmaken van de verzameling der reële getallen. We zullen nu in Γ de natuurlijke getallen gaan aanwijzen en er daarna allerlei eigenschappen voor afleiden. Eerst laten we enige eenvoudige begrippen uit de verzamelingsleer de revue passeren.

Een verzameling is de samenvatting van een aantal objecten tot een geheel. De objecten heten de elementen der verzameling. Is a element van een verzameling V, dan schrijven we $a \in V$. We laten ook de verzameling toe, waartoe geen enkel element behoort, we noemen dit de lege verzameling.

Een verzameling V heet deelverzameling van een verzameling W, geschreven: $V \subset W$ indien elk element van V ook tot W behoort (anders gezegd: indien uit $a \in V$ volgt $a \in W$). Als er bovendien een element van W is, dat niet tot V behoort (als er een a is met $a \in W$, $a \notin V$), dan noemen we V een echte deelverzameling van W. De lege verzameling is deelverzameling van iedere verzameling.

Zijn V en W twee verzamelingen, dan noemen we de verzameling van die elementen, die tot V en / of W (tot een van beiden of tot beiden) behoren, de <u>vereniging</u> van V en W, geschreven $V \cup W$. Is er een <u>collectie F van verzamelingen</u> V gegeven, dan noemen we de verzameling van de elementen, die tot minstens één van de verzamelingen V uit de collectie behoren, de vereniging van de verzamelingen uit de collectie F.

De <u>doorsnee</u> $V \cap W$ van twee verzamelingen V en W is de verzameling van de elementen die zowel in V als in W liggen. Twee <u>disjuncte</u> verzamelingen hebben een lege doorsnede. De doorsnee van een collectie F van verzamelingen V is de verzameling van de elementen, die tot elke verzameling V uit de collectie F behoren.

We beschouwen nu deelverzamelingen V van Γ die aan de volgende twee voorwaarden voldoen:

1) $1 \in V$

2) als $x \in V$, dan ook $x+1 \in V$.

Er zijn zulke verzamelingen. Voorbeelden: Γ zelf; de verzameling van de positieve getallen; de verzameling, bestaande uit de getallen $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 en de getallen > 1 (ga na). We kunnen dus de doorsnede N van alle verzamelingen beschouwen, die aan de eisen 1) en 2) voldoen. Die doorsnede N is weer zo'n verzameling:

ad 1): $1 \in N$, daar 1 voorkomt in elke zodanige V

ad 2): is $x \in N$, dan behoort x tot elke V die aan de bovenbeschouwde voorwaarden voldoet, dus ook $x+1$, dus is $x+1 \in N$. Kennelijk is N de kleinste verzameling die aan 1) en 2) voldoet.

We definiëren nu:

<u>de natuurlijke getallen zijn de getallen uit N, d.w.z. de getallen uit de kleinste verzameling die aan 1) en 2) voldoet.</u>

We kunnen meteen een belangrijke eigenschap van de verzameling N afleiden, n.l. het <u>principe van de volledige inductie</u>:

(3.1)<u>Zij E een eigenschap van natuurlijke getallen die aan de volgende twee voorwaarden voldoet:</u>

1. het getal 1 bezit de eigenschap E.
2. is x een getal uit N dat de eigenschap E bezit, dan komt E ook toe aan het getal $x+1$.

<u>Dan heeft elk natuurlijk getal de eigenschap E.</u>

<u>Bewijs</u>: Zij M de verzameling der natuurlijke getallen die de eigenschap E bezitten. Dan geldt:

$$1 \in M \;;\; \text{als } x \in M, \text{ dan } x+1 \in M.$$

M.a.w. M voldoet aan de eisen 1) en 2). Krachtens de definitie van N is dan $N \subset M$. Vanzelf is $M \subset N$. Dus zijn M en N identiek, $M = N$.

M.b.v.(3.1) kunnen we een groot aantal andere eigenschappen afleiden. We zullen voortaan voor het aanduiden van natuurlijke getallen in de regel de letters n, m, k, l, p, q gebruiken.

(3.2) Is $m \in N$ en $n \in N$, dan ook $m+n \in N$.

Bewijs. Houden we m vast. Dan hebben we te doen met een zekere eigenschap E van n. Voor $n=1$ is deze juist: wegens $m \in N$ is ook $m+1 \in N$. Zij nu n een natuurlijk getal dat de eigenschap E bezit, waarvoor dus $m+n \in N$. Op grond van 2) is dan ook $m+(n+1) = (m+n)+1 \in N$, zodat ook $n+1$ de eigenschap E bezit. Krachtens (3.1) bezit dan elk natuurlijk getal de eigenschap E. Daar bovenstaande redenering van kracht is voor elk natuurlijk getal m, is hiermee de bewering aangetoond.

Opmerking. We zeggen dat we hierboven de bewering hebben aangetoond door volledige inductie naar n.

(3.3) Is $m \in N$ en $n \in N$, dan ook $m.n \in N$.

Bewijs. We houden weer m vast. Voor $n = 1$ is de bewering juist: uit $m \in N$ volgt $m.1(=m) \in N$. Stel nu eens $m.n \in N$. Wegens $m.(n+1)=mn+n$ en de zojuist bewezen eigenschap is dan $m.(n+1) \in N$. Door volledige inductie volgt dat $m.n \in N$ voor elke $n \in N$. Daar het bovenstaande voor elk natuurlijk getal m geldt, is hiermee (3.3) bewezen.

(3.4) $n \geqq 1$, als $n \in N$.

Bewijs. Ten eerste is $1 \geqq 1$. Is $n \geqq 1$, dan is, o.a. wegens (2.5) en (2.3), ook $n > 0$, dus ook $n+1 > 1$. De bewering volgt nu door volledige inductie.

Gevolg. De natuurlijke getallen zijn positief.

(3.5) Is $n \in N$, dan is $n = 1$ of $n = 1+m$ met $m \in N$.

Bewijs. Voor $n = 1$ is de bewering juist. Stel dat de bewering geldt voor een natuurlijk getal n. We hebben $n+1 = 1+n$, $n \in N$. Dus geldt de bewering ook voor $n+1$. Door volledige inductie volgt dat de bewering juist is voor alle n.

(3.6) Uit $n < m$ ($n \in N$, $m \in N$) volgt $n+1 \leqq m$.

Bewijs. Door volledige inductie naar n. Zij vooreerst $n = 1$ en m een natuurlijk getal > 1. Op grond van (3.5) kunnen we dan schrijven $m=1+p$, waar $p \in N$. Wegens (3.4) is $p \geqq 1$ en dus $m=1+p \geqq 1+1$. Hiermee is (3.6) aangetoond voor $n=1$.

Zij nu n een natuurlijk getal met de eigenschap dat uit $n < m$ steeds volgt $n+1 \leqq m$. Beschouwen we het natuurlijke getal $n+1$ en een natuurlijk getal $m > n+1$. Wegens (3.5) is $m= 1+p$ met $p \in N$. Dan is $p > n$, dus $p \geqq n+1$, $m \geqq n+1+1$. M.a.w. ook $n+1$ heeft de beschouwde eigenschap.

De twee in (3.1) genoemde voorwaarden zijn dus weer vervuld en het bewijs van (3.6) is geleverd.

Gevolg. Uit $n < m+1$ ($n \in N$, $m \in N$) volgt $n \leqq m$.

(3.7) Een niet-lege verzameling M van natuurlijke getallen bevat een kleinste getal.

Bewijs. We beschouwen ook de verzameling V van de getallen n met de eigenschap

$$n \leqq m \text{ voor elke } m \in M.$$

Wegens (3.4) heeft zeker 1 deze eigenschap ($1 \in V$). Anderzijds, als we een getal m' uit M nemen (M was niet leeg ondersteld), dan heeft b.v. m'+1 niet die eigenschap ($m'+1 \notin V$).Dus bevat V niet alle natuurlijke getallen. Gold nu voor elk natuurlijk getal n, dat uit $n \in V$ volgt $n+1 \in V$, dan voldeed V aan de eisen 1) en 2) en was dus V=N. Dit is een tegenspraak en dus is er een getal n met $n \in V$, $n+1 \notin V$. Dan is er een $m'' \in M$, zodat $n+1 > m''$, terwijl toch $n \leqq m''$. Uit (3.6), gevolg leiden we af $m'' \leqq n$. Dus $m'' = n$. Hiermee is een getal $m'' \in M$ gevonden met de eigenschap

$$m'' \leqq m \text{ voor elke } m \in M.$$

Anders gezegd: m" is het kleinste getal van M.

We laten nu zien dat het aldus ingevoerde begrip natuurlijk getal overeenstemt met het intuïtieve begrip natuurlijk getal, dat samenhangt met het tellen.

Definitie: A(m) is de verzameling van de natuurlijke getallen, die hoogstens gelijk zijn aan het natuurlijke getal m.

Het tellen van de elementen van een verzameling V is het tot stand brengen van een eeneenduidige afbeelding van de elementen van V op de getallen uit een zekere verzameling A(m), dat is een afbeelding, waarbij aan elk element van V één getal uit A(m) beantwoordt en aan elk getal uit A(m) één element van V. We bewijzen eerst:

(3.8) Bestaat er een eeneenduidige afbeelding van A(m) op A(n), dan is m=n.

Bewijs. Volledige inductie naar n. Is n=1, dan is ook m=1. Stel nu dat de bewering geldt voor een zekere waarde van n en beschouwen we een eeneenduidige afbeelding van A(p) op A(n+1). Wegens $n+1 \neq 1$ is $p \neq 1$, op grond van (3.5) dus p=1+q met $q \in N$. De beschouwde afbeelding induceert een eeneenduidige afbeelding van A(q) op de verzameling B die uit A(n+1) ontstaat door daaruit het beeld 1 van p weg te laten. Nu is B eeneenduidig af te beelden op A(n), zoals men inziet door te bedenken dat B en A(n) ontstaan door weglating van resp. 1 en n+1. We vinden dat A(q) eeneenduidig is af te beelden op A(n). Wegens inductieonderstelling is dan q=n. Dus p=n+1, zodat de bewering geldt voor n+1. Daarmee is (3.8) bewezen.

Beschouwen we nu een verzameling V. Indien er een eeneenduidige afbeelding is van V op A(m) en ook een eeneenduidige afbeelding van V op A(n), dan is ook A(m) eeneenduidig op A(n) af te beelden en dus m=n. Voor V zijn er nu twee mogelijkheden. Òf V is op geen verzameling A(m) af te beelden; in dat geval heet V een oneindige verzameling. Of V is af te beelden op een A(m) en dan is m ondubbelzinnig bepaald; in dat geval heet V een eindige verzameling en m het aantal elementen van V (we zeggen: V bestaat uit, is een verzameling van m elementen). De lege verzameling wordt ook eindig genoemd. Het begrip aantal is te beschouwen als een intuïtieve interpretatie van ons axiomatisch-deductief ingevoerd begrip natuurlijk getal.

Een voorbeeld van een oneindige verzameling is de verzameling N der natuurlijke getallen.

Door volledige inductie toont men aan: zijn V en W twee eindige, disjuncte verzamelingen van m resp. n elementen, dan is de vereniging $V \cup W$ weer een eindige verzameling, bestaande uit m+n elementen. Het product mn laat ook een dergelijke interpretatie toe. De elementen van een verzameling V kunnen getallen zijn. Zo kunnen we spreken over een verzameling van n getallen (al of niet onderling verschillend).

De positionele schrijfwijze van natuurlijke getallen (in b.v. het tientallig stelsel) veronderstellen we bekend.

§ 4. Algemene sommen en producten. Machten.

Zij n een natuurlijk getal. We beschouwen een verzameling van n reële getallen, dat is een verzameling getallen, die eeneenduidig is af te beelden op de verzameling A(n) der natuurlijke getallen $\leq n$. We noemen a_i het getal dat bij deze afbeelding aan het natuurlijke getal i is toegevoegd ($i \leq n$) en spreken kortweg van de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

We willen nu eerst definiëren de som van de getallen a_i, voorgesteld door $\sum_{i=1}^{n} a_i$. We stellen daartoe

$$(4.1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \\ \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} \qquad (k \in N). \end{cases}$$

Hierdoor is het symbool $\sum_{i=1}^{n} a_i$ gedefiniëerd voor elk natuurlijk getal krachtens (3.1); we zeggen dat het gedefiniëerd is door volledige inductie naar n.

Evenzo definiëren we het product van de n getallen a_i, geschreven $\prod_{i=1}^{n} a_i$, d.m.v. de betrekkingen

$$(4.2) \quad \prod_{i=1}^{1} a_i = 1 \quad , \quad \prod_{i=1}^{k+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right) \cdot a_{k+1} \qquad (k \in N).$$

Door volledige inductie naar m bewijst men onmiddellijk

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} = \sum_{i=1}^{n+m} a_i \quad ,$$

$$(4.4) \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{m} a_{n+i} = \prod_{i=1}^{n+m} a_i .$$

Het is duidelijk hoe hier som en product van de getallen a_{n+1}, $a_{n+2},\dots,a_{n+m}$ gedefiniëerd zijn op grond van (4.1) en (4.2). In plaats van $\sum_{i=1}^{m} a_{n+i}$ en $\prod_{i=1}^{n} a_{n+i}$ schrijven we ook $\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i$ resp. $\prod_{i=n+1}^{n+m} a_{n+i}$.

(4.5) Als $\varphi(i)$ een eeneenduidige afbeelding is van $A(n)$ op zichzelf, dan geldt

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{(algemene commutatieve eigenschap van de optelling).}$$

<u>Bewijs</u>. Volledige inductie naar n. Voor n=1 is het duidelijk. Laat het nu gelden voor een zekere waarde van n. Beschouwen we dan een eeneenduidige afbeelding $\varphi(i)$ van $A(n+1)$ op zichzelf en zij $x=\varphi(n+1)$. De getallen $a_{\varphi(1)},a_{\varphi(2)},\dots,a_{\varphi(n)}$ zijn de getallen $a_1,a_2,\dots,a_{n+1}$ met weglating van x. Voor $x \neq 1$, $x \neq n+1$ kunnen we dus herleiden

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{\varphi(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)}+a_x = \sum_{i=1}^{x-1} a_i + \sum_{i=x+1}^{n+1} a_i + a_x$$

$$= \sum_{i=1}^{x-1} a_i+a_x+\sum_{i=x+1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

Het resultaat geldt ook als x=1 of x=n+1. Hiermee is de bewering aangetoond voor n+1. Dus geldt (4.5) algemeen.

Evenzo toont men aan:

(4.6) Als $\varphi(i)$ een eeneenduidige afbeelding is van $A(n)$ op zichzelf, dan geldt

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_i \quad \text{(Algemene commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging).}$$

Verder toont men aan door volledige inductie naar n

(4.7) $$a\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} ab_i$$

We merken nog op dat men in plaats van $\sum_{i=1}^{n} a_i$ vaak schrijft $a_1+a_2+\dots+a_n$ en in plaats van $\prod_{i=1}^{n} a_i$ ook $a_1a_2\dots a_n$.

Zijn de getallen a_i gelijk, $a_i=a$, dan geldt

(4.8) $$\sum_{i=1}^{n} a=na.$$

Verder schrijven we

(4.9) $$\prod_{i=1}^{n} a = a^n,$$

geheten <u>macht</u> van a; a heet het <u>grondtal</u>, n de <u>exponent</u>.

Tenslotte definiëren we nog

(4.10) $$a^0=1, a^{-n}= \frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0,\ n \text{ een natuurlijk getal}).$$

We geven enige eigenschappen van machten. Zijn n en m natuurlijke getallen, dan geldt

(4.11)
$$\begin{cases} a^m.a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ a^n b^n = (ab)^n. \end{cases}$$

Zijn a en b$\neq$0 en p en q gehele getallen, dan is

(4.12)
$$\begin{cases} a^p.a^q = a^{p+q} \\ a^p.b^p = (ab)^p \\ (a^p)^q = a^{pq}\ ,\ \text{b.v. } (a^{-1})^q = a^{-q} \\ \dfrac{a^p}{b^p} = (\dfrac{a}{b})^p\ . \end{cases}$$

De eigenschappen (4.11) worden aangetoond door volledige inductie naar n; de eerste eigenschap is een bijzonder geval van (4.4). De eigenschappen (4.12) worden ook aangetoond door volledige inductie, maar men moet hierbij enige gevallen onderscheiden. Zo bewijst men de eerste eigenschap opvolgend voor $q = 0$; voor $q = 1$ en -1 door te onderscheiden de gevallen $p > 0$, $p=0$, $p < 0$; *zeg $q = -m$, door volledige inductie naar m. De derde eigenschap haalt men uit de tweede eigenschap (4.11) door eerst door volledige inductie naar n aan te tonen $a^{-n} = (a^{-1})^n$ en daarna te onderscheiden de gevallen $p > 0$, $q > 0$; p of $q = 0$; $p < 0$, $q > 0$; $p > 0$, $q < 0$; $p < 0$, $q < 0$.

Tot slot enige ongelijkheden.

(4.13) Zijn gegeven 2 n getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ en is $a_i > b_i$ voor $i=1,2,\ldots,n$, dan geldt ook

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Bewijs. Voor n=1 geldt de eigenschap. Zijn gegeven 2n getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$, geldt $a_i > b_i$ voor $i=1,2,\ldots,n$, is $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{i=1}^{n} b_i$, en is voorts $a_{n+1} > b_{n+1}$, dan volgt door toepassing van (2.7) onmiddellijk

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} > \sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1},\ \text{dus}\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i > \sum_{i=1}^{n+1} b_i.$$

Door volledige inductie naar n volgt de juistheid van (4.13).

(4.14) Is $a > b \geq 0$ en n een natuurlijk getal, dan is ook $a^n > b^n$.

Bewijs. Voor n=1 is (4.14) juist. Is $a^n > b^n$, dan volgt door tweemaal toepassen van (2.8)

$$a^{n+1} = a^n.a > b^n.a > b^n.b = b^{n+1}.$$

Door volledige inductie naar n volgt (4.14).

*voor $q > 0$ door volledige inductie naar q; voor $q < 0$, (4.15) Is n een natuurlijk getal > 1 en is a positief, dan is $(1+a)^n > 1+na$ (ongelijkheid van Bernoulli, 1689).

Bewijs. Voor n=2 luidt de ongelijkheid

$$1+2a+a^2 > 1+2a,$$

hetgeen zelfs juist is voor alle $a \neq 0$. Is, voor een zekere waarde van n, $(1+a)^n > 1+na$, dan volgt

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) > (1+na)(1+a),$$

dus

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a+na^2 > 1+(n+1)a.$$

De beschouwde ongelijkheid geldt dus voor $n \geq 2$.

§ 5. Gehele en gebroken of rationale getallen.

Gehele getallen zijn per definitie de natuurlijke getallen, het getal 0 en de tegengestelden der natuurlijke getallen. De laatsten zijn wegens (2.2) negatief. Een getal $r = \frac{p}{q}$, waar $q \neq 0$ en p en q gehele getallen zijn, heet gebroken of rationaal.

(5.1) Som en verschil van twee gehele getallen is weer een geheel getal.

Bewijs. We bewijzen eerst dat a-1 geheel is, als a geheel is. Voor a = 0 of 1 is dit duidelijk. Is a een natuurlijk getal $\neq 1$, dan is $a = 1+b$ met $b \in N$ wegens (3.5), dus ook $a-1 = b$ een natuurlijk getal en dus een geheel getal. Is a een negatief geheel getal, $a=-c$ met $c \in N$, dan is $a-1=-c-1=-(c+1)$ ook een negatief geheel getal.

Zij nu n een natuurlijk getal met de eigenschap dat a-n geheel is, wanneer a geheel is. Wegens het voorgaande is dan voor alle gehele a ook $a-(n+1) = (a-n)-1$ geheel.

Door volledige inductie naar n volgt dat, wanneer a een geheel getal is en n een natuurlijk getal, ook a-n een geheel getal is. Ook is, daar het tegengestelde van een geheel getal weer een geheel getal is, $a+n = -((-a)-n)$ geheel, evenals $a \pm 0 = a$. Hiermee is (4.1) bewezen.

(5.2) Het product van twee gehele getallen is weer een geheel getal.

Bewijs. Volgt door toepassing van de regels (1.13) en de eigenschap (3.3).

Het quotiënt van twee gehele getallen behoeft niet weer een geheel getal te zijn. Zijn b.v. m en n twee natuurlijke getallen met $m < n$, dan is $\frac{m}{n}$ niet geheel. Want $\frac{m}{n}$ is positief (vlg.(2.10) en (2.11)), maar voor elk natuurlijk getal k is $k.n \geq 1.n = n > m$, dus $\frac{m}{n} \neq k$.

(5.3) Som, verschil, product en quotiënt van twee rationale getallen is weer rationaal.

Bewijs. Laten die twee getallen $\frac{m}{m}$ en $\frac{p}{q}$ zijn (m,n,p,q geheel; $n,q \neq 0$)

Uit (1.17) en 1.20) volgt onmiddellijk dat $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ en $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$ van dezelfde gedaante, d.w.z. rationaal zijn. Dezelfde conclusie geldt voor $\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$ en $\frac{m}{n}\cdot(\frac{p}{q})^{-1}$, wegens $-\frac{p}{q}=(-1)\cdot\frac{p}{q}=\frac{-p}{q}$, $(\frac{p}{q})^{-1}=$ $=\frac{q}{p}$ (in het laatste geval ook $p\neq 0$).

We tonen nog enige eigenschappen aan betreffende de ordening van gehele en rationale getallen. We zullen zeggen dat b tussen a en c ligt, indien geldt: $a<b<c$.

(5.4) Is p een geheel getal, dan ligt er tussen p en p+1 geen ander geheel getal.

<u>Bewijs</u>. Blijkens (3.6) gevolg is de bewering juist als p een natuurlijk getal is. Dan geldt de bewering ook voor een willekeurig geheel getal p. Want uit $p<q<p+1$ (q geheel) zou op grond van (2.6) volgen

$p+(1-p)<q+(1-p)<p+1+(1-p)$

ofwel $1<q+1-p<2$,

waarbij $q+1-p$ geheel is.

(5.5) Tussen twee verschillende, rationale getallen a en b ligt steeds een ander rationaal getal.

<u>Bewijs</u>. Zij a de kleinste der twee getallen. Het getal $\frac{a+b}{2}$ is rationaal, terwijl

$$a<\frac{a+b}{2} \text{ wegens } \frac{a+b}{2}-a=\tfrac{1}{2}(b-a)>0\ ;$$

$$\frac{a+b}{2}<b \text{ wegens } b-\frac{a+b}{2}=\tfrac{1}{2}(b-a)>0.$$

<u>Opmerking</u>. We drukken deze eigenschap wel uit door te zeggen dat de rationale getallen overal dicht liggen. Er volgt nog uit (4.5) dat er tussen twee rationale getallen zelfs oneindig veel rationale getallen liggen.

<u>Opgaven</u>.

<u>Opg. 13</u>. Er is geen grootste natuurlijk getal.

<u>Opg. 14</u>. De verzameling A(n+1) bestaat uit het getal n+1 en de getallen van A(n) (n een natuurlijk getal).

<u>Opg. 15</u>. Zij E een eigenschap van natuurlijke getallen, die aan de volgende voorwaarden voldoet:

a) 1 heeft de eigenschap E.

b) hebben de getallen $\leq$ n de eigenschap E, dan heeft ook n+1 de eigenschap E. Dan heeft elk natuurlijk getal de eigenschap E.

<u>Opg. 16</u>. Zij k een geheel getal en E een eigenschap van gehele getallen die aan de volgende voorwaarden voldoet:

t

a) k heeft de eigenschap E.

b) als p de eigenschap E heeft, dan ook p+1.

Dan heeft elk geheel getal $\geq$ k de eigenschap E.

Opg. 17. Onder n getallen komt een grootste voor, alsook een kleinste.
Opg. 18. Bewijs door volledige inductie naar n

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Opg. 19. Als n een natuurlijk getal is en $q \neq 1$, bewijs dan dat

$$1+q+q^2+\dots+q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Opg. 20. Bewijs door volledige inductie naar n

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

ofwel $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Opg.21. Bewijs $\prod_{i=0}^{n}(1+x^{2^i}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ (n een natuurlijk getal).

N.B. x^{2^i} betekent niet $(x^2)^i$, maar $x^{(2^i)}$, d.i. het gedurig product van 2^i factoren x.

Opg. 22. Is n een natuurlijk getal > 2 en is $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3, \dots,$ $a_{n-1} > a_n$, dan geldt ook $a_1 > a_n$.

Opg. 23. De ongelijkheid van Bernoulli geldt ook als $-1 < a < 0$. Voor $a = 0$ of $n = 1$ gaat zij in een gelijkheid over.

Opg. 24. Wanneer is het verschil van twee natuurlijke getallen weer een natuurlijk getal?

Opg. 25. Is $a \neq 0$ rationaal, dan ook a^p (p een geheel getal).

§6. De snede van Dedekind.

Het laatste axioma, dat we nodig hebben, luidt als volgt.

C. Laten gegeven zijn twee deelverzamelingen L en R van Γ met de volgende eigenschappen:

1). de vereniging van L en R is Γ.

2). de verzamelingen L en R zijn disjunct en niet-leeg

3). is $a \in L$ en $a_1 < a$, dan is ook $a_1 \in L$

4). is $b \in R$ en $b_1 > b$, dan is ook $b_1 \in R$.

Dan heeft òf L een grootste getal òf R een kleinste getal.

Zo'n verdeling van Γ zullen we snede noemen; L heet de linkerklasse en R de rechterklasse.

Het axioma C, ingewikkelder van aard dan de overige, is pas laat duidelijk geformuleerd, en wel voor het eerst door Dedekind in 1872 (R.Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen). Het is de sluitsteen van de constructieve opbouw van het systeem der reële getallen (die wij hier niet gegeven hebben) en is van fundamenteel belang voor de analyse, zoals we die in het volgende gaan bedrijven. Later zullen we zien, hoe b.v. deze snedeeigenschap aequivalent is met het feit dat Γ te beschrijven is als het systeem van alle (oneindig voortlopende) decimale breuken. Wat de inhoud van de eigenschap betreft, merken we nog het volgende op. Het is triviaal dat er niet zowel in L een grootste getal c als in R een kleinste getal c' voorkomt : dan zou n.l. een getal d tussen c en c' nòch tot L nòch tot R behoren, in strijd met de eis $L \cup R = \Gamma$. Het axioma zegt nu, dat zich tenminste één van die twee mogelijkheden voordoet.

We gaan nu de z.g. stellingen van de bovenste en onderste grens bespreken en beginnen daartoe met enige definities. We noemen een verzameling M van reële getallen <u>naar boven begrensd</u>, indien er een reëel getal K bestaat, zodanig dat geldt $x \leqq K$ voor elk getal x uit M; een getal K met die eigenschap heet een <u>majorant</u> van M. Evenzo heet een verzameling M van reële getallen <u>naar beneden begrensd</u> als er een reëel getal K' bestaat, zodat

$$x \geqq K' \quad \text{als } x \in M \quad ;$$

zo'n getal K' heet <u>minorant</u> van M. Een verzameling M heet <u>begrensd</u>, als hij zowel naar boven als naar beneden begrensd is.

We beschouwen speciaal een niet-lege, naar boven begrensde verzameling M. Zij L de verzameling van de getallen a met de eigenschap

er is een getal $x \in M$, zodat $a < x$.

Zij R de verzameling van de getallen b met de eigenschap:

$b \geqq x$ voor elke $x \in M$

(anders gezegd: R is de verzameling van de majoranten van M). Ten duidelijkste bestaat L uit de getallen die niet tot R behoren. L is niet-leeg, omdat M niet-leeg is; R is niet-leeg, omdat er krachtens onderstelling majoranten van M zijn. Behoort a tot L, dan ook elk kleiner getal. Is b een majorant, dan ook $b_1 > b$. Dus is voor het paar verzamelingen L en R aan de eigenschappen 1), 2), 3) en 4) voldaan, d.w.z. L en R vormen een snede. We laten voorts zien dat er in L geen grootste getal voorkomt . Inderdaad, zij $a \in L$. Dan is er een getal x met $x \in M$, $x > a$. Het getal $a_1 = \frac{a+x}{2}$ voldoet aan $a_1 > a$, $a_1 < x$ en dus $a_1 \in L$. Bijgevolg is a niet het grootste getal van L.

Op grond van C mogen we concluderen, dat R een kleinste getal heeft, zeg c. Dit getal c is de kleinste majorant van M en voldoet aan

1. $c \geqq x$ als $x \in M$
2. is $a < c$, dan is er een $x \in M$ met $a < x \leqq c$.

Gewoonlijk wordt c de <u>bovenste grens</u> van M genoemd; men schrijft $c = \sup_{x \in M} x$ (uitgesproken supremum). Men ga na, dat niet meer dan één getal c aan de eisen 1 en 2 voldoet. Het verkregen resultaat kunnen we nu samenvatten tot de

<u>Stelling van de bovenste grens</u>. Een niet-lege, naar boven begrensde verzameling heeft een bovenste grens.

Analoge beschouwingen gelden voor een niet-lege, naar beneden begrensde verzameling M. Er is dan één getal d dat voldoet aan

1'. $d \leqq x$ als $x \in M$

2'. is $b > d$, dan is er een $x \in M$ met $d \leqq x < b$.

Dit getal d is de grootste minorant van M en wordt ook de <u>onderste grens</u> van M genoemd; men schrijft $d = \inf_{x \in M} x$ (uitgesproken infimum).

<u>Stelling van de onderste grens</u>. Een niet-lege, naar beneden begrensde verzameling heeft een onderste grens.

We geven enige voorbeelden.

1°. M is de verzameling van de positieve getallen. Dan is M naar beneden begrensd; de onderste grens is 0.

2°. M is de verzameling der even getallen. Dan is M naar beneden begrensd; de onderste grens is 2.

3°. M is de verzameling der getallen x met $1 \leqq x < 2$. Dan is M begrensd; de onderste grens is 1, de bovenste grens is 2.

4°. M is een niet-lege, eindige verzameling. Dan is M begrensd; de onderste grens van M is het kleinste getal van M, de bovenste grens van M is het grootste getal van M (vgl.opg.17).

Uit de voorbeelden blijkt, dat de bovenste (onderste) grens van M nu eens wel, dan weer niet tot de verzameling M behoort.

Van veel oudere datum dan het axioma van Dedekind is het, het eerst in de meetkunde opgetreden, axioma van <u>Archimedes</u> (3^e^ eeuw v. Chr.), ook wel naar <u>Eudoxos</u> genoemd. Het kan afgeleid worden uit het axioma van Dedekind, zodat het in onze opbouw een <u>stelling</u> is. Het luidt als volgt.

Zijn a en b twee positieve getallen, dan is een natuurlijk getal n, zodat $na > b$.

<u>Bewijs</u>. Noemen we L de verzameling der getallen c met de eigenschap:

er is een natuurlijk getal n, zodat $na > c$

en R de verzameling der getallen d waarvoor geldt:

voor elk natuurlijk getal n is $na \leqq d$.

Onderstellen we eens $L \neq \Gamma$. Men ziet gemakkelijk in, dat dan aan de eisen 1), 2), 3), 4) (p.16) is voldaan. Dus vormen L en R een snede. Op grond van C is er een getal γ, dat hetzij het grootste getal van L, hetzij het kleinste getal van R is. In elk geval is $\gamma - a \in L$, $\gamma + a \in R$. Dus is er een natuurlijk getal m met $ma > \gamma - a$, dus $(m+2)\,a > \gamma + a$. Dus $\gamma + a \in L$, hetgeen een tegenspraak oplevert. Dientengevolge is $L = \Gamma$, speciaal $b \in L$. Daarmee is de bewering aangetoond.

<u>Gevolg</u>. Is a een reëel getal, dan zijn er gehele getallen p en q, zodat $p < a < q$.

We hebben reeds kennis gemaakt met de rationale getallen (waartoe o.a. de natuurlijke en de gehele getallen behoren). We zullen aanstonds aan een eenvoudig voorbeeld laten zien, dat sommige getallen niet rationaal zijn, d.w.z. niet te schrijven zijn als het quotient van twee gehele getallen; zulke getallen noemen we <u>irrationaal</u>. Irrationale getallen zijn er in grote verscheidenheid; in een later te bespreken zin zijn ze zelfs talrijker dan de rationale. Maar we zullen ons over het algemeen niet verliezen in beschouwingen aangaande het rekenkundig karakter van de voorkomende getallen: hoofdzaak is voor ons dat het axioma van Dedekind (of meestal een daaruit afgeleide stelling) ons keer op keer het bestaan verzekert van een getal, dat de bovenste grens is van een verzameling, de limiet van een rij, de som van een reeks, enz.

We laten nu zien dat er een positief getal x is, zodat $x^2 = 2$ en zullen daarna aantonen dat dit getal irrationaal is. We stellen het voor door $\sqrt{2}$.

Noemen we R de verzameling van de positieve getallen b met $b^2 > 2$ en L de verzameling van de overige getallen. Is $b \in R$ en $b_1 > b$, dan is ook $b_1 \in R$ wegens $b_1^2 > b.b_1 > b^2$. Kennelijk vormen L en R een snede. Zij c het daardoor bepaalde getal en zij $\bar{c} = 2.\dfrac{c+1}{c+2}$. Daar L positieve getallen bevat, is $c > 0$ en ook $\bar{c} > 0$. We hebben

$$\bar{c}^2-2 = 4\,\frac{(c+1)^2}{(c+2)^2} -2 = 2.\;\frac{2c^2+4c+2-(c^2+4c+4)}{(c+2)^2} = \frac{2(c^2-2)}{(c+2)^2}$$

en

$$c-\bar{c} = c-\frac{2(c+1)}{c+2} = \frac{c^2-2}{c+2}\,.$$

Was $c^2 < 2$, dan was ook $\bar{c}^2 < 2$ en $c-\bar{c} < 0$, dus $\bar{c}$ een getal uit L groter dan c. Was $c^2 > 2$, dan was ook $\bar{c}^2 > 2$ en $c-\bar{c} > 0$, dus $\bar{c}$ een getal uit R kleiner dan c. Daar nu c òf het grootste getal uit L òf het kleinste getal uit R is, doet zich geen van deze beide omstandigheden voor. Dus is $c^2 = 2$. Daarmee is $\sqrt{2}$ gevonden.

Stel nu eens dat $\sqrt{2}$ rationaal is. Daar $\sqrt{2}$ positief is, zijn er dan ook breuken met positieve teller en noemer, gelijk aan $\sqrt{2}$. Daaronder is er wegens (3.7) één met kleinste teller, zeg $\frac{p}{q}$. We hebben $(\frac{p}{q})^2 = 2$, dus $p^2 = 2q^2$. Daaruit volgt $p > q$, $p < 2q$. Beschouwen we nu de breuk $\dfrac{2q-p}{p-q}$. We hebben $0 < 2q-p < p$ en tevens

$$\left(\frac{2q-p}{p-q}\right)^2 = \frac{4q^2-4pq+p^2}{p^2-2pq+q^2} = \frac{6q^2-4pq}{3q^2-2pq} = 2.$$

Dit is in strijd met de minimaliteitseis voor p. De conclusie luidt, dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.

<u>Stelling</u>. Tussen twee verschillende reële getallen liggen rationale

zowel als irrationale getallen (dus ook oneindig vele!).

Bewijs. Zij $a < b$. We beginnen met een rationaal getal tussen a en b te zoeken en beschouwen daartoe eerst het geval, dat a, en dus ook b, positief is. Daar $b-a > 0$ is, is er wegens het axioma van Archimedes een natuurlijk getal n met $n(b-a) > 1$, dus $\frac{1}{n} < b-a$. Eveneens op grond van het axioma van Archimedes kunnen we een natuurlijk getal m vinden, zodat $\frac{m}{n} > a$. Laat m speciaal het kleinste natuurlijke getal met die eigenschap zijn (zie (3.7)). Dan is $\frac{m-1}{n} \leqq a$, ook indien $m-1$ geen natuurlijk getal, n.l. 0 is. Er volgt $\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leqq$ $\leqq a + \frac{1}{n} < a+(b-a) = b$. Dus $a < \frac{m}{n} < b$, waarmee er een rationaal getal tussen a en b gevonden is.

Zij nu $a \leqq 0$. Er is een geheel getal $p < a$ (zie gevolg op p.18, onderaan). Volgens het zojuist bewezene is er een rationaal getal r tussen $a-p$ en $b-p$. En $r+p$ is weer een rationaal getal en gelegen tussen a en b.

Volgens het nu bewezene is er, nog steeds in de onderstelling $a < b$, ook een rationaal getal s, waarvoor geldt $a+\sqrt{2} < s < b+\sqrt{2}$. Dan geldt ook $a < s-\sqrt{2} < b$. Nu is het getal $s-\sqrt{2}$ irrationaal, anders was n.l. $s-(s-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ rationaal. Daarmee is de stelling geheel bewezen.

Een meetkundige illustratie van het systeem Γ der reële getallen krijgen we als volgt. Kies op een Euclidische rechte lijn een vast punt O en beeld o op O af, de positieve getallen a op de punten aan één zijde van O, op afstand a van O, en de negatieve getallen $-a$ op de punten aan de andere zijde van O, op afstand a van O. Er ontstaat dan – wat we hier niet zullen aantonen – een eeneenduidige toevoeging tussen de getallen van Γ en de punten van de rechte. We zullen echter nooit, overeenkomstig onze axiomatische opbouw, voor het bewijs van enige stelling een beroep doen op de meetkunde, alleen somtijds een aanschouwelijke toelichting aan de hand van een tekening geven. Er is natuurlijk geen bezwaar tegen, voor een aantal begrippen benamingen in te voeren die aan de meetkunde ontleend zijn.

Opg.26. Heeft een verzameling L van reële getallen de beide volgende eigenschappen:

1) L is niet-leeg en $\neq \Gamma$

2) is $a \in L$ en $a_1 < a$, dan is ook $a_1 \in L$,

dan is er een snede, waarvan L de linkerklasse is.

Opg.27. Zij M een niet-lege, naar boven begrensde verzameling en M^* de verzameling van de getallen $-x$ met $x \in M$. Dan is M^* naar beneden begrensd. De onderste grens van M^* is het tegengestelde van de bovenste grens van M.

Opg.28. Bewijs dat $\sqrt{3}$ en $\sqrt{7}$ irrationaal zijn (vergelijk nu breuken $\frac{p}{q}$ en $\frac{3q-p}{p-q}$ resp. $\frac{7q-2p}{p-2q}$).

Opg.29. Bewijs dat $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrationaal is (kwadrateren!).

Opg.30. Zijn a, b, c, d rationale getallen met ad-bc $\neq 0$ en is γ irrationaal, dan is ook $\frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}$ irrationaal.

Opg.31. Wat valt te zeggen over som en product van twee irrationale getallen?

§ 7. Absolute waarde. Omgeving. Verdichtingspunt.

In deze en de beide volgende paragrafen zullen we nog geen gebruik maken van de snedeeigenschap.

De absolute waarde of modulus van een reëel getal a, geschreven $|a|$, wordt als volgt gedefiniëerd.

$$|0| = 0, \quad |a| = a \quad \text{als } a > 0,$$
$$|a| = -a \quad \text{als } a < 0$$

Uit deze definitie vloeien onmiddellijk de volgende eigenschappen voort.

(7.1) $|a| \geqq 0$, $|a| = 0$ alleen als $a = 0$.

(7.2) $|a| = |-a|$

(7.3) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(7.4) Is a reëel en A positief, dan geldt $|a| \leqq A$ dan en slechts dan als
$$a \leqq A \quad \text{èn} \quad -a \leqq A.$$

Voorts gelden de volgende eigenschappen.

(7.5) Zijn a en b willekeurige reële getallen, dan is
$$|a + b| \leqq |a| + |b| .$$

Bewijs. Wegens $a \leqq |a|$, $b \leqq |b|$ (vlg.(7.4)) is
$$a + b \leqq |a| + |b| .$$
Wegens $-a \leqq |a|$, $-b \leqq |b|$ is evenzo
$$-(a+b) \leqq |a| + |b| .$$
Door toepassing van (7.4) volgt de bewering.

(7.6) Zijn a en b willekeurige reële getallen, dan is
$$\big||a| - |b|\big| \leqq |a - b|.$$

Bewijs. Op grond van (7.5) hebben we
$$|a| = |(a-b) + b| \leqq |a-b| + |b|,$$
dus
$$|a| - |b| \leqq |a-b|$$
en evenzo
$$|b| = |(b-a)+a| \leqq |b-a| + |a| = |a-b| + |a| ,$$
dus
$$|b| - |a| \leqq |a - b|.$$
Door toepassing van (7.4) volgt de bewering.

Door volledige inductie toont men aan
(7.7) Heeft men $n \geq 2$ reële getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$, dan geldt

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| ,$$

anders geschreven:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| .$$

Zij $a < b$. We weten al dat er getallen tussen a en b liggen. We definiëren nu:

het <u>open interval</u> (a,b) is de verzameling der getallen x met $a < x < b$,

het <u>gesloten interval</u> (a,b) is de verzameling der getallen x met $a \leq x \leq b$,

het <u>links</u> (<u>rechts</u>) gesloten interval (a,b) is de verzameling der getallen x met $a \leq x < b$ ($a < x \leq b$).

In plaats van gesloten interval zeggen we ook <u>segment</u> . Genoemde intervallen zijn eindig. We definiëren ook oneindige intervallen:

het <u>open interval</u> (a,∞) is de verzameling der getallen $x > a$,

het <u>open interval</u> $(-\infty,a)$ is de verzameling der getallen $x < a$,

het <u>links gesloten interval</u> (a,∞) is de verzameling der getallen $x \geq a$,

het <u>rechts gesloten interval</u> $(-\infty,a)$ is de verzameling der getallen $x \leq a$,

het <u>interval</u> $(-\infty,\infty)$ is de verzameling Γ van alle reële getallen.

We kunnen nu het begrip omgeving definiëren. Is a willekeurig en is $\varepsilon > 0$, dan heet het open interval $(a-\varepsilon , a+\varepsilon)$ een <u>omgeving van a</u> (en wel de ε-omgeving van a). Verder heet voor elke a het open interval (a,∞) <u>een omgeving van ∞</u> en het open interval $(-\infty, a)$ een <u>omgeving van $-\infty$</u>.

De ε-omgeving van een getal a is te beschouwen als de verzameling der getallen x, waarvoor geldt $|x-a| < \varepsilon$.

Immers $|x-a| < \varepsilon$ is aequivalent met het stelsel mogelijkheden

$$x - a < \varepsilon , \quad a - x < \varepsilon ,$$

dus met

$$x < a + \varepsilon , \quad x > a - \varepsilon .$$

N.B. We voeren geen getallen ∞ en $-\infty$ in. Wel komen de symbolen ∞ en $-\infty$ voor in de uitdrukkingen "interval (a,∞)", "omgeving van $-\infty$", enz., maar die hebben allen een wel gedefiniëerde betekenis.

In het vervolg zullen we de term <u>punt</u> gebruiken en daarmee bedoelen: getal, ∞ , of $-\infty$. In die zin zullen we vaak spreken van de <u>omgeving van een punt</u>.

We tonen nog aan

(7.7) De doorsnee van twee omgevingen van eenzelfde punt is weer een omgeving van dat punt.

<u>Bewijs.</u> Zij vooreerst dat punt eindig, zeg a, en laten $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$ en $(a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2)$ twee omgevingen van a zijn. Als nu ε_i het kleinste van de twee getallen ε_1 en ε_2 is, dan is de doorsnee van de beschouwde omgevingen juist $(a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i)$, dus een omgeving van a. Op analoge wijze toont men (7.7) aan in het geval van een oneindig punt.

Zij gegeven een verzameling X van reële getallen. Het punt a (eindig of oneindig) heet <u>verdichtingspunt</u> van X, als <u>elke omgeving van a een punt van X bevat</u>, <u>verschillend van a</u> (de laatste toevoeging is overbodig, als a oneindig is). Voorbeelden:

1. X is het open interval (1,2). Dan is elk punt uit het <u>gesloten</u> interval (1,2), en geen ander punt, <u>verdichtingspunt</u> van X.
2. X is het open interval $(0,\infty)$. Dan is elk getal $x \geqq 0$, benevens het punt ∞, en geen ander punt, verdichtingspunt van X.
3. De verzameling N der natuurlijke getallen heeft één verdichtingspunt, n.l. ∞. (vlg. het axioma van Archimedes, p.18).
4. X is de verzameling der rationale getallen. Dan is elk punt verdichtingspunt (vlg. de stelling op p.19/20).
5. X is een eindige verzameling. Dan heeft X géén verdichtingspunt.

Behandelen we voorbeeld 3. Is a een reëel getal, dan is er op grond van het axioma van Archimedes een natuurlijk getal $n > a$. Dus bevat elke omgeving (a, ∞) van ∞ een getal uit N, d.w.z. ∞ is verdichtingspunt van N. Tonen we nu aan, dat een willekeurig getal a geen verdichtingspunt is van N. Zij p het kleinste natuurlijke getal $> a$. Dan is $p-1 \leqq a$. In het geval $p-1 < a$ stellen we $\varepsilon = \min\big(p-a, a-(p-1)\big)$; in het geval $p-1 = a$ stellen we $\varepsilon = \min\big(p-a, a-(p-2)\big)$. Dan is ε een positief getal, terwijl de omgeving $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ van a geen natuurlijk getal $\neq a$ bevat (uit $n \geqq p$ volgt $n \geqq a+\varepsilon$, uit $n < p$ volgt $n \leqq p-1$ en dus $n \leqq a-\varepsilon$). Dus is a geen verdichtingspunt van N.

Uit de voorbeelden blijkt, dat een verdichtingspunt van een verzameling X niet noodzakelijk deel uitmaakt van X, noch ook een punt van X steeds verdichtingspunt van X is. Een punt van X, dat tevens verdichtingspunt van X is, zullen we <u>punt-verdichtingspunt</u> noemen; een punt van X dat geen verdichtingspunt van X is heet <u>geïsoleerd punt</u> van X.

We besluiten met de volgende

<u>Stelling</u>. Zij X een verzameling van reële getallen en X^* de verzame-

ling der eindige verdichtingspunten van X. Dan is elk verdichtingspunt van X^* tevens verdichtingspunt van X ("herhaalde" vorming van de verzameling der verdichtingspunten leidt niet tot nieuwe punten).

Bewijs. We beschouwen eerst een eindig verdichtingspunt a van X^*. Nemen we een willekeurige omgeving $(a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon\ )$ van a. Daarin ligt een getal $b \neq a$ van X^*. Zij

$$\eta = \min\ (\ |b-a|\ ,\ \varepsilon - |b-a|\ ).$$

Dan is $\eta > 0$. Daar b verdichtingspunt van X is, bevat de omgeving $(b-\eta\ ,\ b+\eta\ )$ van b een getal $c \neq b$ van X. Voor dat getal c is $|c-b| < \eta$, dus

1e. $|c-b| < |b-a|$ en dus zeker $c \neq a$

2e $|c-b| < \varepsilon - |b-a|$, op grond van (7.5) dus

$$|c-a| = |(c-b) + (b-a)| \leq |c-b| + |b-a|$$
$$< \varepsilon - |b-a| + |b-a| = \varepsilon .$$

M.a.w. c is een getal uit X, dat verschilt van a en in de omgeving $(a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon\ )$ van a ligt. Daar $\varepsilon > 0$ willekeurig was, volgt hieruit dat a verdichtingspunt van X is.

Beschouwen we nu een (eventueel) oneindig verdichtingspunt van X^*, zeg ∞. Beschouwen we een willekeurige omgeving (p, ∞) van ∞. Daar ∞ verdichtingspunt van X^* is, bevat X^* een getal $b > p$ (de toevoeging $b \neq \infty$ is nu overbodig!). Daar b verdichtingspunt van X is, bevat X een getal $c > b$. Dan is ook $c > p$. M.a.w. X bevat een getal $c > p$. Daar dit voor elke p geldt, is dus ∞ verdichtingspunt van X. Op analoge wijze behandelt men het geval, dat $-\infty$ verdichtingspunt van X^* is.

Opg. 32. Behandel de voorbeelden 4 en 5 (p.23)

Opg.33. Zij M een niet-lege, naar boven begrensde verzameling en c de bovenste grens van M. Als $c \notin M$, dan is c zeker een verdichtingspunt van M. Is echter $c \in M$, dan is het mogelijk dat c een geïsoleerd punt van M is (geef een voorbeeld).

Opg.34. Zijn a en b niet-negatief, dan is $(a-b)^2 \leq |a^2-b^2|$.

Opg.35. Laten X en Y twee verzamelingen van reële getallen zijn. Dan wordt de verzameling der verdichtingspunten van $X \cup Y$ gegeven door de vereniging van de verzameling der verdichtingspunten van X en de verzameling der verdichtingspunten van Y.

§8. Functie. Limiet. Continuïteit.

Het begrip functie, en wel speciaal het begrip reële functie, waar wij mee te maken hebben, is als volgt gedefiniëerd.

Definitie. Zij X een niet-lege verzameling van reële getallen. Onder een (reële)functie op X verstaat men een voorschrift, waardoor aan elk getal uit X op ondubbelzinnige wijze een reëel getal is toegevoegd.

We geven eerst enige voorbeelden, waarbij we steeds de verzameling X opgeven, waarop de functie gedefinieerd is, een willekeurig getal van X door x aangeven en het daaraan door de functie toegevoegde getal door y.

1. $y = 2x$, $y = |5x+6|$, $y = 2$ $(X = \Gamma)$.

2. $y = \frac{1}{x}$, X bevat alle getallen behalve 0.

3. y is het laatste cijfer van x^7 , $X = N$.

4. y is de kleinst mogelijke positieve noemer van een breuk die x voorstelt, X is de verzameling der rationale getallen.

5. $y = 2x$ voor $x > 0$ en $y = 3x^2 - 1$ voor $x \leqq 0$, $X = \Gamma$.

Beschouwen we in het algemeen een functie, gedefinieerd op een verzameling X, dan geven we het aan een willekeurig getal $x \in X$ door de functie toegevoegde getal aan door f(x) en spreken van de functie f(x). Zijn er meer functies in het spel, dan geven we deze aan door $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$, $f_1(x)$, etc. We noemen x de <u>onafhankelijk veranderlijke</u> of het <u>argument</u> van de functie en $y = f(x)$ (resp. $g(x)$, enz.) de <u>afhankelijk veranderlijke</u> of de <u>waarde</u> van de functie. We wijzen er op, dat het niet nodig is, dat men de functie door één formule kan weergeven; eis is slechts dat y ondubbelzinnig bepaald is door x (zie de voorbeelden).

Een functie op N noemen we een <u>rij</u>. We geven het argument dan liever aan door n en plaatsen het in den regel als index onderaan. Zo spreken we van een rij a_n en bedoelen daarmee een voorschrift waardoor aan elk natuurlijk getal n een reëel getal a_n is toegevoegd. Voorbeelden: $a_n = 2n - 5$, $a_n = 4$, $a_n = \frac{1}{n}$.

Zijn f(x) en g(x) twee functies, gedefinieerd op eenzelfde verzameling X, dan zijn ook $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, enz. functies, gedefinieerd op X. Is f(x) op X gedefinieerd, dan ook op $X' \subset X$.

Van een functie kunnen we een <u>grafische voorstelling</u> ontwerpen, in het Euclidische platte vlak. Daartoe tekenen we in het platte vlak twee onderling loodrechte assen, een X-as en een Y-as, met snijpunt O. We denken Γ op de op p. 20 aangegeven wijze afgebeeld op de X-as en ook op de Y-as. Zij nu gegeven een functie f(x), gedefinieerd op een verzameling X. We voegen dan aan een punt $x \in X$ het punt van het platte vlak toe, dat x als projectie op de X-as en $y = f(x)$ als projectie op de Y-as heeft. Voor de zo verkregen grafische voorstelling van de functie $y = f(x)$ gelden dezelfde opmerkingen, als op p.20 gemaakt n.a.v. de afbeelding van Γ op een rechte.

<u>Definitie</u>. Zij f(x) gedefinieerd op X. Dan zeggen we dat f(x) een <u>limiet</u> heeft in het punt a, en wel limiet b, geschreven $\lim_{x \to a} f(x) = b$, indien het volgende geldt:

1. a is verdichtingspunt van X

2. bij elke omgeving B van b is een omgeving A van a te vinden, zodanig dat

$$f(x) \in B \text{ als } x \in A,\ x \in X \text{ en } x \neq a.$$

Men lette op het woord elke in de definitie. Globaal gesproken moet $f(x)$ in een willekeurig kleine omgeving van b liggen als x maar beperkt wordt tot een voldoend kleine omgeving van a. Het punt a hoeft niet tot X te behoren, en evenmin wordt er, ingeval $a \in X$, iets omtrent $f(a)$ geëist; vandaar de toevoeging $x \neq a$. Verder is de toevoeging $x \in X$ nodig, omdat anders $f(x)$ niet gedefinieerd is. Ingeval $X = \Gamma$ is automatisch $x \in X$ en a verdichtingspunt van X.

In bovenstaande definitie mag het punt a, en ook het punt b, zowel eindig als oneindig zijn. In de verschillende gevallen, die zo kunnen optreden, krijgt de definitie de volgende vormen:

I. Zij a eindig, b eindig. Dan is $\lim_{x \to a} f(x) = b$, indien geldt:

1. a is verdichtingspunt van X.

2. bij elk positief getal ε is een positief getal δ te vinden, zodat $|f(x)-b| < \varepsilon$ als $|x-a| < \delta$, $x \in X$, $x \neq a$.

II. Zij a eindig. Dan is $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (resp. $-\infty$), indien geldt:

1. a is verdichtingspunt van X

2. bij elk reëel getal q is een positief getal δ te vinden, zodat $f(x) > q$ (resp. $f(x) < q$) als $|x-a| < \delta$, $x \in X$, $x \neq a$.

III. Zij b eindig. Dan is $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$), als

1. ∞ (resp. $-\infty$) is verdichtingspunt van X.

2. bij elk positief getal ε is een reëel getal p te vinden, zodat $|f(x)-b| < \varepsilon$ als $x > p$ (resp. $x < p$), $x \in X$.

IV. We hebben $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, indien geldt:

1. ∞ is verdichtingspunt van X

2. bij elk reëel getal q is een reëel getal p te vinden zodat $f(x) > q$ als $x > p$ en $x \in X$.

Analoge betekenis hebben $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

Het enige punt, waar een rij a_n evt. een limiet kan hebben, is het punt ∞ (vgl. p 23, voorbeeld 3). Een rij heet convergent als hij een eindige limiet heeft in het punt $x = \infty$; in alle andere gevallen divergent. Een rij a_n convergeert dus (zie III), en wel tot de (eindige) limiet b, als er bij elk positief getal ε een rangnummer n_0 gevonden kan worden, zodat

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \text{als } n \text{ een natuurlijk getal is } > n_0.$$

Als $b = 0$, spreekt men van nulrij.

Definitie. Een functie $f(x)$ op X heet continu in het punt a, indien geldt:

1. a is punt-verdichtingspunt van X.

2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Omdat hier a een punt van X is, is a eindig. De limiet is f(a) en dus ook eindig. Op I lettende, hebben we dus:

<u>Gevolg</u>. Een functie f(x) op X is continu in het punt a, dan en slechts dan als geldt:

1. a is punt-verdichtingspunt van X

2. bij elk positief getal ε is een positief getal δ te vinden zodat $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ als $|x-a| < \delta$ en $x \in X$.

We behandelen nu enige voorbeelden. We wijzen er op dat het in geval I voldoende is om bij elk positief getal ε kleiner dan een zeker getal ε_0 een passende δ te vinden. Immers is voor een zekere ε en δ aan de eis 2 voldaan, dan is die δ ook goed voor alle grotere ε. Evenzo is het in geval III voldoende om bij elke q groter dan een zekere q_0 een passende δ te vinden. Enz.

1. De functie $f(x) = 2x$ ($X = \Gamma$) is continu in elk eindig punt a.

<u>Bewijs</u>. Kies een willekeurig getal $\varepsilon > 0$. We eisen $|f(x) - 2a| = 2|x-a| < \varepsilon$ als $|x-a| < \delta$. Blijkbaar voldoet $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$.

2. De functie $f(x) = c$ (constante functie) is continu in elk eindig punt a, want voor elke $\varepsilon > 0$ en elke $\delta > 0$ is $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ als $|x-a| < \delta$.

3. De functie $f(x) = 3x^2$ is continu in elk eindig punt a.

<u>Bewijs</u>. Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. We hebben $|f(x) - 3a^2| = 3|x-a|.|x+a|$ en moeten dus een positief getal δ (uiteraard niet van x afhangend!) vinden, zodat uit $|x-a| < \delta$ volgt $3|x-a|.|x+a| < \varepsilon$. Nu volgt uit $|x-a| < 1$, dat $3|x+a| = 3\,|(x-a)+2a| \leq 3|x-a| + 6|a| < 3+6|a|$. Dienovereenkomstig voldoet $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3+6|a|}\right)$ aan de vraag, want uit $|x-a| < \delta$ volgt dan

$$3|x-a| . |x+a| < \frac{\varepsilon}{3+6|a|} . 3|x+a| < \frac{\varepsilon}{3+6|a|} . (3+6|a|) = \varepsilon .$$

4. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

<u>Bewijs</u>. Zij ε een willekeurig positief getal. Er is een natuurlijk getal $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Voor $n > n_0$ is $n > \frac{1}{\varepsilon}$, dus $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Hieruit volgt de bewering.

5. $\lim_{n \to \infty} (n^2 - 5n) = \infty$.

<u>Bewijs</u>. Voor $n > 6$ is $n^2 - 5n > 6n - 5n = n$. Zij nu q een getal > 6. Kiezen we $p = q$. Voor $n > p$ is dan tevens $n^2 - 5n > q$. Hieruit volgt de bewering.

6. Zij voor elk rationaal getal x de functiewaarde $f(x) = \frac{1}{q}$, waar q de kleinste positieve noemer is van de breuk, gelijk aan x.

Dan heeft f(x) in elk eindig punt limiet 0 (en is dientengevolge nergens continu).

Bewijs. Nemen we een punt a (rationaal of irrationaal). We weten al dat a verdichtingspunt is van de verzameling der rationale getallen (zie p.23, vb. 4). Kiezen we nu een positief getal ε. We zoeken een positief getal δ, zodat $|f(x)-0| = f(x) < \varepsilon$ als x rationaal, $|x-a| < \delta$ en $x \neq a$ is. Zij n_0 een natuurlijk getal met $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Laten c en d twee gehele getallen zijn met $c < a < d$. Als voor een rationaal getal x uit het segment (c,d) geldt $f(x) \geq \frac{1}{n_0}$, dan is x te schrijven als een breuk $\frac{p}{q}$ met $q \leq n_0$.

Voor de rationale getallen x, die niet te schrijven zijn als zo'n breuk, is $f(x) < \frac{1}{n_0}$. Nu bevat het segment (c,d) slechts eindig veel rationale getallen, die te schrijven zijn als een breuk $\frac{p}{q}$ met $q \leq n_0$. Bv. de getallen c en d zelf. Onder die rationale getallen komt dus een grootste voor, zeg $\frac{p_1}{q_1}$, dat nog kleiner is dan a, en evenzo een kleinste, zeg $\frac{p_2}{q_2}$, dat groter is dan a. We kiezen nu $\delta = \min\left(\frac{p_2}{q_2} - a,\ a - \frac{p_1}{q_1}\right)$. Is dan x een rationaal getal $\neq a$ met $|x-a| < \delta$, dan is x niet te schrijven als een breuk met noemer $\leq n_0$ en dus $f(x) < \frac{1}{n_0}$, dus $f(x) < \varepsilon$. Hiermee is de bewering aangetoond.

Naast f(x) kunnen we een nieuwe functie $f_1(x)$ als volgt definiëren:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \text{ rationaal is} \\ 0 & \text{als } x \text{ irrationaal is.} \end{cases}$$

Men gaat gemakkelijk na, dat dan ook $f_1(x)$ limiet 0 heeft in elk eindig punt. Blijkbaar is $f_1(x)$ continu in de irrationale en niet continu (discontinu) in de rationale punten.

7. Zij b een vast getal > 1. Dan heeft de rij $a_n = b^n$ limiet ∞ in het punt $x = \infty$.

Bewijs. Stellen we $b = 1+a$, dan is $a > 0$. Krachtens de ongelijkheid van Bernouilli (zie (4.15),p.14) is dan voor $n \geq 2$. $b^n = (1+a)^n > 1+na > na$. Zij nu q een willekeurig getal $> 2a$ en nemen we $p = \frac{q}{a}$. Is dan n een natuurlijk getal $> p$, dan volgt $b^n > na > pa = q$. Daaruit volgt de bewering.

9. Het rekenen met limieten.

We kennen reeeds het begrip begrensde verzameling (zie p.17). We kunnen speciaal de verzameling van de waarden van een functie bekijken. We komen dan tot de volgende definities.

Een functie f(x), gedefinieerd op X, heet naar boven (naar beneden) begrensd op X, indien er een constant getal K bestaat zodat $K \geq x$ resp. $K \leq x$ voor elke $x \in X$. Indien een functie zowel naar boven als naar beneden begrensd is, heet hij begrensd. In het laatste geval is er een constante K, zodat $|x| \leq K$ voor elke $x \in X$. We bewijzen eerst

(9.1) Laten $f(x)$ en $g(x)$ beiden gedefinieerd zijn op X en zij a verdichtingspunt van X. Indien geldt $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ en $g(x)$ begrensd is op X, dan geldt ook $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$.

Bewijs. Krachtens het gegeven bestaat er een positief getal K, zodat $|g(x)| \leq K$ voor $x \in X$. Zij ε een willekeurig positief getal en zij $\varepsilon_1 = \varepsilon/K$. Er bestaat krachtens het gegeven een omgeving A van a, zodat $|f(x)| < \varepsilon_1$, als $x \in X$, $x \in A$ en $x \neq a$. Dan is ook $|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < K\,\varepsilon_1 = \varepsilon$ als $x \in X$, $x \in A$ en $x \neq a$. Dus is $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Gevolg. Het product van een nulrij en een begrensde rij is weer een nulrij.

Vervolgens leiden we een aantal eigenschappen af voor het rekenen met limieten, die als volgt samengevat kunnen worden. Laten weer $f(x)$ en $g(x)$ twee functies zijn, beiden gedefinieerd op X en zij a verdichtingspunt van X. Zij $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{x \to a} g(x) = c$, b en c eindig. Dan geldt:

(9.2) $$\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = b+c$$

(9.3) $$\lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha b \qquad (\alpha \text{ een constante})$$

(9.4) $$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = bc$$

(9.5) $$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{c} \quad \text{als } c \neq 0.$$

(9.6) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad \text{als } c \neq 0.$$

Bewijs. Ad (9.2). Zij ε een willekeurig positief getal. Er is een omgeving A_1 van a, zodat

$|f(x)-b| < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $x \in A_1$, $x \in X$ en $x \neq a$ en een omgeving A_2 van a, zodat

$|g(x)-c| < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $x \in A_2$, $x \in X$ en $x \neq a$.

Zij nu A_3 de doorsnee van A_1 en A_2; dat is weer omgeving van a (zie (7.7)). Is nu $x \in A_3$, $x \in X$ en $x \neq a$, dan vinden we, onder gebruikmaking van de vorige regels en de moduluseigenschap (7.5),

$$|\{f(x) + g(x)\} - (b+c)| = |\{f(x)-b\} + \{g(x)-c\}| \leq$$
$$\leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,.$$

Hieruit volgt de bewering.

Ad (9.3). Zij $\varepsilon > 0$. Er is een omgeving A van a, zodat $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1}$ als $x \in A$, $x \in X$ en $x \neq a$.

Dan is ook

$$|\alpha f(x) - \alpha b| = |\alpha| \cdot |f(x)-b| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1} < \varepsilon$$

als $x \in A$, $x \in X$, $x \neq a$. Dus geldt (9.3).

Ad (9.4). Zij ε een willekeurig positief getal < 1. Stel $K=\max(|c|+1, |b|)$. Er is een omgeving A van a, zodat tegelijkertijd

$$\left.\begin{array}{l}|f(x)-b| < \frac{1}{2K}\varepsilon \\ |g(x)-c| < \frac{1}{2K}\varepsilon\end{array}\right\} \quad \text{als } x \in A,\ x \in X,\ x \neq a.$$

Blijkbaar is $K \geq 1$ en dus, wegens $\varepsilon < 1$,

$$|g(x)| = |\{g(x) - c\} + c| \leq |g(x) - c| + |c|$$
$$< \frac{1}{2K}\varepsilon + |c| < 1 + |c| \leq K$$

als $x \in A$, $x \in X$ en $x \neq a$.

We moeten het verschil $f(x)g(x) - bc$ bekijken; we herleiden

$$f(x)g(x) - bc = f(x)g(x) - b\,g(x) + b\,g(x) - bc$$
$$= \{f(x) - b\} \cdot g(x) + b \cdot \{g(x) - c\}.$$

Hieruit volgt

$$|f(x)g(x) - bc| \leq |f(x)-b| \cdot |g(x)| + |b| \cdot |g(x)-c|.$$

Is nu $x \in X$ een punt van A, verschillend van a, dan volgt

$$|f(x)g(x)-bc| < \frac{1}{2K}\varepsilon \cdot K + K \cdot \frac{1}{2K}\varepsilon = \varepsilon.$$

Daarmee is (9.4) bewezen.

Ad (9.5). Zij ε een willekeurig positief getal. Daar $|c|$ een positief getal is, is er een omgeving A_1 van a, zodat $|g(x)-c| < \frac{1}{2}|c|$ als $x \in A_1$, en $x \in X$, $x \neq a$. Voor zulke x is dan tevens, op grond van (7.6),

$$|g(x)| = |c - \{c-g(x)\}| \geq |c| - |c-g(x)|$$
$$> |c| - \tfrac{1}{2}|c| = \tfrac{1}{2}|c|,$$

dus $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-g(x)}{cg(x)}\right| < \frac{2}{|c|^2} \cdot |g(x) - c|$.

Nu kunnen we ook een omgeving A_2 van a kiezen, zodat

$$|g(x)-c| < \tfrac{1}{2}c^2\varepsilon \quad \text{als } x \in A_2,\ x \in X,\ x \neq a.$$

Stellen we $A_1 \cap A_2 = A_3$. Dan is A_3 een omgeving van a, terwijl

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c}\right| < \frac{2}{c^2} \cdot \tfrac{1}{2}c^2\varepsilon = \varepsilon \quad \text{als } x \in A_3 \text{ en } x \in X, x \neq a.$$

Daarmee is (9.5) aangetoond.

Ad (9.6). Is een gevolg van (9.5) en (9.4).

Een direct gevolg van (9.2) t/m (9.6) is

(9.7). Zijn $f(x)$ en $g(x)$, beiden gedefinieerd op X, continu in een (puntverdichtingspunt) a van X, dan ook $f(x)+g(x)$, $\alpha f(x)$, $f(x)g(x)$ en, ingeval $g(a) \neq 0$, ook $\frac{1}{g(x)}$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Door specialisatie van bovenstaande beweringen verkrijgt men de analoge stellingen over rijen. Men merke op dat de bewijzen doorgaan als $a = \infty$ of $-\infty$.

Bovenstaande eigenschappen gaan niet zonder meer door als b of c oneindig zijn.

Wel hebben we b.v. (onder overigens gelijke voorwaarden):

(9.8) Is $\lim_{x\to a} f(x) = b > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, dan is

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty \ , \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

i.h.b. geldt dus:

(9.9) is $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, dan is $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0.$

Bewijs. Er is een omgeving A_1 van a, zodat $|f(x)-b| < \frac{1}{2}b$ en dus $f(x)-b < \frac{1}{2}b$, ofwel $f(x) < \frac{3}{2}b$
en $b-f(x) < \frac{1}{2}b$, ofwel $f(x) > \frac{1}{2}b$,
indien $x \in A$, $x \in X$, $x \neq a$. Zij nu $q > 0$. Er is dan ook een omgeving A_2 van a, zodat

$$g(x) > \frac{2}{b} q \text{ als } x \in A_2,\ x \in X,\ x \neq a.$$

Voor $x \in A_3 = A_1 \cap A_2$, $x \in X$, $x \neq a$ is $g(x)$ positief, dus $f(x)g(x) > \frac{1}{2}bg(x) > q$. Daarmee is het eerste deel van (9.8) aangetoond.

Zij vervolgens $\varepsilon > 0$. Er is een omgeving A_2' van a, zodat $g(x) > \frac{3b}{2\varepsilon}$ als $x \in A_2'$, $x \in X$, $x \neq a$. Stellen we $A_1 \cap A_2' = A_3'$. Voor $x \in A_3'$, $x \in X$, $x \neq a$ is dan zeker $g(x)$ positief en dus

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3b}{2} \cdot \frac{1}{g(x)} < \frac{3b}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{3b} = \varepsilon .$$

Daarmee is ook het tweede deel van (9.8.) aangetoond.

De bewering (9.9) volgt door in (9.8) te nemen $f(x) = 1$.

Toepassingen.

1. De functies $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, enz. zijn overal continu.

2. De functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is continu in elk (eindig) punt $a \neq 0$.

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ (pas (9.9) toe met $g(x) = x$ of x^2, $a = 0$).

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+x+1} = \frac{2}{5}$.

We kunnen immers herleiden $\frac{2x^2+3}{5x^2+x+1} = \frac{2+3/x^2}{5+1/x+1/x^2}$. Van de laatste uitdrukking kunnen we op grond van voorgaande resultaten de limiet van de teller en de limiet van de noemer bepalen. Deze zijn resp. 2 en 5. Toepassing van (9.6) levert de uitkomst.

Opg.36. Zijn a_n en b_n nulrijen, dan is ook a_n+b_n een nulrij.

Opg.37. Bewijs door volledige inductie naar n, dat voor elk natuurlijk getal n de functie $f(x) = x^n$ overal continu is.

Opg.38. Een polynoom in x, $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ is overal continu.

Opg.39. Onderzoek volledig het gedrag van de functie

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (a, b, c, d \text{ constanten}) \text{ voor } x \to \infty .$$

Opg.40. Laat voor elk reëel getal x het grootste gehele getal $\leq x$ aangegeven worden door [x] . Ga na, in welke punten de functie

$f(x) = [x]$ continu is en in welke niet.

Opg.41. Bewijs $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+3n} = 0$.

Opg.42. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1-\frac{1}{n})^3}{1-(1-\frac{1}{n})} = 3$.

Opg.43. Bewijs $\lim_{n\to\infty} (2-\frac{1}{n})^{10} = 2^{10}$.

Opg.44. Bewijs dat de rijen $a_n = (-1)^n n$, $a_n = (-1)^n$ divergent zijn.

Opg.45. Zij a_n een nulrij en zij $a_n > 0$ voor elke n. Geef een voorbeeld van zo'n rij en bewijs algemeen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

§10. Nog enige consequenties van axioma C.

I. We beginnen met een criterium af te leiden voor het bestaan van een eindige limiet van een functie in een gegeven punt. Voor rijen is het bekend onder de naam convergentiecriterium van Cauchy-Bolzano en in zijn algemene gedaante luidt het als volgt.

Zij $f(x)$ gedefinieerd op X en a verdichtingspunt van X. Nodig en voldoende voorwaarde, opdat $f(x)$ een eindige limiet heeft in het punt $x = a$, is dat er bij elk positief getal ε een omgeving A van a gevonden kan worden, zodanig dat

$$|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{als } x_1, x_2 \in A \text{ en } x_1, x_2 \in X;\ x_1, x_2 \neq a.$$

Bewijs. We tonen eerst aan dat de voorwaarde nodig is; dit is het makkelijkste deel van het bewijs. Zij dus gegeven $\lim_{x\to a} f(x) = b$ met b eindig. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen. Er is een omgeving A van a, zodat

(1) $\qquad |f(x)-b| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad$ als $x \in A$, $x \in X$, $x \neq a$.

Zijn nu x_1 en x_2 twee getallen uit A, verschillend van a en behorend tot X, dan volgt door toepassing van de moduluseigenschap (7.5)

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |\{f(x_1)-b\} - \{f(x_2)-b\}| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1)-b| + |f(x_2)-b| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon .$$

Dus is de voorwaarde vervuld.

Vervolgens tonen we aan, onder gebruikmaking van de stelling van de bovenste grens (p.17)- die een voortvloeisel is van de snede-eigenschap-, dat de voorwaarde ook voldoende is. We gaan eerst een getal b zoeken. Ondersteld is nu dus, dat er bij elk positief getal ε een omgeving A van a te vinden is, zodat (1) geldt.

In het bijzonder is er een omgeving A_1 van a, zodat

$$|f(x_1)-f(x_2)| < 1 \text{ als } x_1, x_2 \in A; x_1, x_2 \in X;\ x_1, x_2 \neq a.$$

We kiezen voor x_1 een vast getal $\neq a$ uit $A_1 \cap X$. Voor elk getal x uit $A_1 \cap X$ is dan $|f(x_1)-f(x)| < 1$, dus

$$f(x_1)-f(x) < 1 \text{ , ofwel } f(x) > f(x_1) - 1$$

en

$$f(x)- f(x_1) < 1, \text{ ofwel } f(x) < f(x_1) + 1 \text{ ;}$$

m.a.w. de verzameling van de corresponderende functiewaarden is begrensd. We beschouwen nu de verzameling V van de getallen v met de volgende eigenschap:

elke omgeving A van a bevat een getal $x \neq a$ met $x \in X$, $v \leq f(x)$.

Is v een getal van V, dan heeft o.a. A_1 deze eigenschap en is op grond van het bovenstaande dus $v < f(x_1)+ 1$. Verder bevat elke omgeving A van a een getal $x \neq a$ met $x \in X$, $f(x) > f(x_1)- 1$. Want dit geldt voor de doorsnede van A en A_1. Dus is $f(x_1)- 1 \in V$. Dus is V een niet-lege, naar boven begrensde verzameling, en heeft dus een bovenste grens, zeg b. We zullen aantonen dat b de limiet is van f(x) in het punt x = a.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen. Zij A een omgeving van a, zodat

$$|f(x)-f(x')| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{als } x,x' \in A;\ x,x' \in X;\ x,x' \neq a.$$

Die omgeving bevat een getal $x' \neq a$ met $x' \in X$, $b-\frac{1}{2}\varepsilon < f(x') \leq b$, dus $|f(x')-b| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor $x \in A$, $x \in X$, $x \neq a$ is dan ook

$$\begin{aligned}|f(x)-b| &= |f(x) - f(x') + f(x') - b| \\ &\leq |f(x) - f(x')| + |f(x') - b| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon .\end{aligned}$$

Dus is $\lim_{x\to a} f(x) = b$, waarmee de bewering volledig is aangetoond.

Gevolg. Een rij a_n convergeert dan en slechts dan, als er bij elk positief getal ε een rangnummer n_0 is te vinden, zodat

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{als } n, m > n_0$$

II. We kennen reeds de term segment (zie p. 22).
Uiteraard is een segment een eindig interval. Onder de lengte van een segment (a,b) verstaan we het (positieve) getal b-a. Een rij segmenten zal zijn een voorschrift, waardoor aan elk natuurlijk getal n een segment, zeg (a_n,b_n), is toegevoegd. De lengte van het n^{de} segment is b_n-a_n ; deze getallen vormen een rij. Onder een tot nul inkrimpende rij segmenten wordt verstaan een rij segmenten (a_n,b_n) met de volgende eigenschappen:

1. voor elk natuurlijk getal n is $(a_{n+1},b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = 0$.

De voorwaarde 1 is aequivalent met $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$. Een voorbeeld van een tot nul inkrimpende rij segmenten is $(0,2^{-n})$. We bewijzen nu algemeen de z.g.

Stelling van de intervalschakeling. Bij een tot nul inkrimpende rij segmenten is er één punt, dat tot elk segment behoort.

Bewijs. Laat (a_n, b_n) de rij segmenten zijn. Zijn p en n twee natuurlijke getallen met $n > p$, dan is $a_p \leq a_n$; men toont dit aan door volledige inductie naar n (te beginnen bij $n = p+1$, zie opg. 16). Evenzo geldt $b_n \leq b_q$ voor elk tweetal natuurlijke getallen q en n met $n > q$. Uiteraard is steeds $a_n < b_n$. Dus geldt voor elk natuurlijk getal p en elk natuurlijk getal q, dat $a_p < b_q$.

Hieruit volgt dat de verzameling der getallen a_n begrensd is, o.a. door het getal b_1. Zij α de bovenste grens van deze verzameling. Dan geldt $\alpha \geq a_n$ voor elke n. Verder volgt uit het bovenstaande dat voor elk natuurlijk getal m het getal b_m een majorant is van de verzameling der a_n. Dus geldt ook $\alpha \leq b_m$ voor elke m. Dus is α een punt dat tot elk segment (a_n, b_n) behoort. Een van α verschillend getal β, zeg met $\beta > \alpha$, kan niet deze eigenschap hebben: uit $a_n \leq \alpha$, $b_n \geq \beta$ voor elke n zou volgen $b_n - a_n \geq \beta - \alpha$ voor elke n, in strijd met de eis $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Hiermee is de stelling volledig bewezen.

III. Een eindige verzameling heeft geen verdichtingspunt. Anderzijds geldt de

Stelling van Bolzano-Weierstrass. Een begrensde, oneindige verzameling van reële getallen heeft een (eindig) verdichtingspunt.

Bewijs. Zij X die verzameling. We beschouwen de verzameling V van de getallen v met de eigenschap:

voor slechts eindig veel getallen x uit X is $x < v$.

Elke minorant y van X behoort tot V, want daarvoor is $x \geq y$ voor elke $x \in X$. Geen majorant z van X behoort tot V, want daarvoor is $x \leq z$ voor elke $x \in X$. Dus is V een niet-lege, naar boven begrensde verzameling. We beschouwen de bovenste grens c van V en beweren dat dit een verdichtingspunt van X is. Inderdaad, kiezen we willekeurig $\varepsilon > 0$, dan is $x < a - \varepsilon$ voor slechts eindig vele getallen $x \in X$ en $x < a + \varepsilon$ voor oneindig vele getallen $x \in X$. Dan bevat het open interval $(a - \varepsilon , a + \varepsilon)$ zeker een getal van X, verschillend van a. Daaruit volgt de bewering.

Opmerking. Soms zegt men dat een niet-lege verzameling M, die niet naar boven begrensd is, bovenste grens ∞ heeft, en dat een niet-lege verzameling M, die niet naar beneden begrensd is, onderste grens $-\infty$ heeft.

§ 11. Continue functies. Overdekkingsstelling.

Is elk punt van een verzameling X tevens verdichtingspunt van X en is f(x) gedefinieerd op X en continue in elk punt van X, dan heet f(x) continue op de verzameling X. We gaan nu enige eigenschappen bewijzen van functies, die gedefinieerd en continu zijn op een segment (a,b). Daarbij zullen we steeds een rij segmenten (a_n, b_n) $(n=0,1,2,...)$

construeren door herhaalde tweedeling van het segment (a,b), zodanig dat geldt:

(1) (a_0,b_0) is het segment (a,b); voor elk natuurlijk getal n is (a_n, b_n) hetzij het segment $(a_{n-1}, \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}))$ hetzij het segment $(\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}), b_n)$. Voor zo'n rij hebben we $b_n-a_n = 2^{-n}(b-a)$, wegens $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ (zie voorbeeld 7, p.28 en stelling (9.9)) dus $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = 0$. Dus krimpt hij tot nul in; volgens de stelling van de intervalschakeling is er dan één punt c, dat tot elk segment (a_n,b_n) behoort. Is nu δ een willekeurig positief getal, dan is er een natuurlijk getal n, zodat $b_n-a_n < \delta$, wegens $a_n \leq c \leq b_n$ dus $c-a_n < \delta$ en $b_n-c < \delta$, ofwel $a_n > c-\delta$ en $b_n < c+\delta$; m.a.w. de δ-omgeving van c bevat het segment (a_n,b_n), dus ook alle volgende segmenten uit de rij.

I. Doorlopendheidseigenschap. Is $f(x)$ gedefinieerd en continu op het segment (a,b) en is γ gelegen tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan bevat het segment (a,b) een getal c met $f(c) = \gamma$.

Bewijs. Is $\gamma = f(a)$ of $\gamma = f(b)$, dan hoeven we niets te bewijzen. We mogen ons dus beperken tot de gevallen $f(a) < \gamma < f(b)$, $f(b) < \gamma < f(a)$. We behandelen eerst het geval, dat $\gamma = 0$. Dan geldt, dat $f(x)$ op het segment (a,b) zowel positieve als niet-positieve (zelfs negatieve) waarden aanneemt. Daar de beide segmenten $(a,\frac{1}{2}(a+b))$ en $(\frac{1}{2}(a+b),b)$ het punt $\frac{1}{2}(a+b)$ gemeen hebben en hun vereniging (a,b) is, moet $f(x)$ op minstens één van beide zowel positieve als niet-positieve waarden aannemen. We kiezen er zo een uit en noemen het (a_1,b_1). Door herhaling van dit procédé zien we in, dat er een rij segmenten (a_n,b_n) bestaat, waarvoor (1) geldt, terwijl $f(x)$ op elk segment zowel positieve als niet-positieve waarden aanneemt. Zij c het gemeenschappelijke punt der segmenten. De functie $f(x)$ neemt dan ook op elke omgeving van c zowel positieve als niet-positieve waarden aan. Was $f(c) \neq 0$, dan zou er echter, daar $f(x)$ continu is in het punt c, een $\delta > 0$ zijn, zodat

$$|f(x) - f(c)| < |f(c)| \quad \text{als } a \leq x \leq b,\ |x-c| < \delta;$$

voor de genoemde x zou $f(x)$ hetzelfde teken als $f(c)$ hebben, hetgeen in strijd is met het vorige. Dus is $f(c) = 0$. Daarmee is de eigenschap bewezen ingeval $\gamma = 0$.

Het algemene geval volgt nu door het vorige toe te passen op de functie $f_1(x) = f(x) - \gamma$.

II. Stelling. Is $f(x)$ gedefinieerd en continu op het segment (a,b), dan is $f(x)$ op dat segment begrensd en neemt er bovendien zijn bovenste en onderste grens als waarde aan (heeft er dus een maximum en een minimum).

Bewijs. We maken gebruik van het volgende feit. Is $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling W en is W de vereniging van V_1 en V_2, dan heeft $f(x)$ op minstens één der verzamelingen V_1 en V_2 dezelfde bovenste grens/onderste grens. Dit geldt ook als $f(x)$ niet begrensd is op W.

Zij γ de bovenste grens van $f(x)$ op het segment (a,b). Op minstens één der segmenten $(a,\frac{1}{2}(a+b))$, $(\frac{1}{2}(a+b),b)$ heeft $f(x)$ weer bovenste grens γ. Door herhaling van dit procédé vinden we dat er een rij segmenten (a_n,b_n) bestaat, waarvoor (1) geldt, terwijl $f(x)$ op elk segment bovenste grens γ heeft. Zij c het gemeenschappelijke punt van die segmenten. In dat punt c heeft $f(x)$ een zekere waarde $f(c)$ en is $f(x)$ continu. Er is dus een $\delta > 0$, zodat $|f(x)-f(c)| < 1$ en dus $f(x) < f(c)+1$, als $a \leq x \leq b$ en $|x-c| < \delta$. Bijgevolg is $f(x)$ begrensd op de verzameling van de getallen x met $a \leq x \leq b$, $|x-c| < \delta$. Anderzijds heeft $f(x)$ bovenste grens γ op elk der in die verzameling bevatte segmenten (a_n,b_n). Dientengevolge is γ eindig. We tonen nu aan $f(c) = \gamma$. Allereerst is $f(c) > \gamma$ uitgesloten, wegens $\sup_{a \leq x \leq b} f(x) = \gamma$. Ook is $f(c) < \gamma$ uitgesloten, omdat er anders een $\delta' > 0$ was, zodat

$|f(x)-f(c)| < \frac{1}{2}(\gamma - f(c))$, dus $f(x) < \frac{1}{2}(\gamma + f(c))$ als $a \leq x \leq b$, $|x-c| < \delta'$ en er dus een segment (a_n,b_n) was, waarop $f(x)$ bovenste grens $\leq \frac{1}{2}(\gamma + f(c)) < \gamma$ had. Dus is $f(c) = \gamma$. Op dezelfde manier toont men aan dat de onderste grens γ' van $f(x)$ op (a,b) eindig is en dat er een punt d is met $f(d) = \gamma'$. Daarmee is de stelling bewezen.

III Zij een functie $f(x)$ gedefinieerd en continu op een verzameling X. Zij ε een positief getal. Krachtens definitie kunnen we dan voor elk punt $a \in X$ een getal $\delta > 0$ vinden, zodat $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ als $|x-a| < \delta$, $x \in X$. Hierbij voldoen bij bepaalde a verschillende δ's aan de vraag, b.v. als δ voldoet, dan ook elk kleiner positief getal δ'. Het kan gebeuren, dat er een vast getal δ is, dat voor elke $a \in X$ aan de vraag voldoet. Dan is dus $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$ als x_1 en x_2 twee punten van X zijn met $|x_1-x_2| < \delta$. We treffen nu de volgende

Definitie. Een functie $f(x)$, gedefinieerd op een verzameling X, die geheel uit punt-verdichtingspunten bestaat, heet uniform (gelijkmatig) continu op X indien geldt:

Bij elk positief getal ε is een positief getal δ te vinden, zodat

$$|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{als } x_1 \in X,\ x_2 \in X,\ |x_1-x_2| < \delta .$$

Een belangrijk hulpmiddel is voor ons de z.g.

Overdekkingsstelling van Heine-Borel. Laat er een voorschrift bestaan, waardoor er aan elk getal c van het segment (a,b) een omgeving

$(c-\varepsilon(c),\ c+\varepsilon(c))$ is toegevoegd. Dan is er een eindig aantal punten $c_1, c_2, \ldots, c_n$, alle tot het segment (a,b) behorende, zodat de vereniging van de bijbehorende intervallen $(c_1-\varepsilon(c_1),\ c_1+\varepsilon(c_1))$, $(c_2-\varepsilon(c_2), c_2+\varepsilon(c_2)), \ldots, (c_n-\varepsilon(c_n), c_n+\varepsilon(c_n))$ het segment (a,b) overdekt.

Bewijs. We bewijzen de stelling uit het ongerijmde. Stel eens dat het segment (a,b) geen eindige overdekking "toelaat". Dan geldt hetzelfde voor minstens één der segmenten $(a,\frac{1}{2}(a+b))$, $(\frac{1}{2}(a+b),b)$. Algemeen bestaat er dan zelfs een rij segmenten (a_n,b_n), waarvoor (1) geldt, terwijl geen dier segmenten een eindige overdekking toelaat. Zij c weer het gemeenschappelijke punt. Daaraan is door het voorschrift een omgeving $(c-\varepsilon(c),\ c+\varepsilon(c))$ toegevoegd. Die omgeving laat een eindige overdekking toe, n.l. reeds door de ene omgeving $(c-\varepsilon(c), c+\varepsilon(c))$. Anderzijds bevat hij een segment (a_n,b_n), dat zich zelfs niet eindig laat overdekken. Dat is een tegenspraak. Daarmee is de stelling bewezen.

We bewijzen nu de volgende

Stelling. Is $f(x)$ gedefinieerd en continu op het segment (a,b), dan is $f(x)$ ook uniform continu op dat segment.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen. Bij elk punt c van het segment (a,b) is er een positief getal $\delta(c)$ te vinden - dat in het algemeen van c afhangt - , zodat

$$|f(x)-f(c)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{als } a \leqq x \leqq b,\ |x-c| < \delta(c).$$

We voegen nu aan elk punt c van het segment (a,b) het open interval $(c-\frac{1}{2}\delta(c),\ c+\frac{1}{2}\delta(c))$ toe. Volgens de overdekkingsstelling is er dan een eindig aantal punten $c_1, c_2, \ldots, c_n$, tot het segment (a,b) behorende, te vinden zodat het segment (a,b) bevat is in de vereniging van de bijbehorende intervallen $(c_i-\frac{1}{2}\delta(c_i), c_i+\frac{1}{2}\delta(c_i))$. Zij δ het kleinste van de n getallen $\frac{1}{2}\delta(c_1), \frac{1}{2}\delta(c_2), \ldots, \frac{1}{2}\delta(c_n)$ en beschouwen we eens twee getallen x_1 en x_2 uit het segment (a,b) met $|x_1-x_2|<\delta$. Er is een natuurlijk getal $i \leqq n$, zodat x_1 behoort tot het open interval $(c_i-\frac{1}{2}\delta(c_i),\ c_i+\frac{1}{2}\delta(c_i))$, dus zodat $|x_1-c_i| < \frac{1}{2}\delta(c_i)$. Dan is ook $|x_1-c_i| < \delta(c_i)$. Wegens $\delta \leqq \frac{1}{2}\delta(c_i)$ is verder $|x_2-c_i| = |(x_2-x_1)+(x_1-c_i)| \leqq |x_2-x_1| + |x_1-c_i| < \delta+\frac{1}{2}\delta(c_i) \leqq \delta(c_i)$. Uit de keuze van $\delta(c_i)$ volgt dan

$$|f(x_1)-f(c_i)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\ ,\ |f(x_2)-f(c_i)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\ .$$

Dus is $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$. Daarmee is de stelling bewezen.

We tonen nog eens in een voorbeeld langs directe weg de uniforme continuïteit aan. Zij a een vast getal met $0 < a < 1$. We willen bewijzen dat de functie $f(x) = \frac{1}{x}$, overeenkomstig de laatste stelling, uniform continu is op het segment $(a,1)$. Zijn x_1 en x_2 twee punten uit dat segment, dan is

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right| = \frac{|x_1-x_2|}{a^2}.$$

Is nu $\varepsilon > 0$ gegeven en kiezen we $\delta = a^2.\varepsilon$, dan volgt uit $|x_1-x_2|<\delta$ inderdaad $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$.

De functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is ook gedefinieerd en continu op het rechts gesloten interval (0,1). We laten zien, dat hij daar niet uniform continu is door aan te tonen dat er b.v. bij $\varepsilon = 1$ geen uniforme δ is te vinden. Inderdaad, zij δ een positief getal en stellen we $\delta_1 = \min(1, \delta)$. Voor de punten $x_1 = \delta_1$, $x_2 = \frac{1}{2}\delta_1$, beide tot het interval (0,1) behorende, is dan

$$|x_1-x_2| = \tfrac{1}{2}\delta_1 < \delta \quad , \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{1}{\delta_1} \geqq 1.$$

Dus voldoet δ niet aan de vraag.

We merken nog op, dat bovenbeschouwde functie ook niet begrensd is in het rechts gesloten interval (0,1) (vgl.II).

§ 12. Samengestelde, monotone, inverse functies.

Laten X en Y twee verzamelingen van getallen zijn. Laat op X een functie f(x) gedefinieerd zijn en op Y een functie g(y). We onderstellen dat de waardenverzameling van de functie f(x) deel uitmaakt van Y, d.w.z. dat $y = f(x) \in Y$ als $x \in X$ (b.v. $f(x)=2x+x^3$, X het segment (0,1), Y het segment (0,3) of een dat segment omvattende verzameling). Aan een getal x van X is dan toegevoegd een getal $y = \varphi(x)$ van Y en daaraan een getal g(y); dat laatste getal stellen we voor door $g(\varphi(x))$. Er is zo een nieuw voorschrift f(x) ontstaan, van toepassing op elk punt van X. We noemen het een samengestelde functie van x, gedefinieerd door tussenkomst van de functies $\varphi(x)$ en g(y). Zo is g(2x+3) samengesteld uit $\varphi(x)=2x+3$ en g(y), a_{n+1} uit $m = \varphi(n) = n+1$ en a_m, $\{\varphi(x)\}^3$ uit $\varphi(x)$ en $g(y)=y^3$, enz. Onder de bovenstaande onderstellingen omtrent X,Y, $\varphi(x)$,g(y) bewijzen we nu eerst het

Continuïteitstheorema van de samengestelde functie. Zij a punt-verdichtingspunt van X, b punt-verdichtingspunt van Y en $b = \varphi(a)$. Indien dan $\varphi(x)$ continu is in a en g(y) continu is in b, dan is ook $f(x) = g(\varphi(x))$ continu in a.

Globaal gesproken: een continue functie van een continue functie is een continue functie.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen. Dan is er een getal $\eta > 0$, zodat $|g(y)-g(b)| < \varepsilon$ als $|y-b| < \eta$, $y \in Y$. Bij η kunnen we $\delta > 0$ bepalen zodat $|\varphi(x) - \varphi(a)| = |\varphi(x)-b| < \eta$ als $|x-a| < \delta$, $x \in X$. Daar $\varphi(x) \in Y$, als $x \in X$, hebben we dus:

uit $|x-a|<\delta$, $x \in X$ volgt $|g(\varphi(x))-g(\varphi(a))| < \varepsilon$. Daarmee is de stelling bewezen.

Voorts geldt het - iets gecompliceerdere -
<u>Limiettheorema van de samengestelde functie</u>. Zij a verdichtingspunt van X, b verdichtingspunt van Y, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = b$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$ (a,b,c eindig of oneindig). Dan geldt $\lim_{x \to a} g(\varphi(x)) = c$, tenzij zich tegelijkertijd de beide volgende omstandigheden voordoen:

1. elke omgeving A van a bevat punten $x \neq a$ met $x \in X$, $\varphi(x) = b$
2. $g(y)$ is discontinu in $y = b$.

<u>Opmerking</u>. Is b oneindig, dan geldt 1 kennelijk niet en doet zich het uitzonderingsgeval dus niet voor.

<u>Bewijs</u>. Zij C een willekeurige omgeving van c. Dan is er een omgeving B van b, zodat $g(y) \in C$, als $y \in B$, $y \in Y$, $y \neq b$. Bij B is een omgeving A van a te vinden, zodat $\varphi(x) \in B$ als $x \in A$, $x \in X$, $x \neq a$. Vooralsnog kunnen we hieruit alleen concluderen, dat $g(\varphi(x)) \in C$ indien $x \in A$, $x \in X$, $x \neq a$, ingeval voor zulke x steeds $\varphi(x) \neq b$ is. We zijn dus klaar, als de omstandigheid 1 zich <u>niet</u> voordoet: dan is er een omgeving A_0 van a, zodat uit $x \in A_0$, $x \in X$, $x \neq a$ volgt $\varphi(x) \neq b$ en kunnen we i.p.v. met A met $A \cap A_0$ werken. In het tegenovergestelde geval wordt de zaak beslist door de vraag of $g(b)$ al dan niet gelijk is aan $\lim_{y \to b} g(y)$.

<u>Toepassingen</u>. Uit $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ volgt $\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} a_{n^2} = \alpha$; immers $\lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$, $\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$ en $\lim_{m \to \infty} a_m = \alpha$.

Uit $\lim_{x \to a} f(x) = b (\neq \pm\infty)$ volgt $\lim_{x \to a} \left[2\{f(x)\}^2 + 4f(x) + 5 \right] = $
$= 2b^2 + 4b + 5$.

Uit $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (eindig en $\neq 0$) volgt $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.

Zij $f(x)$ gedefinieerd op X, a een getal. Noemen we X'_a de verzameling der getallen x met $x \in X$, $x \leqq a$ en X''_a de verzameling der x met $x \in X$, $x \geqq a$. Heeft $f(x)$, beschouwd als functie op X'_a , limiet b in het punt a, dan wil dit zeggen:

1) elk open interval $(a-\delta, a)$ bevat een punt van X
2) bij elke omgeving B van b is een getal $\delta > 0$ te vinden, zodat $f(x) \in B$ als $x \in X$, $a-\delta < x < a$.

We zeggen in dit geval dat a <u>links verdichtingspunt</u> van X is (a is dan zeker verdichtingspunt van X) en dat $f(x)$ <u>linkerlimiet</u> b heeft in het punt $x = a$, geschreven $\lim_{x \to a}^{-} f(x) = b$. Is bovendien deze linkerlimiet gelijk aan $f(b)$, dan zeggen we dat $f(x)$ <u>links-continu</u> is in b. Analoog definiëren we: <u>rechts verdichtingspunt</u>, <u>rechterlimiet</u>, rechts-continu.

Een functie $f(x)$, gedefinieerd op X, heet

<u>monotoon stijgend op X</u> indien $f(x_2) > f(x_1)$;
<u>monotoon niet-dalend op X</u> indien $f(x_2) \geq f(x_1)$;
<u>monotoon dalend op X</u> indien $f(x_2) < f(x_1)$;
<u>monotoon niet-stijgend op X</u> indien $f(x_2) \leq f(x_1)$;
telkens voor alle stellen getallen $x_1, x_2 \in X$ met $x_2 > x_1$.

<u>Stelling</u>. Is $f(x)$ gedefinieerd en monotoon op X, dan bestaan

$$\lim_{x \to a}^{-} f(x),\ \lim_{x \to a}^{+} f(x) \text{ (a eindig)},\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x),$$

indien slechts het betreffende punt links verdichtingspunt / rechts verdichtingspunt / verdichtingspunt van X is.

<u>Bewijs</u>. Is $f(x)$ monotoon dalend, dan is $-f(x)$ en ook $f(-x)$ monotoon stijgend, enz. Heeft $f(x)$ een rechterlimiet in het punt a, dan heeft $f(-x)$ een linkerlimiet in het punt $-a$ en omgekeerd; heeft $f(x)$ een limiet voor $x \to \infty$, dan heeft $f(-x)$ een limiet voor $x \to -\infty$ en omgekeerd. Op grond van een en ander is het voldoende de gevallen te beschouwen, waarbij $f(x)$ monotoon niet-dalend is en a links-verdichtingspunt resp. ∞ verdichtingspunt van x is.

Zij allereerst a eindig en links-verdichtingspunt van X. Zij $\gamma = \sup_{x<a, x \in X} f(x)$ (evt. ∞, zie opm. p. 34). Is γ eindig, dan redeneren we als volgt. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen. Er is een getal $c < a$ met $c \in X$, $\gamma - \varepsilon < f(c) \leq \gamma$, vanwege de eigenschappen van de bovenste grens. Daar $f(x)$ monotoon niet-dalend verondersteld is, is $f(x) \geq f(c)$ als $x > c$. Dus is $\gamma - \varepsilon < f(x) \leq \gamma$, indien $x \in X$, $a - \delta < x < a$, als we stellen $\delta = a - c$. Daarmee is bewezen $\lim_{x \to a}^{-} f(x) = \gamma$. Is $\gamma = \infty$, dan redeneren we aldus. Zij q willekeurig. Er is een getal $c < a$ met $c \in X$, $f(c) > q$. Dan is ook $f(x) > q$, als $x \in X$, $a - \delta < x < a$ ($\delta = a - c$). Dus is ook in dit geval $\lim_{x \to a}^{-} f(x) = \gamma$.

Is ∞ verdichtingspunt, dan volgt door een geringe wijziging in bovenstaande redenering $\lim_{x \to \infty} f(x) = \gamma$, waar $\gamma = \sup_{x \in X} f(x)$. Daarmee is de stelling geheel bewezen.

<u>Gevolg</u>. Een monotone rij a_n heeft steeds een limiet voor $n \to \infty$, hetzij eindig, hetzij oneindig.

We maken nog een opmerking over het geval dat een functie $f(x)$ gedefinieerd en monotoon is op X en een eindig punt a zowel links- als rechts-verdichtingspunt van X is. Volgens bovenstaande stelling bestaan dan $\lim_{x \to a}^{-} f(x)$ en $\lim_{x \to a}^{+} f(x)$. Deze limieten behoeven niet aan elkaar gelijk te zijn. Zo is b.v. de functie $f(x) = [x]$ (zie opg. 40, p.31) gedefinieerd en monotoon niet-dalend op Γ; is a een geheel getal, dan is $\lim_{x \to a}^{-} [x] = a - 1$ en $\lim_{x \to a}^{+} [x] = a$. Zijn ze niet aan elkaar gelijk, dan bestaat, zoals men gemakkelijk inziet, $\lim_{x \to a} f(x)$ niet. Zijn ze wèl aan elkaar gelijk, dan is

$$\lim_{x \to a}^{-} f(x) = \lim_{x \to a}^{+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

We beschouwen een functie $f(x)$, gedefinieerd op X, met de volgende eigenschap:

is $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$), dan is ook $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Laten we de verzameling der getallen $f(x)$ ($x \in X$) door Y voorstellen. Bij elk getal $y \in Y$ (en geen ander) is dan precies één getal $x \in X$ te vinden met $f(x) = y$, m.a.w. x is een functie van y, gedefinieerd op Y. We noemen het de <u>inverse functie</u> van $f(x)$.

Aan de beschouwde voorwaarde is zeker voldaan, indien $f(x)$ hetzij monotoon stijgend, hetzij monotoon dalend is. Dus: een monotoon stijgende (dalende) functie bezit steeds een inverse: We bewijzen nu de volgende

<u>Stelling</u>. Zij $f(x)$ gedefinieerd, monotoon stijgend (monotoon dalend) en continu op het interval (a,b) . (al of niet gesloten). Dan geldt:

1. de waardenverzameling Y van de functie is een interval (α, β)
2. de inverse functie van $f(x)$ is gedefinieerd en monotoon stijgend (monotoon dalend) op (α, β)
3. de inverse functie van $f(x)$ is continu.

<u>Bewijs</u>: Zij $f(x)$ monotoon stijgend. We weten al $\inf f(x) = \lim_{x \to a}^{+} f(x)$, $\sup f(x) = \lim_{x \to b}^{-} f(x)$; noemen we die limieten α resp. β. Zij nu $\alpha < y < \beta$. Daar α en β onderste resp. bovenste grens van Y zijn, bevat het interval (a,b) getallen x_1 en x_2 met $\alpha \leqq f(x_1) < y < f(x_2) \leqq \beta$. Daar voorts $f(x)$ continu is op het segment (x_1, x_2), is er op grond van de doorlopendheidseigenschap (p.35) een getal x met $f(x) = y$. Dus is Y het interval (α, β); $\alpha \in Y$ en $\beta \in Y$ als (a,b) het linker- resp. rechtereindpunt bevat. Op dit interval is de inverse functie gedefinieerd; noemen we hem $g(y)$. Is $y_2 > y_1$ ($y_1, y_2 \in Y$), dan is ook $g(y_2) > g(y_1)$. Immers stellen we $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$, dan is krachtens definitie $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$; uit $g(y_2) \leqq g(y_1)$ en de monotonie van $f(x)$ zou dus volgen $y_2 \leqq y_1$. Dus is $g(y)$ monotoon stijgend. Zij nu γ een getal met $\alpha < \gamma < \beta$ en bewijzen we dat $g(y)$ continu is in γ. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen. We stellen $g(\gamma) = c$, zodat $f(c) = \gamma$ en $a < c < b$. We kiezen twee getallen c_1 en c_2 met

$$a < c_1 < c < c_2 < b, \quad c - \varepsilon < c_1 < c_2 < c + \varepsilon$$

en stellen $f(c_1) = \gamma_1$, $f(c_2) = \gamma_2$. Dan is $\alpha < \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 < \beta$. Het positieve getal $\delta = \min(\gamma - \gamma_1, \gamma_2 - \gamma)$ heeft de eigenschap dat uit $|y - \gamma| < \delta$ volgt $\gamma_1 < y < \gamma_2$, dus $c_1 < g(y) < c_2$, dus $c - \varepsilon < g(y) < c + \varepsilon$, ofwel $|g(y) - c| = |g(y) - g(\gamma)| < \varepsilon$. Dus is $g(y)$ continu in γ. Door een kleine wijziging in de redenering ziet men in, dat ook $g(y)$ continu is in α als $\alpha \in Y$ en continu in β als $\beta \in Y$.

Het geval dat $f(x)$ monotoon dalend is, wordt op dezelfde manier behandeld òf door het vorige toe te passen op de functie $-f(x)$. We hebben hierbij

$\alpha = \inf f(x) = \lim\limits_{x \to b}^{-} f(x)$, $\beta = \sup f(x) = \lim\limits_{x \to a}^{+} f(x)$.

Is $f(x)$ gedefinieerd op X en bestaat de inverse functie $g(y)$, op de waardenverzameling Y van $f(x)$, dan gelden uiteraard de betrekkingen

$$f(g(x)) = x \quad (x \in X), \qquad g(f(y)) = y (y \in Y).$$

Opg.46. Is a verdichtingspunt van X, dan is er een rij getallen a_n, zodat $a_n \neq a$, $a_n \in X$ voor elk natuurlijk getal n en $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Opg.47. Zij $f(x)$ gedefinieerd op X, a verdichtingspunt van X en a_n een rij getallen met $a_n \neq a$, $a_n \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, dan is ook $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = b$.

Opg.48. Is $f(x)$ gedefinieerd voor $x > 0$ en is $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, dan is ook $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = b$.

Opg.49. Onderstellingen als in de stelling van de intervalschakeling. Niet alleen is de rij a_n naar boven begrensd, maar ook de rij b_n naar beneden begrensd. En er geldt $\sup a_n = \inf b_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

Opg.50. Elke oneindige verzameling heeft een verdichtingspunt.

Opg.51. Zij gegeven een rij a_n. Dan is er een punt b met de eigenschap, dat er bij elke omgeving B van b een natuurlijk getal n is te vinden met $a_n \in B$.

Opg.52. Zij $\alpha < \beta$. Dan is er tenminste één getal x, zodat $\alpha < x < \beta$.

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0$$

(gebruik de doorlopendheidseigenschap van continue functies).

Opg.53. Laten $f(x)$ en $g(x)$ beiden gedefinieerd zijn op X. Is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, b eindig, dan is ook $\lim\limits_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = \infty$.

Opg.54. Zij $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ en $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Dan heeft de vergelijking

$$\frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \frac{a_3}{x-\alpha_3} = 0$$

precies één oplossing tussen α_1 en α_2, en ook precies één oplossing tussen α_2 en α_3.

Opg.55. Is $f(x)$ continu in een punt a, dan ook $|f(x)|$.

Opg.56. Laten a_1, a_2, b_1, b_2 reële getallen zijn en zij $b_1 < b_2$. Dan bestaat

$$\max_{b_1 \leq x \leq b_2} \left| (a_1 x - b_1)(a_2 x - b_2) \right|.$$

Opg.57. Een kubische vergelijking $a x^3 + b x^2 + c x + d \neq 0$ (a, b, c, d reële getallen, $a \neq 0$) bezit minstens één wortel.

Opg.58. Laat aan een voorbeeld zien, dat de overdekkingsstelling van Heine-Borel niet geldt voor een open interval (a,b).

Opg.59. Laat zien dat de functie $f(x) = x + [x]$ een inverse bezit. Op welke verzameling is deze inverse functie gedefinieerd?

Opg.60. Zij $f(x)$ gedefinieerd en monotoon stijgend voor $x > 0$. Is $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, dan is ook $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

§ 13. Decimale breuken.

Zij gegeven een geheel getal c_0 en een rij gehele getallen c_n, zodat, voor elk natuurlijk getal n, c_n een der getallen $0,1,\dots,9$ is. Met de decimaalbreukontwikkeling $c_0,c_1c_2c_3\dots$ bedoelen we dan de schakeling van de intervallen $(a_n,\ b_n)$, waarbij

$$a_0 = c_0,\ b_0 = c_0 + 1,$$

$$a_1 = c_0 + \frac{c_1}{10},\quad b_1 = c_0 + \frac{c_1+1}{10},$$

algemeen

$$a_n = c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \cdot 10^{-\nu},\quad b_n = a_n + 10^{-n}.$$

Kennelijk is $a_{n-1} \leqq a_n < b_n \leqq b_{n-1}$ voor elk natuurlijk getal n: $a_n = a_{n-1} + c_n \cdot 10^{-n}$, $b_n = a_{n-1} + (c_n + 1)\cdot 10^{-n}$. Verder is $b_n - a_n = 10^{-n}$, dus $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (vgl. voorbeeld 7, p.28 en stelling (9.9)). M.a.w. de rij segmenten (a_n,b_n) krimpt tot nul in. Dus is er één gemeenschappelijk punt (§ 10, II), zeg α. Een decimale breuk stelt dus een zeker reëel getal voor.

Omgekeerd is elk reëel getal α in een decimale breuk te ontwikkelen. Dit kan geschieden door slechts van het axioma van Archimedes en niet van de snede-eigenschap gebruik te maken. Want op grond van dat axioma is er een grootste gehele getal $c_0 \leqq \alpha$. Dan is $c_0 + 1 > \alpha$. Vervolgens kiezen we van de getallen $c_0,\ c_0 + \frac{1}{10},\ c_0 + \frac{2}{10},\dots, c_0 + \frac{10}{10}$ het grootste uit dat $\leqq \alpha$ is. Noemen we dat c_1. Door herhaling van dit procédé vinden we een rij gehele getallen c_n, alle $\geqq 0$ en $\leqq 9$, zodat $c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \cdot 10^{-\nu} \leqq \alpha < c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \cdot 10^{-\nu} + 10^{-n}$ $(n = 1,2,\dots)$ en dus een zekere, tot nul inkrimpende rij segmenten (a_n,b_n), die het getal α gemeenschappelijk hebben. Er kan geen van α verschillend getal tot alle segmenten (a_n,b_n) behoren. Daarmee is α door een decimale breuk voorgesteld.

We maken nu een opmerking over axioma C. Indien we postuleren, dat tot elke rij segmenten van het boven omschreven type een reëel getal behoort en dat het axioma van Archimedes geldt, dan kan dit axioma C afgeleid worden. Beschouwen we nl., onder genoemde onderstellingen, een snede in Γ met linkerklasse L en rechterklasse R. We construeren, op een analoge manier als hierboven, een rij gehele getallen $c_0, c_1, c_2, \ldots$, zodat $0 \leq c_n \leq 9$ $(n = 1,2,\ldots)$,

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu . 10^{-\nu} \in L, \quad c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu . 10^{-\nu} + 10^{-n} \in R \quad (n = 1,2,\ldots).$$

We krijgen zo een tot nul inkrimpende rij segmenten (a_n, b_n), waartoe krachtens onderstelling een reëel getal α behoort. Is $a < \alpha$, dan ziet men gemakkelijk in dat $a < a_n$ is voor zeker natuurlijk getal n, en dus zeker $a \in L$. Is $b > \alpha$, dan leidt men evenzo af $b \in R$. Dan is α het grootste getal van L òf het kleinste getal van R. Dus geldt de snede-eigenschap. T.a.v. onze opbouw geldt dus dat, vooropgesteld dat de lichaams- en ordeningseigenschappen gelden, het axioma C gelijkwaardig is met het bestaan van een gemeenschappelijk punt in de hier beschouwde intervalrijen, in combinatie met het axioma van Archimedes.

We vermelden nog, dat men in bovenstaande gedachtegang ook het volgende kan aantonen. Gelden in een zekere verzameling van wiskundige objecten de lichaams- en ordeningseigenschappen en bovendien het axioma C, dan kan deze eeneenduidig op Γ afgebeeld worden, zodanig dat aan optellen, vermenigvuldigen en orderelatie van twee elementen van die verzameling beantwoordt optellen, vermenigvuldigen, orderelatie van de daarmee corresponderende getallen in Γ. Zodat Γ in wezen door de axioma's A, B, C is bepaald.

Voor de in de aanhef beschouwde decimale breuk en het daardoor bepaalde getal α geldt uiteraard $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

§ 14. Aftelbare verzamelingen.

Zij V een willekeurige verzameling (niet noodzakelijk uit getallen bestaande). Indien er een voorschrift bestaat, waardoor aan elk natuurlijk getal n een element van V is toegevoegd, terwijl er bij elk element van V slechts één natuurlijk getal is waaraan het is toegevoegd (indien er dus een eeneenduidige afbeelding te vinden is van N op V), heet V een aftelbare verzameling. We kunnen de elementen van V, hoewel oneindig in aantal, nummeren door het aan n toegevoegde element van V aan te geven door v_n. Een eventuele eeneenduidige afbeelding van N op V is natuurlijk op velerlei wijze mogelijk.

Voorbeelden van aftelbare verzamelingen.

1) De verzameling N der natuurlijke getallen.

2) De verzameling der gehele getallen; we kunnen ze immers aldus rangschikken: 0, 1, −1, 2, −2,...; algemeen krijgt hierbij n het nummer 2n en −n het nummer 2n+1.

3) De verzameling van de getallen $7n$.

Stelling. Een oneindige deelverzameling van een aftelbare verzameling is een aftelbare verzameling.

Bewijs. Zij V een aftelbare verzameling en W een oneindige deelverzameling van W. Laten de elementen van V genummerd zijn als $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ De rangnummers van die elementen van V die tot W behoren, vormen een niet-lege, zelfs oneindige deelverzameling N^* van N. Zij n_1 de kleinste daarvan. Laten we n_1 weg uit N^*, dan blijft er nog een oneindige verzameling over. Die bevat weer een kleinste getal, zeg n_2. Door volledige inductie construeren we een monotoon stijgende rij van rangnummers $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ met de volgende eigenschappen:

1. $v_{n_k} \in W \qquad (k = 1,2,\dots)$

2. is $v_n \in W$ en $n \neq n_1, n_2, \dots, n_k$, dan is $n > n_k$.

Beschouw nu een willekeurig element $a \in W$. Als element van V is dat een zeker element v_l. Nu is $n_l \geq l$, zoals door volledige inductie is aan te tonen. Er is dus een kleinste natuurlijk getal k met $n_k \geq l$. Is $k = 1$, dan is $l = n_1$ wegens de keuze van n_1. Is $k > 1$, dan is $n_k \geq l > n_{k-1}$ en wegens 2 dus $l = n_k$. Dus is W de verzameling van de elementen $v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_k}, \dots$. Daarmee is een eeneenduidige afbeelding van N op W gevonden.

Stelling. De vereniging van eindig of aftelbaar veel aftelbare verzamelingen is weer aftelbaar.

Bewijs. We behandelen eerst het geval van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen, die twee aan twee disjunct zijn. De verzamelingen nummeren we $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(n)}, \dots$ en de elementen van $U^{(n)}$ geven we aan door $u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nk}, \dots$ $(n = 1,2,\dots)$. Beschouw nu het dubbel-oneindig schema van elementen

$$\begin{array}{ccccc}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots \\
u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots \\
u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \dots \\
u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

en rangschik de elementen ervan op de aangegeven wijze: eerst de elementen u_{nk} met $n + k = 2$, daarna die met $n+k = 3, 4, \dots$ en in elk groepje naar opklimmende waarden van n. Door dit nummeringsprocédé is van elk element u_{nk} het nummer eenduidig bepaald (het is niet nodig de formule te zoeken, die dat nummer in n en k uitdrukt), terwijl ook elk natuurlijk getal éénmaal als zo'n nummer voorkomt. Dus is $\bigcup_n U^{(n)}$ aftelbaar.

Zijn de verzamelingen niet disjunct, dan kan in bovenstaand schema op verschillende plaatsen hetzelfde element voorkomen. Bij de boven geconstrueerde rangschikking moeten dus nog hier en daar elementen worden weggelaten om een eeneenduidige afbeelding van N op de vereniging te krijgen. Maar in elk geval is $\bigcup_{n=1} U^{(n)}$ een deelverzameling - en wel een oneindige - van een aftelbare verzameling. Volgens de vorige stelling is dan $\bigcup_{n=1} U^{(n)}$ aftelbaar.

In het bijzonder mogen verzamelingen dezelfde zijn. Daarmee is ook het geval van eindig veel verzamelingen $U^{(n)}$ afgehandeld.

Als toepassing laten we zien dat de verzameling K der rationale getallen aftelbaar is. Zij K_1 de verzameling der positieve rationale getallen en K_2 de verzameling der negatieve rationale getallen. Zij voorts, voor elk natuurlijk getal n, $U^{(n)}$ de verzameling der positieve rationale getallen x, te schrijven als een breuk met noemer n. Dan is $U^{(n)}$ aftelbaar en $K_1 = \bigcup_n U^{(n)}$, dus K_1 aftelbaar. Evenzo is K_2 aftelbaar. Dus is ook $K = K_1 + K_2 + \{0\}$ aftelbaar.

Elke oneindige deelverzameling van K is ook aftelbaar. B.v. de verzameling der rationale getallen tussen 0 en 1.

Er zijn ook oneindige verzamelingen, die niet aftelbaar zijn. Ze heten <u>overaftelbaar</u>. We bewijzen hier:

<u>Stelling</u>. De verzameling Γ der reële getallen is overaftelbaar.
<u>Bewijs</u>. Beschouwen we een willekeurige rij van reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, twee aan twee verschillend. Elk der getallen x_n denken we in een decimale breuk ontwikkeld:

$$x_n = c_{n0}, c_{n1} c_{n2} \ldots c_{nk} \ldots$$

We rangschikken de decimalen in een dubbeloneindig schema

$$\begin{matrix} \cancel{c_{11}} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} & \cdots \\ c_{21} & \cancel{c_{22}} & c_{23} & \cdots & c_{2k} & \cdots \\ c_{31} & c_{32} & \cancel{c_{33}} & \cdots & c_{3k} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \cdots & \cancel{c_{kk}} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

en letten op de getallen die op de hoofddiagonaal staan.
We beschouwen de decimale breuk $y = 0,c_1 c_2 \ldots c_k \ldots$, bepaald door het voorschrift:

$$c_k = \begin{cases} 2 & \text{indien } c_{kk} = 1 \\ 1 & \text{indien } c_{kk} \neq 1 . \end{cases}$$

Dan verschilt y van elk getal x_n. De beschouwde rij put Γ dus niet uit. Er is dus geen eeneenduidige afbeelding van N op Γ mogelijk.

Bovenstaande constructiemethode van een getal y met zekere eigenschappen heet diagonaalmethode en is van G. Cantor afkomstig.

Als gevolg is ook de verzameling van de irrationale getallen overaftelbaar (zie de voorlopige opmerking p.19, r.7). Het interval (0,1) b.v. is ook overaftelbaar. Want als dit interval (0,1) aftelbaar was, dan was elk eindig interval aftelbaar - er immers eeneenduidig op af te beelden - , dus ook Γ. Men kan het ook inzien aan de hand van de functie $f(x) = \log(\frac{1}{x} - 1)$, die later behandeld wordt en die een eeneenduidige afbeelding van het open interval (0,1) op Γ geeft.

§ 15. Machten met niet-gehele exponent.

In § 4 hebben we aan het symbool a^c reeds een betekenis toegekend in de gevallen

1. a willekeurig, c geheel en > 0
2. $a \neq 0$, c geheel en ≤ 0.

We releveren de eigenschappen (4.12) voor dit symbool:

I. $a^p . a^q = a^{p+q}$, II. $(a^p)^q = a^{pq}$,

III. $a^p . b^p = (ab)^p$, IV. $\frac{a^p}{b^p} = (\frac{a}{b})^p$,

waarbij p,q geheel en evt. a en $b \neq 0$.

We zullen nu door successieve uitbreidingen, waarbij we op uiteenlopende wijzen te werk zullen gaan, zien te komen tot een definitie van a^c voor c willekeurig reëel en a positief (evt. 0), op zodanige wijze dat de eigenschappen I - IV behouden blijven. In het volgende is steeds a, b > 0 of ≥ 0 ondersteld.

Tot een definitie van $a^{\frac{1}{n}}$ (n een natuurlijk getal) komen we door te beschouwen de functie $y = f(x) = x^n$, voor $x \geq 0$. Deze functie is, zoals men door volledige inductie aantoont, monotoon stijgend en continu voor $x \geq 0$. De waardenverzameling is ook het links gesloten interval $(0, \infty)$. Krachtens de stelling over inverse functies (p.41) bestaat in dat interval de inverse functie $x = g(y)$, die we schrijven $\sqrt[n]{y}$ of $y^{\frac{1}{n}}$, en is daar eveneens monotoon stijgend en continu. Men merke op, dat zo onder meer gedefinieerd zijn $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, enz., en wel op bevredigender wijze dan vroeger (zie p. 19), nl. door gebruik te maken van algemene stellingen (betreffende monotone en continue functies).

Vervolgens stellen we

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \quad (a \geq 0,\ m \text{ en } n \text{ natuurlijke getallen}),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left\{(a^m)^{\frac{1}{n}}\right\}^{-1} \quad (a > 0,\ m \text{ en } n \text{ natuurlijke getallen});$$

de eerste regel is voor $m = 1$ een identiteit en beide regels zijn voor $\frac{m}{n}$ geheel, zeg $m = kn$, in overeenstemming met de reeds gegeven definities.

Krachtens definitie is nu $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ ($a \geq 0$, m en n natuurlijke getallen). Ook is dan $(a^{\frac{p}{q}})^q = a^p$ ($a > 0$, p en q geheel, $q \neq 0$). We kunnen nu herleiden (p, q, r, s geheel; q, $s \neq 0$)

$$(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}})^{qs} = (a^{\frac{p}{q}})^{qs} \cdot (a^{\frac{r}{s}})^{qs}$$

$$= (a^p)^s \cdot (a^r)^q = a^{ps+qr},$$

dus $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$;

$$\left((a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(\left((a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}\right)^s\right)^q = \left((a^{\frac{p}{q}})^r\right)^q$$

$$= \left((a^{\frac{p}{q}})^q\right)^r = (a^p)^r = a^{pr},$$

dus $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$.

Op analoge wijze toont men aan

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} \quad (\tfrac{a}{b})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \Big/ b^{\frac{p}{q}} \quad (a, b > 0,\ q \neq 0).$$

De functie $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ is monotoon stijgend en continu voor $x \geq 0$. Hetzelfde geldt voor $x^{\frac{m}{n}}$. Dan is $x^{-\frac{m}{n}} = (x^{\frac{m}{n}})^{-1}$ monotoon dalend en continu voor $x > 0$. We kunnen dus zeggen dat voor c rationaal de functie $f(x) = x^c$ monotoon stijgend en continu is ingeval $c > 0$ en monotoon dalend en continu ingeval $c < 0$.

Om te geraken tot een definitie van a^c voor irrationale c volgen we een geheel andere weg en beschouwen we de functie $f(x) = a^x$ (x rationaal). We beginnen met de volgende

__Hulpstelling.__ Zij X een open interval en X^* de verzameling van de rationale getallen uit X. Laat een functie $f(x)$ gedefinieerd en monotoon stijgend zijn op X^* en een limiet hebben in elk punt van X. Voor de functie $f_1(x)$, gedefinieerd door $f_1(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ($a \in X$) geldt dan:

1. $f_1(x)$ is gedefinieerd, monotoon stijgend en continu op X.

2. $f_1(x) = f(x)$ voor $x \in X^*$.

<u>Bewijs</u>. Laten a en b twee willekeurige getallen uit X zijn met $a < b$. Dan geldt, als x_0 een rationaal getal is met $a < x_0 < b$,

$$f_1(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x > a} f(x) < f(x_0),$$

en evenzo $f(x_0) < f_1(b)$. Dus is $f_1(a) < f_1(b)$. Daarmee is de monotonie van $f_1(x)$ aangetoond.

Zij a een getal uit X. Voor elk tweetal rationale getallen x_1 en x_2 uit X^* met $x_1 < a < x_2$ geldt, op grond van het bovenstaande:

is x een(rationaal of irrationaal) getal met $x_1 < x < x_2$, dan is $f(x_1) < f_1(x) < f(x_2)$, i.h.b. $f(x_1) < f_1(a) < f(x_2)$; is a rationaal, dan geldt bovendien $f(x_1) < f(a) < f(x_2)$.

Nu heeft $f(x)$ een limiet in het punt a, als functie op X^*. Uit de drie opgeschreven ongelijkheden leidt men dan opvolgend af, dat $f_1(x)$, als functie op X, een limiet heeft in het punt a, dat deze limiet gelijk is aan $f_1(a)$ en dat deze limiet bovendien gelijk is aan $f(a)$ als a rationaal is. Daarmee is aangetoond dat $f_1(x)$ continu is op X en gelijk aan $f(x)$ op X^* en dus de hulpstelling bewezen.

We behandelen nu achtereenvolgens de gevallen $a = 1$, $a > 1$, $a < 1$. We zullen daarbij steeds met x, x', x_1, x_2 rationale getallen bedoelen en met c een irrationaal getal.

1°. $a = 1$. We hebben $1^x = 1$ voor alle x en definiëren dus $1^c = 1$.

2°. $a > 1$. Voor $x > 0$ is $a^x > 1^x = 1$, wegens de monotonie van de functie $g(\xi) = \xi^x$. Voor $x_2 > x_1$ is dus $a^{x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2 - x_1} > a^{x_1}$.

Is $\varepsilon > 0$, dan is er op grond van de ongelijkheid van Bernoulli een natuurlijk getal n_0, zodat $(1+\varepsilon)^{n_0} > a$, dus $1 < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon$; dan is ook $1 < a^x < 1 + \varepsilon$ als $0 < x < \delta = \frac{1}{n_0}$. Dus is $\lim\limits_{x \to 0}^{+} a^x = 1$. Wegens $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ is dan ook $\lim\limits_{x \to 0}^{-} a^x = 1$, en dus zelfs $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Zij vervolgens ξ een willekeurig reëel getal. Zij $\varepsilon > 0$. We kiezen een rationaal getal $x_0 > \xi$ en een positief getal $\delta < x_0 - \xi$, zodat $|a^{\xi} - 1| < \varepsilon . a^{x_0}$ als $|x| < 2\delta$. Uit $|x_1 - \xi| < \delta$, $|x_2 - \xi| < \delta$ volgt dan $x_1, x_2 < x_0$, $x_1 - x_2 < 2\delta$, dus

$$|a^{x_1} - a^{x_2}| = a^{x_2} . |a^{x_1 - x_2} - 1| < a^{x_0} . \varepsilon a^{-x_0} = \varepsilon .$$

Krachtens het algemene convergentiecriterium (§ 10, p.32) mogen we dan besluiten dat $\lim\limits_{x \to \xi} a^x$ bestaat.

Resumerende zien we dat $f(x) = a^x$ voldoet aan de voorwaarden van de hulpstelling, met $X = (-\infty, \infty)$. We definiëren nu $a^c = \lim\limits_{x \to c} a^x$. Dan is a^{ξ} gedefinieerd voor alle reële ξ en weten we dat $f_1(\xi) = a^{\xi}$ monotoon stijgend en continu is op Γ .

3°. $a < 1$. We definiëren nu $a^c = (\frac{1}{a})^{-c}$. Dan is a^{ξ} overal gedefinieerd, monotoon dalend en continu.

De relaties $a^{\xi} . a^{\eta} = a^{\xi+\eta}$, $(a^{\xi})^{\eta} = a^{\xi\eta}$, $a^{\xi} . b^{\xi} = (ab)^{\xi}$, $a^{\xi} / b^{\xi} = (\frac{a}{b})^{\xi}$ verifieert men nu gemakkelijk: $a^{\xi} . a^{\eta} = \lim\limits_{x \to \xi} a^x .$

$$. \lim_{y \to \eta} a^y = \lim_{x \to \xi} \lim_{y \to \eta} a^x . a^y = \lim_{x \to \xi} \lim_{y \to \eta} a^{x+y} =$$
$$= \lim_{x \to \xi} a^{x+\eta} = a^{\xi+\eta} ;$$
$$(a^{\xi})^{\eta} = \lim_{y \to \eta} (a^{\xi})^y = \lim_{y \to \eta} \lim_{x \to \xi} (a^x)^y$$
$$= \lim_{y \to \eta} \lim_{x \to \xi} a^{xy} = \lim_{y \to \eta} a^{\xi y} = a^{\xi\eta} \text{, enz.,}$$

onder voortdurende toepassing van het limiettheorema van de samengestelde functie.

De functie $y = a^x$ (x reëel) heet <u>exponentiële functie</u>. Voor $a \neq 1$ is de waardeverzameling het open interval $(0, \infty)$. Immers ingeval $a > 1$ is $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = \infty$, dus ook $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{a^x} = 0$, terwijl het voor $a < 1$ net andersom is. Men make een grafiek van deze functie voor verschillende waarden van a. Naast deze functie kan men natuurlijk beschouwen de functie $y = x^c$ (<u>macht</u>).

§ 16. <u>Puntverzamelingen. Voorbeelden</u>.

In vele van de voorafgaande stellingen, zoals het algemene convergentiecriterium, de stelling van Bolzano-Weierstrass, stellingen over samegestelde functies en over limieten van verbindingen van functies en ten dele stellingen over continue functies, speelt het feit dat in de verzameling Γ der reële getallen lichaams- en ordeningseigenschappen gelden, slechts een ondergeschikte rol. In feite kan men in heel veel andere verzamelingen de begrippen functie, limiet, continuïteit invoeren en dan anloge stellingen afleiden. We gaan dit inderdaad doen en zullen ons daarbij op axiomatisch standpunt stellen. We zullen verzamelingen bekijken, die enkele algemene eigenschappen bezitten, maar niet noodzakelijk lichaams- en ordeningseigenschappen, en wel de z.g. puntverzamelingen, en daarvoor veel van de voorafgaande beschouwingen "herhalen".

<u>Definitie</u>. Een <u>puntverzameling of metrische ruimte</u> is een verzameling E, waarbij aan elk tweetal elementen x,y op ondubbelzinnige wijze een reëel getal $\rho(x,y)$ is toegevoegd, zodanig dat de volgende drie eigenschappen gelden ($x,y,z \in E$):

(α) $\rho(x,x) = 0$, $\rho(x,y) > 0$ als $x \neq y$

(β) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (<u>symmetrische eigenschap</u>).

(γ) $\rho(x,z) \leqq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (<u>driehoeksongelijkheid</u>).

De elementen van E noemen we <u>punten</u>; de functie $\rho(x,y)$ heet <u>metriek</u>; voor twee gegeven punten x en y wordt het getal $\rho(x,y)$ de <u>afstand</u> van x en y genoemd.

Uit (β) en (γ) volgt $\rho(x,z) - \rho(y,z) \leqq \rho(x,y)$; $\rho(y,z) - \rho(x,z) \leqq \rho(y,x) = \rho(x,y)$. Dus is

(1) $\quad |\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leqq \rho(x,y).$

Willen we voorbeelden van puntverzamelingen geven, dan kunnen we niet volstaan met een verzameling elementen aan te wijzen, maar moeten we ook aangeven wat de metriek zij. Het is mogelijk dat er bij een gegeven verzameling verschillende metrieken te construeren zijn die hem tot puntverzameling maken.

Voorbeeld I. $E = \Gamma$, $\rho(x,y) = |x - y|$. Aan de eisen (α), (β), (γ) is voldaan; ze volgen uit resp. (7.1), (7.2), (7.5). Men vergelijke nog (1) met de eigenschap (7.6). Bij deze keuze van ρ zullen we Γ voortaan voorstellen door E_1.

Voorbeeld II. Zij n een natuurlijk getal. We zullen een definitie geven (niet langs meetkundige weg) van wat we noemen de n-dimensionale Euclidische ruimte. We gaan daartoe uit van de verzameling V van de geordende n-tallen van reële getallen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; de getallen $x_1, x_2, \dots, x_n$ heten coördinaten. Voor elk tweetal elementen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ van V stellen we $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$. Dan gelden (α) en (β). Om (γ) te bewijzen lassen we een beschouwing over ongelijkheden in.

Zijn t en u twee reële getallen $\geqq 0$, dan is $\sqrt{tu} \leqq \frac{1}{2}(t+u)$; in woorden: het meetkundig gemiddelde van t en u is hoogstens gelijk aan het rekenkundig gemiddelde. De ongelijkheid volgt uit

$$(t+u)^2 - (2\sqrt{tu})^2 = t^2 + 2tu + u^2 - 4tu = (t-u)^2 \geqq 0.$$

Het gelijkteken geldt blijkbaar alleen als $t-u = 0$, dus $t = u$.

We beschouwen nu 2n reële getallen $t_1, t_2, \dots, t_n, u_1, u_2, \dots, u_n$, alle $\geqq 0$. We hebben, als we het vorige toepassen met $t = t_\nu^2$, $u = u_\nu^2$,

$$t_\nu u_\nu \leqq \tfrac{1}{2}(t_\nu^2 + u_\nu^2) \quad \text{voor } \nu = 1, 2, \dots, n,$$

dus

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu u_\nu \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2 .$$

Zijn niet alle getallen t_ν gelijk aan 0, en evenmin alle getallen u_ν en schrijven we

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2} = T, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2 = U,$$

dan kunnen we beschouwen de 2n getallen $T^{-\frac{1}{2}}t_1, T^{-\frac{1}{2}}t_2, \dots, T^{-\frac{1}{2}}t_n, U^{-\frac{1}{2}}u_1, U^{-\frac{1}{2}}u_2, \dots, U^{-\frac{1}{2}}u_n$ en daarop (2) toepassen.

We krijgen dan

$$\sum_{\nu=1}^{n} T^{-\frac{1}{2}}U^{-\frac{1}{2}} t_\nu u_\nu \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} T^{-\frac{1}{2}}t_\nu^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} U^{-\frac{1}{2}}u_\nu^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1,$$

dus

$$\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu u_\nu \leqq \left\{\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

De laatste ongelijkheid geldt ook als alle t_ν of alle u_ν gelijk aan 0 zijn. Er volgt nog uit

$$\sum_{\nu=1}^{n}(t_\nu + u_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2 + 2\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu u_\nu$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2 + 2\left\{\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2}\right\}^2 ,$$

dus

$$(3) \qquad \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(t_\nu + u_\nu)^2} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^2}$$

(ongelijkheid van Minkowski).

Deze betrekking geldt ook als een of meer getallen t_ν, u_ν negatief zijn. Want verwisselen we in (3) een of meer dier getallen van teken, dan verandert het rechterlid niet en wordt het linkerlid niet groter.

We willen weten wanneer in (3) het gelijkteken geldt. Ingeval $t_\nu \geqq 0$, $u_\nu \geqq 0$ ($\nu = 1,2,\ldots,n$), $T > 0$, $U > 0$ is daarvoor blijkens de afleiding nodig en voldoende dat $T^{-\frac{1}{2}} t_\nu = U^{-\frac{1}{2}} u_\nu$ voor $\nu = 1,2,\ldots,n$.

We kunnen ook zeggen dat daarvoor nodig en voldoende is, dat er twee constanten c_1 en c_2 bestaan, niet beide 0, zodat

$$c_1 t_\nu + c_2 u_\nu = 0 \text{ voor } \nu = 1,2,\ldots,n.$$

In deze vorm is het algemeen juist, ook als een of meer getallen t_ν, u_ν negatief zijn.

Laten nu $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $z = (z_1,z_2,\ldots z_n)$ drie elementen van V zijn. Toepassing van (3) met $t_\nu = x_\nu - y_\nu$, $u_\nu = y_\nu - z_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots,n$) geeft

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - z_\nu)^2} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - y_\nu)^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - z_\nu)^2},$$

i.e.

$$\varrho(x,z) \leqq \varrho(x,y) + \varrho(y,z).$$

Daarmee is (γ) aangetoond. Dus is V een metrische ruimte. We stellen die voor door E_n en noemen hem de n-dimensionale Euclidische ruimte. Uit de opmerking uit de vorige alinea volgt nog, dat voor drie punten x,y,z dan en slechts dan geldt $\varrho(x,z) = \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$ als er twee constanten c_1 en c_2 zijn, niet beide 0, zodat

$$c_1(x_\nu - y_\nu) + c_2(y_\nu - z_\nu) = c_1 x_\nu + (c_2 - c_1) y_\nu - c_2 z_\nu = 0 \text{ voor } \nu = 1,2,\ldots n.$$

Anders gezegd: dan en slechts dan is $\varrho(x,z) = \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$ als er drie constanten $\varkappa$, λ, μ zijn niet alle 0, met $-\mu = \varkappa + \lambda$, ofwel $\varkappa + \lambda + \mu = 0$, zodat

$$\varkappa x_\nu + \lambda y_\nu + \mu z_\nu = 0 \text{ voor } \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Voorbeeld III. De verzameling der functies f,g,.. , die gedefinieerd en continu zijn op het segment (a,b), is een metrische ruimte, als we definiëren $\varrho(f,g) = \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - g(x)|$. Men verifieert nl. gemakkelijk de eisen (α), (β), (γ). Men lette er op, dat hierbij een functie als één enkel wiskundig object opgevat wordt en een punt is van de beschouwde ruimte.

Voorbeeld IV. Een willekeurige deelverzameling M van een metrische ruimte E is weer een metrische ruimte, als we dezelfde metriek aanhouden; we noemen dan M een deelruimte van E.

Willen we het functiebegrip uitbreiden, dan moeten we bedenken dat we niet alleen het argument, maar ook de waarde in een metrische ruimte kunnen laten variëren. Is dus gegeven een metrische ruimte E en is X een deelruimte van E, dan zullen we onder een functie op X verstaan een voorschrift, waardoor aan elk element van X op ondubbelzinnige wijze een element van een gegeven metrische ruimte F is toegevoegd. Is $F = E_1$, dan noemen we de functie reëel ; is $X = N$, dan spreken we van een rij.

§ 17. Topologische begrippen.

Zij E een metrische ruimte met metriek $\rho(x,y)$ en a een punt van E. Is δ een positief getal, dan noemen we de verzameling der punten x waarvoor $\rho(x,a) < \delta$ een omgeving van a, en wel speciaal de δ-omgeving van a, aan te geven door $U(\delta,a)$.

Zij verder A een deelruimte van E. De ruimte der punten $x \in E$, die niet tot A behoren, noemen we het complement van A, aangegeven door $\complement A$ of ook E/A. Verder definiëren we:

Een punt $a \in A$ heet inwendig punt van A, als er een positief getal δ is, zodat $U(\delta,a)$ geheel bevat is in A.

Een punt $a \in E$ heet verdichtingspunt van A, als voor elk positief getal δ de omgeving $U(\delta,a)$ een punt $x \in A$ bevat, dat van a verschilt.

Een punt $a \in E$ heet randpunt van A, als het zowel verdichtingspunt van E als verdichtingspunt van $\complement E$ is.

De verzameling A heet open, als elk punt van A inwendig punt van A is.

De verzameling A heet gesloten als elk verdichtingspunt van A tot de verzameling A behoort.

Voorbeeld I. Zij $E = E_1$ en A het links-gesloten interval (0,1) in E_1. Dan zijn de inwendige punten (de punten) van het open interval (0,1); de verdichtingspunten van A vormen het gesloten interval (0,1); de randpunten van A zijn de punten 0 en 1.

Voorbeeld II. Zij $E = E_1$, en A de verzameling der rationale getallen. Dan heeft A geen inwendige punten, is elk punt verdichtingspunt en ook randpunt van A.

Een open (gesloten) interval in E_1 is ook open (gesloten), in de zojuist gegeven betekenis van deze woorden.

Of een punt a inwendig punt of randpunt van A is, hangt mede af van de ruimte E, waarvan A een deelverzameling is. Denk b.v. aan de ruimte E_2, de deelruimte E_1 der punten (x,y) met y = 0 en de verzameling A der punten (x,y) met $0 \leq x \leq 1$, y = 0 (interval). Evenzo hangt het van E af, welke punten verdichtingspunten van A zijn. Dientengevolge hangt het ook van de gekozen ruimte E af, of een verzameling $A \subset E$ open of gesloten is. Om dit tot uitdrukking te brengen zeggen we open in E (resp.gesloten in E), wanneer het gewenst is aan te geven van welke ruimte E, A als deelverzameling beschouwd wordt.

<u>Stelling</u>. Het complement van een open verzameling is gesloten; het complement van een gesloten verzameling is open.

<u>Bewijs</u>. Zij A open in E en a een verdichtingspunt van $\complement A = E/A$. Dan is $a \in A$ uitgesloten, want dat zou betekenen dat een zekere δ-omgeving van a geheel tot A behoorde en dus geen enkel punt van $\complement A$ bevatte. Dus is $a \in \complement A$. Dus is $\complement A$ gesloten.

Zij nu A gesloten in E en a een punt van $\complement A$. Dan is a geen verdichtingspunt van A en is er dus een $\delta > 0$, zodat $U(\delta, a)$ geen punt $\neq a$ van A bevat. Dus $U(\delta, a) \subset \complement A$. Dus is $\complement A$ open.

<u>Stelling</u>. De vereniging en de doorsnee van twee open (gesloten) verzamelingen in E is weer een open (gesloten) verzameling.

<u>Bewijs</u>. Beschouw in E twee open verzamelingen A en B. Zij a een punt van $A \cup B$. Dus $a \in A$ en/of $a \in B$, stel b.v. $a \in A$. Er is een $\delta > 0$, zodat $U(\delta, a) \subset A$, dus zeker $U(\delta, a) \subset A \cup B$. Dus is $A \cup B$ open. Zij nu a een punt van $A \cap B$. Dan is $a \in A$, $a \in B$. Er zijn dus twee getallen $\delta_1, \delta_2 > 0$, zodat $U(\delta_1, a) \subset A$, $U(\delta_2, a) \subset B$. Dus $U(\delta, a) \subset A \cap B$, als we nemen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dus is $A \cap B$ open.

Voor gesloten verzamelingen A en B bewijst men de stelling door op te merken dat $D_1 = A \cup B$ gelijkwaardig is met $\complement D_1 = \complement A \cap \complement B$ en $D_2 = A \cap B$ met $\complement D_2 = \complement A \cup \complement B$ en de vorige stelling en het bovenstaande toe te passen. Of rechtstreeks.

Door volledige inductie toont men aan dat de vereniging en de doorsnee van eindig veel open (gesloten) verzamelingen weer open (gesloten) is.

Willen we voor metrische ruimten stellingen over continue functies afleiden , analoog aan de vroeger gegevene, dan moeten we nog extra eisen opleggen. Het meest komt daarvoor in aanmerking het analogon van de stelling van Bolzano-Weierstrass (zie p.34) of van het convergentiecriterium van Cauchy-Bolzano (zie p. 32.). We komen zo tot de volgende definities.

Een metrische ruimte E heet <u>compact</u>, indien elke <u>oneindige deelverzameling van E een verdichtingspunt in E</u> heeft.

Een rij punten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in een metrische ruimte E met metriek $\rho(x,y)$ (voor de definitie zie § 16, eind) heet een fundamentaalrij, indien er bij elk positief getal ε een rangnummer n_0 is te vinden, zodat

$$\rho(a_n,a_m) < \varepsilon \quad \text{als } n, m > n_0 \, .$$

Verder heet een rij punten $a_n \in E$ convergent in E, als er een punt $a \in E$ bestaat, zodanig dat er bij elk positief getal ε een rangnummer n_0 is te vinden zodat

$$\rho(a_n,a) < \varepsilon \quad \text{als } n > n_0 .$$

Het punt a heet de limiet van de rij. De metrische ruimte E wordt nu volledig genoemd, indien elke fundamentaalrij in E convergent in E is.

Een segment in E_1 is compact: op grond van § 10,III bevat elke oneindige deelverzameling van zo'n segment een verdichtingspunt, en zo'n verdichtingspunt behoort kennelijk weer tot het segment. We bespreken nu een ander voorbeeld.

Zij n een natuurlijk getal. Voor elk 2n-tal reële getallen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ met $\alpha_i < \beta_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ noemen we de verzameling I der punten $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in E_n, waarvoor geldt

$$\alpha_1 \leqq x_1 \leqq \beta_1, \quad \alpha_2 \leqq x_2 \leqq \beta_2, \ldots, \alpha_n \leqq x_n \leqq \beta_n ,$$

een (gesloten) n-dimensionaal interval. Willen we de afhankelijkheid van I van de getallen α_i, β_i aangeven, dan schrijven we

$$I\,[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] .$$

We hebben de volgende

Stelling. Een gesloten n-dimensionaal interval is compact.

Bewijs. Zij $I = I\,[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ dat interval en X een oneindige deelverzameling van I. Verdelen we elk der segmenten (α_i, β_i) $(i = 1,2,\ldots,n)$ in twee gelijke delen, dan wordt daardoor een verdeling van I in 2^n "congruente" intervallen geïnduceerd, elk met ribben $\frac{1}{2}(\beta_i - \alpha_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Minstens één daarvan, zeg $I_1 = I\,[\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{n,1}; \beta_{1,1}, \beta_{2,1}, \ldots, \beta_{n,1}]$ bevat oneindig veel punten van X. Door herhaling van dit procédé (volledige inductie) construeren we een rij gesloten n-dimensionale intervallen $I_k = I\,[\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \ldots, \alpha_{n,k}; \beta_{1,k}, \beta_{2,k}, \ldots, \beta_{n,k}]$, zodanig dat:

1) $(\alpha_{i,k+1}, \beta_{i,k+1})$ is één der twee helften van $(\alpha_{i,k}, \beta_{i,k})$ $(i = 1,2,\ldots,n;\ k = 1,2,\ldots)$.

2) I_k bevat oneindig veel punten van X.

Voor vaste i heeft de rij segmenten $(\alpha_{i,k}, \beta_{i,k})$ $(k = 1,2,\ldots)$ één gemeenschappelijk punt, zeg γ_i, krachtens de stelling van de intervalschakeling en de eigenschap 1). Beschouw nu het punt

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ en zij δ een positief getal. Er is een natuurlijk getal k_o, zodat

$$\beta_{i,k_o} - \alpha_{i,k_o} = 2^{-k_o}(\beta_i - \alpha_i) < \delta/\sqrt{n} \text{ voor } i = 1,2,\ldots,n.$$

Verder bevat I_{k_o} oneindig veel punten van X, wegens 2), dus zeker een punt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, verschillend van γ. Voor dat punt x is $|x_i - \gamma_i| \leq \beta_{i,k_o} - \alpha_{i,k_o} < \delta/\sqrt{n}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, dus

$$\rho(x, \gamma) = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \gamma_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \sqrt{n.(\delta/\sqrt{n})^2} = \delta \quad \text{, d.w.z. } x \in U(\delta, \gamma).$$

Dus is γ verdichtingspunt van X. Dus is I compact.

Het begrip compacte verzameling in een metrische ruimte E hangt niet af van E, doch alleen van die verzameling en de daarop gedefinieerde afstandsfunctie: de begrippen "punt van A" en "punt-verdichtingspunt van A" zijn geheel in termen van A gedefinieerd.

Stelling. Een gesloten deelverzameling van een compacte metrische ruimte is weer compact.

Bewijs. Zij $A \subset E$, E een compacte metrische ruimte, A gesloten in E en X een oneindige deelverzameling van A. Dan is X ook een oneindige deelverzameling van E, heeft dus een verdichtingspunt in E. Daar A gesloten in E is, is dit verdichtingspunt een punt van A. Daaruit volgt dat A compact is.

Stellen we de afstand van een willekeurig punt $x \in E_n$ tot de oorsprong voor door $\|x\|$. We noemen een verzameling $A \subset E_n$ begrensd als er een positief getal K is, zodat $\|x\| \leq K$ voor alle $x \in A$. Uit de beide laatste stellingen volgt dat een gesloten, begrensde verzameling in E_n compact is. Omgekeerd geldt de

Stelling. Een compacte verzameling $A \subset E_n$ is begrensd en gesloten.

Bewijs. Onderstel dat A onbegrensd was. Dan konden we een rij punten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vinden met $\|a_n\| > n$. Maar een dergelijke rij punten verdicht zich nergens (we hebben geen oneindig verre punten!). Dit is in tegenspraak met de compactheid van A. Dus is A begrensd.

Zij nu a een verdichtingspunt van A. We kunnen dan een rij punten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ kiezen met $a_n \neq a$, $a_n \in A$, $\rho(a_n, a) < \frac{1}{n}$. We merken nog op, dat deze punten niet noodzakelijk alle verschillend zijn, maar dat er wel oneindig veel verschillende zijn. In E_n is het punt a verdichtingspunt van bovengenoemde rij, maar een van a verschillend punt niet (ga na). Dan moet gelden $a \in A$, daar A compact is en dus de beschouwde rij een verdichtingspunt in A moet hebben. Dus is A gesloten.

Zij a verdichtingspunt van $A \subset E$ en kiezen we een omgeving

U van a. Die bevat een punt $a_1 \neq a$ met $a_1 \in A$. Daarvoor is $\varrho(a_1,a) > 0$. Dan is er ook, omdat a verdichtingspunt van A is, een punt $a_2 \neq a$ met $\varrho(a_2,a) < \varrho(a_1,a)$. Door volledige inductie vinden we dat er een rij punten a_n is met $a_n \neq a$, $a_n \in A$, $\varrho(a_{n+1},a) < \varrho(a_n,a)$. Die punten zijn twee aan twee verschillend. Dus:

Stelling. Is a verdichtingspunt van $A \subset E$, dan bevat een willekeurige omgeving van a oneindig veel verschillende punten van A.

Beschouwen we nu een compacte ruimte E en een rij punten $a_n \in E$. Onderstellen we dat daaronder oneindig veel verschillende voorkomen. Uit de laatste stelling en de compactheid van E volgt nu, dat E een punt a bevat, zodanig dat $a_n \in U$, als U een willekeurig gekozen omgeving van a is, voor oneindig veel indices n. In deze formulering blijft de bewering doorgaan, als er in de rij punten a_n niet oneindig veel verschillende voorkomen. Dan is er n.l. een punt a, zodat $a_n = a$ voor oneindig veel indices n.

Zij E compact, a_n een fundamentaalrij in E. Gemakkelijk toont men aan dat er nu slechts één punt a is met de hierboven genoemde eigenschap en dat dat de limiet is van de rij a_n. Dus:

Stelling. Een compacte metrische ruimte is ook volledig.

Het omgekeerde van deze stelling geldt niet. Beschouwen we een fundamentaalrij a_n in E_m. Die rij is begrensd: $\|a_n\| \leq K$ voor zekere K en elk natuurlijk getal n. Nu is in E_m de verzameling der punten x met $\|x\| \leq K$ compact. Dus convergeert de rij a_n. Anderzijds is E_m niet begrensd. Dus:

Stelling. E_n is volledig, maar niet compact.

In de cursus analyse II zal de volledigheid aangetoond worden van de ruimte der functies f(x), gedefinieerd en continu op een zeker segment (a,b), en absoluut genomen begrensd door een vaste positieve constante K, met de vroeger gegeven metriek.

We gaan nu de overdekkingsstelling bespreken. We beginnen met een hulpstelling.

Hulpstelling. Zij E een compacte ruimte en δ een positief getal. Dan is er een eindig aantal punten $a_1, a_2, \dots, a_n$ te vinden, zodat de n omgevingen $U(\delta,a_1), U(\delta,a_2), \dots, U(\delta,a_n)$ tezamen E overdekken.

Bewijs. Kies willekeurig $a_1 \in E$. Indien $U(\delta,a_1)$ niet reeds met de hele ruimte E samenvalt, kiezen we $a_2 \in E$ buiten die omgeving. Indien $U(\delta,a_1) \cup U(\delta,a_2)$ niet met E samenvalt, kiezen we a_3 buiten die vereniging. We beweren dat dit procédé na een eindig aantal stappen afbreekt. Stel eens dat dit niet zo is. Dan is er een rij punten $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ met de eigenschap dat

$$a_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} U(\delta,a_i) \qquad (n=1,2,\dots),$$

dus $\rho(a_i,a_j) \geq \delta$ voor $i \neq j$, als ρ de metriek in E is. Daar E compact is, heeft de rij punten a_n een verdichtingspunt a. Er zijn dan twee indices i en j te vinden met $i \neq j$, $\rho(a_i,a) < \frac{1}{2}\delta$, $\rho(a_j,a) < \frac{1}{2}\delta$, dus $\rho(a_i,a_j) \leq \rho(a_i,a) + \rho(a,a_j) < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$. Dit is een tegenspraak. Dus breekt bovengenoemd procédé af, waarmee de hulpstelling bewezen is.

Overdekkingsstelling. Zij E een compacte verzameling. Laat er een voorschrift bestaan, waardoor aan elk punt $a \in E$ een omgeving $U(\delta_a,a)$ van dat punt is toegevoegd (δ_a is dus een willekeurige positieve reële functie van a). Dan bestaat er een eindig aantal punten $a_1,a_2,\ldots,a_n$, zodat de bijbehorende omgevingen de ruimte E overdekken.

Bewijs. Stel eens dat E zich niet eindig laat overdekken. Zij δ_k een nulrij ($\delta_k > 0$). Op grond van de hulpstelling bestaat er een eindig aantal punten $b_1,b_2,\ldots,b_n$, zodat de omgevingen $U(\delta_1,b_1)$, $U(\delta_1,b_2),\ldots$, $U(\delta_1,b_n)$ de ruimte E overdekken. Minstens één daarvan, zeg $B^{(1)} = U(\delta_1,b^{(1)})$, laat zich niet overdekken door eindig veel omgevingen $U(\delta_a,a)$. Iets analoogs geldt met δ_k inplaats van δ_1. We krijgen zo een rij punten $b^{(k)}$, met bijbehorende omgevingen $B^{(k)} = U(\delta_k,b^{(k)})$, waarvan geen enkele te overdekken is door eindig veel omgevingen $U(\delta_a,a)$.

Er is een punt a, zodat, als U een willekeurig gekozen omgeving van a is, $b^{(k)} \in U$ voor oneindig veel indices k. Speciaal geldt dit voor de omgeving $U(\frac{1}{2}\delta_a,a)$. We kiezen een rangnummer k_0, zodat $\delta_{k_0} < \frac{1}{2}\delta_a$ en $b^{(k_0)} \in U(\frac{1}{2}\delta_a,a)$. Voor elk punt $b \in B^{(k_0)}$ is nu $\rho(b,b^{(k_0)}) < \frac{1}{2}\delta_a$, terwijl ook $\rho(b^{(k_0)},a) < \frac{1}{2}\delta_a$. Dus is $\rho(b,a) < \delta_a$. Dus $B^{(k_0)} \subset U(\delta_a,a)$. Dit is in tegenspraak met het feit, dat $B^{(k_0)}$ geen eindige overdekking toelaat en $U(\delta_a,a)$ wèl, nl. door de ene omgeving $U(\delta_a,a)$. We mogen dus concluderen dat E eindig te overdekken is, waarmee de stelling bewezen is. Men vergelijke dit bewijs met het bewijs op p. 36/37.

§ 18. Limieten. Continue functies.

Laten gegeven zijn een metrische ruimte E met metriek ρ en een metrische ruimte F met metriek σ. Zij $y = f(x)$ een functie, gedefinieerd op $X \subset E$, met waarden in F. We zeggen dat deze functie de limiet b heeft ($b \in F$) in het punt $a \in E$, geschreven $\lim_{x \to a} f(x) = b$, indien het volgende geldt:

1) a is verdichtingspunt van X.
2) bij elke $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden, zodat $\sigma(f(x),b) < \varepsilon$ als $\rho(x,a) < \delta$, $x \neq a$, $x \in X$.

Is bovendien $b = f(a)$, dan heet $f(x)$ continu in a.

We bewijzen, als generalisatie van § 10, I, de volgende
<u>Stelling</u>. Is de ruimte F volledig en a verdichtingspunt van X, dan heeft f(x) een limiet in het punt a dan en slechts dan als er bij elk getal $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ te vinden is zodat

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \text{ als } \rho(x_1,a) < \delta, \quad \rho(x_2,a) < \delta;$$
$$x_1,x_2 \neq a;\ x_1,x_2 \in X.$$

<u>Bewijs</u>. a) Laat f(x) de limiet b hebben in het punt a. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen. We bepalen $\delta > 0$, zodat $\sigma(f(x),b) < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $\rho(x,a) < \delta$, $x \neq a$, $x \in X$. Voor elk tweetal punten x_1, x_2 met $\rho(x_1,a) < \delta$, $\rho(x_2,a) < \delta$; $x_1,x_2 \neq a$, $x_1,x_2 \in X$ geldt dan

$$\sigma(f(x_1),b) < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \sigma(f(x_2),b) < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

dus

$$\sigma(f(x_1),f(x_2)) \leq \sigma(f(x_1),b) + \sigma(b,f(x_2)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Daarmee is aangetoond dat de voorwaarde nodig is.

b) Onderstellen we nu dat de voorwaarde vervuld is. We kiezen een rij punten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, zodanig dat $a_n \neq a$, $a_n \in X$ en dat de rij positieve getallen $\rho(a_n,a)$ een nulrij is.

De rij punten $b_n = f(a_n)$ in F is een fundamentaalrij. Immers, kiezen we willekeurig $\varepsilon' > 0$, bepalen we daarbij overeenkomstig de voorwaarde een bijbehorend getal $\delta' > 0$ en bepalen we tenslotte een rangnummer n_0, zodat $\rho(a_m,a_n) < \delta'$ als $m,n > n_0$, dan geldt: uit $m,n > n_0$ volgt $\rho(a_m,a_n) < \delta'$, wegens $a_m,a_n \neq a$ en $a_m,a_n \in X$ dus $\sigma(b_m,b_n) < \varepsilon'$. Nu is gegeven dat F volledig is. Dus convergeert de rij b_n, zeg tot b. We kiezen nu $\varepsilon > 0$. Daar b_n limiet b heeft, bestaat er een rangnummer n_1, zodat $\sigma(b_n,b) < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $n > n_1$. Krachtens onderstelling is er een positief getal δ te vinden, zodat

$$\sigma(f(x), f(x')) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ als } \rho(x,a) < \delta, \quad \rho(x',a) < \delta;\ x,x' \neq a;$$

$x,x' \in X$. Laat x een willekeurig punt van E zijn met $\rho(x,a) < \delta$, $x \neq a$, $x \in X$. Zij n een natuurlijk getal $> n_1$, met $\rho(a_n,a) < \delta$. Dan geldt $\sigma(f(x), b_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ en ook $\sigma(b_n,b) < \frac{1}{2}\varepsilon$, dus $\sigma(f(x),b) < 3$. Daar de keuze van ε willekeurig is, volgt hieruit dat f(x) de limiet b heeft in het punt a. Dus is de voorwaarde ook voldoende.

<u>Opmerking</u>. Daar we aangetoond hebben dat E_n, en dus E_1, volledig is, is hiermee tevens een nieuw bewijs gegeven voor de eerste stelling van § 10.

Is a verdichtingspunt van $X \subset E$, dan kunnen we rijen punten a_n vinden, zodat $a_n \neq a, a_n \in X$, terwijl $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ (vgl.blz.56/57). We tonen nu aan

<u>Stelling</u>. Zij a verdichtingspunt van X. Dan heeft f(x) een limiet in het punt a, dan en slechts dan als voor elke rij punten a_n met

(1) $\quad a_n \in X,\ a_n \neq a,\ \lim_{n \to \infty} a_n = a$

geldt dat ook de rij $f(a_n) \in F$ een limiet heeft.
Bewijs. Onderstellen we eerst dat $f(x)$ een limiet heeft in het punt a, zeg b. Zij a_n een rij punten waarvoor (1) geldt. Is nu $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen, dan kunnen we wegens $\lim_{x \to a} f(x) = b$ een getal $\delta > 0$ vinden, zodat $\sigma(f(x),b) < \varepsilon$ als $\rho(x,a) < \delta$, $x \neq a$, $x \in X$. Verder is er een rangnummer n_0 te vinden, zodat $\rho(a_n,a) < \delta$ als $n > n_0$ (zie definitie p.55). Omdat steeds $a_n \neq a$, $a_n \in X$ geldt dus: voor $n > n_0$ is $\sigma(f(a_n),b) < \varepsilon$. Dus $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$.

Onderstellen we nu dat de rij $f(a_n)$ convergeert voor elke rij punten a_n, waarvoor (1) geldt. We kiezen zo'n rij a_n; zij $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$. Stel eens dat niet geldt $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Dan is er een getal $\varepsilon_0 > 0$, zodat er voor elk positief getal δ een punt x is te vinden met $x \neq a$, $x \in X$, $\rho(x,a) < \delta$, $\sigma(f(x),b) \geq \varepsilon_0$. Zij δ_n een nulrij en kiezen we voor elk natuurlijk getal n een punt a'_n, zodat $a'_n \neq a$, $a'_n \in X$, $\rho(a'_n,a) < \delta_n$, $\sigma(f(a'_n),b) \geq \varepsilon_0$. Definiëren we een rij punten $\bar{a}_n$ als volgt:

$$\bar{a}_{2n-1} = a_n, \quad \bar{a}_{2n} = a'_n \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Omdat a_n en a'_n aan (1) voldoen, geldt hetzelfde voor $\bar{a}_n$. Daar $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$, $\sigma(f(a'_n),b) \geq \varepsilon_0$ voor alle n, convergeert de rij $f(\bar{a}_n)$ echter niet (ga na). Dit is een tegenspraak. Dus is $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Daarmee is de stelling bewezen.

We merken nog op, dat als $f(x)$ een limiet heeft in het punt a, deze limiet eenduidig bepaald is. Want is $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ en ook $\lim_{x \to a} f(x) = b_2$, dan is er bij elke $\varepsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ te vinden, zodat

$$\sigma(f(x),b_1) < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \sigma(f(x),b_2) < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

als $x \neq a$, $x \in X$, $\rho(x,a) < \delta$. Dus is $\sigma(b_1,b_2) < \varepsilon$ en dus $\sigma(b_1,b_2) = 0$; uit (α) volgt dan $b_1 = b_2$, waarmee de bewering aangetoond is.

Een analoge eigenschap toont men aan voor rijen: is E een metrische ruimte en a_n convergent in E, dan heeft a_n niet meer dan één limiet.

Van veel nut is de volgende eenvoudige
Stelling. Zij n_0 een natuurlijk getal. Zij $\varphi(n)$ gedefinieerd en een natuurlijk getal voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$ en zij $\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = \infty$. Is dan E een metrische ruimte en zijn a_n en b_n twee rijen in E met $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ en $b_n = a_{\varphi(n)}$ voor $n \geq n_0$, dan is ook $\lim_{n \to \infty} b_n = a$.
Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er is daarbij een natuurlijk getal n_1, zodat $\rho(a_n,a) < \varepsilon$ als $n > n_1$. Verder is er een natuurlijk getal $N > n_0$, zodat $\varphi(n) > n_1$ als $n > N$. Dan is ook $\rho(b_n,a) = \rho(a_{\varphi(n)},a) < \varepsilon$ voor $n > N$. Dus $\lim_{n \to \infty} b_n = a$.

Voorbeelden. I. De rij b_n ontstaat door verschikking van de rij a_n, d.w.z. er is een ééńéénduidige afbeelding $\varphi(n)$ van N op N, zodat $b_n = a_{\varphi(n)}$ $(n \geq 1)$. Is nu k een willekeurig natuurlijk getal en noemen we $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de natuurlijke getallen, waarvoor $\varphi(n_1) = 1$, $\varphi(n_2) = 2, \ldots, \varphi(n_k) = k$, dan is zeker $\varphi(n) > k$ als $n > K = \max_{1 \leq i \leq k} n_i$. Dus is $\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = \infty$.

II. De rij b_n is een deelrij van de rij a_n, d.w.z. voor $n \geq 1$ is $b_n = a_{\varphi(n)}$, met $\varphi(m) > \varphi(n)$ als $m > n$. Ook nu is $\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = \infty$.

III. De rij b_n ontstaat uit de rij a_n door **inlassing** van eindig veel punten, op willekeurige plaatsen. Zij k het aantal ingelaste punten. Dan is er een natuurlijk getal n_o, zodat $b_n = a_{n-k}$ voor $n > n_o$. Hierbij is $\lim_{n \to \infty} (n-k) = \infty$.

In al deze gevallen geldt: is a_n convergent in E, dan ook b_n, met dezelfde limiet.

Zij weer f(x) gedefinieerd op $X \subset E$, met waarden in F. Als vroeger zeggen we weer, dat f(x) continu is in een punt $a \in X$, als $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Anders gezegd: f(x) is continu in a indien

1) a is punt-verdichtingspunt van X

2) bij elke $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zodat $\sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$ als $\rho(x,a) < \delta$, $x \in X$.

Is f(x) continu in elk punt van X, dan heet f(x) continu op X.

Stelling. Is f(x) continu op X en X compact, dan vormen de functiewaarden in F ook een compacte verzameling Y.

Bewijs. Zij B een oneindige deelverzameling van Y. Omdat B oneindig is, kunnen we een rij punten b_n vinden, twee aan twee verschillend en alle tot B behorend. Bij elk punt b_n is er, wegens $b_n \in Y$, (minstens) één punt a_n te vinden met $f(a_n) = b_n$. De punten a_n zijn twee aan twee verschillend en behoren alle tot X. Zij a een verdichtingspunt van de verzameling der punten a_n. Er is nu bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden met $\sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$ als $\rho(x,a) < \delta$. Verder is $\rho(a_n, a) < \delta$ voor oneindig veel rangnummers n. Dus is ook $\sigma(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$ voor oneindig veel rangnummers n. Dus is f(a) verdichtingspunt van de verzameling der punten b_n, en dus van B. Dus is Y compact.

Gevolg. Is $F = E_n$, dan is dus Y begrensd en gesloten (zie stelling, p.56). Ingeval $F = E_1$ bevat Y dus een grootste en een kleinste getal. Hiermede is ook de stelling op p.35, onderaan, teruggevonden.

Stelling. Is f(x) gedefinieerd en continu op een compacte verzameling $X \subset E$, dan is f(x) daar ook uniform continu.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Bij elk punt $c \in X$ is een positief getal $\delta(c)$ te vinden, in het algemeen afhangend van c, zodat

$\sigma(f(x),f(c)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $\rho(x,a) < \delta(c)$. We voegen nu aan elk punt $c \in X$ de omgeving $U(\frac{1}{2}\delta(c),c)$ toe. Op grond van de overdekkingsstelling is er een eindig aantal punten $c_1,c_2,\dots,c_n$ te vinden, zodat X overdekt wordt door de bijbehorende omgevingen $U(\frac{1}{2}\delta(c_1),c_1)$, $U(\frac{1}{2}\delta(c_2),c_2),\dots,$ $U(\frac{1}{2}\delta(c_n),c_n)$. Zij nu $\delta = \min \frac{1}{2}\delta(c_i)$. Kiezen we twee getallen $x_1, x_2 \in X$ met $\rho(x_1,x_2) < \delta$. Dan is er een natuurlijk getal $i \leq n$ met $\rho(x_1,c_i) < \frac{1}{2}\delta(c_i)$ en is verder $\rho(x_2,c_i) \leq \rho(x_2,x_1) + \rho(x_1,c_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta(c_i) \leq \delta(c_i)$. Dus is $\sigma(f(x_1), f(c_i)) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\sigma(f(x_2), f(c_i)) < \frac{1}{2}\varepsilon$, dus $\sigma(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$. M.a.w. voor elk tweetal punten $x_1,x_2 \in X$ met $\rho(x_1,x_2) < \delta$ is $\sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Daarmee is de stelling bewezen.

Het begrip samengestelde functie laat zich ook definiëren evenals vroeger. Zijn gegeven drie metrische ruimten E,F,G en is $\varphi(x)$ gedefinieerd op $X \subset E$, $g(y)$ op $Y \subset F$, terwijl $\varphi(x) \in Y$ als $x \in X$, $g(y) \in G$ als $y \in Y$, dan is door samenstelling gedefinieerd $g(\varphi(x))$, voor $x \in X$, met waarden in G. Er geldt:

Continuïteitstheorema van de samengestelde functie. Zij a punt-verdichtingspunt van X, b punt-verdichtingspunt van Y en $b = \varphi(a)$. Indien dan $\varphi(x)$ continu is in a en $g(y)$ continu is in b, dan is ook $g(\varphi(x))$ continu in a.

Limiettheorema van de samengestelde functie. Zij a verdichtingspunt van X, b verdichtingspunt van Y, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$; $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Dan is $\lim_{y\to b} g(\varphi(x)) = c$, tenzij tegelijkertijd geldt:

1. elke omgeving A van a bevat punten $x \neq a$ met $x \in X$, $\varphi(x) = b$
2. $g(y)$ is discontinu in $y = b$.

De bewijzen verlopen precies als op p. 38/39.

Tot slot nog iets over het geval dat F een Euclidische ruimte is. Zij $f(x)$ gedefinieerd op $X \subset E$, met waarden in E_n. Voor elk punt $x \in X$ is dus $f(x)$ een punt in E_n met n coördinaten, zeg $f_1(x)$, $f_2(x),\dots,f_n(x)$. Dus zijn $f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)$ reële functies van x, alle gedefinieerd op X; we noemen ze de componenten van $f(x)$.

Stelling. De functie $f(x)$, op X, met waarden in E_n, heeft een limiet (is continu) in het punt $a \in X$, dan en slechts dan als elke component $f_i(x)$ een limiet heeft (continu is) in a.

Bewijs: Zij $b = (b_1,b_2,\dots,b_n) \in E_n$. We hebben

$$\rho(f(x),b) = \left\{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x)-b_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ dus}$$

$$\max |f_i(x)-b_i| \leq \rho(f(x),b) \leq \sqrt{n}\cdot \max |f_i(x)-b_i| .$$

Uit $\rho(f(x),b) < \varepsilon$ volgt dus $|f_i(x)-b_i| < \varepsilon$ $(i=1,2,\dots,n)$; uit $|f_i(x)-b_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$ $(i=1,2,\dots,n)$ volgt $\rho(f(x),b) < \varepsilon$. Het bewijs van de stelling is nu gemakkelijk te voltooien.

Zoals reeds gezegd in § 16, spreken we van reële functie als $F = E_1$. Reële functies kunnen opgeteld en vermenigvuldigd worden, enz. We hebben analoge stellingen als in § 9. Zij E een metrische ruimte en laten f(x) en g(x) twee reële functies zijn, beiden gedefinieerd op een verzameling $X \subset E$. Zij $\lim_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim_{x \to a} g(x) = c$ (b en c dus reële getallen). Dan geldt:

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = b+c$

(3) $\lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha b$ (α een constant reëel getal)

(4) $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = bc$

(5) $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{c}$ als $c \neq 0$

(6) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ als $c \neq 0$.

De bewijzen zijn woordelijk hetzelfde als op p.29/30; de daar optredende omgevingen A, A_1, A_2, A_3 zijn nu omgevingen in E i.p.v. in Γ.

Opg.61. De verzameling der punten in E_2 met rationale coördinaten is aftelbaar (gebruik de eigenschap dat de verzameling der rationale getallen aftelbaar is). Hetzelfde voor E_n.

Opg.62. De functie $y = \frac{2x-1}{1-|2x-1|}$ geeft een ééneénduidige afbeelding van het open interval (0,1) op Γ. Dientengevolge is het open interval (0,1) overaftelbaar.

Opg.63. Elke oneindige verzameling bevat een aftelbare deelverzameling.

Opg.64. Zij $a > 1$. Dan heeft de functie $f(x) = a^x$ een inverse op $(-\infty, \infty)$; die inverse is gedefinieerd, monotoon stijgend en continu op het open interval $(0, \infty)$.

Opg.65. Is $c > 0$, dan is $\lim_{x \to \infty} x^c = \infty$.

Opg.66. Is $b > 0$ en $\lim_{x \to a} f(x) = b$, dan is $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b}$.

Opg.67. Bepaal $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+1}-1)$ (zet $\sqrt[3]{x+1} - 1 = y$ en beschouw $\frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+1} - 1)$ als samengestelde functie van x, door tussenkomst van y).

Opg.68. Zijn gegeven n reële getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$, alle ≥ 0, dan is $\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^2 \leq n \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2$.

Opg.69. De vereniging van aftelbaar veel open verzamelingen in een metrische ruimte E is weer open.

Opg.70. Elke omgeving $U(\delta, a)$ in een metrische ruimte E is een open verzameling.

Opg.71. Een eindige verzameling is compact.

Opg.72. Zij E een metrische ruimte, met metriek ρ, en F de verzameling der geordende paren (a,b) met $a, b \in E$. Dan is F een metrische ruimte, met metriek σ, als we definiëren $\sigma((a,b),(c,d)) = \max \{\rho(a,c), \rho(b,d)\}$.

Opg.73. Zij E een metrische ruimte, A en B twee deelverzamelingen.

De rand van $A \cup B$ is de vereniging van de rand van A en de rand van B (rand = verzameling der randpunten).

Opg.74. Zij a een vast punt in E_n, ρ de gebruikelijke metriek. Dan is $\rho(a,x)$ een continue functie van x. Dit geldt ook in een willekeurige metrische ruimte.

Opg.75. Zij E een metrische ruimte, a een punt van E en X een nietlege, compacte verzameling in E. Dan heeft de verzameling der getallen $\rho(a,x)$ met $x \in X$ een kleinste waarde (dit wordt de afstand van a tot X genoemd).

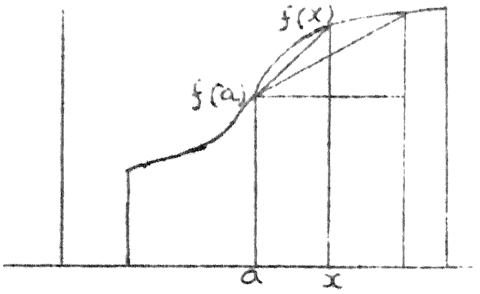
Opg.76. Is A een compacte verzameling in E_n, dan bevat A een punt met maximale afstand tot de oorsprong $(0,0,\ldots,0)$.

Opg.77. Is E een metrische ruimte en f(x) gedefinieerd en continu op E, dan is de verzameling der punten $x \in E$ met $f(x) > 0$ open.

Opg.78. De reële functie $f(x) = f((x_1,x_2))$, gedefiniëerd door $f((0,0)) = 0$, $f((x_1,x_2)) = \dfrac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, is continu op E_2.

§ 18. Het begrip afgeleide.

We keren terug tot reële functies, met reëel argument. Zij $y = f(x)$ een reële functie, gedefinieerd op een open interval I, a een punt van I. Letten we, in de grafiek van deze functie, op het



punt $(a,f(a))$ en een variabel punt $(x,f(x))$. De richtingscoëfficiënt van de koorde die deze twee punten verbindt wordt gegeven door $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Het kan gebeuren dat deze koorde tot een vaste stand (raaklijn) nadert als x tot a nadert. Dan zal ook het opgeschreven quotiënt tot een vaste waarde naderen voor $x \to a$.

We stellen nu, los van bovenstaande aanschouwelijke redenering, de volgende definitie op. De functie f(x) heet differentiaarbaar in a, als $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bestaat, en de limiet wordt het differentiaalquotiënt van f(x) in het punt a genoemd, geschreven

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} \quad \text{of} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}.$$

Is f(x) differentieerbaar in elk punt van I, dan is het differentiaalquotiënt van f(x) ook een functie van x, gedefinieerd op I. We noemen het de afgeleide van f(x), geschreven $\dfrac{d\,f(x)}{dx}$, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ of y'. In plaats van $\left(\dfrac{d\,f(x)}{dx}\right)_{x=a}$ kunnen we nu ook $f'(a)$ schrijven.

Voor een functie is differentieerbaarheid een ingrijpender eis dan continuïteit: is f(x) gedefinieerd op I, dan is f(x) continu in een punt van I, wanneer f(x) daar differentieerbaar is, maar niet omgekeerd.

Bewijs. Zij f(x) differentieerbaar in a (a inwendig punt van I). Schrijven we $\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right)_{x=a} = l$. Er is een getal $\delta_1 > 0$, zodat voor $x \neq a$, $|x - a| < \delta_1$ geldt $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l\right| < 1$, dus $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| < |l| + 1$, ofwel $|f(x)-f(a)| < (|l| + 1)|x-a|$.

Is nu ε een positief getal, dan is dus $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ als $|x-a| < \delta =$ $= \min(\delta_1, \varepsilon/(|l|+1))$. Dus is f(x) continu in a.

Omgekeerd is b.v. de functie $f(x) = |x|$ overal continu, maar niet differentieerbaar in x = 0: het quotiënt $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ neemt in elke omgeving van 0 zowel de waarde +1 als de waarde −1 aan.

In het volgende, wanneer gesproken wordt van functies, differentieerbaar in zeker punt, is steeds ondersteld dat die functies tenminste in een zekere omgeving van dat punt gedefinieerd zijn.

§ 19. Regels voor het differentiëren.

Voor differentiaalquotiënten gelden dergelijke rekenregels als in § 9 voor limieten afgeleid zijn.

Stelling. Laten f(x) en g(x) gedefinieerd zijn op eenzelfde verzameling X en beide differentieerbaar zijn in een punt a. Dan zijn ook f(x)+g(x), c f(x) (c een constante), f(x) g(x) differentieerbaar en er geldt:

(1) $$\left(\frac{d(f(x)+g(x))}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right)_{x=a} + \left(\frac{d\,g(x)}{dx}\right)_{x=a},$$

(2) $$\left(\frac{d\,cf(x)}{dx}\right)_{x=a} = c\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right)_{x=a},$$

(3) $$\left(\frac{d\,f(x)g(x)}{dx}\right)_{x=a} = f(a)\left(\frac{d\,g(x)}{dx}\right)_{x=a} + g(a)\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right)_{x=a}.$$

Bewijs. We hebben
$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \quad (x \neq a);$$
krachtens definitie hebben beide termen rechts een limiet in het punt x = a. Volgens (9.2) heeft dan het linkerlid van de opgeschreven betrekking daar ook een limiet. Dus is f(x)+g(x) differentieerbaar in a, terwijl genoemde limieten verbonden zijn door (1).

Op analoge wijze volgt dat c f(x) differentieerbaar is en dat (2) geldt.

Beschouwen we nu het product f(x)g(x). Voor $x \neq a$, $x \in X$ is (vgl. het bewijs van (9.4))
$$\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a) + f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a).$$

Letten we op het laatste lid. De beide breuken hebben een limiet in a, krachtens onderstelling, en f(x) is continu in a (zie § 18); genoemde uitdrukking heeft dus een limiet in het punt a (zie (9.2) en (9.4)), en wel $f(a)(\frac{d\,g(x)}{dx})_{x=a} + g(a)\,(\frac{d\,f(x)}{dx})_{x=a}$. Dus is f(x) g(x) differentieerbaar in a en geldt (3).

Zijn f(x) en g(x) b.v. differentieerbaar op een interval I, dan hebben de af. relaties

$$\left.\begin{aligned}
&(1')\quad \frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)\\
&(2')\quad \frac{d}{dx}\,c\,f(x) = c\,f'(x)\\
&(3')\quad \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}\right\}\qquad (x\in I)$$

Stelling. Zijn f(x) en g(x) gedefinieerd op eenzelfde verzameling X, en differentieerbaar in a en is $g(a)\neq 0$, dan zijn ook $\frac{1}{g(x)}$ en $\frac{f(x)}{g(x)}$ differentieerbaar in a en er geldt:

$$(4)\qquad \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}\right)_{x=a} = -\frac{\left(\frac{d\,g(x)}{dx}\right)_{x=a}}{(g(a))^2},$$

$$(5)\qquad \left(\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}\right)_{x=a} = \frac{g(a)\,\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)_{x=a} - f(a)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)_{x=a}}{(g(a))^2}.$$

Bewijs. Daar $g(a)\neq 0$ is en g(x) continu is in a, is er een omgeving A van a, waar g(x) steeds $\neq 0$ is. Voor $x\neq a$, $x\in A$ is

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{g(x)g(a)};$$

gemakkelijk volgt dat deze uitdrukking limiet $-(\frac{d\,g(x)}{dx})_{x=a}\cdot\frac{1}{(g(a))^2}$ heeft in het punt a. Dus is $\frac{1}{g(x)}$ differentieerbaar in a en geldt (4). Door toepassing van dit resultaat en de vorige stelling, speciaal (3), volgt dat $\frac{f(x)}{g(x)}$ differentieerbaar is in a en dat (5) geldt.

Indien f'(x) en g'(x) bestaan in zeker interval, en g(x) daar geen nulpunt heeft, hebben we

$$(4'),(5')\qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\,,\quad \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Er zijn ook regels voor het differentiëren van samengestelde en inverse functies.

Stelling. Zij $g(\varphi(x))$ een samengestelde functie van x, gedefinieerd door tussenkomst van twee functies $u = g(y)$, $y = \varphi(x)$. Zij $y=\varphi(x)$ differentieerbaar in a en $u = g(y)$ differentieerbaar in $b = \varphi(a)$.

Dan is ook $g(\varphi(x))$ differentieerbaar in a en er geldt:

(6) $$\left(\frac{d\,g(\varphi(x))}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\,g(y)}{dy}\right)_{y=b} \cdot \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{x=a} .$$

Bewijs. Er is een complicatie in die zin, dat $\varphi(x)-\varphi(a)=0$ kan zijn voor $x \neq a$, zodat we niet het quotiënt $\frac{g(\varphi(x))-g(\varphi(a))}{\varphi(x)-\varphi(a)}$ kunnen bekijken. We redeneren nu als volgt. Zij $\omega(y)$ bepaald door

$\omega(y)= \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$ voor $y \neq b$, $\omega(b)=\left(\frac{d\,g(y)}{dy}\right)_{y=b}$. Dan is $g(y)-g(b)=(y-b)\omega(y)$, ook voor $y=b$, dus

$$\frac{g(\varphi(x))-g(\varphi(a))}{x-a} = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\,\omega(\varphi(x)) \qquad (x \neq a).$$

Ingevolge de onderstellingen heeft de eerste factor in het laatste lid limiet $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{x=a}$ in a en is $\omega(y)$ continu in b, zodat we op $\omega(\varphi(x))$ het limiettheorema van de samengestelde functie mogen toepassen (p.39). Dit laatste leert ons dat $\lim\limits_{x\to a} \omega(\varphi(x))=\omega(b) =$ $= \left(\frac{d\,g(y)}{dy}\right)_{y=b}$. Dan heeft ook het quotiënt $\left(\frac{g(\varphi(x))-g(\varphi(a))}{x-a}\right.$ een limiet in a, en de limiet wordt gegeven door (6).

De formule (6) wordt kettingregel (voor het differentiëren) genoemd. Bestaan de afgeleiden van $u = g(y)$, $y=\varphi(x)$ in zeker interval I en geven we die aan door $\frac{du}{dy}$, $\frac{dy}{dx}$, enz., dan krijgen we de suggestieve formule

(6') $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (x \in I)$$

Hierbij moet de eerste afgeleide rechts genomen worden in y, verbonden met x door $y = \varphi(x)$, m.a.w. opgevat worden als (samengestelde) functie van x, door tussenkomst van $y = \varphi(x)$.

Stelling. Zij $y = f(x)$ gedefinieerd en monotoon stijgend (of dalend) op een interval I. Zij a een punt van I en laat $\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right)_{x=a}$ bestaan en $\neq 0$ zijn. Dan is de inverse functie $x = g(y)$ differentieerbaar in $b = f(a)$, terwijl

(7) $$\left(\frac{d\,g(y)}{dy}\right)_{y=b} = 1 : \left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right)_{x=a} .$$

Is de afgeleide van f(x) gedefinieerd en $\neq 0$ in elk punt van I, dan is $\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$, als we linker- en rechterlid beide als functie van x, of beide als functie van y opvatten.

Bewijs. Voor $x \neq a$ is ook $y \neq b$ en hebben we dus

$$\frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = 1 : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} .$$

Krachtens onderstelling heeft $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ een van nul verschillende limiet in a. De breuk heeft dezelfde limiet als functie van y, in $y = b$. Dus heeft $\frac{g(y)-g(b)}{y-b}$ een limiet in b. Daarbij is voldaan aan (7).

We behandelen nu enige voorbeelden.

Een constante functie is overal differentieerbaar, met afgeleide 0. De identieke functie $f(x) = x$ is overal differentieerbaar, met afgeleide 1. Verder geldt

(8) $\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}$ voor gehele n $(x \neq 0$, als $n \leq 0)$.

<u>Bewijs</u>. Voor $n > 0$ door volledige inductie. Voor $n = 1$ weten we het al. Geldt (8) voor n, dan is, op grond van (3'),

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x.x^n) = x.\, nx^{n-1} + 1.x^n = (n+1)x^n \;.$$

Dus geldt (8) voor elk natuurlijk getal n. Voor $n = 0$ is (8) ook juist. En voor n negatief, zeg $n = -m$, herleiden we op grond van (4')

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m} = - \frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = - mx^{-m-1} = nx^{n-1} \;.$$

Daarmee is (8) volledig bewezen.

Door toepassing van (6') leiden we af

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)^n = n(x^2+1)^{n-1}.2x \qquad (n \text{ geheel, } x \text{ willekeurig})$$

Uit (7) volgt, als we nemen $y = \sqrt{x}$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = 1 : \frac{d}{dy} y^2 = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

Later zullen we een willekeurige macht leren differentiëren.

§ 20. De stelling van Rolle. De regels van l'Hôpital.

Voor verschillende doeleinden is van belang de volgende

<u>Stelling van Rolle</u>. Zij $f(x)$ gedefinieerd en continu op het segment (a,b), en differentieerbaar op het open interval (a,b). Zij voorts $f(a)=f(b)$. Dan is er een punt ξ met $a < \xi < b$, $f'(\xi) = 0$.

<u>Bewijs</u>. De functie $f(x)$ neemt op het segment (a,b) een maximum γ en een minimum γ' aan, omdat $f(x)$ continu is op het segment (zie p.35/36). Is $\gamma = \gamma' = f(a) = f(b)$, dan is $f(x)$ constant en de stelling triviaal. Onderstellen we $\gamma > f(a)$ (het geval $\gamma' < f(a)$ wordt analoog behandeld). Zij ξ een punt met $f(\xi) = \gamma$; uiteraard is $a < \xi < b$.

Ingevolge de voorwaarden bestaat $\lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$; we zullen bewijzen $f'(\xi) = 0$.

Voor $x > \xi$ (en $\leq b$) is $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$. Dus is $\lim\limits_{x \to \xi}^{+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$. Voor $x < \xi$ (en $\geq a$) is $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$, dus $\lim\limits_{x \to \xi}^{-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$. De beschouwde limiet , n.l. $f'(\xi)$, is dus 0.

We behandelen nu enige toepassingen van de stelling van Rolle.

I. Zij $f(x)$ gedefinieerd en continu op het segment (a,b) en differentieerbaar op het open interval (a,b). Dan is er een punt ξ met

$$a < \xi < b, \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

(middelwaardestelling van de differentiaalrekening).

Bewijs. Pas de stelling van Rolle toe op de functie $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$; er geldt $g(a) = g(b) = f(a)$. Dit levert de existentie van een punt ξ met $a < \xi < b$, $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

Toepassing. $11^{10}-10^{10} = (11-10).\ 10\xi^9$ met $10 < \xi < 11$, dus $10.10^9 < 11^{10}-10^{10} < 10.11^9$.

II. Laten $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd en continu zijn op een segment (a,b) en differentieerbaar op het open interval (a,b). Zij $g'(x) \neq 0$ voor $a < x < b$. Dan is er een punt ξ met $a < \xi < b$, $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (uitgebreide middelwaardestelling).

Bewijs. Allereerst merken we op dat $g(b) \neq g(a)$. Anders zou er nl., wegens de stelling van Rolle, een punt η zijn met $a < \eta < b$, $g'(\eta) = 0$, in strijd met de onderstellingen. We beschouwen nu de functie $h(x)$, gedefinieerd door

$$h(x) = \begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x) \\ g(b)-g(a) & g(x) \end{vmatrix} = (f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x).$$

We hebben

$$h(a) = \begin{vmatrix} f(b) & f(a) \\ g(b) & g(a) \end{vmatrix}, \quad h(b) = \begin{vmatrix} -f(a) & f(b) \\ -g(a) & g(b) \end{vmatrix}, \text{ dus } h(a)=h(b).$$

Verder is $h(x)$ continu op het segment (a,b) en differentieerbaar op het open interval (a,b). Er is dan, volgens de stelling van Rolle, een punt ξ met

$$a < \xi < b, \quad h'(\xi) = (f(b)-f(a))g'(\xi)-(g(b)-g(a))f'(\xi) = 0.$$

Dan is ook $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

III. Is, in zeker interval I, $f'(x) = 0$, dan is $f(x)$ constant op I.

Bewijs. Laten a en b twee punten uit I zijn, $a < b$. Dan is er, wegens de vorige stelling, een punt ξ met $a < \xi < b$, $f(b)-f(a) = (b-a)f'(\xi)$. Krachtens onderstelling is $f'(\xi) = 0$. Dus is $f(a) = f(b)$. Dus is $f(x)$ constant in I.

Opmerking. Deze eigenschap is de omkering van de eigenschap dat de afgeleide van een constante identiek nul is.

IV. Is, in zeker interval I, $f'(x) > 0$, dan is $f(x)$ monotoon stijgend in dat interval.

Bewijs. Laten x_1 en x_2 twee punten uit dat interval zijn met $x_1 < x_2$. Er is een punt ξ met $f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)f'(\xi)$; dus is

$f(x_2)-f(x_1)>0$. Dus is $f(x)$ monotoon stijgend.
Opmerking. Is omgekeerd $f(x)$ monotoon stijgend en differentieerbaar in zeker interval I, dan mogen we nog niet besluiten tot $f'(x)>0$ voor $x \in I$, zoals blijkt uit het feit dat $f(x) = x^3$ monotoon stijgend en differentieerbaar is op $(-\infty,\infty)$, terwijl de afgeleide $f'(x) = 3x^2$ nul is in $x = 0$. Wèl geldt $f'(x) \geqq 0$ voor $x \in I$, onder de genoemde voorwaarden (ga na).

We tonen voorts aan

Stelling van Darboux. Zij $f(x)$ gedefinieerd en differentieerbaar op het segment (a,b). Zij r een getal tussen $f'(a)$ en $f'(b)$. Dan is er een getal ξ met $a \leqq \xi \leqq b$, $f'(\xi) = r$.
Bewijs. Ingeval $r = f'(a)$ of $r = f'(b)$ is de stelling triviaal. Geldt de stelling voor $-f(x)$, dan ook voor $f(x)$. We mogen dus onderstellen $f'(a)<r<f'(b)$. Zij nu $g(x)$ gegeven door $g(x) = f(x)-rx$. Dan is $g(x)$ gedefinieerd en differentieerbaar op het segment (a,b) en er geldt $g'(a) = f'(a)-r<0$, $g'(b) = f'(b)-r>0$. We zullen aantonen dat er een punt ξ is met $a<\xi<b$, $g'(\xi) = 0$; dan is $f'(\xi) = r$ en dus de stelling bewezen.

Daar $g'(a)<0$, is $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$, dus $g(x)<g(a)$ voor $x>a$ in een zekere omgeving van a. Evenzo, wegens $g'(b)>0$, is $\frac{g(x)-g(b)}{x-b}>0$, dus $g(x)<g(b)$ voor $x<b$ in een zekere omgeving van b. Dus wordt het minimum van $g(x)$ op het segment (a,b) aangenomen in een punt ξ met $a<\xi<b$. Voor dat punt ξ is $g'(\xi) = 0$ (zie bewijs stelling van Rolle). Daarmee is de stelling bewezen.

Bovenstaande stelling zegt ons dat afgeleide functies, evenals continue functies, de doorlopendheidseigenschap bezitten. Later zal uit een voorbeeld blijken, dat een afgeleide functie niet noodzakelijk continu is.

We behandelen nu twee stellingen, waarin een verband gelegd wordt tussen de limiet van het quotiënt van twee functies en de limiet van het quotiënt van de afgeleiden van die functies.⌈

Eerste regel van l'Hôpital. Zij a een punt, eindig of oneindig, A een omgeving van dat punt (evt. een linker-of rechteromgeving) en A^* die omgeving, met weglating van het punt a. Laten $f(x)$ en $g(x)$ twee functies zijn die voldoen aan de volgende vier voorwaarden:

1. $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ zijn gedefinieerd op A^*
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
3. $g'(x) \neq 0$ voor $x \in A^*$
4. $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ heeft een limiet in a.

Dan geldt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

⌈Het zijn de z.g. regels van l'Hôpital.

Bewijs. Stel $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. Het is voldoende aan te tonen $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, als x beperkt wordt tot een linker- of rechteromgeving van a. Zij dus A_1 een linker- of rechteromgeving van a, bevat in A, met weglating van het punt a (ingeval a oneindig is, $A_1=A=A^*$).

In elk punt van A_1 is $g(x)$ differentieerbaar en $g'(x) \neq 0$. Wegens de stelling van Darboux, met $r = 0$, bevat dan A_1 niet twee punten x_1 en x_2 met $g'(x_1) > 0$, $g'(x_2) < 0$. Dus òf $g'(x) > 0$ voor $x \in A_1$, òf $g'(x) < 0$ voor $x \in A_1$. Dus is $g(x)$ monotoon op A_1(zie IV). Dus is $g(x) \neq g(x')$ voor $x \neq x'$, $x,x' \in A_1$. In het bijzonder, wegens $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, is $g(x) \neq 0$ voor $x \in A_1$.

Ingeval l eindig is, bewijzen we nu de bewering als volgt. Zij $\varepsilon > 0$. Er is dan een linker- resp. rechteromgeving A_2 van a, bevat in A_1, zodat $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $x \in A_2$. Voor elk tweetal verschillende punten x, x' van A_2 is dan ook, wegens de uitgebreide middelwaardestelling, met een ξ tussen x en x',

$$\left|\frac{f(x) - f(x')}{g(x) - g(x')} - l\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Wegens 2 en $g(x) \neq 0$ is $\lim\limits_{x'\to a} \frac{f(x)-f(x')}{g(x)-g(x')} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dus is

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon , \text{ voor } x \in A_2.$$

Dus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Met een kleine wijziging in de redenering toont men dit ook aan, ingeval $l = \pm\infty$.

Tweede regel van l'Hôpital. Dezelfde onderstellingen als in de vorige stelling, met vervanging van 2 door

$$2'\ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty .$$

Ook dan is

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Bewijs. Het is weer voldoende de bewering aan te tonen als x slechts in een linker- of rechteromgeving A_1 van a varieert. Weer is $g(x) \neq g(x')$ als $x \neq x'$, $x, x' \in A_1$. We behandelen eerst het geval dat $l = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eindig is.

Zij $\varepsilon > 0$. Laten ε_1 en ε_2 nader te bepalen positieve getallen zijn. Er is nu allereerst een linker- resp. rechteromgeving A_2 van a, bevat in A_1, met weglating van het punt a, zodat $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon_1$, als $x \in A_2$. We kiezen een punt b in A_2. Voor $x \neq b$, $x \in A_2$ is

$$\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \quad \frac{1-f(b)/f(x)}{1-g(b)/g(x)} ,$$

dus $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} \cdot \quad \dfrac{1-g(b)/g(x)}{1-f(b)/f(x)}$.

De laatste factor rechts heeft ten duidelijkste, wegens 2', limiet 1 in het punt $x = a$. Er is dus een linker- resp. rechteromgeving A_3 van a, bevat in A_2 (met weglating van het punt a), zodat

$$\left| \frac{1-g(b)/g(x)}{1-f(b)/f(x)} - 1 \right| < \varepsilon_2 \text{ als } x \in A_3.$$

Is $x \in A_3$ (en dus $x \in A_2$), dan is er wegens de uitgebreide middelwaardestelling een punt ξ tussen x en b - dat dus zeker tot A_2 behoort · waarvoor geldt:

$$\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ dus } \left| \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} - l \right| < \varepsilon_1.$$

Voor $x \in A_3$ is

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l = \left\{ \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} - l \right\} \cdot \frac{1-g(b)/g(x)}{1-f(b)/f(x)} + l . \left\{ \frac{1-g(b)/g(x)}{1-f(b)/f(x)} - 1 \right\}$$

dus

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon_1 \, (1+\varepsilon_2) + |l| \, . \, \varepsilon_2.$$

We denken nu ε_1 en ε_2 als volgt gekozen:

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon \, , \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\,|l| + \varepsilon} .$$

Dan is

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \, (|l| + \varepsilon_1) = \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \text{ voor } x \in A_3.$$

In deze relatie treedt het punt b niet meer op; het fungeerde slechts als hulppunt in de redenering. We hebben nu bewezen $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, als l eindig is.

Zij nu l oneindig, b.v. $l = +\infty$. We kiezen een positief getal p. Er is een linkeromgeving (rechteromgeving) A_2 van a, bevat in A_1, zodat $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > 2p$ voor $x \in A_2$. We kiezen een punt b in A_2 en bepalen daarna een linkeromgeving (rechteromgeving) A_3 van a, bevat in A_2, zodat $\dfrac{1-g(b)/g(x)}{1-f(b)/f(x)} > \tfrac{1}{2}$ voor $x \in A_3$. Als boven vinden we nu dat $\dfrac{f(x)}{g(x)} > p$ voor $x \in A_3$. Dus is $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Geheel analoog wordt het geval $l = -\infty$ behandeld.

§ 21. Differentiëren van $y = a^x$. Het getal e. Invoering van de logarithme.

In deze paragraaf zullen we onder meer bewijzen dat de functie $y = a^x$ $(a > 0)$ overal differentieerbaar is. Dit zal ons leiden tot de invoering van het getal e.

Voorlopig onderstellen we $a > 1$. We stellen $Q(x) = \frac{a^x - 1}{x}$ $(x \neq 0)$ (dit is het "differentiequotient" van $y = a^x$ t.a.v. het punt 0) en beginnen met aan te tonen, dat $Q(x)$ een positieve rechterlimiet heeft in $x = 0$.

Allereerst merken we op, dat $Q(x)$ positief en continu is voor $x > 0$. Zij nu x een positief getal en n,m twee natuurlijke getallen met $n > m$. We hebben

$$Q(mx) = \frac{a^{mx}-1}{mx} = \frac{a^x-1}{x} \cdot \frac{1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(m-1)x}}{m},$$

$$Q(nx) = \frac{a^{nx}-1}{nx} = \frac{a^x-1}{x} \cdot \frac{1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(n-1)x}}{n},$$

Daar a^ξ een monotoon stijgende functie van ξ is (zie § 15) is $a^{px} > a^{qx}$ als p en q twee gehele getallen zijn met $p > q$. Dus is

$$\begin{aligned} & m(1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(n-1)x}) \\ &= m(1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(m-1)x}) + m(a^{mx}+a^{(m+1)x}+\ldots+a^{(n-1)x}) \\ &> m(1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(m-1)x}) + m(n-m)\, a^{mx} \\ &> m(1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(m-1)x}) + (n-m)(1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(m-1)x}), \end{aligned}$$

dus $\quad m(1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(n-1)x}) > n(1+a^x+a^{2x}+\ldots+a^{(m-1)x})$.

Dus $Q(nx) > Q(mx)$ als $x > 0$, $n > m$.

Zijn nu $\frac{p}{q}$ en $\frac{r}{s}$ twee rationale getallen met $p,q,r,s > 0$ en $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$, dus $ps > qr$, dan krijgen we door het vorige toe te passen met $x = \frac{1}{qs}$, $n = ps$, $m = qr$,

$$Q(\tfrac{p}{q}) = Q(ps.\,\tfrac{1}{qs}) > Q(qr.\,\tfrac{1}{qs}) = Q(\tfrac{r}{s}).$$

Dit betekent dat $Q(x)$ monotoon stijgend is op de verzameling der positieve rationale getallen.

Daar $Q(x)$, als functie op de verzameling der rationale getallen, een limiet heeft in elk punt $a > 0$, mogen we op $Q(x)$ de hulpstelling op p.48 toepassen, met $X = (0,\infty)$. Dit leert ons, dat $Q(x)$ ook monotoon stijgend is op de verzameling der positieve <u>reële</u> getallen. Dus heeft $Q(x)$ een rechterlimiet in $x = 0$. Dat die rechterlimiet positief is volgt aldus. Is n een natuurlijk getal en stellen we even $b = a^{1/n}$, dan is

$$Q(1) = a-1 = b^n-1 = (b-1)(1+b+b^2+\ldots+b^{n-1})$$
$$< n(b-1)b^n = n(b-1)a$$

en $Q(\frac{1}{n}) = \dfrac{a^{1/n}-1}{1/n} = n(b-1)$,

dus $Q(\frac{1}{n}) > \dfrac{Q(1)}{a} = \dfrac{a-1}{a}$.

Dan is ook $Q(x) > \frac{a-1}{a}$ voor $x > 0$ (ga na). Dus $\lim\limits_{x \to 0}^{+} Q(x) \geq \frac{a-1}{a}$.

De functie $Q(x)$ is ook gedefinieerd voor $x < 0$. We hebben $Q(x) = \dfrac{a^x-1}{x} = a^x \dfrac{a^{-x}-1}{-x}$. Wegens $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ (zie § 15) en het vorige is dan $\lim\limits_{x \to 0}^{-} Q(x) = \lim\limits_{x \to 0}^{-} \dfrac{a^{-x}-1}{-x} = \lim\limits_{x \to 0}^{+} \dfrac{a^x-1}{x}$.

Dus $\lim\limits_{x \to 0} Q(x)$ bestaat en is positief. Laten we deze limiet, die natuurlijk afhangt van a, voorstellen door $C(a)$. Dan is dus $(\frac{d}{dx} a^x)_{x=0}=C(a)$.

Krachtens de stelling over het differentiëren van een samengestelde functie (p.66/67) hebben we, als α een willekeurig reëel getal is,

$$\left(\frac{d}{dx} (a^{\alpha})^x\right)_{x=0} = \left(\frac{d}{dx} a^{\alpha x}\right)_{x=0} = \alpha\left(\frac{d}{du} a^u\right)_{u=0} ,$$

anders gezegd $C(a^{\alpha}) = \alpha C(a)$. Daar $C(a)$ positief is, kunnen we $\alpha > 0$ zo kiezen dat $C(a^{\alpha}) = 1$ is. Er bestaat dus een getal > 1 - we noemen het e - zodat

(1) $\left(\frac{d}{dx} e^x\right)_{x=0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^u-1}{u} = 1.$

Is x_0 een willekeurig reëel getal, dan is

$$\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} \quad (x \neq x_0),$$

dus $\left(\frac{d}{dx} e^x\right)_{x=x_0} = e^{x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = e^{x_0} \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u-1}{u} = e^{x_0}.$

Daarmee is bewezen, dat de functie $y = e^x$ overal differentieerbaar is en dat

(2) $\qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x$ (x reëel).

Uit § 15 weten we dat, voor $a > 1$, de functie $y = a^x$ gedefinieerd, continu en monotoon stijgend is op $(-\infty,\infty)$; verder is $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x \to \infty} a^x= \infty$. Dus bestaat de inverse functie; deze is gedefinieerd, continu en monotoon stijgend op het open interval $(0,\infty)$ (zie stelling p.41).

we stellen die functie voor door $x = {}^a\log y$. We weten dan $\lim\limits_{y \to 0^+} {}^a\log y = -\infty$, $\lim\limits_{y\to\infty} \log y = \infty$. Verder is $x = {}^a\log y$ continu en monotoon stijgend op $(0,\infty)$.

Evenzo kunnen we voor $0 < a < 1$ de functie $y = a^x$ inverteren tot $x = {}^a\log y$. De functies $y = a^x$ en $x = {}^a\log y$ zijn continu en monotoon dalend op $(-\infty,\infty)$, resp. $(0,\infty)$. Verder is in dit geval $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{y \to 0^+} {}^a\log y = \infty$, $\lim\limits_{y\to\infty} {}^a\log y = -\infty$.

Is $a = e$, dan spreken we van de natuurlijke logarithme; we schrijven dan ook eenvoudig $\log y$. In het vervolg zullen we vrijwel uitsluitend natuurlijke logarithmen gebruiken.

De grondeigenschappen van de logarithme zijn nu gemakkelijk af te leiden (we onderstellen steeds $a, b > 0$ en $\neq 1$; $x, x' > 0$):

$${}^a\log \frac{1}{x} = -\,{}^a\log x \text{ , want met } {}^a\log x = y \text{ is } x = a^y,\ \frac{1}{x} = a^{-y}$$

$${}^a\log x + {}^a\log x' = {}^a\log xx' \text{ , want met } {}^a\log x = y,\ {}^a\log x' = y'$$
is $x = a^y$, $x' = a^{y'}$, $xx' = a^{y+y'}$.

$$a^{{}^a\log x} = x, \text{ krachtens definitie}$$

$$\frac{{}^a\log x}{{}^b\log x} = {}^a\log b\ ,$$

en ook

$${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a} = \frac{\log b}{\log a}\ ,\quad {}^a\log x = \frac{\log x}{\log a}\ ,$$

want

$$a^{{}^a\log b \cdot {}^b\log x} = b^{{}^b\log x} = x, \text{ enz.}$$

$$\log x^\alpha = \alpha \log x \ (\alpha \text{ reëel}), \text{ want met } \log x = y \text{ is}$$
$$x = e^y,\ x^\alpha = e^{\alpha y}.$$

Wegens de stelling op pag. 67 over het differentiëren van inverse functies kunnen we herleiden, voor $a > 0$, $b = \log a$,

$$\left(\frac{d \log x}{dx}\right)_{x=a} = 1 : \left(\frac{d}{dx}\, e^x\right)_{x=b} = \frac{1}{e^b} = \frac{1}{a}\ .$$

Dus

(3) $$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

We kunnen nu ook een willekeurige exponentiële of logarithmische functie differentiëren. We hebben $a = e^{\log a}$, dus $a^x = e^{x \log a}$ $(a > 0)$;

door dit te beschouwen als samengestelde functie van x en (2) toe te passen vinden we

(4) $$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Het boven beschouwde getal C(a) is blijkbaar gelijk aan log a, want $C(e) = 1$, $C(a) = C(e^{\log a}) = \log a$. Verder is

(5) $$\frac{d\ {}^a\!\log x}{dx} = \frac{1}{\log a} \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x \log a} \quad (x > 0,\ a > 0 \text{ en } \neq 1).$$

Uit (3) volgt $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \left(\frac{d \log x}{dx}\right)_{x=1} = 1$,

krachtens het limiettheorema van de samengestelde functie dus

(6) $$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log(1+h) = 1,$$

alsook

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\log(1+h)} = e^1 = e,$$

$$\lim_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e, \text{ dus speciaal}$$

(7) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Verder is, voor α reëel,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log(1+\alpha h) = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{x} \log(1+x) = \alpha,$$

$$\lim_{u\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{u}\right)^u = e^\alpha,$$

dus ook

(8) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha,$$

b.v. $$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Uit $\left(\frac{d}{dx}e^x\right)_{x=0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ leidt men, eveneens door toepassing van het limiettheorema van de samengestelde functie, af

(9) $$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = 1.$$

We bepalen nu enkele limieten door toepassing van de regels van l'Hôpital. De functies $\log x$ en $\frac{1}{x}$ zijn gedefinieerd en differentieerbaar voor $x > 0$, terwijl $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -x^{-2} \neq 0$ voor $x > 0$ (zie pag.68, (8)). Verder is $\lim\limits_{x\to 0}^{+} \log x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}^{+} \frac{1}{x} = \infty$. Nu is

$$\frac{d \log x}{dx} : \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{1}{x} : -x^{-2} = -x.$$

Deze uitdrukking heeft een rechterlimiet in $x = 0$, nl. 0. We mogen dus de tweede regel van l'Hôpital toepassen en vinden dan

(10) $$\lim_{x \to 0}^{+} x \log x = 0.$$

Voor elke $\varepsilon > 0$ is

$$\lim_{x \to 0}^{+} x^{\varepsilon} \log x = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{x \to 0}^{+} x^{\varepsilon} \log x^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{y \to 0}^{+} y \log y,$$

dus

(10') $$\lim_{x \to 0}^{+} x^{\varepsilon} \log x = 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Deze formule zegt dus, globaal beschouwd, dat $\log x$ zò zwak naar $-\infty$ gaat voor $x \to 0$ $(x > 0)$, dat deze na vermenigvuldiging met een willekeurig kleine, positieve macht van x nog tot 0 nadert voor $x \to 0$ $(x > 0)$.

Voeren we in (10) in $x = e^{-u}$ en passen we het limiettheorema van de samengestelde functie toe, dan vinden we, wegens

$$\lim_{u \to \infty} e^{-u} = 0,$$

$$\lim_{u \to \infty} e^{-u}.\ u = 0, \text{ dus } \lim_{u \to \infty} e^{-u} u = 0.$$

Daar algemeen $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, als $f(x) > 0$ in een omgeving van a en $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, is nu ook

(11) $$\lim_{u \to \infty} \frac{e^{u}}{u} = \infty .$$

Voor $\alpha > 0$ is ook $\lim_{u \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{\alpha} u}}{u} = \frac{1}{\alpha} \lim_{u \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{\alpha} u}}{\frac{1}{\alpha} u} =$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{v \to \infty} \frac{e^{v}}{v} = \infty, \text{ dus ook}$$

(11') $$\lim_{u \to \infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{\alpha} u}}{u}\right)^{\alpha} = \lim_{u \to \infty} \frac{e^{u}}{u^{\alpha}} = \infty .$$

In woorden: e^{u} neemt sterker toe voor $u \to \infty$ dan welke positieve macht van u ook. We merken nog op dat men (11) ook direct kan bewijzen door toepassing van de tweede regel van l'Hôpital.

We geven nog enige toepassingen van de regels van l'Hôpital. Beschouwen we de functies $f(x) = e^{x^3} - 1$, $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^3}$. Beide functies hebben limiet 0 in $x = 0$, zijn differentieerbaar in een omgeving van $x = 0$, terwijl $g'(x) = -(-3x^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}} \neq 0$ voor $x \neq 0$ in een omgeving van de oorsprong. Daar

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 e^{x^3}}{3x^2/2\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{x^3}}{\sqrt{1-x^3}} = 2, \text{ levert de}$$

eerste regel van l'Hôpital dus

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{1-\sqrt{1-x^3}}=2\ .$$

Vervolgens beschouwen we een polynoom $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ en trachten te berekenen

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}-x\right).$$

Vervangen we x door $\frac{1}{y}$, dan gaat de uitdrukking onder het limietteken over in $\frac{1}{y}\left(\sqrt[n]{1+a_1y+\dots+a_ny^n}-1\right)$. We mogen de eerste regel van l'Hôpital toepassen (ga na) t.o.v. het punt $y=0$ en vinden dan

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+a_1y+\dots+a_ny^n}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{n}\cdot\frac{a_1+2a_2y+\dots+na_ny^{n-1}}{\sqrt[n]{\ \ \ }^{\,n-1}}=\frac{a_1}{n}.$$

Door toepassing van het limiettheorema van de samengestelde functie,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}-x\right)=\frac{a_1}{n}\ .$$

§ 22. Theorema van Taylor.

Het kan gebeuren dat de afgeleide van een functie $y=f(x)$ in zeker interval I zelf weer differentieerbaar is in I. We noemen de afgeleide van $y'=f'(x)$, wanneer die bestaat, de tweede afgeleide van $y=f(x)$. Notatie: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y^2}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Evenzo is het mogelijk dat nog hogere afgeleiden van $f(x)$ bestaan. We noteren die y''', y'''', ..., $f'''(x)$, ..., enz. De n^e afgeleide van $y=f(x)$ (n een natuurlijk getal), wanneer die bestaat, wordt geschreven $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ of $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$; hierbij is per definitie $y^{(0)}\equiv y$, $y^{(n)}=\frac{d}{dx}y^{(n-1)}$.

We bewijzen nu het volgende theorema, waarin hogere afgeleiden een rol spelen.

Theorema van Taylor. Zij n een natuurlijk getal. Laten $f(x)$ en de eerste n-1 afgeleiden $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ gedefinieerd zijn op een segment (a,b), laat $f^{(n)}(x)$ bestaan op het open interval (a,b) en zij $f^{(n)}(x)$ continu op het segment (a,b). Dan is er een punt ξ, met $a<\xi<b$, zodat

$$(1)\qquad f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+$$
$$\dots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

Bewijs. We beschouwen de volgende twee functies:

$$\Gamma(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\dots$$
$$\dots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x),$$

$$G(x) = (b-x)^n .$$

De functie $F(x)$ is differentieerbaar op het open interval (a,b), krachtens de onderstellingen en de regels in § 19. De afgeleide heeft een bijzonder eenvoudige gedaante:

$$F'(x) = -f'(x) + \left\{f'(x) - (b-x)f''(x)\right\} + \left\{(b-x)f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)\right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\right\}$$

$$= - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Verder is $G'(x) = -n(b-x)^{n-1}$ voor $a < x < b$. Ook zijn $F(x)$ en $G(x)$ continu op het segment (a,b). Toepassing van de uitgebreide middelwaardestelling (p.69) levert de existentie van een punt ξ met $a < \xi < b$, zodat

$\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$. Nu is $F(b) = G(b) = 0$, en $F(a) =$
$= f(b)-f(a)-(b-a)f'(a) - \dfrac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$, $G(a) =$
$= (b-a)^n$. Verder is $\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$. We krijgen dus

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(b-a)^n}\left[f(b)-f(a)-(b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)\right],$$

hetgeen de gevraagde betrekking (1) geeft.

<u>Opmerking</u>. Voor $n = 1$ gaat het theorema van Taylor over in de middelwaardestelling. Het theorema van Taylor is dus een generalisatie hiervan. Men lette op de faculteiten in de noemers in het rechterlid van (1). Verder merke men op dat de voorwaarden van de stelling vervuld zijn als de n eerste afgeleiden van $f(x)$ allen bestaan op het segment (a,b).

<u>Toepassing 1</u>: Berekening van $\alpha = 1{,}001^{100}$. De functie $f(x) = x^{100}$ is willekeurig vaak differentieerbaar. Toepassing van het theorema van Taylor met $a = 1$, $b = 1{,}001$ en $n = 4$ geeft:

$$\alpha = 1+0{,}001.100 + \frac{0{,}001^2}{2}.100.99 + \frac{0{,}001^3}{6}.100.99.98 + R =$$

$$= 1{,}1051117 + R,$$

met $R = \dfrac{0.001^4}{24} . 100.99.98.97.\xi^{96} < \dfrac{10^{-4}}{24} . 1{,}001^4 < \frac{1}{2}.10^{-5}$.

<u>Toepassing 2</u>: $\log 1{,}001 = 0{,}001 - \frac{0{,}001^2}{2} + R = 1{,}0010005 + R$,

met $0 < R < 10^{-10}$, daar $\frac{d \log x}{x} = \frac{1}{x}$, $\frac{d^2 \log x}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^3 \log x}{dx^3} =$

$$= \frac{2}{x^3}.$$

<u>Opg</u>.79. Laten $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn op een interval I. Zij $f'(x) = g'(x)$ voor $x \in I$. Dan is er een constante c, zodat $f(x) = c + g(x)$ voor $x \in I$.

<u>Opg</u>.80. Zij n een natuurlijk getal. Is $f(x)$ differentieerbaar op een interval I en heeft $f(x)$ daar n nulpunten, dan heeft $f'(x)$ daar minstens $n-1$ nulpunten.

<u>Opg</u>.81. Zij $f(x)$ tweemaal differentieerbaar op een interval I en zij $f''(x) \geqq 0$ voor $x \in I$. Voor elk tweetal punten $x_1, x_2 \in I$ is dan $f(x_2) - 2f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f(x_1) \geqq 0$.

<u>Opg</u>.82. Zij $f(x)$ differentieerbaar op een interval I. Dan is

$$\frac{d\, f(-x)}{dx} = -f'(-x), \quad \frac{d\, f(ax+b)}{dx} = af'(ax+b).$$

In welke intervallen gelden deze formules? Men lette er op dat $f'(ax+b)$ betekent $\left(\frac{d\, f(u)}{du}\right)_{u=ax+b}$.

<u>Opg</u>.83. Voor de in § 21 beschouwde functie $Q(x)$ geldt

$$\frac{a-1}{a} \leqq \lim_{x \to 0} Q(x) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} < a-1.$$

Leidt hieruit af $e > 2$ en ook $\log 2 \geqq \frac{1}{2}$, zodat $e \leqq 4$.

<u>Opg</u>.84. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \log 2.$

<u>Opg</u>.85. $\lim\limits_{n \to \infty} n\,(\sqrt[n]{2} - 1) = \log 2.$

<u>Opg</u>.86. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

<u>Opg</u>.87. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n = 1.$

<u>Opg</u>.88. Ga nog eens precies na, waarom in het bewijs van (11), p.77 het limiettheorema van de samengestelde functie toegepast mag worden.

<u>Opg</u>.89. $(y-x)\, a^x \log a < a^y - a^x < (y-x) a^y \log a \quad (y > x,\ a > 1).$

<u>Opg</u>.90. Bepaal $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{x}}$.

Differentiëren van de functie $y = x^c$.

Zij c een willekeurig reëel getal en $x > 0$. We kunnen schrijven $y = x^c = e^{c \log x}$. We kunnen deze functie dus differentiëren door gebruik te maken van de kettingregel. We vinden

$$y' = e^{c \log x} \cdot \frac{d}{dx}(c \log x) = \frac{c}{x}\, e^{c \log x} = \frac{c}{x}\, x^c \,.$$

Dus

(2) $$\frac{dx^c}{dx} = cx^{c-1} \,.$$

Hiermee is formule(8), p.68 ook voor niet-gehele n bewezen $(x > 0)$.

Opg.91. Ga na in welke intervallen de volgende uitdrukkingen differentieerbaar zijn en bepaal de afgeleide.

a) $\frac{ax+b}{cx+d}$ b) $\frac{x^2-1}{x^4-1}$ c) $\frac{(x+a)^p}{(x+b)^q}$ (p,q willekeurig)

d) $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$ (n een natuurlijk getal)

e) $\sqrt[3]{x^2+1}$ f) $(a-\frac{1}{x})^3$ g) $(1-x^p)^q$ (p,q willekeurig)

h) $\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$ i) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ j) $x^{\frac{1}{3}}\,(1-x)^{\frac{2}{3}}\,(1+x)^{\frac{2}{5}}$

k) $\frac{2x^2}{3}\sqrt{(1-x)^3} + \frac{8x}{15}\sqrt{(1-x)^5} + \frac{16}{105}\sqrt{(1-x)^7}$

l) e^{ax^2+bx} m) x^x n) e^{e^x}

o) $e^{\sqrt[3]{\log x}}$ p) $\log\,(x+\sqrt{1-x^2})$ q) $(\log x)^2$

r) $\log\,(ax+b)$ s) $x^4(e^x+e^{-x})$.

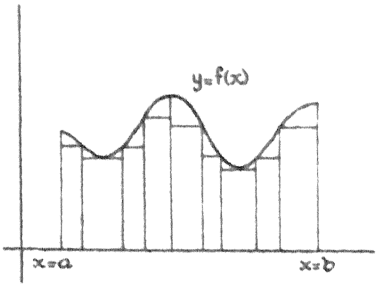
Opg.92. Vorm $\left(\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}\right)'$; $(f(\sqrt{1+x^2}))'$.

Opg.93. Zijn $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar op een segment (a,b), is $f(a) = g(a)$ en $f'(x) \geqq g'(x)$ voor $a \leqq x \leqq b$, dan is ook $f(x) \geqq g(x)$ voor $a \leqq x \leqq b$.

Opg.94. Bewijs $e^x \geqq 1+x$ voor $x \geqq 0$;
$x^\alpha - 1 < \alpha(x-1)$ als $x > 1$, $0 < \alpha < 1$.

§ 23. De bepaalde integraal.

We beginnen met een meetkundige beschouwing. Zij gegeven een functie $f(x)$, gedefinieerd op een segment (a,b). We onderstellen gemakshalve $f(x) > 0$ voor $a \leqq x \leqq b$. We wensen de oppervlakte te bepalen van de figuur, begrensd door de x-as, de kromme die de functie $y = f(x)$ grafisch voorstelt en de beide verticale lijnen $x = a$, $x = b$.



We stuiten meteen op de vraag, hoe we de oppervlakte van een dergelijke figuur moeten "meten". In eerste instantie wil meten zeggen: vergelijken met een maateenheid, in ons geval een vierkant met zijde 1. Maar in het algemeen is het niet mogelijk een gegeven figuur precies op te vullen met vierkanten. Om toch tot een definitie van oppervlakte te komen, kunnen we, in het beschouwde geval, als volgt te werk gaan.

We verdelen het segment (a,b) in n subsegmenten (n een natuurlijk getal). Voor elk subsegment beschouwen we een rechthoek met dat subsegment, op de reële as, als basis, met verticale zijden en met vierde zijde juist beneden de grafiek van de functie. De vereniging van de n rechthoeken die we zo krijgen behoort geheel tot de boven beschouwde figuur. En deze vereniging van rechthoeken bezit een oppervlakte, zeg s. We kunnen ook de vierde zijde van elk der rechthoeken zó kiezen, dat hij geheel boven de grafiek van y = f(x) verloopt. Dan krijgen we door vereniging van de n rechthoeken een figuur, die de beschouwde figuur omvat en waarvan we de oppervlakte kennen. Zij die laatste oppervlakte S.

Willen we aan de beschouwde figuur een oppervlakte toekennen, zeg I, dan zal I een getal moeten zijn, dat tussen s en S ligt. En dit zal moeten gelden, van welke verdeling van het segment (a,b) in een eindig aantal subsegmenten we ook uitgaan. We hopen nu dat er zo'n getal I is en tevens dat er slechts één zo'n getal is. Dat getal I zullen we dan per definitie de oppervlakte van de beschouwde figuur noemen.

In het volgende zullen we dit probleem op zuiver analytische wijze aanpakken en dan komen tot een analytische definitie van het begrip bepaalde integraal. We zullen daarbij geen gebruik maken van grafische voorstellingen e.d. Tevens zullen we voorwaarden vinden, waaraan de functie y = f(x) moet voldoen, wil zo'n definitie mogelijk zijn. We merken nog op, dat het voor de bovenstaande beschouwingswijze nodig is dat de functie y = f(x) begrensd is: anders kunnen we niet overdekken met rechthoeken.

Zij een functie $y = f(x)$ gedefinieerd en begrensd op een segment (a,b). We kiezen n-1 getallen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ($n \geq 1$), zodat $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$. Verder stellen we $x_0 = a$, $x_n = b$. Dan is dus $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. De getallen x_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) bepalen een verdeling van het segment (a,b) in n subsegmenten (x_0, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$. We geven deze verdeling aan met D, of ook uitvoeriger met $(x_0,x_1,x_2,\ldots x_n)$.

Krachtens onderstelling is de functie $f(x)$ op (a,b) zowel naar beneden als naar boven begrensd, anders gezegd: de verzameling functiewaarden op (a,b) is naar beneden en naar boven begrensd. Uit de stelling van de onderste (bovenste)grens volgt dan dat $f(x)$ op (a,b) een onderste grens m en een bovenste grens M heeft. Hierbij is $m \leqq M$. We stellen $M-m = \omega$, zodat $\omega \geqq 0$, en noemen ω de schommeling van $f(x)$ op (a,b).

Een deelverzameling van een begrensde verzameling is weer begrensd; en de onderste grens is niet kleiner dan de onderste grens van de oorspronkelijke verzameling en de bovenste grens niet groter dan de bovenste grens daarvan. Dus is $f(x)$ begrensd op elk subsegment $(x_{\nu-1},x_\nu)$ ($\nu = 1,2,\ldots,n$). We stellen de onderste grens van $f(x)$ op $(x_{\nu-1},x_\nu)$ voor door m_ν en de bovenste grens door M_ν ($\nu = 1,2,\ldots,n$). Er geldt dan

(1) $$m \leqq m_\nu \leqq M_\nu \leqq M \quad (\nu = 1,2,\ldots,n).$$

We stellen $M_\nu - m_\nu = \omega_\nu$, de schommeling van $f(x)$ op het ν^{de} subsegment. We hebben

(2) $$0 \leqq \omega_\nu \leqq M-m = \omega.$$

We beschouwen nu de beide volgende sommen (denk aan de oppervlakten van de in de inleiding beschouwde, uit rechthoeken opgebouwde figuren):

(3) $$s = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}), \quad S = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Deze uitdrukkingen worden ondersom resp. bovensom van $f(x)$ t.o.v. de beschouwde verdeling D genoemd. Het verschil van deze beide sommen noemen we het somverschil van $f(x)$ t.o.v. de verdeling D, voorgesteld door d. We hebben

(4) $$d = S - s = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

We schrijven wel $x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta x_\nu$; het is de lengte van het ν^{de} subsegment. We wijzen er op dat de n subsegmenten niet dezelfde lengte hoeven te hebben. Ongeacht de verdeling echter kunnen we de volgende schattingen voor onder- en bovensom uitvoeren. Wegens $x_\nu - x_{\nu-1} > 0$ ($\nu = 1,2,\ldots,n$) is

$$s \geqq \sum_{\nu=1}^{n} m(x_\nu - x_{\nu-1}) = m \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) = m(x_n - x_0) = m(b-a)$$

en

$$S \leqq \sum_{\nu=1}^{n} M(x_\nu - x_{\nu-1}) = M \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) = M(b-a).$$

Verder

$$s = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) = S.$$

Dus

(5) $$m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a).$$

We willen nu verschillende verdelingen bekijken en nagaan wat er over de bijbehorende onder- en bovensommen te zeggen valt. Het is niet mogelijk alle mogelijke verdelingen in een rij te rangschikken. Wel kunnen we op heel veel manieren een rij van verdelingen aangeven, dat is een voorschrift waardoor aan elk natuurlijk getal n een of andere verdeling D_n van (a,b) in een zeker aantal, zeg k_n subsegmenten is toegevoegd. We kunnen vragen naar wat er b.v. met de ondersom s gebeurt als D een rij van verdelingen doorloopt. We voeren nu eerst een paar begrippen in.

Onder de hierboven beschouwde getallen $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ komt er tenminste één voor die het grootste is. We stellen

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,n} \Delta x_\nu = \Delta$$

en noemen Δ de <u>wijdte</u> van de beschouwde verdeling. We weten dan: 1) er is een ν, zodat $\Delta x_\nu = \Delta$, 2) voor elke ν is $\Delta x_\nu \leq \Delta$. Een rij verdelingen D_n noemen we <u>convergent</u> als de rij der bijbehorende wijdten Δ_n een nulrij is, d.w.z. als $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n$ bestaat en gelijk aan nul is. Huiselijk gezegd: een rij verdelingen heet convergent, als de afstanden van opvolgende deelpunten over het hele segment gelijkmatig tot nul afnemen.

Wegens (5) liggen alle onder- en bovensommen tussen twee vaste getallen. n.l. $m(b-a)$ en $M(b-a)$. De verzameling van alle ondersommen heeft dus een onderste en een bovenste grens, en evenzo de verzameling van alle bovensommen. We stellen de <u>bovenste grens van de verzameling der ondersommen</u> voor door j en de <u>onderste grens van de verzameling der bovensommen</u> door J. We weten dan:

1) steeds is $s \leq j$, $S \geq J$

2) bij elke $\varepsilon > 0$ is een ondersom s te vinden met $s > j - \varepsilon$ en een bovensom S (niet noodzakelijk bij dezelfde verdeling behorende) met $S < J + \varepsilon$.

We stellen ons nu voor de volgende bewering aan te tonen.

<u>Bewering</u>. Bij elk positief getal ε is een positief getal η te vinden, zodat voor elke verdeling D met wijdte $\Delta < \eta$ geldt, dat de bijbehorende onder- en bovensom voldoen aan de ongelijkheden:

$$j - \varepsilon < s \leq j, \quad J \leq S < J + \varepsilon.$$

<u>Bewijs</u>. We verdelen het bewijs in een paar stappen. Eerst beschouwen we twee verdelingen die "bijna geheel" overeenstemmen. We gaan nl.

het effect na van het toevoegen van één nieuw deelpunt aan een gegeven verdeling.

Laat D de verdeling $(x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b)$ zijn. Zij α een getal met $a < \alpha < b$, dat niet met een der getallen $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ samenvalt. Laat het behoren tot het k^{de} subsegment: $x_{k-1} < \alpha < x_k$. Zij D' de verdeling $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha, x_k, \ldots, x_n = b)$, die dus ontstaat uit D door toevoeging van het ene nieuwe deelpunt α. Laten bij D en D' ondersommen s resp. s' en bovensommen S resp. S' behoren.

Er geldt:

$$s = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$s' = \sum_{\nu=1}^{k-1} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) + \sum_{\nu=k+1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) + $$
$$+ m^{*}(\alpha - x_{k-1}) + m^{**}(x_k - \alpha),$$

als m^* de onderste grens van $f(x)$ op (x_{k-1}, α) is en m^{**} die op (α, x_k). Wegens $m_k \leqq m^* \leqq M_k$, $m_k \leqq m^{**} \leqq M_k$ hebben we dan

$$s' - s = m^*(\alpha - x_{k-1}) + m^{**}(x_k - \alpha) - m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\geqq m_k(\alpha - x_{k-1}) + m_k(x_k - \alpha) - m_k(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

alsook

$$s' - s \leqq M_k(\alpha - x_{k-1}) + M_k(x_k - \alpha) - m_k(x_k - x_{k-1}) = \omega_k(x_k - x_{k-1}).$$

Dus, wegens (2), als D wijdte Δ heeft, $0 \leqq s' - s \leqq \omega\Delta$. In woorden: voegt men aan een verdeling D, met wijdte Δ, één nieuw deelpunt toe, dan neemt de ondersom niet af, en ten hoogste met $\omega\Delta$ toe.

Aan D' kunnen we weer een neiuw deelpunt toevoegen. Daar de wijdte van D' hoogstens gelijk aan Δ is, neemt ook daarbij de ondersom niet af en ten hoogste met $\omega\Delta$ toe. Door herhaling van dit procédé zien we in:

Voegen we aan een verdeling D, met wijdte Δ, m nieuwe deelpunten toe, dan neemt de ondersom niet af en ten hoogste met $m\omega\Delta$ toe.

Zij nu $\varepsilon > 0$ gegeven. Laat D_0 een verdeling zijn, zodat voor de bijbehorende ondersom s_0 geldt: $j - \frac{1}{2}\varepsilon < s_0 \leqq j$. Zij N het aantal deelpunten van D_0 en $\eta_1 = \varepsilon / 2N\omega$. Beschouwen we een willekeurige verdeling D met wijdte $\Delta < \eta_1$ en de daarbij behorende ondersom s.

Om een ongelijkheid voor s af te leiden passen we de volgende kunstgreep toe. Zij D^* de verdeling, die als deelpunten heeft alle punten, die als deelpunt in D_0 of D voorkomen, met bijbehorende ondersom s^*. Dan is D^* een verdeling die men uit D_0 kan krijgen door toevoeging van een aantal nieuwe deelpunten (nl. dié deelpunten van D die niet reeds als zodanig in D_0 voorkomen). Eveneens kan men D^* uit D verkrijgen, uitsluitend door toevoeging van nieuwe deelpunten (D^* is een verfijning van D_0 èn van D). Voorts bevat D^* hoogstens N deelpunten, die niet reeds in D voorkomen.

Uit het hierboven afgeleide volgt nu, door D^* eerst als verfijning van D_0 en daarna als verfijning van D te beschouwen,

$$s^* \geqq s_0 \; ; \qquad s^* \leqq s + N\omega\Delta \; .$$

Hieruit volgt $s_0 \leqq s + N\omega\Delta$, wegens $\Delta < \eta_1$ dus $s_0 < s + \frac{1}{2}\varepsilon$. Tezamen met $j - \frac{1}{2}\varepsilon < s_0$ geeft dit $s > j - \varepsilon$. Uiteraard is, wegens 1), $s \leqq j$. Merk op dat bij het bewijs D_0 slechts tijdelijk een rol speelde.

Op dezelfde wijze kan men een positief getal η_2 vinden, zodat $S < J + \varepsilon$ bij elke verdeling met wijdte $< \eta_2$ (men zou ook het vorige kunnen toepassen op de functie $-f(x)$). De bewering volgt nu door te nemen $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.

We leiden thans enige gevolgtrekkingen af. Zij allereerst ε een positief getal. Er is een verdeling D van (a,b), zodat voor de bijbehorende ondersom s en bovensom S geldt: $s > j - \varepsilon$, $S < J + \varepsilon$. Wegens $s \leqq S$ (zie (5)) volgt hieruit $j < J + 2\varepsilon$. Daar deze ongelijkheid voor elke $\varepsilon > 0$ van kracht is, volgt

(6) $$j \leqq J.$$

Vervolgens beschouwen we een convergente rij van verdeling D_n van (a,b). Zij Δ_n de wijdte van D_n en laat $f(x)$ t.o.v. D_n ondersom s_n en bovensom S_n hebben $(n=1,2,..)$. Zij ε een positief getal en beschouwen we een hierbij door de boven aangetoonde bewering bepaald, positief getal η. Krachtens definitie van convergente rij verdelingen bestaat er een rangnummer n_0, zodat $\Delta_n < \eta$ als $n > n_0$. Dus ook $j - \varepsilon < s_n \leqq j$, $J < S_n < J + \varepsilon$ als $n > n_0$. We hebben dus:

(7) $$\lim_{n \to \infty} s_n = j, \qquad \lim_{n \to \infty} S_n = J,$$

voor de onder- resp. bovensommen t.o.v. een willekeurige convergente rij verdelingen.

Uit (6) en de definitie van j en J volgt, dat een willekeurige ondersom kleiner dan of gelijk aan een willekeurige bovensom is. Iets algemener geldt, dat het verschil tussen een willekeurige bovensom en een willekeurige ondersom minstens gelijk $J - j$ is. Verder geldt: bij elke ε bestaat er een $\eta > 0$, zodat, als D een verdeling van (a,b) is met wijdte $\Delta < \eta$, het daarbij behorende somverschil $d < J - j + \varepsilon$ is.

De getallen j en J zijn niet noodzakelijk aan elkaar gelijk. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld. Zij f(x) als volgt gedefinieerd op het segment (0,1):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \text{ rationaal en } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1 & \text{als } x \text{ irrationaal en } 0 < x < 1. \end{cases} \tag{8}$$

Op het segment (0,1) en ook op elk subsegment daarvan heeft f(x) onderste grens 0 en bovenste grens 1, want elk zodanig segment bevat rationale zowel als irrationale getallen. Dus is elke ondersom 0 en elke bovensom 1. Dus $j = 0$, $J = 1$.

Er zijn echter grote klassen van (begrensde) functies, waarvoor de getallen j en J wèl gelijk zijn. We stellen nu de volgende definitie op.

Definitie. Zij f(x) gedefinieerd en begrensd op een segment (a,b). Het getal j, bovenste grens van de ondersommen van f(x) t.o.v. een verdeling van (a,b), wordt de onderintegraal van f(x) over (a,b) genoemd. Het getal J, onderste grens van de bovensommen, heet bovenintegraal van f(x) over (a,b). Is $j = J$, dan heet f(x) integreerbaar over (a,b); de gemeenschappelijke waarde van j en J wordt de (bepaalde) integraal van f(x) over (a,b) genoemd, geschreven

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Het nu ingevoerde integraalbegrip is afkomstig van B.Riemann. We geven meteen een nodig en voldoende voorwaarde voor integreerbaarheid van een functie:

Eerste integrabiliteitscriterium. Een functie f(x), gedefinieerd en begrensd op een segment (a,b), is dan en slechts dan integreerbaar over (a,b), als er bij elk getal $\varepsilon > 0$ een verdeling D van (a,b) is te vinden, t.o. waarvan f(x) somverschil $d < \varepsilon$ heeft.

Bewijs. Is $j = J$, dan is zelfs $d < \varepsilon$ voor elke verdeling met voldoend kleine wijdte. Is $j \neq J$, dus $J - j > 0$, dan is $d \geqq J - j$ voor elke verdeling.

Een voorbeeld van een niet integreerbare functie heeft men in de functie f(x) gedefinieerd door (8).

Naast onder- en bovensom kunnen we het begrip tussensom invoeren. Zij $D = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ een verdeling van (a,b) in k subsegmenten en strooien we, geheel willekeurig, in deze subsegmenten k punten ξ_ν, zodat $x_{\nu-1} \leqq \xi_\nu \leqq x_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots,k$). Dan heet de uitdrukking

$$T = \sum_{\nu=1}^{k} f(\xi_\nu)\, \Delta x_\nu \tag{9}$$

een bij de verdeling D behorende tussensom van f(x). Daar $m_\nu \leq f(\xi_\nu) \leq M_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots,k$), ongeacht de keuze der ξ_ν, is $s \leq T \leq S$, als s en S onder- resp. bovensom van f(x) t.o.v. D zijn. Is f(x) integreerbaar over (a,b) en $S - s < \varepsilon$, dan is dus ook

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T \right| < \varepsilon .$$

Als dus, in geval van integreerbaarheid, D_n een convergente rij verdelingen van (a,b) doorloopt en we een tussensom van f(x) t.o.v. D_n aangeven door onder het somteken D_n te plaatsen, dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{D_n} f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu = \int_a^b f(x)dx. \tag{10}$$

Dit kan dienen ter verduidelijking van de gekozen notatie.

Speciaal is, als f(x) integreerbaar is, voor de ondersommen s_n en de bovensommen S_n bij een convergente rij verdelingen:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

We behandelen nu enige eenvoudige voorbeelden ter illustratie van de definitie van bepaalde integraal.

1) f(x) = c. Op elk segment heeft f(x) onderste grens en bovenste grens c. Dus zijn alle onder- en bovensommen t.o.v. een verdeling van een of ander segment gelijk. Dus is f(x) integreerbaar over elk segment (a,b) en er geldt:

$$\int_a^b c\ dx = c(b-a). \tag{11}$$

2) f(x) = x. We bewijzen eerst dat f(x) integreerbaar is over een willekeurig gekozen segment (a,b). Daartoe is, krachtens het afgeleide criterium, voldoende dat, als $\varepsilon > 0$ is, er een verdeling van (a,b) bestaat, zodat het bijbehorende somverschil kleiner dan ε is. Beschouwen we eens een verdeling D_n van (a,b) in n gelijke delen, waarbij n nog nader bepaald zal worden. Dan geldt, met voor zichzelf sprekende notaties,

$$m_\nu = x_{\nu-1}\ ,\ M_\nu = x_\nu;\ x_\nu = a+\nu\,\frac{b-a}{n}\ , \qquad \Delta_n = \frac{b-a}{n}\ ,$$

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a+(\nu-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a+(\nu-1)\,\Delta_n\right)\Delta_n$$

$$= an\cdot\Delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\,\Delta_n^2\ ,$$

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a+\nu\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = an\,\Delta_n + \frac{n(n+1)}{2}\,\Delta_n^2\ .$$

Dus $S_n - s_n = n\,\Delta_n^2 = \frac{1}{n}(b-a)^2 < \varepsilon$ als $n > \frac{1}{\varepsilon}(b-a)^2$.

Verder

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\tfrac{1}{2}(b-a)^2 - \frac{1}{2n}(b-a)^2\right]$$

$$= a(b-a)+\tfrac{1}{2}(b-a)^2 = \tfrac{1}{2}(b-a)(b+a) = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2)\ .$$

We vinden dus

$$(12)\qquad \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}\ .$$

§ 24. Stellingen over integreerbaarheid van functies.

De stellingen in deze paragraaf worden voornamelijk bewezen m.b.v. het op p.87 afgeleide integrabiliteitscriterium. Wanneer niet expliciet vermeld, zijn de functies steeds begrensd ondersteld.

I. Is $f(x)$ gedefinieerd en monotoon op een segment (a,b), dan is $f(x)$ integreerbaar over (a,b).

Opmerking. Is $f(x)$ monotoon op een segment, dan is $f(x)$ daar ook begrensd (waarom?).

Bewijs. We behandelen eerst het geval dat $f(x)$ monotoon niet-dalend is. Op (a,b) heeft $f(x)$ dan onderste grens $f(a)$ en bovenste grens $f(b)$. Op een subsegment $(x_{\nu-1},x_\nu)$ heeft $f(x)$ onderste grens $f(x_{\nu-1})$ en bovenste grens $f(x_\nu)$. Voor het somverschil d van $f(x)$ t.o.v. een verdeling $D = (x_0,x_1,\dots,x_n)$ van (a,b), met wijdte Δ, vinden we derhalve, als we gebruik maken van $f(x_\nu)-f(x_{\nu-1}) \geq 0$ voor $\nu = 1,2,\dots, n$,

$$d = \sum_{\nu=1}^{n}\left\{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})\right\}\Delta x_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{n}\left\{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})\right\}\Delta$$

$$= \Delta\cdot\left\{f(b)-f(a)\right\}\ .$$

Is $\varepsilon > 0$, dan kunnen we steeds een verdeling D kiezen, zodat de laatste uitdrukking kleiner dan ε is. Dus is $f(x)$ integreerbaar. Het geval dat $f(x)$ monotoon niet-stijgend is, wordt evenzo behandeld.

II. Is $f(x)$ gedefinieerd en continu op een segment (a,b), dan is $f(x)$ integreerbaar over (a,b).

Bewijs. We merken eerst op, dat uit de gegevens volgt dat $f(x)$ begrensd is (zie § 11, II, p.35).

Zij nu $\varepsilon > 0$ gegeven. Daar $f(x)$ continu is op het segment (a,b), is $f(x)$ ook uniform continu op dat segment (zie stelling, p.37). Er bestaat dus een positief getal δ, zodat

$$|f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad\text{als } |x-x'| < \delta \quad \text{en } a \leq x \leq b,\ a \leq x' \leq b.$$

Laat nu D een verdeling $(a = x_0,x_1,x_2,\dots,x_n = b)$ van (a,b) zijn, waarvan de wijdte $<\delta$ is. In elk subsegment van D neemt $f(x)$ zijn bovenste en onderste grens als waarde aan (zie § 11, II). Dus is de schommeling ω_ν het verschil van twee functiewaarden in $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ ($\nu = 1,2,\ldots,n$). Omdat nu de lengte van elk subsegment $< \delta$ is, is wegens het bovenstaande $\omega_\nu < \frac{\varepsilon}{b-a}$ voor $\nu = 1,2,\ldots,n$. Voor het somverschil t.o.v. de verdeling D hebben we dus:

$$d = \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) = \varepsilon .$$

Daarmee is de stelling aangetoond.

III. Is $f(x)$ begrensd en integreerbaar over (a,b), dan ook $|f(x)|$.

Bewijs. Beschouwen we een willekeurig subsegment (α, β) van (a,b) en vergelijken we de schommeling $\bar{\omega}_{\alpha,\beta}$ van $|f(x)|$ op (α,β) met de schommeling $\omega_{\alpha,\beta}$ van $f(x)$ op (α, β). We hebben (ga na)

$$\omega_{\alpha,\beta} = \sup_{\substack{\alpha \leq x \leq \beta \\ \alpha \leq x' \leq \beta}} |f(x)-f(x')| , \quad \bar{\omega}_{\alpha,\beta} = \sup_{\substack{\alpha \leq x \leq \beta \\ \alpha \leq x' \leq \beta}} \big||f(x)| - |f(x')|\big| .$$

Uit $\big||f(x)| - |f(x')|\big| \leq |f(x)-f(x')|$ voor alle x,x' volgt

$\big||f(x)| - |f(x')|\big| \leq \omega_{\alpha,\beta}$ voor alle x,x' uit het segment (α, β) en dus $\bar{\omega}_{\alpha,\beta} \leq \omega_{\alpha,\beta}$. Dan is ook $\bar{d} \leq d$ voor de somverschillen van $|f(x)|$ resp. $f(x)$ t.o.v. een willekeurige verdeling. Door het criterium tweemaal toe te passen volgt de bewering.

Opmerking. Het omgekeerde van deze stelling geldt niet, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld. Zij

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x \text{ rationaal, } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{voor } x \text{ irrationaal, } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Dan is $f(x)$ niet integreerbaar over $(0,1)$, maar $|f(x)|$ wèl.

IV. Is $f(x)$ integreerbaar over (a,b) en c een constante, dan is ook $cf(x)$ integreerbaar over (a,b). En er geldt

$$(1) \qquad \int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Bewijs. Alle onder- , boven- en tussensommen worden met c vermenigvuldigd.

V. Zijn $f(x)$ en $g(x)$ integreerbaar over (a,b), dan is ook $f(x)+g(x)$ integreerbaar over (a,b). En er geldt

$$(2) \qquad \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bewijs. We merken op, dat $f(x)+g(x)$ begrensd is, als $f(x)$ en $g(x)$ dat zijn. Zij (α, β) een willekeurig subsegment van (a,b). Dan is

$$\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} \{f(x)+g(x)\} \leq \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) + \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} g(x),$$

met een dergelijke betrekking voor de onderste grenzen. Is dus $D = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ een verdeling van (a,b), dan geldt voor de schommelingen $\omega'_\nu, \omega''_\nu, \omega_\nu$ van resp. f(x), g(x), f(x)+g(x) op het ν^{de} subsegment: $\omega_\nu \leq \omega'_\nu + \omega''_\nu$. Zij nu $\varepsilon > 0$. Er bestaat dan een verdeling D van (a,b), zodat, t.o.v. D, f(x) somverschil $d' < \frac{1}{2}\varepsilon$ en g(x) somverschil $d'' < \frac{1}{2}\varepsilon$. En dan heeft f(x)+g(x) t.o.v. D somverschil $d \leq d'+d'' < \varepsilon$. Hieruit volgt dat f(x)+g(x) integreerbaar is over (a,b).

Om nu (2) te bewijzen, hoeven we nog slechts een rij tussensommen van f(x)+g(x) te beschouwen, behorende bij een convergente rij verdelingen D_n. We hebben

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{D_n} \left\{f(\xi_\nu)+g(\xi_\nu)\right\} \Delta x_\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{D_n} f(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{D_n} g(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu ,$$

waaruit (2) volgt.

VI. Zijn f(x) en g(x) integreerbaar over (a,b), dan is ook f(x)·g(x) integreerbaar over (a,b).

Bewijs. Omdat de functies begrensd zijn, bestaan er constanten A en B zodat

$$|f(x)| \leq A,\quad |g(x)| \leq B \quad \text{voor } a \leq x \leq b .$$

We schrijven nu

$$f(x)g(x)-f(x')g(x') = f(x).\left\{g(x)-g(x')\right\} + g(x').\left\{f(x)-f(x')\right\}$$

en leiden daaruit af

$$|f(x)g(x)-f(x')g(x')| \leq |f(x)|\,.\,|g(x)-g(x')| + |g(x')|\,.\,|f(x)-f(x')|$$

$$\leq A|g(x)-g(x')| + B|f(x)-f(x')| \quad \text{voor } a \leq x \leq b, \quad a \leq x' \leq b.$$

Zij nu D een verdeling $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ van (a,b) en laten $\omega'_\nu, \omega''_\nu, \omega_\nu$ de schommelingen zijn van resp. f(x), g(x), f(x)g(x) in het ν^{de} subsegment. Voor $x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu$, $x_{\nu-1} \leq x' \leq x_\nu$ geldt dan

$$|f(x)-f(x')| \leq \omega'_\nu , \qquad |g(x)-g(x')| \leq \omega''_\nu ,$$

dus

$$|f(x)g(x)-f(x')g(x')| \leq A\omega''_\nu + B\omega'_\nu .$$

Dus $\omega_\nu \leq A\omega''_\nu + B\omega'_\nu \quad (\nu = 1,2,\ldots,n)$.

Zij nu $\varepsilon > 0$. We kunnen D zó kiezen, dat $\sum \omega'_\nu \Delta x_\nu$ en $\sum \omega''_\nu \Delta x_\nu$ beiden $< \frac{\varepsilon}{A+B+1}$ zijn, omdat f(x) en g(x) integreerbaar zijn. Voor die verdeling is dan ook $\sum \omega_\nu \Delta x_\nu < \varepsilon$. Dus is f(x)g(x) integreerbaar over (a,b).

Uit de integreerbaarheid van f(x) over (a,b) kunnen we niet zonder meer besluiten tot de integreerbaarheid van $\frac{1}{f(x)}$ over (a,b). De begrensdheid van $\frac{1}{f(x)}$ is ook niet zonder meer gegarandeerd. Wèl geldt

VII. Is $f(x)$ integreerbaar over (a,b), en is er een getal $\mu > 0$ zodat $|f(x)| \geqq \mu$ voor $a \leqq x \leqq b$, dan is ook $\frac{1}{f(x)}$ integreerbaar over (a,b).

Bewijs. We hebben

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right| = \left| \frac{f(x)-f(x')}{f(x)f(x')} \right| \leqq \frac{1}{\mu^2} \left| f(x)-f(x') \right| ;$$

in begrijpelijke notatie dus $\bar{\omega}_\nu \leqq \frac{1}{\mu^2} \omega_\nu$. Hieruit volgt de bewering.

Tenslotte een stelling, waarbij niet twee functies, maar twee integratievakken gecombineerd worden.

VIII. Is $a < c < b$ en bestaan $\int_a^c f(x)dx$ en $\int_c^b f(x)dx$, dan ook $\int_a^b f(x)dx$ en er geldt

(3) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bewijs. Wat het eerste deel van de bewering betreft, zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Er is een verdeling $D_1 = (a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m=c)$ van (a,c) zodat het bijbehorende somverschil $< \frac{1}{2}\varepsilon$ is en een verdeling $D_2 = (c=x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n=b)$ van (c,b) zodat het bijbehorende somverschil $< \frac{1}{2}\varepsilon$ is. Het somverschil van $f(x)$ t.o.v. de verdeling $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ van (a,b) is dan kleiner dan ε. Dus is $f(x)$ integreerbaar over (a,b).

Noemen we de bij D_1, D_2 en D behorende ondersommen respectievelijk s_1, s_2 en s, dan is $s = s_1 + s_2$. Daar D een convergente rij verdelingen doorloopt, als D_1 en D_2 dat doen, volgt hieruit het tweede deel van de bewering.

Omgekeerd, als $f(x)$ integreerbaar is over (a,b), dan ook over elk subsegment van (a,b).

§ 25. Uitbreiding van het begrip integraal.

1. Tot nog toe hebben we $\int_a^b f(x)dx$ alleen gedefinieerd in het geval $a < b$. Het is gewenst dit symbool ook te definiëren voor het geval $a \geqq b$. Dit gaat als volgt. Allereerst definiëren we

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Vervolgens stellen we, als $a > b$,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

indien de laatste integraal bestaat.

Gevolg. Formule (3) is geldig, ongeacht de rangschikking der getallen a, b, c, wanneer maar f(x) integreerbaar is tussen de uitersten van deze getallen.

Want b.v. voor $a < b < c$ is $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$, dus

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b \text{ . Enz.}$$

2. Zij f(x) gedefinieerd en begrensd op een verzameling X, die overal dicht is in het segment (a,b). D.w.z. elk subsegment (α, β) bevat punten van X.

Is D een willekeurige verdeling van (a,b), dan hebben de begrippen onderste en bovenste grens van f(x) op de verzameling der getallen $x \in X$ die tot een bepaald subsegment (α, β) behoren, d.i. de doorsnee van X en (α, β), zin. We kunnen dus onder- en bovensommen definiëren. De in § 23 gegeven ontwikkelingen behouden hun geldigheid. Nodig en voldoende voor integreerbaarheid van f(x) (gelijkheid van j = sup s en J = inf S) is weer, dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een verdeling D van (a,b) bestaat, zodat f(x) t.o.v. D somverschil $< \varepsilon$ heeft.

Het bovenstaande is met name van belang, als f(x) gedefinieerd is in alle punten van een segment met uitzondering van een eindig aantal. Wanneer niet vermeld, is in het volgende altijd bedoeld dat f(x) gedefinieerd is in alle punten van het segment (a,b) en dat $a < b$ is.

Vraag. Welke stellingen uit § 24 blijven geldig?

§ 26. De hoofdstelling van de integraalrekening.

Stelling. Laten f(x) en F(x) twee functies zijn, gedefinieerd op een segment (a,b), die voldoen aan de volgende voorwaarden:

1^o. f(x) is begrensd op (a,b) en integreerbaar over (a,b)

2^o. F(x) is continu op het segment (a,b) en differentieerbaar op het open interval (a,b) en er geldt:

$$F'(x) = f(x) \qquad (a < x < b). \tag{1}$$

Dan is

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \ . \tag{2}$$

Bewijs. We beschouwen een convergente rij verdelingen D_n van (a,b). Zij, voor een zeker natuurlijk getal n, D_n de verdeling $(x_0, x_1, \dots, x_k)$. We schrijven

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{k} \left\{ F(x_i)-F(x_{i-1}) \right\} .$$

Op grond van 2^o mogen we op elke term rechts de middelwaardestelling van de differentiaalrekening toepassen (zie p.69). Voor $i=1,2,\dots,k$

is er dus in het open interval (x_{i-1}, x_i) een punt ξ_i te vinden met $F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Wegens (1) is $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$ en we hebben dus

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i \,.$$

Rechts staat een tussensom van $f(x)$ t.o.v. de verdeling D_n. Nu weten we op grond van 1^o dat, als we een convergente rij verdelingen van (a,b) hebben en t.o.v. elk dier verdelingen een of andere tussensom van $f(x)$ nemen, de rij van die tussensommen convergeert tot $\int_a^b f(x)dx$. Verder zijn de in het bovenstaande bij de rij D_n geconstrueerde tussensommen alle gelijk aan $F(b)-F(a)$. De conclusie is dat (2) geldt.

Bovenstaande stelling, die de hoofdstelling van de integraalrekening genoemd wordt, is een machtig hulpmiddel om allerlei integralen uit te rekenen. En de berekening gaat veel gemakkelijker dan door directe toepassing van de definitie van de bepaalde integraal (vgl. de voorbeelden aan het eind van § 23). Als we maar, b.v. op grond van een van de algemene stellingen van § 24, weten dat de betrokken functie $f(x)$ integreerbaar is over (a,b) en verder een op het segment (a,b) continue functie $F(x)$ kunnen vinden die op het open interval (a,b) de gegeven functie tot afgeleide heeft, dan zijn we klaar. Men gaat gemakkelijk na, dat de stelling, met geringe wijziging in de formulering, ook doorgaat ingeval $b \leqq a$. Dit is nog een rechtvaardiging van de in § 25, 1 getroffen definities.

Het rechterlid van (2) wordt vaak geschreven als

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{of} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b \,.$$

Voorbeelden. 1). Daar de functie $f(x) = x$ overal continu is en overal de afgeleide is van $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, hebben we

$$\int_a^b x \; dx = \tfrac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2) \quad (a,b \text{ willekeurig}).$$

2) Zij $\lambda \geqq 0$ en $0 \leqq a < b$. De functie $f(x) = x^\lambda$ is continu voor $x \geqq 0$ en voor $x > 0$ de afgeleide van $\frac{1}{\lambda+1}\,x^{\lambda+1}$ (zie p.81, (2)). We hebben dus

$$\int_a^b x^\lambda\, dx = \frac{1}{\lambda+1}\,(b^{\lambda+1}-a^{\lambda+1}) \,.$$

3) Evenzo leiden we af

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b e^x \; dx &= e^b - e^a \\ \int_a^b e^{px} \; dx &= \frac{1}{p}\,(e^{pb}-e^{pa}) \end{aligned}\right\} \quad (a,b \text{ willekeurig}).$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a = \log\frac{b}{a} \quad (a,b > 0).$$

We knopen nog enige beschouwingen vast aan de besproken stelling. Daartoe stellen we eerst de volgende definitie op.

Definitie. Is in een interval (a,b) de functie $f(x)$ de afgeleide van een functie $F(x)$, dan heet $F(x)$ een primitieve van $f(x)$ in dat interval.

Een functie $F(x)$ kan verschillende primitieven hebben. Inderdaad, is $F_1(x)$ een primitieve van $f(x)$ in (a,b), dan is $F_2(x) = F_1(x)+c$ (c een constante) dat ook. Zijn omgekeerd $F_1(x)$ en $F_2(x)$ beide primitieve van $f(x)$ in zeker interval (a,b), dan is

$F_1'(x)-F_2'(x) = f(x)-f(x) = 0$ in (a,b) en dus $F_1(x)-F_2(x)= c$ (c een constante), ofwel $F_1(x) = F_2(x)+ c$ (zie p.69, III). We kunnen het resultaat zo formuleren:

Heeft, in zeker interval, $f(x)$ een primitieve, dan heeft $f(x)$ daar een hele schaar van primitieven; deze worden verkregen door bij één primitieve een willekeurige constante op te tellen. Men vergewisse er zich van, dat dit in overeenstemming is met de uitspraak van de hoofdstelling!

We beschouwen nu een willekeurige functie $f(x)$, begrensd op een segment (a,b) en integreerbaar over (a,b). Uit § 24, VIII volgt dat $f(x)$ dan integreerbaar is over elk vak (a,x), waar $a < x \leq b$. Ook mag $x = a$ zijn (zie § 25, 1). Dus is

$$(3) \qquad I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

(de integratievariabele is hier t genoemd) een functie van x, gedefinieerd voor $a \leq x \leq b$. We noemen het de integraalfunctie, bepaald door $f(x)$ en het segment (a,b). Deze functie $I(x)$ bezit de volgende eigenschappen:

I. $I(x)$ is continu op het segment (a,b).

Bewijs. Zijn x en x_0 twee punten uit het segment (a,b), dan is

$$I(x)-I(x_0)= \int_a^x f(t)\,dt- \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt,$$

onverschillig of $x > x_0$, dan wel $x = x_0$ of $x < x_0$ is. Daar $f(x)$ begrensd is op (a,b) is er een constante K, zodat $|f(x)| \leq K$ voor $a \leq x \leq b$. Is dus (α, β) een of ander subsegment van (a,b), dan is de bovenste grens $M_{\alpha,\beta}$ van $f(x)$ op dat subsegment $\leq K$ en de onderste grens $m_{\alpha,\beta} \geq -K$. Nu is (zie § 23)

$$(4) \qquad m_{\alpha,\beta}\,(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq M_{\alpha,\beta}\,(\beta-\alpha).$$

Dus is

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leq K(\beta-\alpha),$$

en dus ook, ongeacht $x \gtrless x_0$,

$$|I(x)-I(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq K.\,|x-x_0|.$$

Hieruit vloeit onmiddellijk de continuïteit van $I(x)$ voort.

II. Is $f(x)$ continu in een punt x_0 met $a < x_0 < b$, dan is $I(x)$ differentieerbaar in x_0 en bovendien

$$\left(\frac{dI(x)}{dx}\right)_{x=x_0} = f(x_0) \ .$$

Bewijs. Voor $x \neq x_0$, $a \leq x \leq b$ is

$$\frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0)dt + \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \{f(t)-f(x_0)\} \ dt$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \{f(t)-f(x_0)\} dt.$$

Zij ε een positief getal. Daar gegeven is dat $f(x)$ continu is in x_0, bestaat er een $\delta > 0$, zodat

$$|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{als } |t-x_0| < \delta \ , a \leq t \leq b.$$

Zij nu x een getal met $a \leq x \leq b$, $|x-x_0| < \delta$. Dan is ook $|t-x_0| < \delta$, als t tot het vak (x_0,x) resp. (x,x_0) behoort. Op dezelfde wijze als hierboven leiden we dan af

$$\left| \int_{x_0}^{x} \{f(t)-f(x_0)\} \ dx \right| \leq \varepsilon |x-x_0| \ .$$

Dus

$$\left| \frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon \quad \text{als } |x-x_0| < \delta \ , \ a \leq x \leq b.$$

Dus is

$$\lim_{x \to x_0} \frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0} = f(x_0),$$

m.a.w. $I(x)$ is differentieerbaar in x_0 en het differentiaalquotiënt is gelijk aan $f(x_0)$.

We kunnen nu iets zeggen over het verband tussen integraalfunctie en primitieve. Zij $f(x)$ begrensd en integreerbaar over (a,b) en aldaar in het bezit van een primitieve $F(x)$, continu op het segment (a,b). De hoofdstelling zegt, toegepast op een segment (a,x) $(a \leq x \leq b)$:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a) \qquad (a \leq x \leq b).$$

Nu is $F(x)-F(a)$ ook een primitieve. Dus ook $I(x)$. We kunnen dus de hoofdstelling aldus formuleren:

Is $f(x)$ begrensd op (a,b), bestaat op (a,b) de integraalfunctie en is er een primitieve, dan is de integraalfunctie een primitieve (dus de integraalfunctie differentieerbaar).

In deze bewering (dus in de hoofdstelling) kan de voorwaarde dat er een primitieve bestaat niet weggelaten worden. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld. Zij f(x) de functie gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x > 0 \\ 0 \text{ als } x = 0 \\ -1 \text{ als } x < 0 \end{cases}, \text{ ook geschreven } f(x) = \operatorname{sign} x.$$

Deze functie is monotoon en dus integreerbaar, b.v. over het interval (-1,1). Zij $I(x) = \int_{-1}^{x} \operatorname{sign} t \, dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$; men vindt

$$I(x) = |x| - 1.$$

Blijkbaar is I(x) niet differentieerbaar in x = 0. Dus is I(x) geen primitieve van sign x. Bijgevolg heeft sign x geen primitieve op het interval (-1,1): anders zou I(x) immers een primitieve zijn. Wel is, in overeenstemming met eigenschap I, de functie I(x) continu.

Anderzijds kan het gebeuren dat f(x) een primitieve bezit, maar niet integreerbaar is. We gaan hier niet nader op in. We wijzen er slechts op dat men, alvorens in een bepaald geval de hoofdstelling toe te passen, de beide voorwaarden: integreerbaarheid (bestaan van een integraalfunctie) en bestaan van een primitieve moet verifiëren.

Uit eigenschap II volgt dat een continue functie niet alleen integreerbaar is, maar ook een primitieve bezit: immers de integraalfunctie is dan differentieerbaar en heeft de gegeven functie tot afgeleide. Voor zo'n functie leidt dus integreren en daarna differentiëren tot de uitgangsfunctie. Met zekere restricties kunnen we dus zeggen, dat integreren en differentiëren omgekeerde processen zijn. Men geeft een primitieve van f(x) daarom wel aan met $D^{-1}f(x)$. Ook schrijft men $\int f(x)dx$, en spreekt dan van <u>onbepaalde integraal</u>.

§ 27. Nog enige stellingen over integreerbaarheid van functies.

Uit § 24 weten we, dat een continue functie steeds integreerbaar is. Anderzijds zijn er ook niet-continue functies die integreerbaar zijn (denk aan monotone functies). We leiden in dit verband nog enige eenvoudige stellingen af.

<u>Stelling</u>. Zij f(x) begrensd op een segment (a,b) en integreerbaar over elk subsegment (α,β) met $a < \alpha < \beta < b$. Dan is f(x) integreerbaar over (a,b).

<u>Bewijs</u>. Zij ε een positief getal en zij ω de schommeling van f(x) op (a,b). Zij δ een positief getal met $\delta < \frac{b-a}{2}$, $\delta < \frac{\varepsilon}{4\omega+1}$. Dan is $a + \delta < b - \delta$. En uit het gegeven volgt dat f(x) integreerbaar is over $(a+\delta, b-\delta)$. Uit het eerste criterium volgt dus dat er een verdeling D_1 van $(a+\delta, b-\delta)$ is, zodat het bijbehorende somverschil d_1 kleiner dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ is. Beschouw nu de verdeling D van (a,b) met als deelpunten

het punt a, de deelpunten uit D_1 en het punt b. Het somverschil d van f(x) t.o.v.D is gelijk aan

$$d = \delta\,\omega_{a,a+\delta} + d_1 + \delta\,\omega_{b-\delta,b}$$

(met begrijpelijke notatie), dus

$$d \leqq 2\delta\omega + d_1 < \frac{2\omega}{4\omega+1}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Uit de willekeurigheid van ε volgt nu, i.v.m. het eerste criterium, dat f(x) integreerbaar is over (a,b).

Voorbeelden van deze stelling.

1) Is f(x) begrensd op het segment (a,b) en continu op het open interval (a,b), dan is f(x) integreerbaar over (a,b).

2) Is f(x) begrensd op het segment (a,b) en monotoon op het open interval (a,b), dan is f(x) integreerbaar over (a,b).

3) Laten f(x) en g(x) gedefinieerd zijn op het segment (a,b), zij f(x) integreerbaar over (a,b) en zij f(x) = g(x) voor $a < x < b$. Dan is ook g(x) integreerbaar over (a,b).

4) Zij f(x) gedefinieerd op het segment (a,b) en g(x) op het open interval (a,b). Zij f(x) = g(x) voor $a < x < b$ en zij f(x) integreerbaar over (a,b). Dan is ook g(x) integreerbaar over (a,b)(vgl. de beschouwingen in § 25, 2 op p.93).

In de gevallen 3) en 4) is verder $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$: corresponderende tussensommen van f(x) en g(x) zijn steeds gelijk, als men het eerste strooipunt, zeg ξ_1, $\neq a$ kiest en het laatste, zeg ξ_n, $\neq b$, en dus ook de integralen.

Door eindig vaak toepassen van de stelling over het combineren van integratievakken (zie § 24, VIII) leiden we uit 1) af:

Stelling. Is f(x) begrensd op het segment (a,b) en continu in alle punten van dat segment, afgezien van eindig veel punten $c_1, c_2, \ldots, c_k$ $(a \leqq c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leqq b)$, dan is f(x) integreerbaar over (a,b).

Evenzo volgt uit 3):

Stelling. Is f(x) integreerbaar over (a,b) en verandert men de waarde van f(x) in een eindig aantal punten, dan blijft f(x) integreerbaar over (a,b) en houdt de integraal dezelfde waarde.

Deze en andere stellingen over integreerbaarheid van functies kunnen ook worden bewezen m.b.v. het tweede integrabiliteitscriterium (af te leiden uit het eerste). We zullen het nooit gebruiken en daarom volstaan met de formulering ervan:

Is f(x) gedefinieerd en begrensd op (a,b), dan is nodig en voldoende voor de integreerbaarheid van f(x) over (a,b) dat men bij elk tweetal positieve getallen σ en δ een verdeling D van (a,b) kan vinden, zodat de totale lengte l van de subsegmenten van D, waar de schommeling van f(x) groter dan σ is, kleiner dan δ is.

§ 28. Oneigenlijke integralen.

We bespreken in deze § nog een uitbreiding van het begrip bepaalde integraal. Tot nu toe beschouwden we slechts functies die begrensd zijn en beschouwden ze ook alleen op begrensde gebieden, n.l. segmenten. We willen ons nu van deze restricties vrijmaken en krijgen dan te maken met twee gevallen: 1) f(x) is niet begrensd op (a,b)
2) integratievak (a,b) is oneindig.

Voor beide gevallen (eventueel combinatie van 1) en 2)) zullen we een uniforme behandelingsmethode geven. We zullen voortaan een functie, die begrensd is en integreerbaar over een zeker segment (a,b), eigenlijk integreerbaar over (a,b) noemen.

Definitie I. Is f(x) een gegeven functie en is er een links open interval (a,b), zodat f(x) eigenlijk integreerbaar is over elk segment (z,b) met $a < z < b$, maar niet eigenlijk integreerbaar over (a,b), dan heet a links kritiek punt (voor de integratie van f(x)). Evenzo definieert men rechts kritiek punt.

Opmerking. Is a links kritiek punt voor de integratie van f(x), dan is hetzij $a = -\infty$, hetzij a eindig, maar dan f(x) niet begrensd in een rechteromgeving van a (zie de eerste stelling in § 27).

Definitie II. Zij gegeven een links open interval (a,b) en zij f(x) eigenlijk integreerbaar over (z,b) als $a < z < b$, maar niet over (a,b). Wanneer $\lim\limits_{z \to a}{}^{+} \int_z^b f(x)\,dx$ bestaat en eindig is, dan heet f(x) oneigenlijk integreerbaar over (a,b) en schrijven we

$$(1) \quad \lim_{z \to a}{}^{+} \int_z^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Is gegeven een rechts open interval (a,b) en is f(x) eigenlijk integreerbaar over (a,z) als $a < z < b$, maar niet over (a,b), dan noemen we f(x) oneigenlijk integreerbaar over (a,b) en schrijven we

$$(2) \quad \lim_{z \to b}{}^{-} \int_a^z f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

indien de limiet in het linkerlid van (2) bestaat en eindig is.

We noemen in deze gevallen de integralen in het rechterlid van (1) resp. (2) wel convergent. Indien de genoemde limieten niet bestaan, dan heten deze integralen divergent.

Voorbeelden. I. Zij $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ voor $0 < x \leqq 1$. Voor $0 < z < 1$ is dan f(x) eigenlijk integreerbaar over (z,1), omdat f(x) continu is op het segment (z,1); we hebben

$$\int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_z^1 = 2 - 2\sqrt{z}.$$

Verder is $x = 0$ links kritiek punt voor de integratie van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, omdat deze functie niet begrensd is op $(0,1)$. Maar $f(x)$ is wèl oneigenlijk integreerbaar over (a,b) en er geldt

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2,$$

wegens $\lim\limits_{z\to 0}{}^{+} \int_z^1 = \lim\limits_{z\to 0}{}^{+} (2-2\sqrt{z}) = 2.$

Aanschouwelijk betekent dit resultaat, dat de figuur in het (x,y)-vlak, begrensd door de lijnen $y=0$, $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=0$, $x=1$, hoewel onbegrensd, toch een eindige oppervlakte heeft.

II. Zij $f(x) = x^{-2}$ voor $x \geqq 1$. Deze functie is eigenlijk integreerbaar over elk interval $(1,z)$ met $z > 1$, en ∞ is, uiteraard, rechts kritiek punt. Verder is $f(x)$ oneigenlijk integreerbaar over $(1,\infty)$ want

$$\int_1^z x^{-2}dx = -x^{-1} \Big|_1^z = 1-z^{-1},$$

dus

$$\lim_{z\to\infty} \int_1^z x^{-2}\, dx = \lim_{z\to\infty} (1-z^{-1}) = 1.$$

We hebben dus $\int_1^\infty x^{-2}\, dx = 1.$

We wensen ook oneigenlijke integreerbaarheid te definiëren, ingeval het integratievak verschillende kritieke punten bevat. We beginnen daartoe met de volgende

<u>Stelling</u>. Zij $a < b$, $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over elk interval (z,b) met $a < z < b$, en a links kritiek punt. Laat c tot het open interval (a,b) behoren. Indien minstens een der beide integralen $\int_a^c f(x)\, dx$ en $\int_a^b f(x)\, dx$ bestaat, dan ook de andere en er geldt $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$.

<u>Bewijs</u>. Voor $a < z < c$ is, wegens § 24, VIII, $\int_z^b = \int_z^c + \int_c^b$. Uit het gegeven volgt, dat minstens één van beide leden een rechterlimiet heeft in $z=a$. Dan ook het andere lid, en we hebben

$$\int_a^b = \lim_{z\to a}{}^{+} \int_z^b = \lim_{z\to a}{}^{+} \int_z^c + \int_c^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

<u>Gevolg</u>. Is $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over elk inwendig subsegment (z,u) van een interval (a,b) en oneigenlijk integreerbaar over (a,d) en over (d,b), waar d een of ander inwendig punt van (a,b) is, dan bestaat

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

voor alle c met $a < c < b$ en hangt niet van c af.

Definitie III. In het bovenstaande geval noemen we f(x) oneigenlijk integreerbaar over (a,b) en stellen we

$$(3)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b).$$

Ook nu definiëren we (§ 25,1):

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad (a < b), \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Definitie IV. Is gegeven een functie f(x) en bevat een interval (a,b) eindig veel punten $c_1, c_2, \ldots, c_k$, kritiek voor de integratie van f(x), met $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$, zodanig dat f(x) eigenlijk integreerbaar is over elk subsegment (z,u) van (a,b), dat niet een der punten $c_1, c_2, \ldots, c_k$ bevat, dan noemen we f(x) integreerbaar over (a,b) en definiëren we

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx +$$

$$(4)\qquad \ldots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx + \int_{c_k}^{b} f(x)\,dx,$$

indien alle integralen in het rechterlid van (4) bestaan.

We merken op, dat hierbij $c_1 = a$ en/of $c_k = b$ mag zijn en voorts dat een punt c_i zowel links - èn rechts kritiek punt kan zijn voor de integratie van f(x), als wel slechts één van beide (geef een voorbeeld).

De stelling in § 24, VIII (combinatie van twee integratievakken) blijft doorgaan voor de in definitie IV gedefinieerde oneigenlijke integralen (ga na). Een bijzonder geval is de op p.99 afgeleide stelling.

Zij f(x) eigenlijk integreerbaar over elk inwendig subsegment (z,u) van een gegeven interval (a,b) en zij F(x) een primitieve van f(x) en continu op het open interval (a,b). Krachtens de hoofdstelling (§ 26) is dan, als c een inwendig punt is van (a,b),

$$\int_z^c f(x)\,dx = F(c) - F(z), \quad \int_c^u f(x)\,dx = F(u) - F(c).$$

Laat nu f(x) integreerbaar zijn over (a,b) (eigenlijk dan wel oneigenlijk). Dan is

$$\lim_{z \to a}{}^{+} \int_z^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \lim_{u \to b}{}^{-} \int_c^u f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx,$$

hetzij krachtens definitie II (ingeval van oneigenlijke integreerbaarheid), hetzij krachtens eigenschap I op p.95 (ingeval van eigenlijke integreerbaarheid). Dus ook de volgende limieten bestaan en zijn eindig:

$$\lim_{z \to a}^{+} F(z), \quad \lim_{u \to b}^{-} F(u).$$

En we hebben

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{z \to a}^{+} \int_z^c f(x)\,dx + \lim_{u \to b}^{-} \int_c^u f(x)\,dx$$

$$= \lim_{x \to b}^{-} F(x) - \lim_{x \to a}^{+} F(x).$$

Het laatste lid schrijven we per definitie als $F(x) \Big|_a^b$ of $\Big[F(x)\Big]_a^b$.
We kunnen dan zeggen, dat de hoofdstelling ook doorgaat in het hier beschouwde geval. Door een combinatie van vakken te nemen en te letten op § 24, VIII en definitie IV vinden we tenslotte de volgende

<u>Uitbreiding van de hoofdstelling</u>. Zij $f(x)$ integreerbaar over (a,b), eigenlijk of oneigenlijk, en laat $F(x)$ aan de volgende voorwaarden voldoen:

1. $F(x)$ is continu op het open interval (a,b)
2. op (a,b) is $F(x)$ een primitieve van $f(x)$, d.w.z. $F'(x)=f(x)$, met uitzondering van ten hoogste eindig veel punten.

Dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big|_a^b$$

(waarbij het rechterlid bestaat en eindig is).

N.a.v. de bovenstaande beschouwing merken we nog op, dat, als $f(x)$ integreerbaar is over (a,b), de integralen $\int_a^z f(x)\,dx$ en $\int_z^b f(x)\,dx$ altijd continue functies van z op (a,b) zijn (ga na). We wijzen er verder op, dat het in de <u>eerste</u> voorwaarde <u>niet</u> toegelaten is dat er eindig veel uitzonderingspunten zijn.

§ 29. <u>Ongelijkheden voor integralen.</u>

<u>Stelling I.</u> Is $f(x)$ niet-negatief op en integreerbaar over (a,b), dan is $\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$.

<u>Bewijs.</u> Onderstellen we eerst dat $f(x)$ eigenlijk integreerbaar is over (a,b). Alle onder-, tussen- en bovensommen van $f(x)$ t.o.v. een verdeling van (a,b) zijn $\geqq 0$. Dus is de integraal $\geqq 0$. Ingeval van oneigenlijke integreerbaarheid volgt de stelling nu door een limietovergang (zie § 28, definities II en IV).

<u>Stelling II</u>. Zijn $f(x)$ en $g(x)$ integreerbaar over (a,b) en is steeds $f(x) \geqq g(x)$, dan is $\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$.

<u>Bewijs</u>. $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \geqq 0$.

<u>Gevolg</u>. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$. Als $b \geqq a$ mag zijn, dan is in elk geval $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$.

<u>Stelling III.</u> Is $f(x)$ continu en niet-negatief op (a,b) en is $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, dan bevat (a,b) een subsegment (α,β) waar $f(x) > 0$ is.

<u>Bewijs</u>. Het interval (a,b) bevat een inwendig punt c met $f(c) > 0$. Dan is ook $f(x) > 0$ in een zekere δ-omgeving van c.

<u>Stelling IV</u>. Is $f(x)$ continu en niet-negatief op (a,b) en is $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, dan is $f(x)$ identiek 0 op (a,b). Anders gezegd: is $f(x)$ continu en niet-negatief op (a,b), maar niet identiek 0, dan is $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

<u>Bewijs</u>. Duidelijk.

<u>Opmerking</u>. De stelling gaat niet langer door als men de continuïteitsvoorwaarde voor $f(x)$ laat vallen (geef een voorbeeld).

<u>Stelling V</u>. Is $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over (a,b) en stelt men $m = \inf_{a \leqq x \leqq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leqq x \leqq b} f(x)$, dan is

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a).$$

<u>Bewijs</u>. Alle onder- en bovensommen liggen tussen de opgegeven grenzen. Of (stelling II): $\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b m\,dx = m(b-a)$ en $\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$.

<u>Eerste middelwaardestelling van de integraalrekening</u>. Zij $f(x)$ integreerbaar over (a,b) en continu op (a,b). Zij $g(x)$ integreerbaar over en niet-negatief op (a,b). Dan is er een punt ξ in het segment (a,b), zodat

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi).\int_a^b g(x)\,dx.$$

<u>Bewijs</u>. Zij m de onderste en M de bovenste grens van $f(x)$ op (a,b) (in dit geval is m tevens het minimum van $f(x)$ en M het maximum). Dan is

1) $f(x) \geqq m$ en dus $f(x)\, g(x) \geqq m\, g(x)$ voor $a \leqq x \leqq b$, wegens stelling II

dus $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \geqq m \int_a^b g(x)\, dx$

2) $f(x) \leqq M$ en dus $f(x)\, g(x) \leqq M\, g(x)$ voor $a \leqq x \leqq b$, wegens stelling II

dus $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqq M \int_a^b g(x)\, dx$.

Dientengevolge is er een getal f^*, met $m \leqq f^* \leqq M$, zodat

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f^* \int_a^b g(x)\, dx.$$

Wegens de continuïteit neemt $f(x)$ de waarde f^* aan, in een zeker punt ξ uit het segment (a,b).

Opmerking. De stelling geldt blijkbaar ook als $a \geqq b$.

We illustreren nu de voorgaande stellingen aan de hand van een voorbeeld. Zij

$$I_n = \int_0^1 \{4x(1-x)\}^n\, dx \quad \text{(n een natuurlijk getal).}$$

We zullen aantonen, dat de getallen I_n positief zijn en een monotoon dalende rij vormen met limiet 0. We schrijven $f_n(x) = \{4x(1-x)\}^n$. Allereerst is $f_n(x)$ continu op het segment $(0,1)$ en > 0 voor $0 < x < 1$. Dus is $I_n > 0$ (stelling IV). Verder is $f_1(x) = 4x(1-x) \leqq 4.(\frac{x+1-x}{2})^2 = 1$ en $f_1(x)=1$ alleen als $x=\frac{1}{2}$. Dus is $f_{n+1}(x) = f_1(x)\, f_n(x) \leqq f_n(x)$ op $(0,1)$ en $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ voor $x \neq 0, \frac{1}{2}, 1$. Uit stelling IV is dan af te leiden $I_{n+1} < I_n$. Om aan te tonen $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ gaan we als volgt te werk.

Zij ε een positief getal < 1. Dan is $\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon/4}^{\frac{1}{2}+\varepsilon/4} f_n(x)\, dx < \varepsilon/2$.

Beschouwen we nu de vakken $(0, \frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4})$ en $(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}, 1)$. Daarop is

$f_1(x) = 4x(1-x) \leqq f_1(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}) = a$, waarbij a een zeker positief getal < 1 is. In de genoemde vakken is dan $f_n(x) = \{f_1(x)\}^n \leqq a^n$. Wegens $0 < a < 1$ bestaat er een rangnummer n_0, zodat $a^n < \varepsilon/2$ voor $n > n_0$. We hebben dan, onder voortdurende toepassing van de voorgaande stellingen,

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}} f_n(x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}}^1 f_n(x)\, dx < \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}} \frac{\varepsilon}{2}\, dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}}^1 \frac{\varepsilon}{2}\, dx$$

$$< \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2}\, dx = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{voor } n > n_0,$$

dus $\int_0^1 f_n(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ voor $n > n_0$.

Daaruit volgt de bewering.

We bespreken nu een andere middelwaardestelling. Daarbij komt te pas een z.g. partiële sommatie van een eindige reeks getallen (volgens Abel), die we eerst behandelen. Zij gegeven een eindige som

$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ (n een natuurlijk getal), waarbij elke term het product is van twee getallen a_i en b_i. Onderstellen we dat de rij getallen monotoon niet-stijgend is: $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$.

We voeren in de partiële sommen van de getallen b_i door te stellen

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

en stellen de kleinste van deze sommen voor door β en de grootste door β':

$$\beta = \min_{1\leqq k\leqq n} B_k \ , \ \beta' = \max_{1\leqq k\leqq n} B_k .$$

Dan geldt de volgende ongelijkheid:

$$(*) \qquad \beta(a_1-a_n) + a_nB_n \leqq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqq \beta'(a_1-a_n) + a_nB_n .$$

<u>Bewijs</u>. Uit de definitie van de partiële sommen B_k volgt onmiddellijk

$$b_i = B_i - B_{i-1} \qquad (i = 2,3,\ldots,n) .$$

Voor $i=1$ is dit niet juist, omdat B_o niet gedefinieerd is, maar hebben we $b_1=B_1$. We leiden nu af

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

$$= a_1B_1 + a_2(B_2-B_1) + \ldots + a_{n-1}(B_{n-1}-B_{n-2}) + a_n(B_n-B_{n-1})$$

$$= B_1(a_1-a_2) + B_2(a_2-a_3) + \ldots + B_{n-1}(a_{n-1}-a_{n-2}) + a_nB_n .$$

Krachtens onderstelling is $a_i-a_{i+1} \geqq 0$ voor $i=1,2,\ldots,n-1$. Dus

$$\beta(a_i-a_{i+1}) \leqq B_i(a_i-a_{i+1}) \leqq \beta'(a_i-a_{i+1}) \quad \text{voor } i=1,2,\ldots,n-1$$

en dus

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta(a_i-a_{i+1}) + a_nB_n \leqq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \beta'(a_i-a_{i+1}) + a_nB_n$$

ofwel $\beta(a_1-a_n) + a_nB_n \leqq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqq \beta'(a_1-a_n) + a_nB_n$, wat de te bewijzen betrekking is.

We formuleren en bewijzen nu de

Tweede middelwaardestelling van de integraalrekening. Laten $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd zijn op een segment (a,b) en zij $f(x)$ monotoon op (a,b) en $g(x)$ eigenlijk integreerbaar over (a,b). Dan is er een punt ξ in het segment (a,b) zodat

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx.$$

Opmerking. De integraal in het linkerlid bestaat, omdat $f(x)$ en $g(x)$ integreerbaar zijn over (a,b) en dus ook $f(x)\,g(x)$ (zie §24, I en VI).

Bewijs. We behandelen eerst het geval dat $f(x)$ monotoon niet-stijgend is. We stellen het linkerlid van (1) voor door J en beschouwen een willekeurig positief getal ε. Uit de onderstellingen volgt dat $f(x)$ en $g(x)$ begrensd zijn op (a,b). Er is dus een constante $K>0$, zodat

$$|f(x)| < K \quad \text{en} \quad |g(x)| < K \quad \text{voor } a \leq x \leq b.$$

Verder bestaat er, daar $f(x)\,g(x)$ integreerbaar is over (a,b), een verdeling $D = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ van (a,b), zodat het somverschil van $f(x)\,g(x)$ t.o.v. die verdeling $< \frac{\varepsilon}{2}$ is en tegelijkertijd het somverschil van $g(x)$ t.o.v. die verdeling $< \frac{\varepsilon}{2K}$ is.

We kiezen nu willekeurig n punten ξ_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$, zodat $x_{\nu-1} \leq \xi_\nu \leq x_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$, maar speciaal $\xi_1=a$, $\xi_n=b$. Vervolgens letten we op de functie $g(x)$. Uit stelling V volgt dat er voor elke waarde van $\nu=1,2,\ldots,n$ een getal g_ν is, zodat

$$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g(x)\,dx = g_\nu\,\Delta x_\nu\,, \qquad \inf_{x_{\nu-1}\leq x\leq x_\nu} g(x) \leq g_\nu \leq \sup_{x_{\nu-1}\leq x\leq x_\nu} g(x).$$

We beschouwen nu de beide sommen

$$T_1 = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,g(\xi_\nu)\,\Delta x_\nu, \qquad T_2 = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,g_\nu\,\Delta x_\nu.$$

Hierbij is T_1 een tussensom van $f(x)\,g(x)$ t.o.v. de verdeling D. Dus is T_1, evenals J, gelegen tussen de onder- en bovensom van $f(x)\,g(x)$ t.o.v. D. Dus is $|T_1 - J| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Verder is

$$|T_1 - T_2| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(g(\xi_\nu) - g_\nu)\,\Delta x_\nu\right|$$

$$\leq K \sum_{\nu=1}^{n} |g(\xi_\nu) - g_\nu|\,\Delta x_\nu < K.\frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

omdat de laatste som gemajoreerd wordt door het somverschil van $g(x)$ t.o.v. D. Dus is

(2) $\quad |T_2-\mathfrak{J}| \leqq |T_1-\mathfrak{J}| + |T_2-T_1| < \varepsilon$.

We passen nu het hierboven behandelde toe op de som T_2 door te nemen

$$a_\nu = f(\xi_\nu),\ b_\nu = g_\nu \,\Delta x_\nu = \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g(x)\,dx, \text{ zodat } B_\nu = \int_a^{x_\nu} g(x)\,dx.$$

Stellen we nog

$$p = \inf_{a \leqq x \leqq b} \int_a^x g(t)\,dt\ , \quad q = \sup_{a \leqq x \leqq b} \int_a^x g(t)\,dt,$$

dan is

$$p \leqq \min_{\nu=1,2,\dots,n} B_\nu \leqq \max_{\nu=1,2,\dots,n} B_\nu \leqq q.$$

We krijgen dus, door toepassing van (*),

$$p\left\{f(\xi_1) - f(\xi_n)\right\} + f(\xi_n).\int_a^b g(x)\,dx \leqq \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu)\,g_\nu\,\Delta x_\nu$$

$$\leqq q\left\{f(\xi_1) - f(\xi_n)\right\} + f(\xi_n)\,.\int_a^b g(x)\,dx,$$

ofwel

$$p\left\{f(a) - f(b)\right\} + f(b)\int_a^b g(x)\,dx \leqq T_2 \leqq q\left\{f(a)-f(b)\right\} +$$

$$+ f(b)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Wegens (2) is dus ook

$$p\left\{f(a) - f(b)\right\} + f(b)\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon < \mathfrak{J} < q\left\{f(a) - f(b)\right\} +$$

$$+ f(b)\int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon.$$

Daar $\mathfrak{J}$ niet van ε afhangt, moet dan ook gelden

$$p\left\{f(a)-f(b)\right\} + f(b)\int_a^b g(x)\,dx \leqq \mathfrak{J} \leqq q\left\{f(a)-f(b)\right\} + f(b)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Er is dus een getal ζ met $p \leqq \zeta \leqq q$, zodat

(3) $\quad \mathfrak{J} = \zeta\left\{f(a) - f(b)\right\} + f(b)\int_a^b g(x)\,dx.$

Nu is $\int_a^x g(t)\,dt$, waarvan we onderste grens p en de bovenste grens q noemden, een continue functie van x (zie eigenschap I, p.95). Er is dus een getal ξ in het segment (a,b), zodat

$$\zeta = \int_a^\xi g(x)\,dx.$$

Vullen we dit in (3) in, dan komt er

$$\mathfrak{J} = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b).\left\{\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^\xi g(x)\,dx\right\}\ ,$$

wat de gevraagde betrekking (1) geeft.

Het geval dat f(x) monotoon niet-dalend is, behandelen we door het vorige toe te passen op -f(x). Hiermee is de stelling bewezen.

Een bijzonder geval krijgen we als b.v. f(x) monotoon niet-stijgend en tevens ≥ 0 is. We mogen dan zonodig de waarde van f(x) in het punt b veranderen en f(b)=0 nemen, zonder de monotonie van f(x) te verstoren. Er is in het segment (a,b) dan dus een ξ, zodat

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx.$$

§30. Stellingen over oneigenlijke integreerbaarheid.

We beginnen met een bewijs van de volgende

Stelling. Zij f(x) eigenlijk integreerbaar over elk echt subsegment (z,b) van een links open interval (a,b) en zij $|f(x)|$ integreerbaar over (a,b). Dan is ook f(x) integreerbaar over (a,b).

Bewijs. We zullen het bewijs leveren door toepassing van het convergentiecriterium van Cauchy-Bolzano voor functies (zie §10, p.32). Zij ε een positief getal. Dan is er, wegens $\lim\limits_{z\to a}^{+} \int_z^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$, een rechtervormgeving A van a, zodat

$$\left| \int_{z_1}^b |f(x)|\, dx - \int_{z_2}^b |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon \quad \text{als } z_1, z_2 > a \text{ en } z_1, z_2 \in A.$$

Voor zulke z_1 en z_2 is dan ook

$$\left| \int_{z_1}^b f(x)\, dx - \int_{z_2}^b f(x)\, dx \right| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_{z_1}^{z_2} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon$$

(zie stelling II, gevolg op p.103). Hieruit volgt dat f(x) integreerbaar is over (a,b).

Bovenstaande stelling is natuurlijk speciaal van belang als a links kritiek punt is voor de integratie van f(x). Het kan hierbij gebeuren dat f(x) integreerbaar is over (a,b), maar $|f(x)|$ niet, zoals we later zullen zien. Dit is dus anders dan bij eigenlijke integralen: daar volgt uit de integreerbaarheid van f(x) de integreerbaarheid van $|f(x)|$ (zie stelling III, p.90). In het vervolg zullen we zeggen, dat f(x) absoluut integreerbaar is over (a,b), als $\int_a^b |f(x)|\, dx$ bestaat.

We leiden nu enige stellingen af over het bestaan van oneigenlijke integralen. Het zal daarbij steeds gaan over absolute integreerbaarheid.

Stelling I. Laten a en b eindig zijn en zij $a < b$. Zij een functie $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over (z,b) voor elke z met $a < z < b$. Laat er verder een getal p bestaan met $0 < p < 1$, zodat

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^p} \quad \text{voor } a < x \leq b,$$

waar $g(x)$ een begrensde functie is.

Dan is $f(x)$, en ook $|f(x)|$ integreerbaar over (a,b).

Bewijs. Daar $g(x)$ begrensd is, is er een constante $K > 0$, zodat

$$|f(x)| < K\,(x-a)^{-p} \qquad \text{als } a < x \leq b.$$

Verder is $|f(x)|$ integreerbaar over elk segment (z,b) met $a < z < b$. Voor elk tweetal getallen z_1 en z_2 uit het open interval (a,b) hebben we dus

$$\left| \int_{z_1}^{b} |f(x)|\, dx - \int_{z_2}^{b} |f(x)|\, dx \right| = \left| \int_{z_1}^{z_2} |f(x)|\, dx \right| < K \left| \int_{z_1}^{z_2} (x-a)^{-p}\, dx \right|.$$

De integraal in het laatste lid kunnen we berekenen. Uit formule (2), p.81 volgt (kettingregel)

$$\frac{d}{dx}(x-a)^{\lambda} = \lambda\,(x-a)^{\lambda-1} \qquad \text{als } x > a \text{ en } \lambda \geq 0.$$

Dus wordt een primitieve van $(x-a)^{-p}$ in het interval $x > a$ geleverd door $\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}$, wegens $p \neq 1$. Ook is $(x-a)^{-p}$ continu voor $x > a$. Wegens de hoofdstelling is dus

$$\int_{z_1}^{z_2} (x-a)^{-p}\, dx = \frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p} \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{1-p}\left\{ (z_2-a)^{1-p} - (z_1-a)^{1-p} \right\}.$$

Wegens $p < 1$ is $1-p > 0$, en dus $\lim\limits_{x \to a}{}^{+} (x-a)^{1-p} = 0$. Dus is er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ (en $< b-a$) te vinden, zodat

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} (x-a)^{-p}\, dx \right| < \varepsilon \qquad \text{als } a < z_1 < a+\delta, \; a < z_2 < a+\delta.$$

Dus is ook

$$\left| \int_{z_1}^{b} |f(x)|\, dx - \int_{z_2}^{b} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon$$

voor zulke z_1 en z_2. Volgens het hierboven al meer toegepaste convertentiecriterium van Cauchy-Bolzano heeft dan $\int_z^b |f(x)|\, dx$ een eindige rechterlimiet in $z=a$. Dus bestaat $\int_a^b |f(x)|\, dx$, d.w.z. $|f(x)|$ is integreerbaar over (a,b). Wegens de vorige stelling is dan ook $f(x)$ integreerbaar over (a,b).

Op analoge wijze toont men aan:

Stelling I'. Zij $a < b$, a en b eindig. Is $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over elk segment (a,z) met $a < z < b$ en kan men schrijven

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^p} \quad \text{voor } a \leq x < b,$$

waar p een positieve constante < 1 en $g(x)$ een begrensde functie is, dan is $f(x)$, en ook $|f(x)|$ integreerbaar over (a,b).

Voor het geval van oneindige integratievakken hebben we de volgende stellingen.

Stelling II. Zij b negatief en zij $f(x)$ integreerbaar over elk segment (z,b) met $z < b$. Is dan te schrijven

$$f(x) = \frac{g(x)}{(-x)^p} \quad \text{voor} \quad x < b,$$

waarbij p een constante > 1 en $g(x)$ een begrensde functie is, dan is $f(x)$, en ook $|f(x)|$ integreerbaar over $(-\infty,b)$.

Stelling II'. Zij a positief en zij $f(x)$ integreerbaar over elk segment (a,z) met $z > a$. Is dan te schrijven

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^p} \quad \text{voor} \quad x > a,$$

waarbij p een constante > 1 en $g(x)$ een begrensde functie is, dan is $f(x)$, en ook $|f(x)|$ integreerbaar over (a,∞).

Bewijs. We bewijzen alleen stelling II. Er is allereerst een constante $K > 0$, zodat

$$|f(x)| < K(-x)^{-p} \quad \text{voor } x < b.$$

We hebben dus

$$\left| \int_{z_1}^{b} |f(x)|\, dx - \int_{z_2}^{b} |f(x)|\, dx \right| = \left| \int_{z_1}^{z_2} |f(x)|\, dx \right|$$

$$< K \left| \int_{z_1}^{z_2} (-x)^{-p}\, dx \right| = \frac{K}{p} \left| (-z_2)^{1-p} - (-z_1)^{1-p} \right|.$$

Wegens $p > 1$ is $1-p < 0$ en dus $\lim_{x \to -\infty} (-x)^{1-p} = 0$. Dus is de laatste uitdrukking kleiner dan ε, waar ε een willekeurig gekozen positief getal is, als we z_1 en z_2 in een geschikte omgeving van $-\infty$ kiezen. Als boven concluderen we, dat $\int_{-\infty}^{b} |f(x)|\, dx$ en $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ bestaan.

Er zijn ook voorwaarden, waaronder we mogen besluiten tot het niet bestaan van een integraal.

Stelling III. Zij $a < b$, a en b eindig. Zij een functie $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over elk segment (z,b) met $a < z < b$. Laten er constanten $\mu > 0$ en $p \geq 1$ bestaan, zodat geldt:

hetzij $f(x) \geq \frac{\mu}{(x-a)^p}$ voor alle x met $a < x \leq b$

hetzij $f(x) \leq \frac{-\mu}{(x-a)^p}$ voor alle x met $a < x \leq b$.

Dan is f(x) niet integreerbaar over (a,b).

Stelling IV. Zij $a > 0$ en $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over elk segment (a,z) met $z > a$. Laten er positieve constanten μ en p bestaan, met $p \leq 1$, zodat

hetzij $f(x) \geq \frac{\mu}{x^p}$ voor alle $x \geq a$

hetzij $f(x) \leq \frac{-\mu}{x^p}$ voor alle $x \geq a$.

Dan is f(x) niet integreerbaar over (a,∞).

Bewijs van stelling III. Beschouwen we het geval dat f(x) positief is (het andere geval wordt analoog behandeld).

Als $p > 1$, dan hebben we, voor $a < z \leq b$, onder toepassing van stelling II, p.103,

$$\int_z^b f(x)\, dx \geq \mu \int_z^b (x-a)^{-p}\, dx$$

$$= \frac{\mu}{1-p} (x-a)^{1-p} \Big|_z^b = \frac{\mu}{p-1} \left\{ (z-a)^{1-p} - (b-a)^{1-p} \right\}.$$

Wegens $p > 1$ is $1-p < 0$ en dus $\lim\limits_{z \to a}^{+} (z-a)^{1-p} = \infty$. De laatste uitdrukking is dus niet begrensd, en dus heeft $\int_z^b f(x)\, dx$ geen eindige rechterlimiet in $z=a$. Voor $p=1$ vinden we

$$\int_z^b f(x)\, dx \geq \mu \int_z^b (x-a)^{-1}\, dx = \mu \log(x-a) \Big|_z^b = \mu \log \frac{b-a}{z-a},$$

zodat ook nu $\int_z^b f(x)\, dx$ geen eindige rechterlimiet heeft in $z=a$.

Hiermede is de stelling bewezen.

Bewijs van stelling IV. We behandelen het geval dat f(x) positief is. Is $0 < p < 1$, dan vinden we

$$\int_a^z f(x)\, dx \geq \mu \int_a^z x^{-p}\, dx = \mu (z^{1-p} - a^{1-p}) \qquad (z > a),$$

terwijl we voor $p=1$ krijgen

$$\int_a^z f(x)\, dx \geq \mu \int_a^z x^{-1}\, dx = \mu \log \frac{z}{a} \qquad (z > a),$$

Hieruit leidt men af dat $\int_a^\infty f(x)\, dx$ niet bestaat.

Analoge stellingen heeft men in het geval van een rechts kritiek eindig punt b en van een kritiek punt $-\infty$.

We merken op, dat in de stellingen II, II', IV het integratievak het punt 0 niet bevat. In verband met de stelling op p.100 over het combineren van integratievakken is dit geen beperking. In het algemeen moet men bij het onderzoek naar het bestaan van een of andere integraal het integratievak in subintervallen verdelen, die elk slechts één kritiek punt bevatten, en wel als een van de uiteinden.

Voorbeelden. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ bestaat, want 1 is het enige kritieke punt en de integrand is continu op het interval $(0,1)$ en is te schrijven als $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{g(x)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, waar $g(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$ begrensd is op $(0,1)$.

Evenzo bestaat $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; nu is -1 het enige kritieke punt en kunnen we schrijven

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{g(x)}{(x-(-1))^{\frac{1}{2}}}\text{, waar } g(x) \text{ op } (-1,0) \text{ begrensd is.}$$

Dientengevolge bestaat ook $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) $\int_0^1 \log x \, dx$ bestaat, want 0 is het enige kritieke punt en $\log x$ is continu voor $x > 0$, terwijl $\log x = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}}$ voor $x > 0$, waar $g(x) = \sqrt{x} \log x$ begrensd is op $(0,1)$, o.a. wegens $\lim\limits_{x \to 0}^{+} \sqrt{x} \log x = 0$ (zie formule (10') op p.77).

3) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{\log x}}$ bestaat. Hier is 1 het enige kritieke punt , de integrand continu op het links open interval $(1,2)$ en te schrijven als $\frac{g(x)}{(x-1)^{1/3}}$, waar $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{\log x}}$ begrensd is op $(1,2)$, omdat $\frac{x-1}{\log x}$ daar begrensd en positief is (ga na).

Opg.95. De functie $J(x)$, bepaald door $J(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, is continu, differentieerbaar en monotoon stijgend op het interval $(-\infty, \infty)$. Verder bestaan $J(\infty)$ en $J(-\infty)$.

Opg.96. Laten gegeven zijn twee rijen van reële getallen $a_1, a_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$ en stellen we $B_m = \sum_{i=1}^{m} b_i$ $(m=1,2,\ldots)$. Voor elk tweetal natuurlijke getallen n en m, met $n > m$, is dan

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} B_i(a_i - a_{i+1}) + B_n a_n - B_m a_m .$$

Leid hieruit schattingen af voor $\sum_{i=m}^{n} a_i\, b_i$, als nog gegeven is dat de rij getallen a_i monotoon niet-dalend is.

Opg.97. Zij $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over het segment $(0,2)$. Laat zien dat $K(x)$, gedefinieerd door

$$K(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt,$$

continu is op het segment $(0,1)$.

Opg.98. Zij $f(x)$ integreerbaar over $(0,\infty)$, met ∞ als enig kritiek punt. Dan is ook $e^{-\alpha x} f(x)$ integreerbaar over $(0,\infty)$, als $\alpha \geq 0$, en er geldt

$$\lim_{\alpha \to 0}^{+} \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Opg.99. Is $f(x)$ eigenlijk integreerbaar over $(0,1)$, dan is

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx = \int_0^1 (1-x)\, f(x)\,dx.$$

Opg.100. Bereken $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$, $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Opg.101. Bewijs dat de volgende integralen bestaan.

$$\int_0^1 x^{-\alpha} \log x\,dx \quad (0<\alpha<1)\ ,\quad \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx,$$

$$\int_0^\infty \left(1+\frac{1}{x^{3/2}}\right)\left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x}\ .$$

§31. Enige toepassingen van het integraalbegrip.

1. Het meten van oppervlakken.

Is $f(x)$ een positieve functie en K de figuur begrensd door de x-as, twee ordinaten $x=a$ en $x=b$ $(b>a)$ en de lijn die de grafische voorstelling is van de functie $y=f(x)$, dan zullen we aan K als oppervlakte toekennen het getal $\mathcal{J}$, bepaald door $\mathcal{J} = \int_a^b f(x)\,dx$, in de veronderstelling, dat de integraal bestaat. Het is hierbij niet uitgesloten dat $f(x)$ onbegrensd is of dat $a=-\infty$ of $b=\infty$ is. De gekozen oppervlaktedefinitie behoeft geen nadere toelichting: in § 23 schetsten we reeds hoe de poging de oppervlakte van de figuur K te bepalen als eventuële limiet van de oppervlakten van zekere in - of omgeschreven veelhoeken ons leidt tot de opstelling van het integraalbegrip van Riemann.

Bestaat de beschouwde integraal niet, dan kennen we aan de figuur K geen oppervlakte toe.

De hier beschouwde figuur K is van een heel speciale gedaante. Immers K is begrensd door drie segmenten van rechte lijnen, die opvolgend loodrecht op elkaar staan, en een willekeurige lijn. Hebben we een willekeurige figuur in het platte vlak, dan kunnen we trachten die te verdelen in een eindig aantal figuren van de beschreven speciale gedaante en op deze wijze de oppervlakte te bepalen. Het is op dit ogenblik niet onze taak, na te gaan onder welke omstandigheden dit mogelijk is. We geven alleen een voorbeeld. De oppervlakte van de eenheidscirkel is 2 x de oppervlakte van de halfcirkel, begrensd door de x-as en de lijn $y= +\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$, en dus gelijk aan $2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$. Op de berekening van deze integraal komen we nog terug.

Is $f(x)$ integreerbaar over (a,b) en negatief op (a,b), dan valt de integraal $\int_a^b f(x)\, dx$ negatief uit, en is het tegengestelde daarvan te beschouwen als de oppervlakte van de als boven geconstrueerde figuur K. Het is nu ook duidelijk, wat de meetkundige betekenis is van $\int_a^b f(x)\, dx$, als $f(x)$ zowel positieve als negatieve waarden op (a,b) aanneemt.

2. Het meten van booglengten.

Zij gegeven een op een segment (a,b) continue functie $y=f(x)$. In het platte vlak stelt deze functie een zekere figuur voor, die op grond van de continuïteit van $f(x)$ de naam "lijn" verdient. We vragen ons af of het mogelijk is op exacte grondslag een lengte van deze lijn te definiëren en, indien dit niet algemeen mogelijk is, voorwaarden aan te geven waaronder het wèl kan.

We stellen het probleem nog wat algemener. Laten gegeven zijn twee functies $x= \varphi(t)$ en $y= \psi(t)$, gedefinieerd en continu op een segment $a \leq t \leq b$. Bij elk punt t uit dit segment beschouwen we het punt met rechthoekige coördinaten $(x,y) = (\varphi(t), \psi(t))$. Doorloopt t het segment (a,b), dan doorloopt dit punt een zeker lijnstuk. We trachten nu op de volgende wijze tot een definitie van de lengte van dit lijnstuk te geraken.

Zij $D=(t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n)$, met $t_0=a$ en $t_n=b$, een willekeurige verdeling van het segment (a,b). Bij t_i behoort een punt $P_i=(x_i,y_i)= =(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ van het beschouwde lijnstuk $(i=0,1,2,\ldots,n)$; P_0 is het beginpunt en P_n het eindpunt. We verbinden deze punten opvolgend door rechte lijnstukken en krijgen dan een gebroken lijn, met hoekpunten op het gegeven lijnstuk, beginpunt P_0 en eindpunt P_n, waarvan de Euclidische lengte gegeven wordt door

$$l=l(D)= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2 + (y_i-y_{i-1})^2}$$

(vgl. de metriek in een 2-dimensionale Euclidische ruimte, § 16). Het ligt nu voor de hand af te spreken: vormen de bij alle mogelijke verdelingen D van (a,b) behorende lengten $l(D)$ een begrensde verzameling getallen, dan heet de bovenste grens van die getallen $l(D)$ de lengte van het gegeven lijnstuk.

Het blijkt mogelijk om onder betrekkelijk ruime voorwaarden voor de functies $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ een integraalvoorstelling voor die bovenste grens af te leiden. We zullen hier onderstellen dat $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ differentieerbaar zijn op het segment (a,b) en dat de afgeleiden $\varphi'(t)$ en $\psi'(t)$ continu zijn op dat segment (we zeggen wel: $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ zijn continu differentieerbaar op (a,b)).

Beschouwen we een verdeling $D=(t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n)$ van (a,b). Op grond van de middelwaardestelling van de differentiaalrekening (zie § 20, p.69) hebben we

$$\begin{cases} x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\Delta t_i\ \varphi'(\xi_i) \\ y_i-y_{i-1}=\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=\Delta t_i\ \psi'(\eta_i) \end{cases}$$

voor geschikte ξ_i en η_i met $t_{i-1}<\xi_i<t_i$, $t_{i-1}<\eta_i<t_i\ (i=1,2,\ldots,n)$. Dan is

$$l(D) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \sqrt{\varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\eta_i)^2}\ .$$

Nu zijn de functies $\varphi'(t)$ en $\psi'(t)$ begrensd op het segment (a,b). Er is dus allereerst een constante $K>0$, zodat $|\varphi'(t)|<K$ en $|\psi'(t)|<K$ voor $a\leqq t\leqq b$. Verder is er, als we $\eta>0$ willekeurig kiezen, een positief getal δ te vinden, zodat $|\psi'(t)-\psi'(t')|<\eta$ als $a\leqq t\leqq b$, $a\leqq t'\leqq b$, $|t-t'|<\delta$. Dus is $|\psi'(\xi_i)-\psi'(\eta_i)|<\eta$ $(i=1,2,\ldots,n)$, als maar de wijdte Δ van de verdeling D kleiner dan δ is.

Hebben we in het algemeen twee getallen c en d met

$$|c-d|<\eta\ ,\ |c|<K,\ |d|<K,$$

waar η en K gegeven positieve getallen zijn, dan is, voor willekeurige a,

$$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+d^2}\right| < \sqrt{\eta}\cdot\max(1,2K).$$

Want dit is kennelijk juist indien zowel $\sqrt{a^2+c^2}<\sqrt{\eta}$ als $\sqrt{a^2+d^2}<\sqrt{\eta}$, terwijl we in het geval dat minstens één van beide wortelvormen $\geqq\sqrt{\eta}$ is kunnen herleiden

$$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+d^2}\right| = \left|\frac{c^2-d^2}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+d^2}}\right| \leqq \frac{|c^2-d^2|}{\sqrt{\eta}} < 2K\sqrt{\eta}\ .$$

Stellen we $\max(1,2K)=K_1$, dan is dus

$$\left|\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\eta_i)^2}-\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\xi_i)^2}\right| < K_1\sqrt{\eta}\ ,$$

voor $i=1,2,\ldots,n$, als $\Delta<\delta$. Dus

$$\left|l(D)-\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i\sqrt{\varphi'(\xi_i)^2+\psi'(\xi_i)^2}\right| < K_1\sqrt{\eta}\ .\ \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i = K_1(b-a)\sqrt{\eta}$$

als $\Delta<\delta$. De som in het linkerlid is een of andere tussensom van de functie $\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ t.o.v. de verdeling D van (a,b). Uit de gegevens volgt dat deze functie continu op het segment (a,b) en dus integreerbaar over (a,b) is. Zij nu ε een positief getal. We kunnen $\eta > 0$ kiezen, zodat $K_1(b-a)\sqrt{\eta} < \frac{\varepsilon}{2}$, en vervolgens een positief getal $\delta_1 \leq \delta$, zodat het somverschil van $\sqrt{\varphi'(t)^2+ \psi'(t)^2}$ t.o.v. een verdeling D van (a,b) kleiner dan $\frac{\varepsilon}{2}$ is, als maar de wijdte van D kleiner dan δ_1 is. Op de gebruikelijke manier volgt nu

$$\left| l(D) - \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2+ \psi'(t)^2}\, dt \right| < \varepsilon \ ,$$

als de wijdte van D kleiner dan δ_1 is. Hieruit volgt:

$$\lim_{k\to\infty} l(D_k) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2+ \psi'(t)^2}\, dt,$$

als D_k een convergente rij verdelingen van (a,b) doorloopt. We kunnen hierbij voor de D_k verdelingen nemen, die stuk voor stuk een verfijning zijn van een willekeurig gegeven verdeling D. Nu volgt uit de eigenschappen van de metriek in E_2, dat $l(D) \leq l(D_k)$, als D_k een verfijning is van D. Dus is ook $l(D) \leq \int_a^b \sqrt{\{\varphi'(t)^2+ \psi'(t)^2\}}dt$, wat de verdeling D van (a,b) ook zij. In verband met de zojuist gevonden relatie hebben we dan

(1) lengte gegeven lijn$= \sup\limits_D l(D) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2+ \psi'(t)^2}\, dt.$

Als $\varphi(t)=t$, dan is $\psi(t)=\psi(x)$ en verkeren we in het aanvankelijk beschouwde geval. De lengte wordt dan gegeven door

$$\int_a^b \sqrt{1+ \psi'(x)^2}\, dx.$$

Het kan gebeuren dat de functies $\varphi'(t)$ en $\psi'(t)$ slechts continu zijn op het open interval (a,b), maar dat $\sqrt{\varphi'(t)^2+ \psi'(t)^2}$ b.v. oneigenlijk integreerbaar is over (a,b). Men ga na, dat, bij de boven gegeven definitie van lengte als een zekere bovenste grens, formule (1) zijn geldigheid behoudt.

Op analoge wijze behandelt men, meer algemener, de lengte van een lijn in E_n. Laten gegeven zijn n functies $x_1= \varphi_1(t)$, $x_2= \varphi_2(t),\ldots,x_n= \varphi_n(t)$, van één reële veranderlijke, gedefinieerd en continu differentieerbaar op een segment (a,b). Dan wordt de lengte van de door dit stelsel functies voorgestelde lijn in E_n gegeven door

$$l= \int_a^b \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2 +\ldots+ \varphi'_n(t)^2}\, dt.$$

3. Gemiddelde waarde van een grootheid.

Het arithmetisch gemiddelde $\overline{b}$ van n getallen $b_1,b_2,\ldots,b_n$ (n een natuurlijk getal) is gedefinieerd door

$$\bar{b} = \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}.$$

Van een functie f(x), afhangende van een parameter x die varieert in een segment (a,b) (b.v. temperatuur als functie van de tijd in verloop van een etmaal), kunnen we onder zekere voorwaarden ook een gemiddelde definiëren. We maken daartoe het arithmetisch gemiddelde op van n "eerlijk" gekozen functiewaarden en voeren, indien mogelijk, een limietovergang uit. Verdelen we het segment (a,b) in n gelijke delen en beschouwen we de uitdrukking

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+\frac{i}{n}(b-a)).$$

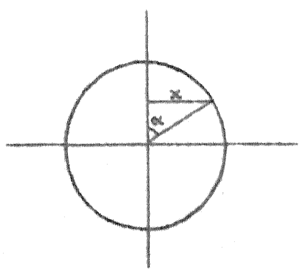
Noemen we $\frac{b-a}{n}$ = lengte van een subsegment Δ, dan staat er
$\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta)\Delta$, wat een tussensom is van f(x) t.o.v. de verdeling van (a,b) in gelijke delen. We weten dat, indien f(x) begrensd en integreerbaar is over (a,b), deze uitdrukking nadert tot de limiet
$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ voor $n\to\infty$. Deze laatste uitdrukking heet dan ook per definitie het gemiddelde van f(x) over (a,b), indien f(x) begrensd en integreerbaar is over (a,b).

4. Van een rechtlijnige beweging worden de snelheid en de versnelling wiskundig gedefinieerd als de eerste resp. tweede afgeleide van de functie s(t) die de afgelegde weg aangeeft als functie van de tijd: $v(t) = \frac{d\,s(t)}{dt}$, $a(t) = \frac{d^2\,s(t)}{dt}$. We veronderstellen nu dat van een gegeven beweging snelheid en versnelling in de genoemde zin bestaan. Dan is s(t) een primitieve van v(t) en verder v(t) differentieerbaar, dus continu. Volgens de hoofdstelling mogen we dan besluiten dat de afgelegde weg tussen twee tijdstippen a en b gegeven wordt door de formule

$$s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\,dt.$$

§32. Goniometrische functies.

We beginnen met een meetkundige inleiding. We tekenen de eenheidscirkel, gegeven door de vergelijking $x^2+y^2=1$ en beschouwen de positieve y-as en een willekeurige halfrechte vanuit de oorsprong, die boven de x-as verloopt (links of rechts van de y-as). Laat (x,y) het snijpunt van die halfrechte met de eenheidscirkel zijn en α de hoek die de halfrechte met de positieve y-as maakt. Dan is, omdat de straal van de cirkel 1 is, $\sin\alpha = x$.



Het gaat er nu allereerst om, langs analytische weg tot een definitie van de functie $x=\sin\alpha$ te komen. Nu is het merkwaardige dat de bepaling van de waarde van x gemakkelijk is (abscis van een punt), maar dat de bepaling van α enige moeite kost. Het ligt dus voor de hand eerst α als functie van x te bestuderen, d.w.z. de inverse functie $\alpha = \text{arc} \sin x$ te beschouwen. Voor α , als maat van de beschouwde hoek, nemen we de lengte van de hierbij als middelpuntshoek behorende cirkelboog op de eenheidscirkel.

Is (t,y) een punt van die cirkelboog, dan is $t^2+y^2=1$ en $y>0$, dus $y=\sqrt{1-t^2}$ ($0 \leq t \leq x$ resp. $x \leq t \leq 0$). De lengte van die cirkelboog berekenen we volgens het in §30 gegeven voorschrift. We hebben

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} .$$

De laatste uitdrukking is continu op $(0,x)$, als $|x| < 1$. Dus vinden we

(1) $$\alpha = \text{arc} \sin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} .$$

Voor $x<0$ zijn x en α beide negatief. Verder is $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ oneigenlijk integreerbaar over $(-1,1)$, met -1 en 1 als kritieke punten (ga na): de integralen $\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ en $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ zijn convergent. Volgens de opmerking aan het eind van §30 geeft het rechterlid van (1) dus ook de booglengte als $x=1$ of -1.

We definiëren nu

(2) $$\text{arc} \sin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (|x| \leq 1),$$

(3) $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc} \sin 1 = \frac{\pi}{2} .$$

(kwart omtrek van de eenheidscirkel!). We werken nu verder met de formules (2) en (3) zonder van het voorgaande gebruik te maken.

Voor $0 \leq t < 1$ is $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(-t)^2}}$, dus is, voor $0 \leq x < 1$, $\text{arc} \sin(-x) = -\text{arc} \sin x$, zoals men inziet door terug te grijpen op de definitie van het integraalbegrip. Door limietovergang volgt $\text{arc} \sin(-1) = -\text{arc} \sin 1$. Dus is $\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$.

De functie $y=\text{arc} \sin x$ is als integraalfunctie continu op het segment $(-1,1)$. Verder is $y=\text{arc} \sin x$ monotoon stijgend op dit segment, daar de integrand continu en positief is voor $-1<t<1$ (vgl. opg. 95). Dus mogen we deze functie inverteren. De inverse, die we voorstellen door $x=\sin y$, is gedefinieerd, continu en monotoon stijgend op het segment $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, terwijl de waarderverzameling het segment $(-1,1)$ is.

We merken nog op dat bij de hier gegeven definities de hoekeenheid de <u>radiaal</u> genoemd wordt. Zo is de grootte van de gestrekte hoek, d.i. de lengte van de halve omtrek van de eenheidscirkel, gelijk aan π.

De sinusfunctie kan op voor de hand liggende wijze worden voortgezet buiten het vak $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. We definiëren

$$\left.\begin{array}{ll}(4) & \sin(\alpha+2k\pi) = \sin\alpha \\ (5) & \sin(\alpha+(2k+1)\pi) = -\sin\alpha\end{array}\right\} \quad (k \text{ geheel}, -\tfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{2}).$$

De waarde van $\sin y$ voor $y = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (welk getal we kunnen schrijven als $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ en als $-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$) wordt hierbij ondubbelzinnig vastgelegd. In het algemeen is door de omkering van (2) en door (4) en (5) de waarde van $\sin\alpha$ vastgelegd voor elk reëel getal α. Speciale waarden zijn (k geheel):

(6) $\sin k\pi = 0$

(7) $\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = 1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1$.

Men gaat gemakkelijk na dat $x = \sin y$ overal continu is. Deze functie is in opvolgende intervallen ter lengte π beurtelings monotoon stijgend van -1 tot $+1$ en monotoon dalend van 1 tot -1, zoals volgt uit de monotonie op $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ en de definities (4) en (5).

We willen nu de afgeleide van de functie $x = \sin y$ bepalen. Uit (2) en een eigenschap van de integraalfunctie (zie p.96) volgt:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{als } -1 < x < 1.$$

Voor de inverse functie geldt dan (zie p.67, stelling):

$$\frac{d \sin y}{dy} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 y} \quad \text{als } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Uit de definitie van $\sin y$ voor $|y| > \frac{\pi}{2}$ volgt dan dat $x = \sin y$ differentieerbaar is als $y \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k geheel). Zij k een geheel getal en $y_0 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Dan is $\lim\limits_{y\to y_0} \sin y = \pm 1$, en dus

$\lim\limits_{y\to y_0} \frac{d \sin y}{dy} = 0$. Passen we de eerste regel van l'Hôpital toe op het quotiënt $\dfrac{\sin y - \sin y_0}{y - y_0}$ t.a.v. het punt y_0, dan vinden we

$$\left(\frac{d \sin y}{dy}\right)_{y=y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{\sin y - \sin y_0}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{d \sin y}{dy} = 0.$$

Per definitie stellen we nu

(8) $\dfrac{d \sin y}{dy} = \cos y$ (y willekeurig reëel).

Dan is $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$ als er een gehele k is met $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ en $\cos y = -\sqrt{1-\sin^2 y}$ als er een geheel getak k is met $-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi \leq y \leq \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$. Steeds is dus

(9) $\sin^2 y + \cos^2 y = 1.$

Verder hebben we de volgende speciale waarden (k geheel):

(10) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0$

(11) $\cos 2k\pi = 1$, $\cos (2k+1)\pi = -1.$

De functie $x=\cos y$ kan ook gedifferentieerd worden. Voor $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < y < \frac{\pi}{2}+2k\pi$ vinden we

$$\frac{d \cos y}{dy} = \frac{d}{dy}\sqrt{1-\sin^2 y} = \frac{-\sin y \cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = -\sin y\ ;$$

voor $-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi < y < \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$ krijgen we

$$\frac{d \cos y}{dy} = -\frac{d}{dy}\sqrt{1-\sin^2 y} = \frac{+\sin y \cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = -\sin y.$$

Als boven tonen we aan, dat dit resultaat ook geldt als $y = \pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Dus geldt algemeen:

(12) $\frac{d \cos y}{dy} = -\sin y.$

We beschouwen nu de uitdrukking $\sin x \cos y + \cos x \sin y$. We zullen aantonen, dat deze uitdrukking alleen afhangt van de som der variabelen $x+y$. Laat c een willekeurige reële constante zijn en laat x en y zo variëren, dat $x+y=c$ is. Dan is

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin x \cos (c-x) + \cos x \sin (c-x)$$

een functie van x; door differentiëren vinden we, onder toepassing van bekende regels (zie p.66, (3') en p.67,(6), met $\varphi(x)=c-x$):

$$\frac{d}{dx}\left\{\sin x \cos (c-x) + \cos x \sin (c-x)\right\}$$

$$= \cos x \cos (c-x) + \sin x \sin (c-x) - \sin x \sin (c-x) - \cos x \cos (c-x)$$

$$= 0.$$

De beschouwde uitdrukking is dus constant (zie p.69, III). Nemen we $x=c$, $y=0$, dan vinden we dat die constante gelijk is aan $\sin c$. Dus is

(13) $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin (x+y).$

Deze formule geldt voor alle x en y, omdat c willekeurig was. Het is het additietheorema van de sinusfunctie.

Uit (13) kunnen tal van elementaire goniometrische formules worden afgeleid. We vinden b.v.

(14) $\sin(x+\pi) = -\sin x, \quad \cos(x+\pi) = -\cos x$

(15) $\sin(x+2\pi) = \sin x, \cos(x+2\pi) = \cos x$

(16) $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$, dus $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$

(17) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(18) $\sin(\pi-x) = \sin x, \cos(\pi-x) = -\cos x$

(19) $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$

(20) $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$.

Uit (15) volgt dat sin x en cos x periodieke functies zijn, met periode 2π (zie ook (4) en (5)). Er is geen kleinere periode omdat b.v. sin x uitsluitend positieve waarden heeft in het interval $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ en uitsluitend negatieve waarden in het interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. Uit (20) volgt dat de grafiek van $y=\cos x$ ontstaat uit die van $y=\sin x$ door opschuiven in de richting van de x-as over een afstand $-\frac{\pi}{2}$.

We definiëren nu $\operatorname{tg}\alpha$ en $\cot\alpha$ door de formules

(21) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Deze definities gaan niet op voor die waarden van α, waarvoor de noemer in de betreffende formule de waarde 0 heeft. We weten al dat $\sin\alpha = 0$ voor $\alpha = k\pi$ (k geheel). Uit de hierboven genoemde monotonie van sin x op intervallen volgt dat dit ook de enige waarden van α zijn waarvoor $\sin\alpha = 0$. Evenzo is $\cos\alpha = 0$ dan en slechts dan als $\alpha = \frac{\pi}{2}+k\pi$. Dus is $\operatorname{tg}\alpha$ slechts gedefinieerd als $\alpha \neq (k+\frac{1}{2})\pi$ en $\cot\alpha$ slechts als $\alpha \neq k\pi$.

Uit (14) en (19) volgt

(22) $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \cot(x+\pi) = \cot x$

(23) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \cot(-x) = -\cot x$;

verder hebben we

(24) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x) = \cot x, \cot(\frac{\pi}{2}-x) = \operatorname{tg} x$.

We bepalen nu de afgeleiden van $y=\operatorname{tg} x$ en $y=\cot x$. Gebruik makende van de regel voor het differentiëren van een quotient (p.66, formule (5')) vinden we

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

(25) $$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (x \neq (k+\tfrac{1}{2})\pi)$$

en $$\frac{d \cot x}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

(26) $\dfrac{d \cot x}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi).$

Uit (14) en (21) volgt dat tg x en cot x periodiek zijn, met periode π. Daar deze functies op intervallen ter lengte $\frac{\pi}{2}$ beurtelings positief en negatief zijn, is er geen kleinere periode. Uit (25) volgt dat tg x monotoon stijgend is op elk interval $((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi)$; wegens $\lim\limits_{x\to(k+\frac{1}{2})\pi}^{+} \operatorname{tg} x = -\infty$ en $\lim\limits_{x\to(k+\frac{1}{2})\pi}^{-} \operatorname{tg} x = \infty$ (let op (7), (10) en het teken van cos x rechts van $x=(k+\frac{1}{2})\pi$), neemt tg x dus in elk van die vakken monotoon toe van $-\infty$ tot $+\infty$. Evenzo neemt cot x in elk vak $(k\pi, (k+1)\pi)$ monotoon af van $+\infty$ tot $-\infty$. Wegens (6), (7), (10) en (11) is hierbij $\operatorname{tg} k\pi = 0$, $\cot (k+\frac{1}{2})\pi = 0$.

De waarden van $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{3}$ worden op de bekende wijze uit (9), (13), (16), (17) afgeleid. Zo heeft men $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$, dus $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$; $\sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$, dus $2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ en $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1-\sin^2 \frac{\pi}{6}}$. Dus

$$(27) \quad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(28) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \\ \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \cot \frac{\pi}{4} = 1, \quad \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \end{cases}$$

Men kan nu ook de waarden van de beschouwde functies in de punten $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$ bepalen, op grond van de formules (14), (20), (23) en (24).

We kunnen ook verschillende integralen van goniometrische functies berekenen. We hebben b.v.

$$\int_a^b \sin x \, dx = -\cos x \Big/_a^b = \cos a - \cos b,$$

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin x \Big/_a^b = \sin b - \sin a,$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big/_a^b = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a,$$

mits het segment (a,b) géén der punten $(k+\frac{1}{2})\pi$ bevat,

$$\int_a^b \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \Big/_a^b = \cot a - \cot b,$$

mits het segment (a,b) géén der punten $k\pi$ bevat.

Al deze resultaten worden onmiddellijk verkregen door toepassing van de hoofdstelling van de integraalrekening.

Tenslotte richten we onze aandacht op de inversen van de vier ingevoerde functies. We beginnen daartoe met de stelling op p.41 in herinnering te brengen, die handelt over het inverteren van een functie:

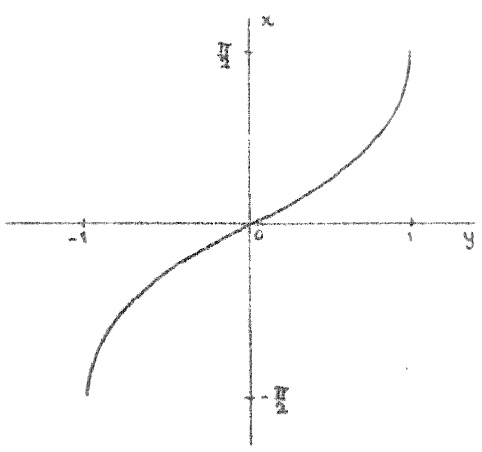
Is $f(x)$ gedefinieerd, monotoon stijgend (of dalend) en continu op een interval (a,b) (al of niet gesloten), dan geldt:

1. de waardenverzameling van de functie is een interval (α,β)
2. de inverse functie van $f(x)$ is gedefinieerd, monotoon stijgend (resp. dalend)en continu op het interval (α,β).

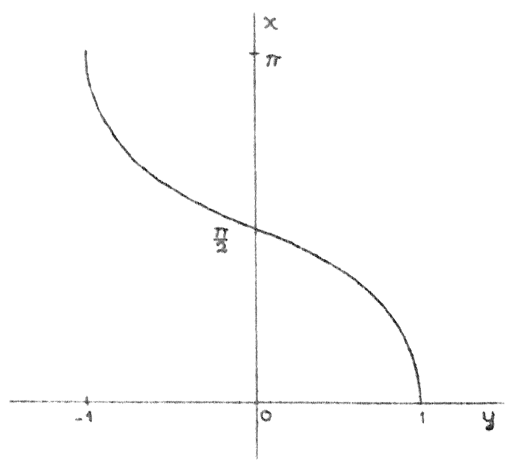
De vier beschouwde functies zijn op intervallen monotoon. We mogen dus bovengenoemde stelling toepassen, onder de voorwaarde dat x alleen een interval doorloopt, waar de betreffende functie monotoon is. Voor zo'n interval kunnen in principe verschillende keuzen worden gedaan. We doen bij elk van de vier functies een zeer bepaalde keuze voor dit interval (gerechtvaardigd door de in het voorgaande bewezen eigenschappen). Deze keuze blijkt uit het volgende lijstje, waar tevens de notatie voor de inverse functie in aangegeven is, benevens het interval waar die inverse functie gedefinieerd is.

functie	interval	inverse functie	interval
$y= \sin x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$x = \text{arc sin } y$	$-1 \leq y \leq 1$
$y= \cos x$	$0 \leq x \leq \pi$	$x = \text{arc cos } y$	$-1 \leq y \leq 1$
$y= \text{tg } x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \text{arc tg } y$	$-\infty < y < \infty$
$y= \cot x$	$0 < x < \pi$	$x = \text{arc cot } y$	$-\infty < y < \infty$

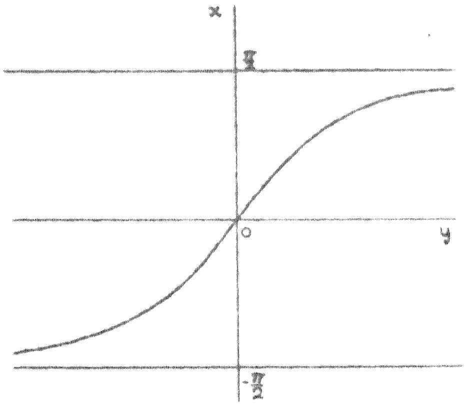
De grafische voorstellingen van de vier inverse functies zien er als volgt uit:



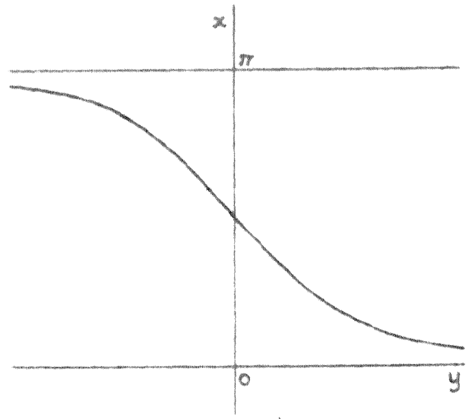
x= arc sin y



x= arc cos y



x = arc tg y



x = arc cot y

Zoals uit voorgaande formules volgt hebben we de volgende betrekkingen:

$$(29)\begin{cases} \text{arc sin }(-y) = -\text{ arc sin } y\ , & \text{arc tg }(-y) = -\text{arc tg } y, \\ \text{arc cos } x = \text{arc cos }(\pi - x)\ , & \text{arc cot } x = \text{arc cot }(\pi - x). \end{cases}$$

Speciale waarden zijn:

$$(30)\begin{cases} \text{arc sin } 0 = 0\ , & \text{arc cos } 0 = \frac{\pi}{2} \\ \text{arc sin } 1 = \frac{\pi}{6}\ , & \text{arc cos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \\ \text{arc sin }(-1) = -\frac{\pi}{2}\ , & \text{arc cos }(-1) = \pi \\ \text{arc tg } 0 = 0\ , & \text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}\ , \text{ etc. ,} \end{cases}$$

terwijl

$$(31)\begin{cases} \lim\limits_{y \to -\infty} \text{arc tg } y = -\frac{\pi}{2}\ , & \lim\limits_{y \to \infty} \text{arc tg } y = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{y \to -\infty} \text{arc cot } y = \pi\ , & \lim\limits_{y \to \infty} \text{arc cot } y = 0. \end{cases}$$

De vier zo juist ingevoerde functies kunnen ook gedifferentieerd worden. Toepassing van de stelling op p.67 levert b.v.

$$\frac{d \text{ arc sin } y}{dy} = 1 : \left(\frac{d \sin x}{dx}\right)_{x = \text{arc sin } y} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\ (-1 < y < 1)\ ;$$

men bedenke hierbij dat $\cos x > 0$ is en we dus de positieve wortel moeten nemen, omdat $x = \text{arc sin } y$ tot het open interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ behoort. Het resultaat klopt met wat we aan het begin van deze paragraaf vonden. Evenzo vinden we

$$\frac{d \text{ arc cos } y}{dy} = 1 : \left(\frac{d \cos x}{dx}\right)_{x = \text{arc cos } y}$$

$$= -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\ (-1 < y < 1),$$

$$\frac{d \text{ arc tg } y}{dy} = 1 : \left(\frac{d \text{ tg } x}{dx}\right)_{x = \text{arc tg } y} = 1 : \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 : \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{y^2+1} \quad (y \text{ willekeurig}),$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \cot y}{dy} = 1 : \left(\frac{d \cot x}{dx}\right)_{x=\operatorname{arc} \cot y} = - \sin^2 x = - \frac{1}{y^2+1}$$

(y willekeurig).

Samenvattend hebben we dus:

(32) $$\frac{d \operatorname{arc} \sin y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \cos y}{dy} = - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (-1 < y < 1)$$

(33) $$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} y}{dy} = \frac{1}{y^2+1}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \cot y}{dy} = - \frac{1}{y^2+1} \quad (-\infty < y < \infty).$$

Deze resultaten kunnen weer worden gebruikt voor de berekening van enige integralen. We zullen daarbij bij voorkeur de eerste formule (32) en de eerste formule (33) gebruiken. We hebben

(34) $$\int_a^b \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arc} \sin b - \operatorname{arc} \sin a \quad (-1 < a < b < 1)$$

(35) $$\int_a^b \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} b - \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \quad (a,b \text{ willekeurig}).$$

We weten al dat $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ oneigenlijk integreerbaar is over $(-1,1)$ en dat $\frac{1}{y^2+1}$ oneigenlijk integreerbaar is over $(-\infty,\infty)$. Hiermee is in overeenstemming dat de rechterleden van (34) en (35), als functie van b, eindige limieten hebben in $b=1$ resp. $b=\infty$ en, als functie van a, eindige linkerlimieten in $a=-1$ resp. $a=-\infty$. We krijgen zo de formule (3) terug, en verder, lettende op (31),

(36) $$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \pi .$$

Opg.102. Bewijs dat $\operatorname{arc} \sin y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos y$ $(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ en leid met behulp hiervan de tweede formule (32) uit de eerste af.

Opg.103. Bewijs dat $\operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cot y$ (y willekeurig) en leid met behulp hiervan de tweede formule (33) uit de eerste af.

Opg.104. Differentieer $\sin^2 (ax+b)$ (a,b willekeurige constanten).

Opg.105. Differentieer $\log \cos x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$.

Opg.106. Zij f(x) gedefinieerd door

$$f(0)=0, \quad f(x)=x \sin \frac{1}{x} \quad \text{voor } 0 < x \leq 1.$$

Bewijs dat f(x) integreerbaar is over (0,1). Ga na, wat er valt op te merken aan de grafiek van $y=x \sin \frac{1}{x}$.

Opg.107. Voor $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ is $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

Opg. 108. Bewijs dat $\frac{\sin x}{x}$ monotoon dalend is op $(0,\frac{\pi}{2})$, en leid daaruit de volgende ongelijkheid af:

$$\frac{2}{\pi}\alpha < \sin\alpha < \alpha \qquad \text{voor } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Opg.109. Bewijs, o.a. door toepassing van de tweede middelwaardestelling van de integraalrekening, dat de volgende integraal bestaat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Opg.110. Bewijs dat de functie $y = \sin x$ geen limiet heeft in het punt $x=\infty$.

Opg.111. Bepaal

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+\sin x}-1\right),\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x},\ \lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\frac{\nu\pi\alpha}{n}.$$

Opg.112. Bewijs

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi (\sin x)^n\,dx = 0.$$

§ 33. Hyperbolische functies.

Het uitgangspunt van de vorige paragraaf was de integraal $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, waar $-1 \leq x \leq 1$. We wensen nu te beschouwen de functie $g(x)$, gedefinieerd door

$$(1) \qquad g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Daar de integrand continu is voor alle t, is $g(x)$ door (1) gedefinieerd op het interval $(-\infty,\infty)$. Bovendien is $g(x)$ differentieerbaar; we hebben

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Omgekeerd heeft $1/\sqrt{1+x^2}$ als primitieve de functie $g(x)$, gedefinieerd door (1). Nu is er een andere functie, heel anders gedefinieerd dan (1), die ook een primitieve is van $1/\sqrt{1+x^2}$. We hebben n.l.

$$\frac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Deze afleiding geldt voor alle x, omdat voor alle x, ook negatieve x, $x+\sqrt{1+x^2}$ positief is.

We weten dat twee primitieven van eenzelfde functie hoogstens een constante verschillen. Verder hebben $g(x)$ en $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ beide de waarde 0 voor $x=0$. Dus geldt:

(2) $g(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$ (x willekeurig).

Dit resultaat, dat hier enigszins uit de lucht komt vallen, zullen we later ook langs meer systematische weg verkrijgen.

Daar in (1) de integrand steeds positief is, is $g(x)$ een monotoon stijgende functie van x op het interval $(-\infty,\infty)$.

We weten al dat $g(x)$ continu (en zelfs differentieerbaar) is op $(-\infty,\infty)$. Verder volgt uit (2) dat $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ is. Dit kan ook uit (1) worden afgeleid en wel als volgt.

Voor $x \geq 1$ is $1+x^2 \leq 2x^2$, dus

$$1/\sqrt{1+x^2} \geq \frac{1}{x\sqrt{2}}\text{. Voor } b>1 \text{ is dus } \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \geq \int_1^b \frac{dx}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log b,$$

en dus $g(b) > \frac{1}{\sqrt{2}}\log b$. Hieruit volgt de bewering (vgl. het bewijs van stelling IV op p.111).

Op analoge manier toont men aan: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Verder is $g(0)=0$. Op grond van de bovengenoemde feiten mogen we besluiten dat de functie $y=g(x)$ een inverse bezit, zeg $x=f(y)$, gedefinieerd, monotoon stijgend en continu op het interval $(-\infty,\infty)$, met als waardenverzameling het interval $(-\infty,\infty)$. Speciaal is $f(0)=0$, dus $f(y)<0$ voor $y<0$ en $f(y)>0$ voor $y>0$. Op grond van (2) kunnen we een expliciete uitdrukking voor $x=f(y)$ vinden.

Zij y een willekeurig reëel getal. Dan voldoet $x=f(y)$ aan $\log(x+\sqrt{1+x^2})=y$. Dus $x+\sqrt{1+x^2}=e^y$, waaruit we afleiden

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= e^y-x,\\ 1+x^2 &= e^{2y}-2xe^y+x^2,\\ 2xe^y &= e^{2y}-1,\end{aligned}$$

dus

$$x=\tfrac{1}{2}(e^y-e^{-y}).$$

We stellen nu per definitie

(3) $\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$ (sh = <u>sinus hyperbolicus</u>)

en stellen de inverse van deze functie, dat is de functie $y=g(x)$, voor door

(4) $y = \arg \operatorname{sh} x$ (arg = <u>argument</u>).

We hebben dan

(2') $\arg\operatorname{sh} x \; (=g(x)) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$,

terwijl $x=\operatorname{sh} y$ en $y=\arg\operatorname{sh} x$ beide gedefinieerd, continu en monotoon zijn op het interval $(-\infty,\infty)$. Speciaal is $\operatorname{sh} 0 = 0$.

De vorm $\sqrt{-1+x^2}$ is slechts gedefinieerd als $|x| \geq 1$. Men gaat gemakkelijk na, dat, voor $b > 1$, de functie $y = 1/\sqrt{-1+x^2}$ oneigenlijk integreerbaar is over $(1,b)$, met 1 als links kritiek punt. We mogen dus definiëren

(5) $$h(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{-1+t^2}} .$$

Op dezelfde manier als hierboven kan men bewijzen

(6) $$h(x) = \log(x+\sqrt{-1+x^2}).$$

De functie $y=h(x)$ is continu en monotoon stijgend op het links gesloten interval $(1,\infty)$, met $h(1)=0$ en $\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$. We mogen deze functie dus inverteren. De inverse functie, zeg $x=f_1(y)$, is gedefinieerd, continu en monotoon stijgend op het links gesloten interval $(0,\infty)$. We leiden weer een expliciete uitdrukking voor deze inverse functie af.

Zij y een willekeurig reëel getal ≥ 0 en $x=f_1(y)$. Dan is

$$x+\sqrt{-1+x^2}=e^y,$$

$$-1+x^2=e^{2y}-2xe^y+x^2,$$

dus

$$x=\tfrac{1}{2}(e^y+e^{-y}).$$

We definiëren nu

(7) $$\operatorname{ch} y = \tfrac{1}{2}(e^y+e^{-y}) \qquad (\operatorname{ch} = \underline{\text{cosinus hyperbolicus}})$$

en stellen de inverse van deze functie op het vak $(0,\infty)$ voor door

(8) $$y = \operatorname{arg\,ch} x,$$

zodat

(6') $$\operatorname{arg\,ch} x (=h(x)) = \log(x+\sqrt{-1+x^2}).$$

Hierbij is dan verder $x=\operatorname{ch} y$ continu en monotoon stijgend voor $y \geq 0$, en $y=\operatorname{arg\,ch} x$ voor $x \geq 1$.

We merken meteen op, dat het rechterlid van (7) niet alleen voor $y \geq 0$, maar ook voor $y<0$ gedefinieerd is. Alleen is de functie niet monotoon stijgend, maar monotoon dalend voor $y<0$ (zie beneden); inverteren geschiedt daarom alleen op het vak $(0,\infty)$.

In de benamingen van de door (3) en (7) gedefinieerde functies is al een verband gesuggereerd met goniometrische functies. Tot nog toe is dit verband alleen tot uiting gekomen in de integraalvoorstellingen voor de inverse functies (vergelijk (1) en (5) met § 32,(2)). In het volgende zullen we nog veel meer gemeenschappelijke trekken ontdekken. We merken en passant op, dat we de integralen (1) en (5) hebben leren berekenen.

We gaan nu de functies y= sh x en y= ch x nader bestuderen, alleen gebruik makende van de definities (3) en (7). Dat deze functies continu, en zelfs differentieerbaar zijn op $(-\infty,\infty)$, is evident. We vinden

$$\frac{d\ \mathrm{sh}\ x}{dx} = \tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}), \qquad \frac{d\ \mathrm{ch}\ x}{dx} = \tfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}),$$

dus

(9) $$\frac{d\ \mathrm{sh}\ x}{dx} = \mathrm{ch}\ x\ , \qquad \frac{d\ \mathrm{ch}\ x}{dx} = \mathrm{sh}\ x.$$

Nu is ch $x>0$ voor $x\neq 0$ en sh $x>0$ voor $x>0$, sh $x<0$ voor $x<0$ (want $e^{x}>1>e^{-x}$ voor $x>0$). Dus is (zie stelling IV, p.69) sh x monotoon stijgend op het hele interval $(-\infty,\infty)$, ch x monotoon stijgend voor $x>0$ en monotoon dalend voor $x<0$.

Uit (3) en (7) volgt onmiddellijk

(10) sh 0= 0, ch 0= 1

(11) sh(-x)= - sh x, ch(-x)= ch x.

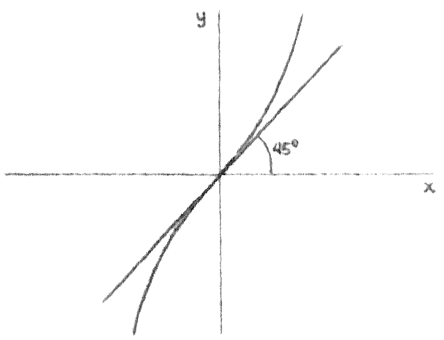
De toename resp. afname van sh x en ch x voor grote waarden van x is exponentieel, zoals blijkt uit de volgende formules:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sh}\ x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{2}\ (1-e^{-2x}) = \tfrac{1}{2},$$

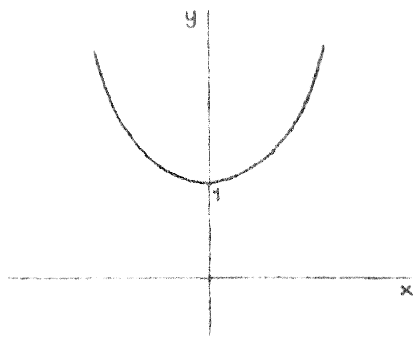
en evenzo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{sh}\ x}{e^{-x}} = -\tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{ch}\ x}{e^{x}} = \tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{ch}\ x}{e^{-x}} = \tfrac{1}{2}.$$

De grafieken van de beide functies zien er als volgt uit



y=sh x,
met raaklijn in (0,0)



y=ch x

Verder kunnen we afleiden

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x = \frac{1}{4}\left[(e^{x}+e^{-x})^2 - (e^{x}-e^{-x})^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}\right] = 1,$$

(12) $$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1.$$

Hieruit, en ook uit de definities, blijkt duidelijk dat ch $x>$ sh x is voor alle x. Ook is ch $x \geqq 1$ voor alle x. Verder neemt

$$\text{ch } x - \text{sh } x = \frac{1}{\text{ch } x + \text{sh } x} = \frac{1}{e^x}$$

snel tot 0 af voor $x \to \infty$.

Uit (3) en (7) volgt

(13) $\quad e^x = \text{ch } x + \text{sh } x\,,\quad e^{-x} = \text{ch } x - \text{sh } x.$

We vinden nu ook gemakkelijk het additietheorema voor b.v. de functie $y=\text{sh } x$:

$$\text{sh}(x+y) = \tfrac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \tfrac{1}{2}(e^x.e^y - e^{-x}.e^{-y})$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(\text{ch } x+\text{sh } x)(\text{ch } y+\text{sh } y) - (\text{ch } x-\text{sh } x)(\text{ch } y-\text{sh } y)\right],$$

dus

(14) $\quad \text{sh}(x+y) = \text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y.$

Evenzo heeft men

(15) $\quad \text{ch}(x+y) = \text{sh } x \ \text{sh } y + \text{ch } x \ \text{ch } y,$

dus b.v. ook $\text{sh } 2x = 2 \text{ sh } x \text{ ch } x$, $\text{ch } 2x = \text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x = 1 + 2\text{sh}^2 x = 2\text{ch}^2 x - 1$.

Van periodiciteit is hier niets te bespeuren (zie echter analyse II, waar het verband tussen goniometrische en hyperbolische functies beter uitkomt).

We voeren nu in

(16) $\quad \text{th } x = \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x}\,,\qquad \text{cth } x = \dfrac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$

(uitgesproken <u>tangens hyperbolicus</u>, <u>cotangens hyperbolicus</u>). De eerste functie is gedefinieerd voor alle x, de tweede alleen voor $x \neq 0$. Er geldt

$$\lim_{x\to\infty} \text{th } x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \text{th } x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1 - e^{2x}}{1+e^{2x}} = -1,$$

dus ook

$$\lim_{x\to\infty} \text{cth } x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \text{cth } x = -1.$$

Verder zijn th x en cth x $(x\neq 0)$ differentieerbaar:

$$\frac{d \text{ th } x}{dx} = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x}, \quad \frac{d \text{ cth } x}{dx} = \frac{\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x}{\text{sh}^2 x},$$

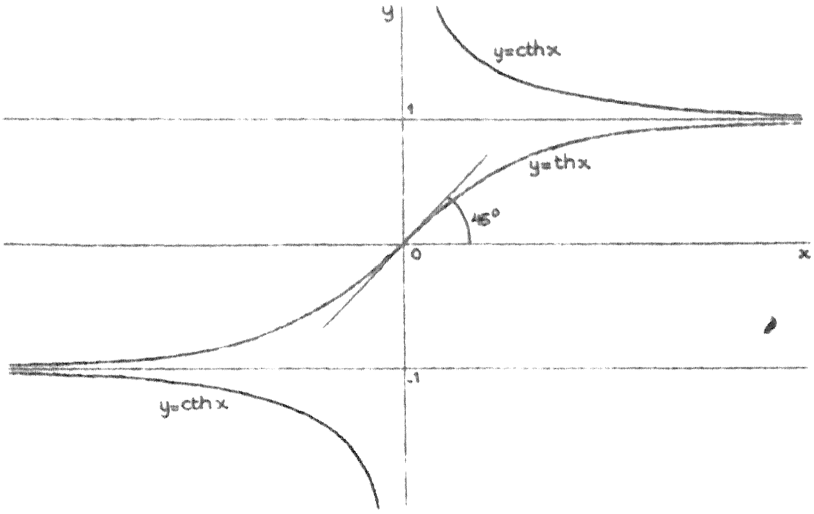
dus

(17) $\quad \dfrac{d \text{ th } x}{dx} = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}\,,\quad \dfrac{d \text{ cth } x}{dx} = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}\ (x\neq 0).$

Dus y= th x is monotoon toenemend op het interval $(-\infty,\infty)$, terwijl y=cth x monotoon afneemt zowel op $(-\infty,0)$ als op $(0,\infty)$. Tenslotte is

$$(18)\qquad \lim_{x\to 0}{}^{-} \operatorname{cth} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0}{}^{+} \operatorname{cth} x = \infty.$$

De grafieken zien er nu als volgt uit.



§ 34. Partiële integratie.

Stelling. Laten twee functies f(x) en g(x) gedefinieerd zijn op een interval (a,b), eigenlijk integreerbaar over elk inwendig subsegment van (a,b), en op het open interval in het bezit van een primitieve, en wel resp. F(x) en G(x). Onderstel, dat $\lim_{x\to a}{}^{+} F(x)\,G(x)$ en $\lim_{x\to b}{}^{-} F(x)\,G(x)$ bestaan en eindig zijn.

Indien dan $\int_a^b g(x)\,F(x)\,dx$ bestaat, dan ook $\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$, en er geldt:

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = F(x)\,G(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,F(x)\,dx,$$

anders gezegd: $\int_a^b G(x)\frac{d\,F(x)}{dx}\,dx = F(x)\,G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,\frac{d\,G(x)}{dx}\,dx.$

Bewijs. Op het open interval (a,b) geldt krachtens onderstelling $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Dan is ook, krachtens de regel voor het differentiëren van een product,

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\left\{F(x)\,G(x)\right\} = f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x).$$

Zij (z,u) een inwendig subsegment van (a,b). Dan zijn f(x) en g(x) eigenlijk integreerbaar over (z,u) en F(x) en G(x) continu op (z,u). Dus f(x) G(x) en F(x) g(x) zijn eigenlijk integreerbaar over (z,u). Wegens (2) mogen we dan de hoofdstelling van de integraalrekening toepassen;

we vinden

$$\int_z^u \left\{f(x)\ G(x) + g(x)\ F(x)\right\}dx = F(x)\ G(x)\Big|_z^u ,$$

dus

$$\int_z^u f(x)\ G(x)\ dx = F(x)\ G(x)\Big|_z^u - \int_z^u g(x)\ F(x)\ dx.$$

Bij vaste z hebben, krachtens onderstelling, beide termen in het rechterlid een eindige linkerlimiet in het punt $u=b$. Evenzo hebben bij vaste u beide termen een eindige rechterlimiet in $z=a$. We hebben daarbij, als c een inwendig punt van (a,b) is,

$$\lim_{u\to b}^{-} \left\{F(x)G(x)\Big|_c^u - \int_c^u g(x)F(x)dx\right\} = F(x)G(x)\Big|_c^b - \int_c^b g(x)F(x)dx,$$

$$\lim_{z\to a}^{+} \left\{F(x)G(x)\Big|_z^c - \int_z^c g(x)F(x)dx\right\} = F(x)G(x)\Big|_a^c - \int_a^c g(x)F(x)dx.$$

Dezelfde linkerlimiet in b en rechterlimiet in a hebben $\int_c^u f(x)G(x)dx$ resp. $\int_z^c f(x)G(x)dx$. Dus bestaan, krachtens definitie, $\int_c^b f(x)G(x)\ dx$ en $\int_a^c f(x)G(x)dx$, en er geldt

$$\int_c^b f(x)G(x)dx = F(x)G(x)\Big|_c^b - \int_c^b g(x)F(x)dx,$$

$$\int_a^c f(x)G(x)dx = F(x)G(x)\Big|_a^c - \int_a^c g(x)F(x)dx.$$

Door optelling ontstaat (1).

De zojuist bewezen stelling is van groot belang voor het berekenen of herleiden van allerlei integralen. Globaal gesproken, kunnen we $\int_a^b f(x)G(x)dx$ berekenen, als we de factor f(x) kunnen integreren en $\int_a^b g(x)F(x)dx$ kunnen bepalen; de tweede integraal ontstaat hierbij uit de eerste door de ene factor van de integrand te integreren en de andere te differentiëren. Omdat hierbij begonnen wordt met slechts een factor van de integrand te integreren, spreken we van <u>partiële integratie</u>. Theoretisch kan men een integrand op allerlei wijzen in twee factoren f(x) en G(x) splitsen; in concrete gevallen gaat het er om een zodanige factor f(x) te kiezen, dat we die kunnen integreren en bovendien de integraal in het rechterlid van (1) van eenvoudiger type is dàn die in het linkerlid.

De voorwaarden voor de toepasbaarheid van (1 kunnen beknopt als volgt worden opgeschreven:

1) f(x) en g(x) zijn integreerbaar en hebben primitieve F(x) resp.G(x), met hoogstens a en b als kritieke punten;

2) de uitdrukkingen in het rechterlid van (1) bestaan.
Uit de voorbeelden zal blijken dat de stelling ook van toepassing is op allerlei oneigenlijke integralen.

Voorbeelden.I. Willen we x log x integreren, dan nemen we x als de te integreren factor en log x als de te differentiëren factor. Het effect daarvan is dat de logarithme verdwijnt. We vinden b.v.

$$\int_1^2 x \log x \, dx = \int_1^2 \frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}x^2) . \log x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{2}x^2 . \frac{1}{x} \, dx$$

$$= 2 \log 2 - \tfrac{1}{4}x^2 \Big|_1^2 = 2 \log 2 - \tfrac{3}{4} .$$

II. Voor het integreren van log x nemen we een constante factor 1 als de te integreren factor. We vinden

$$\int_1^2 \log x \, dx = \int_1^2 \frac{d}{dx} x . \log x \, dx$$

$$= x \log x \Big|_1^2 - \int_1^2 x . \frac{1}{x} \, dx = 2 \log 2 - 1 .$$

Ook is

$$\int_0^1 \log x \, dx = x \log x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx$$

$$= 0 - \lim_{x \to 0}^{+} x \log x - \int_0^1 dx = -1 .$$

III. $$\int_a^\infty x \, e^{-x} \, dx = - \int_a^\infty x \frac{d}{dx}(e^{-x}) dx$$

$$= -x \, e^{-x} \Big|_a^\infty + \int_a^\infty e^{-x} \, dx$$

$$= -x \, e^{-x} \Big|_a^\infty - e^{-x} \Big|_a^\infty = a \, e^{-a} + e^{-a} .$$

Er is een analoge formule voor onbepaalde integralen. Zijn F(x) en G(x) differentieerbaar op een gegeven interval (a,b), met $F'(x)=f(x)$ en $G'(x)=g(x)$, dan is $(F(x)G(x))'=f(x)G(x)+g(x)F(x)$, of wel $F(x)G(x)=$ $= \int \{f(x)G(x)+g(x)F(x)\} \, dx$. Dan is ook

(3) $\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int g(x)F(x)dx \quad (a < x < b)$.

Het is hierbij goed te bedenken dat een onbepaalde integraal een zekere schaar van functies voorstelt, die onderling een constante verschillen. Formule (3) moet blijkbaar zo gelezen worden: bij elke keuze van een primitieve in het rechterlid levert dit rechterlid een of andere primitieve van $f(x)G(x)$ (zie p.95 en 97).

De voorwaarden voor de geldigheid van formule (3), die slechts een andere manier van opschrijven van formule (3') op p.66 is, zijn veel zwakker dan die voor de geldigheid van formule (1): er wordt slechts geëist, dat $f(x)$ een primitieve $F(x)$ heeft en dat $G(x)$ afgeleide $g(x)$ heeft. De formule kan gebruikt worden voor de berekening van primitieven. B.v.

$$\int x\, e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx$$
$$= -x\, e^{-x} - e^{-x}.$$

§ 35. De substitutiemethode.

We bespreken nu een andere methode voor het berekenen van integralen. Zoals de formule voor partiële integratie de pendant is van de regel voor het differentiëren van een product, zoeken we nu de kettingregel, d.i. de regel voor het differentiëren van een samengestelde functie, te vertalen voor integralen.

Stelling. Laat een samengestelde functie $g(\varphi(x))$ voldoen aan de volgende voorwaarden:

1. $\varphi(x)$ is gedefinieerd en differentieerbaar op een interval (a,b)
2. $\varphi(x)$ behoort tot een (open)interval (c,d) voor $a < x < b$
3. $g(u)$ is gedefinieerd en heeft een primitieve $G(u)$ op (c,d)
4. $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ is eigenlijk integreerbaar over elk inwendig subsegment (z,u) van (a,b)
5. $g(u)$ is eigenlijk integreerbaar over elk inwendig subsegment van $c,d)$
6. de limieten $\alpha = \lim\limits_{x \to a}{}^{+} \varphi(x)$ en $\beta = \lim\limits_{x \to b}{}^{-} \varphi(x)$ bestaan, en $\int_\alpha^\beta g(u)du$ bestaat.

Dan bestaat ook $\int_a^b g(\varphi(x))\, \varphi'(x)dx$ en er geldt:

$$(1) \quad \int_a^b g(\varphi(x))\, \varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta g(u)du.$$

Uit de voorwaarden 1,2,3 zonder meer volgt dat

$$(2) \quad \int g(\varphi(x))\, \varphi'(x)dx = \int g(u)du \qquad (a<x<b),$$

mits het rechterlid van (2) d.m.v. $u = \varphi(x)$ opgevat wordt als functie van x.

Bewijs. We beschouwen de functie $G(u)$. Wegens 3 is deze functie gedefinieerd en een primitieve van $g(u)$ op het interval $c < u < d$. Op grond van 2 kunnen we $G(u)$, door tussenkomst van $u = \varphi(x)$, beschouwen als samengestelde functie $G(\varphi(x))$ van x, gedefinieerd voor $a < x < b$. Wegens 1 en 3 is deze functie differentieerbaar voor $a < x < b$ en er geldt (kettingregel):

$$\frac{d}{dx}\,G(\varphi(x)) = \left[\frac{d}{du}\,G(u)\right]_{u=\varphi(x)} \varphi'(x)$$

$$= \left[g(u)\right]_{u=\varphi(x)} \varphi'(x) = g(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Dus is $G(\varphi(x))$ een primitieve van $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ op het interval $a < x < b$. Hiermee is alvast formule (2) bewezen.

Beschouwen we nu een willekeurig inwendig subsegment (z,u) van (a,b). Dan is, wegens 4, $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ integreerbaar over (z,u). Op grond van de hoofdstelling en het bovenstaande is dus

(3) $$\int_z^u g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))\Big|_z^u .$$

Verder is, wegens 1, $\varphi(x)$ continu op het segment (z,u) en beeldt dit segment op een zeker segment af, dat bevat is in het open interval (a,b) en dus een inwendig subsegment van (c,d) is. Dan is ook $(\varphi(z),\varphi(u))$, resp. $(\varphi(u),\varphi(z))$ een inwendig subsegment van (c,d). Wegens 5 is $g(u)$ integreerbaar over dat segment. Wegens het in de vorige alinea gezegde en de hoofdstelling is dan

(4) $$\int_{\varphi(z)}^{\varphi(u)} g(u)du = G(u)\Big|_{\varphi(z)}^{\varphi(u)} .$$

De rechterleden van (3) en (4) stemmen kennelijk overeen. Dus is

(5) $$\int_z^u g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(z)}^{\varphi(u)} g(u)du.$$

We zullen nu (6) gebruiken. We houden u vast en beschouwen het rechterlid van (5) als functie van z. Het is een samengestelde functie, bepaald door

$$G^*(v) = \int_v^{\varphi(u)} g(u)du \quad , \quad v = \varphi(z) \qquad (a < z < b).$$

Er is gegeven $\lim\limits_{z\to a}^{+} \varphi(z) = \alpha$; we merken op dat, wegens 2, α zeker tot het gesloten interval (c,d) behoort. Uit 6 volgt, dat $G^*(\alpha)$ bestaat en eindig is; daarbij heeft $G^*(v)$, als functie van v op (c,d), limiet $G^*(\alpha)$ in het punt $v=\alpha$. Uit een en ander volgt dat we op $G^*(\varphi(z))$ het limiettheorema van de samengestelde functie mogen toepassen t.a.v. het punt $z=a$. Dus is

$$\lim_{z\to a}{}^{+} \int_z^u g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \lim_{z\to a}{}^{+} G^*(\varphi(z)) = G^*(\alpha) = \int_\alpha^{\varphi(u)} g(u)du.$$

Evenzo vindt men, als z vastgehouden wordt,

$$\lim_{u\to b}{}^{-} \int_z^u g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(z)}^{\beta} g(u)du.$$

Hieruit volgt dat $\int_a^b g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx$ bestaat en dat (1) geldt.

<u>Voorbeelden.</u> I $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \; dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \frac{d \sin x}{dx}\, dx = \int_0^1 u\, du = \tfrac{1}{2}.$

$$\text{II} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \frac{d \sin x}{dx}\, dx = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}.$$

$$\text{III} \quad \int \frac{du}{(\sqrt{1+u^2})^3} = \int \frac{1}{(\sqrt{1+tg^2 x})^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \cos x \; dx =$$

$$= \sin x = \cos x \;\; tg\, x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

in het interval $-\pi/2 < x < \pi/2$ $(-\infty < u < \infty)$

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{(\sqrt{1+u^2})^3} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Men ga na, dat in deze voorbeelden aan alle zes voorwaarden voldaan is. Deze voorwaarden zijn van drieërlei aard. Ten eerste moeten de functies $g(u)$ en $\varphi(x)$ een primitieve resp. een afgeleide hebben. Ten tweede moeten beide integranden integreerbaar zijn. De laatste voorwaarde tenslotte maakt speciaal toepassingen op oneigenlijke integralen mogelijk. De toepassingen zijn verder in tweeërlei zin mogelijk: men kan (1) van links naar rechts toepassen (I,II) en ook van rechts naar links (III). We wijzen er op dat men in voorbeeld III niet b.v. het interval $(0,\pi)$ mag nemen: $\varphi(x) = tg\, x$ is niet gedefinieerd op het interval $(0,\pi)$.

Een bijzonder geval is dat $\varphi'(x)$ geen nulpunten heeft op het open interval (a,b). We zullen aantonen dat in dat geval aan eis 3 voldaan is, als $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ een primitieve heeft op het open interval (a,b). Volgens de stelling van Darboux (zie pagina 70) is hetzij $\varphi'(x) < 0$ voor elke x met $a < x < b$, hetzij $\varphi'(x) > 0$ voor elke x met $a < x < b$. Dus is $\varphi(x)$ hetzij monotoon stijgend, hetzij monotoon dalend op (a,b). We kunnen dan $\varphi(x)$ inverteren en krijgen dan een monotone functie $\chi(u)$, gedefinieerd op (α,β), resp. (β,α). Die functie $\chi(u)$ is differentieerbaar en er geldt (zie stelling, p.67):

$\chi'(u)\;\; \varphi'(x) = 1$. als we $\chi'(u)$ d.m.v. $u = \varphi(x)$ weer als functie van x opvatten, of $\varphi'(x)$ d.m.v. $x = \chi(u)$ als functie van u. Zij nu $F(x)$ een primitieve van $g(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ op het open interval (a,b) en beschouwen we de functie $F(\chi(u)) = G(u)$. Er geldt:

$$\frac{d}{du}\, G(u) = \left[\frac{d}{dx}\, F(x)\right]_{x=\chi(u)} \chi'(u) = \left[g(\varphi(x))\ \varphi'(x)\right]_{x=\chi(u)} \chi'(u)$$

$$= g(u)\ \varphi'(x)\ \ \chi'(u) = g(u).$$

Dus is $G(u)$ een primitieve van $g(u)$.

Daar $\varphi(x)$ monotoon is, kunnen we in het beschouwde geval voor (c,d) het interval met uiteinden α en β nemen. Het volgende stelsel voorwaarden is dus voldoende voor de geldigheid van de behandelde stelling:

a) de functie $g(\varphi(x))\ \varphi'(x)$ is gedefinieerd en in het bezit van een primitieve op het open interval (a,b)

b) $\varphi'(x) \neq 0$ voor $a < x < b$

c) de integralen in het linker- en rechterlid van (1), waarbij $\alpha = \lim\limits_{x \to a}{}^{+} \varphi(a)$ en $\beta = \lim\limits_{x \to b}{}^{-} \varphi(x)$, bestaan, met hoogstens de uiteinden als kritieke punten.

De voorwaarden kunnen belangrijk verzwakt worden als we van $\varphi(x)$ nog iets meer eisen. Weliswaar moeten we dan een heel ander bewijs geven, dat geen gebruik maakt van de hoofdstelling, maar direct teruggrijpt op de definitie van het integraalbegrip. We gaan hierbij uit van de integraal $\int_\alpha^\beta g(u)du$.

<u>Stelling.</u> Zij $g(u)$ integreerbaar over een interval (α, β), met hoogstens α en β als kritieke punten. Laat $\varphi(x)$ gedefinieerd en differentieerbaar zijn op een interval (a,b) en zij $\varphi'(x)$ positief op het interval (a,b) en integreerbaar over elk inwendig subsegment van (a, b). Laten a en b voldoen aan $\lim\limits_{x \to a}{}^{+} \varphi(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to b}{}^{-} \varphi(x) = \beta$. Dan is $g(\varphi(x))\ \varphi'(x)$ integreerbaar over (a,b) en geldt (1).

Een analoge stelling geldt als $\varphi'(x)$ negatief is op (a,b).

<u>Bewijs</u>. Uit de onderstellingen volgt dat $\varphi(x)$ monotoon stijgend is op (a,b). We voeren eerst het bewijs uit voor het geval van eigenlijke integralen en kiezen daartoe een willekeurig inwendig subsegment (α', β') van (α, β). Daarbij zijn ondubbelzinnig twee punten a' en b' in het inwendige van (a,b) bepaald, met $a' < b'$, zodat $\varphi(a') = \alpha'$ en $\varphi(b') = \beta'$.

Stellen we $J = \int_{\alpha'}^{\beta'} g(u)du$ en schrijven we gemakshalve $\varphi'(t) = \theta(t)$ $(a' \leq t \leq b')$. Dan is $\theta(t)$ eigenlijk integreerbaar over (a',b') en $\varphi(t)$ een primitieve, dus

$$\varphi(x) = \alpha' + \int_{a'}^{x} \theta(t)dt.$$

Laat nu $D_k (k=1,2,\dots)$ een willekeurige convergente rij verdelingen van (a',b') doorlopen. Zij daarbij D_k een verdeling $(a'=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b')$ in $n=n_k$ subsegmenten. Noemen we $\varphi(x_\nu) = u_\nu$ $(\nu = 0,1,2,\dots,n)$. Dan is, omdat $\varphi(x)$ monotoon stijgend is, $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ een verdeling D_k^*

van $(u_0,u_n)=(\alpha',\beta')$. Natuurlijk hangen de getallen x_ν en u_ν nog van de index k van D_k af; eenvoudigheidshalve is dit niet in de notatie tot uitdrukking gebracht. We zullen nu eerst laten zien dat de rij D_k^* een convergente rij verdelingen van (α',β') is.

De functie $\varphi(x)$ is differentieerbaar in elk punt van het segment (a',b'), en dus continu op het segment (a',b'). Dan is $\varphi(x)$ ook uniform continu op het segment (a',b'). Is dus δ een positief getal, dan bestaat er een positief getal η, zodat

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|<\delta \quad \text{als } |x-x'|<\eta \quad \text{en } a'\leq x\leq b,\ a'\leq x'\leq b' .$$

Omdat de rij verdelingen D_k convergent is, is er een natuurlijk getal k_0, zodat voor $k>k_0$ de wijdte van D_k kleiner dan η is, d.i.

$$|x_\nu - x_{\nu-1}|<\eta \quad \text{voor } \nu=1,2,\ldots,n=n_k.$$

Dan is ook

$$|\varphi(x_\nu)-\varphi(x_{\nu-1})| = |u_\nu - u_{\nu-1}|<\delta \quad \text{voor } \nu=1,2,\ldots,n,$$

d.w.z. de wijdte van D_k^* kleiner dan δ, voor $k>k_0$. Dus is de rij verdelingen D_k^* convergent.

Kiezen we bij elk natuurlijk getal k in elk van de subsegmenten $(x_{\nu-1},x_\nu)$ een willekeurig strooipunt ξ_ν en stellen we $\varphi(\xi_\nu)=\tau_\nu$. Dan is τ_ν een punt van het segment $(u_{\nu-1},u_\nu)$. Uit de definitie van het begrip eigenlijke integraal en het feit dat de rij verdelingen D_k^* convergent is volgt nu

(6) $$J=\lim_{k\to\infty}\sum_{D_k^*} g(\tau_\nu)(u_\nu - u_{\nu-1}).$$

Hierbij is $u_\nu - u_{\nu-1}=\varphi(x_\nu)-\varphi(x_{\nu-1})=\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\Theta(t)dt=\eta_\nu(x_\nu-x_{\nu-1})$, waarbij η_ν een geschikt gekozen getal is met

$$\inf_{x_{\nu-1}\leq t\leq x_\nu}\Theta(t)\leq\eta_\nu\leq\sup_{x_{\nu-1}\leq t\leq x_\nu}\Theta(t) \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

De som in het rechterlid van (6) kan dus geschreven worden als

(7) $$\sum_{D_k} g(\varphi(\xi_\nu))\,\eta_\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

We gaan de verandering na die deze som ondergaat bij vervanging van η_ν door $\Theta(\xi_\nu)$. De functie $g(u)$ is begrensd op (α',β'). Er is dus een constante $K>0$, zodat

$$|g(u)|<K \text{ voor } \alpha'\leq u\leq\beta',\ \text{d.i. } |g(\varphi(x))|<K \text{ voor } a'\leq x\leq b'.$$

Zij verder ω_ν de schommeling van $\Theta(t)$ op $(x_{\nu-1},x_\nu)$. Dan is $|\eta_\nu-\Theta(\xi_\nu)|\leq\omega_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$, dus

(8) $$\left|\sum_{D_k} g(\varphi(\xi_\nu))\,\eta_\nu(x_\nu-x_{\nu-1}) - \sum_{D_k} g(\varphi(\xi_\nu))\,\Theta(\xi_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1})\right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=1}^{n_k} g(\varphi(\xi_\nu)) . (\eta_\nu - \theta(\xi_\nu)) \quad (x_\nu - x_{\nu-1}) \right|$$
$$\leqq K \sum_{\nu=1}^{n_k} \omega_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

De laatste som is het somverschil van $\theta(t)$ t.o.v. de verdeling D_k van (a',b'). Is ε een positief getal, dan is er dus een rangnummer k_1, zodat het linkerlid van (8) kleiner dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ is voor $k > k_1$. Evenzo is er een rangnummer k_2, zodat de som (7) minder dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ van J afwijkt voor $k > k_2$. Voor $k > k_0 = \max(k_1, k_2)$ is dus

$$\left| J - \sum_{D_k} g(\varphi(\xi_\nu)) \theta(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) \right| < \varepsilon .$$

Dus is

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{D_k} g(\varphi(\xi_\nu)) \; \theta(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = J .$$

De som in het linkerlid is een tussensom van de functie $g(\varphi(x))\Theta(x)$ t.o.v. de verdeling D_k. We hebben blijkbaar het resultaat dat een willekeurige rij tussensommen van deze functie, genomen t.o.v. een convergente rij van verdelingen van (a',b'), limiet J heeft. Daaruit is af te leiden dat $g(\varphi(x))\Theta(x)$ integreerbaar is over (a',b') en dat we hebben

(9) $$\int_{a'}^{b'} g(\varphi(x))\,\Theta(x)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} g(u)du.$$

Het bewijs is nu op dezelfde manier te voltooien als dat van de eerste stelling in deze paragraaf. We hebben $\alpha' = \varphi(a')$, $\lim\limits_{a'\to a}^{+} \varphi(a') = \alpha$ en weten verder dat $\int_\alpha^\beta g(u)du$ convergent is. We vinden weer dat het rechterlid van (9) bij vaste b' en β', als functie van a', een eindige rechterlimiet heeft in a, en evenzo als functie van b', bij vaste a' en α', een eindige linkerlimiet in b. Tenslotte vinden we dat (1) geldt.

Het prettige van de nu bewezen stelling is dat, afgezien van enige eisen voor $\varphi(x)$, alleen geëist wordt dat het rechterlid van (1) bestaat. Bij de overgang van het rechterlid naar het linkerlid van (1) zeggen we dat we de functie $u = \varphi(x)$ <u>substitueren</u> (substitueert men in het linkerlid de inverse functie $x = \chi(u)$, dan komt het rechterlid weer te voorschijn). Aan de eisen voor $\varphi(x)$ is zeker voldaan, als $\varphi'(x)$ tekenvast en continu is op (a,b) en $\varphi(x)$ daar als waardenverzameling het interval (α,β) heeft. We krijgen zo de volgende

<u>Stelling</u>. De functies $u = \varphi(x)$ uit de hiernavolgende lijst mogen in <u>elke</u> convergente, bepaalde integraal gesubstitueerd worden, mits het integratievak deel uitmaakt van het opgegeven u-interval (we geven ook het corresponderende interval voor x op):

functie	opmerkingen	u-interval	x-interval
$u=mx+q$	m,q constant en $m\neq 0$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$u=x^{2n-1}$	n een nat.getal	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$u=x^{2n}$	n een nat.getal	$(0,\infty)$	$(0,\infty)$
$u=x^{\alpha}$	α constant en $\neq 0$	$(0,\infty)$	$(0,\infty)$
$u=\text{sh } x$		$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$u=\text{ch } x$		$(1,\infty)$	$(0,\infty)$
$u=e^x$		$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$u=\log x$		$(-\infty,\infty)$	$(0,\infty)$
$u=\frac{1}{x}$		$(0,\infty)$ of $(-\infty,0)$	$(0,\infty)$ resp. $(-\infty,0)$
$u=\sin x$		$(-1,1)$	$(-\pi/2,\ \pi/2)$
$u=\cos x$		$(-1,1)$	$(0,\pi)$
$u=\text{tg } x$		$(-\infty,\infty)$	$(-\pi/2,\ \pi/2)$
$u=\text{th } x$		$(-1,1)$	$(-\infty,\infty)$
$u=\text{coth } x$		$(1,\infty)$ of $(-\infty,-1)$	$(0,\infty)$ resp. $(-\infty,0)$.

§36. Diversen.

We noemen een functie $f(x)$, gedefinieerd op een interval $(-a,a)$, met $a>0$ of $a=\infty$, even als $f(-x)=f(x)$ voor alle x uit dat interval en oneven als $f(-x)=-f(x)$ voor alle x uit dat interval. Is in het eerste geval $f(x)$ integreerbaar over $(-a,a)$ en (c,d) een subsegment, dan krijgen we door $x=-t$ te substitueren:

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{-c}^{-d} f(-t).-dt = \int_{-d}^{-c} f(-t)dt = \int_{-d}^{-c} f(t)dt.$$

Is daarentegen $f(x)$ oneven op $(-a,a)$, integreerbaar over $(-a,a)$ en (c,d) een subsegment, dan vinden we

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{-c}^{-d} f(-t).-dt = \int_{-d}^{-c} f(-t)dt = -\int_{-d}^{-c} f(t)dt,$$

dus b.v

$$(1)\quad \int_{-c}^{c} f(x)dx = \int_{-c}^{0} + \int_{0}^{c} = \int_{-c}^{0} - \int_{-c}^{0} = 0.$$

Stelling. Zij $f(x)$ gedefinieerd voor $x\geq 0$ en integreerbaar over $(0,a)$ voor elke $a>0$. Laat er een getal $b>0$ zijn, zodat $f(x)$ positief en monotoon niet-stijgend is voor $x\geq b$. Dan geldt:

De integraal $\int_0^{\infty} f(x)dx$ convergeert dan en slechts dan als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ convergeert.

<u>Bewijs.</u> Zij n_0 een natuurlijk getal $\geq b$. Voor $n \geq n_0$ geldt:

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \text{ als } n \leq x \leq n+1, \text{ dus}$$

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1), \text{ dus}$$

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+m-1} f(n) \geq \int_{n_0}^{n_0+m} f(x)dx \geq \sum_{n=n_0+1}^{n_0+m} f(n) \quad (m=1,2,\ldots).$$

De leden van de laatste ongelijkheid nemen monotoon niet af als m de natuurlijke getallen doorloopt, wegens $f(x) > 0$ voor $x \geq b$. Convergeert dus $\int_c^\infty f(x)dx$, dan is $\sum_{n=n_0+1}^{m} f(n)$ begrensd als m de natuurlijke getallen doorloopt, en dus $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ convergent. Omgekeerd, als $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ convergeert, dan is $\int_{n_0}^{a} f(x)dx$, wat voor $a \geq n_0$ een monotoon niet dalende functie van a is, begrensd, en convergeert dus $\int_0^\infty f(x)dx$. Daarmee is de stelling bewezen.

<u>Opmerking</u>. Deze stelling sluit nauw aan bij het in an II, p.23 gegeven integraalcriterium voor de convergentie van een reeks; de functie f(x) hier correspondeert met de afgeleide F'(x) aldaar.

We weten dat $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ convergeert als $\alpha > 1$ en divergeert als $\alpha \leq 1$ (zie stelling II en IV, p. 110-111). Door te schrijven $\frac{1}{x} = \frac{d \log x}{dx}$ en te substitueren $\log x = u$ vinden we

$$\int_e^b \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx = \int_1^{\log b} \frac{1}{u^\alpha} du,$$

$$\int_{e^2}^b \frac{1}{x \log x (\log \log x)^\alpha} dx = \int_e^{\log b} \frac{1}{u(\log u)^\alpha} du.$$

Dus $\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx$ en $\int_{e^2}^\infty \frac{1}{x \log x (\log \log x)^\alpha} dx$, enz. convergeren als $\alpha > 1$ en divergeren als $\alpha \leq 1$. Door toepassing van de stelling krijgt men de resultaten in an II, p.23/24 terug.

We behandelen een voorbeeld van een functie, die wel integreerbaar, maar niet absoluut integreerbaar is over $(0,\infty)$ (vgl.p.108, laatste alinea). En wel beschouwen we de functie f(x) gedefinieerd door

$$f(0)=1, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{voor } x > 0.$$

Men gaat gemakkelijk na dat f(x) continu is voor $x \geq 0$. Door toepassing van de tweede middelwaardestelling vinden we (zie vooral p.108, eind §29): is $b > a \geq 0$, dan is er een ξ met $a \leq \xi \leq b$, zodat

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^\xi \sin x \, dx = \frac{1}{a} (\cos a - \cos \xi),$$

dus $\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{2}{a}$.

Hieruit volgt dat f(x) integreerbaar is over $(0,\infty)$. Anderzijds is echter

$$\int_0^{n\pi} |f(x)|\, dx > \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\frac{\pi}{4}+\nu\pi}^{\frac{3\pi}{4}+\nu\pi} |f(x)|\, dx$$

$$> \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu};$$

wegens $\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu} = \infty$ dus $|f(x)|$ niet integreerbaar over $(0,\infty)$.

Een andere methode bestaat in het uitvoeren van een partiële integratie:

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_a^b \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(-\cos x)\, dx$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\, dx,$$

dus

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{2}{a} + \int_a^b \frac{dx}{x^2} < \frac{3}{a}, \text{ enz. } (b > a).$$

Door te substitueren $x=u^{\alpha}$ kan men uit het gevonden resultaat afleiden dat $\frac{\sin x^{\alpha}}{x}$ $(\alpha>0)$ wel integreerbaar, maar niet absoluut integreerbaar is over $(0,\infty)$.

We keren nog even terug naar de integraal $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, beschouwd in §33. We trachten deze integraal direct te berekenen, en wel door een geschikte substitutie uit te voeren. Dat zal zo mogelijk een substitutie moeten zijn die leidt tot een integraal, waarbij in de integrand geen wortelvorm voorkomt. Stellen we $\sqrt{1+t^2}=u-t$, dan verdwijnt bij kwadrateren de term met t^2 en is dus t lineair in u uit te drukken en kunnen we dus verwachten ons doel te bereiken. Hierbij is u als functie van t gegeven door

$$u = t + \sqrt{1+t^2};$$

blijkbaar is $u \gtreqless 1$ en u een monotoon stijgende functie van t $(\frac{du}{dt} > 0)$. Verder is $1+t^2 = u^2-2ut+t^2$, dus $t = \frac{u^2-1}{2u} = \frac{u}{2} - \frac{1}{2u}$. Dit laatste is de eigenlijke substitutiefunctie. Bij het uitvoeren van de substitutie mogen we natuurlijk gebruik maken van de formule $\sqrt{1+t^2}=u-t$. We bepalen eerst nog de afgeleide van t als functie naar u. We vinden

$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2u^2}$, dus

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{1}{u-t} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2u^2}\right) = \frac{1}{\frac{u}{2} + \frac{1}{2u}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2u^2}\right) = \frac{1}{u},$$

$$\text{dus} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_1^{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{du}{u} = \log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

Hiermee is het resultaat van §33 teruggevonden. Evenzo volgt (6), p. 128.

Voor later doeleinden beschouwen we nog eens de integraal $\int_a^b \frac{dx}{x}$. We weten dat deze integraal bestaat, als a en b eindig zijn en het segment (a,b) het punt 0 niet bevat. Verder weten we dat voor $x > 0$ een primitieve van $\frac{1}{x}$ wordt geleverd door log x. Voor $x < 0$ kan dit geen primitieve zijn, omdat log x dan niet gedefinieerd is. Echter geldt wel, voor $x < 0$,

$$\frac{d}{dx} \log(-x) = \left(\frac{d \log u}{du}\right)_{u=-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x)$$

$$= \left(\frac{1}{u}\right)_{u=-x} \cdot -1 = +\frac{1}{x}.$$

Dus is log(-x) een primitieve van x voor $x < 0$. We kunnen de resultaten mooi als volgt samenvatten:

log|x| is een primitieve van $\frac{1}{x}$ in elk interval dat het punt 0 niet bevat.

Dus is ook $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log|b| - \log|a|$, als (a,b) het punt 0 niet bevat.

Uit het bovenstaande volgt nu ook dat $\log|x+\sqrt{-1+x^2}|$ een primitieve is van $\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$ in elk interval dat geheel buiten het segment (-1,1) ligt. Men bedenke hierbij dat $x+\sqrt{-1+x^2} > 0$ is voor $x > 1$ en < 0 voor $x < -1$.

Avondcursus 1955-1956

Analyse I

door

Dr C.G. Lekkerkerker

§ 37. Lijst van standaardintegralen.

We gaan er thans toe over systematisch een aantal klassen van integralen te behandelen, die we kunnen berekenen met behulp van de vroeger behandelde methoden. We zullen daarbij voortdurend de methode van partiële integratie en van substitutie toepassen en zo de integralen terug trachten te brengen op andere die we reeds kennen.

We beginnen met het opstellen van een lijst van standaardintegralen, die we reeds hebben leren berekenen en die ten grondslag liggen aan het bovenbedoelde systematisch onderzoek. We schrijven alleen onbepaalde integralen op; de corresponderende bepaalde integralen volgen dan door toepassing van de hoofdstelling, daar de te beschouwen functies steeds continu, en dus integreerbaar zijn in het beschouwde integratievak. We zullen steeds het interval (de intervallen) opgeven, waar de formules geldig zijn, wanneer ze niet geldig zijn op het hele interval $(-\infty,\infty)$. Steeds zijn m,q,a constanten.

(1) $\int m\,dx = mx$

(2) $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}\,x^{a+1} \qquad (x > 0;\ a \neq -1)$

(3) $\int (mx+q)^a\,dx = \frac{1}{m(a+1)}\,(mx+q)^{a+1}$

$(m \neq 0;\ x > -q/m \text{ als } m > 0,\ \ x < -q/m \text{ als } m < 0;\ a \neq -1)$

(4) $\int \frac{dx}{x} = \log|x| \qquad (x > 0 \text{ of } x < 0)$

(5) $\int \frac{dx}{mx+q} = \frac{1}{m}\log|mx+q| \qquad (m \neq 0;\ x > -q/m \text{ of } x < -q/m)$

(6) $\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}\,e^{mx} \qquad (m \neq 0)$

(7) $\int \cos x\,dx = \sin x$

(8) $\int \cos(mx+q)\,dx = \frac{1}{m}\sin(mx+q) \qquad (m \neq 0)$

(9) $\int \sin x \, dx = - \cos x$

(10) $\int \sin (mx + q) = - \frac{1}{m} \cos (mx + q) \qquad (m \neq 0)$

(11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x$

(12) $\int \frac{dx}{\cos^2(mx+q)} = \frac{1}{m} \mathrm{tg}\ (mx + q) \qquad (m \neq 0)$

(13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \cot x$

(14) $\int \frac{dx}{\sin^2(mx+q)} = - \frac{1}{m} \cot (mx + q) \qquad (m \neq 0)$

(15) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\ tg}\ x$

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

(17) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

$(x < -1 \text{ of } -1 < x < 1 \text{ of } x > 1)$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc\ sin}\ x = -\mathrm{arc\ cos}\ x \quad (-1 < x < 1)$

(19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log | x + \sqrt{x^2-1}| \qquad (x < -1 \text{ of } x > 1)$

(20) $\int \frac{dx}{x^2+q} = \frac{1}{\sqrt{q}} \mathrm{arc\ tg}\ \frac{x}{\sqrt{q}} \qquad (q > 0)$

(21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+q}} = \log | x + \sqrt{x^2+q} | \qquad (x < -\sqrt{-q} \text{ of } > \sqrt{-q} \text{ als } q < 0)$

(22) $\int \frac{dx}{\sqrt{q-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \log \left| \frac{\sqrt{q}+x}{\sqrt{q}-x} \right| \qquad (q > 0)$

(23) $\int \frac{dx}{\sqrt{q-x^2}} = \mathrm{arc\ sin}\ \frac{x}{\sqrt{q}} = - \mathrm{arc\ cos}\ \frac{x}{\sqrt{q}} \qquad (q > 0).$

We geven nu enige toelichtingen. Formule (2) volgt uit formule (2), p.81 (zie ook p.94, 2)). Evenzo, of door substitutie van mx+q=u, is formule (3) af te leiden. Het is duidelijk dat de formule geen betekenis heeft als m=0; in dat geval reduceert de integrand zich tot een constante. Voor (4) verwijzen we naar formule (3), p.75 (zie ook p.94,3)) en vooral naar de beschouwing op p.143. Op dezelfde wijze kan men (5) afleiden. Men kan (5) ook afleiden uit (4) door te substitueren $mx+q=u$, d.i. $x=\frac{u-q}{m}$.

Voor (6) verwijzen we naar formule (2), p.74 of naar p.94,3).

Formules (7), (9), (11), (13) zijn, in de vorm van bepaalde integralen, te vinden in de paragraaf over goniometrische functies (zie p.122). Zie ook de formules (8), (12), (25), (26) in de genoemde paragraaf. De afleiding van de iets algemenere formules (8), (10), (12), (14) levert geen moeilijkheden op en moge daarom achterwege worden gelaten.

Formule (15) volgt uit formule (33), p.125. Evenzo volgt (18) uit (32), p.125, of uit (2), p.118, waardoor de functie arc sin x gedefinieerd werd!). Formule (16) is te beschouwen als een pendant van (18). Immers in § 33 hebben we laten zien dat $g(x) = \log (x+\sqrt{x^2+1})$ een primitieve is van $1/\sqrt{x^2+1}$, en tevens dat $y=g(x)$ de inverse is van $x=\operatorname{sh} y$. Analoge opmerkingen gelden voor formule (19). Formule (17) is naast (15) te stellen. Want stellen we de inverse van $x=\operatorname{th} y$ voor door $y=\operatorname{arg\,th} x$ $(-1<x<1)$ en de inverse van $x=\operatorname{cth} y$ door $y=\operatorname{arg\,cth} x$ $(|x|>1)$, dan hebben we:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arg\,th} x = 1 : \frac{d\operatorname{th} y}{dy} = 1 : \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} = 1 : \frac{\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y}$$

$$= 1 : (1-\operatorname{th}^2 y) = 1/\sqrt{1-x^2} \quad (-1<x<1);$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arg\,cth} x = 1 : \frac{d\operatorname{cth} y}{dy} = 1 : \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 y} = 1 : \frac{\operatorname{sh}^2 y-\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y}$$

$$= 1 : (1-\operatorname{cth}^2 y) = 1/\sqrt{1-x^2} \quad (|x|>1)$$

(zie (17), p.130 en (12), p.129). Anderzijds kunnen we y oplossen uit $x=\operatorname{th} y$ en $x=\operatorname{cth} y$; uit

$$x=\operatorname{th} y = \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^y} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

volgt $y=\operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

en uit $x=\operatorname{cth} y = \frac{e^y+e^{-y}}{e^y-e^{-y}} = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$

volgt $y=\operatorname{arg\,cth} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$.

Samenvattend hebben we dan (17). We kunnen ook (17) direct afleiden als volgt.

Stellen we $\frac{1+x}{1-x}=u$. Voor $x\neq\pm1$ is u gedefinieerd en $\neq 0$. Differentiëren we het rechterlid van (17) als samengestelde functie, onder toepassing van de formule

$$\frac{d}{du} \log|u| = \frac{1}{u} \quad (u \neq 0)$$

(zie p.143), dan vinden we, zonder enige verdere gevalonderscheiding:

$$\frac{d}{dx} \tfrac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1}{2 \cdot \frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{1+x}{1-x}$$

$$= \frac{1-x}{2(1+x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1+x}{1-x} + 1 \right)$$

$$= \frac{1-x}{2(1+x)} \frac{d}{dx} \frac{2}{1-x} = \frac{1-x}{2(1+x)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} .$$

Daarmee is (17) geverifieerd.

Formule (20) vindt men door differentiatie van het rechterlid of door te substitueren $x = u\sqrt{q}$. Evenzo zijn uit (16) en (19) formules af te leiden voor

$$\int \frac{dx}{\sqrt{q+x^2}}, \quad \text{resp.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-q}} \qquad (q > 0).$$

Die formules zijn samen te vatten tot (21). Op analoge wijze vindt men (22) en (23). We wijzen op de numerieke factor $1/\sqrt{q}$ in de rechterleden van (20) en (22), terwijl in de rechterleden van (21) en (23) niet zo'n factor voorkomt.

In het volgende zullen we achtereenvolgens integralen berekenen van:

I Gehele en gebroken rationale functies

II Wortelfuncties

III Rationale functies van e^x, sin x, cos x

IV Functies waarin log x, arc sin x, arc tg x voorkomen.

§38. Integratie van rationale functies.

Is f(x) een gehele rationale functie, i.e. een polynoom, zeg

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

dan hebben we onmiddellijk

$$\int f(x)\, dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x.$$

Is f(x) een macht van een lineaire of kwadratische vorm, nog vermenigvuldigd met een macht van x, dan kan het een omweg zijn eerst f(x) uit te werken als polynoom en daarna dit polynoom te integreren. Dit blijkt uit de volgende voorbeelden.

$$\int_1^2 (x+1)^6 \, dx = \int_2^3 u^6 \, du = \frac{1}{7} u^7 \Big|_2^3 = \frac{1}{7}(3^7-2^7)$$

(we substitueerden $x+1=u$).

$$\int x(x+1)^6 \, dx = \int \left\{(x+1)^7 - (x+1)^6\right\} dx = \frac{1}{8}(x+1)^8 - \frac{1}{7}(x+1)^7.$$

$$\int x(x^2+3)^6 \, dx = \frac{1}{2.7}(x^2+3)^7$$

(zoals blijkt door differentiëren van het rechterlid, of door te substitueren $x^2+3=u$ en § 37,(3) toe te passen).

$$\int x^3(x^2+3)^6 \, dx = \int x\left\{(x^2+3)^7 - 3(x^2+3)^6\right\} dx$$
$$= \frac{1}{2.8}(x^2+3)^8 - \frac{3}{2.7}(x^2+3)^7.$$

We gaan nu over tot de integratie van gebroken rationale functies. Daartoe behandelen we eerst een stukje algebra, n.l. de splitsing van een gebroken rationale functie in partiële breuken, waarbij de noemers alleen machten van lineaire of kwadratische vormen zijn. Daarna zullen we bespreken hoe die partiële breuken geïntegreerd moeten worden.

Van fundamenteel belang is voor deze splitsing in partiële breuken de hoofdstelling van de algebra. We geven direct een toevoeging aan deze stelling, in verband met het feit dat we ons hier alleen met reële analyse bezig houden en alleen integratie van reële functies bespreken.

Zij $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (n een natuurlijk getal) een polynoom met reële coëfficiënten a_i. We beschouwen dit polynoom tijdelijk ook voor complexe waarden van x en schrijven dan liever z in plaats van x. Krachtens de genoemde hoofdstelling (zie an II, p.77-80) is er een complex getal α, zodanig dat $f(\alpha)=0$. Zij vooreerst α reëel. Delen we $f(z)$ door $z-\alpha$, dan zien we dat $f(z)$ te schrijven is als $(z-\alpha)\, f_1(z)$, waar $f_1(z)$ een polynoom is met reële coëfficiënten.

Laat nu eens α een niet-reëel nulpunt van $f(z)$ zijn. Zij $\bar{\alpha}$ het toegevoegd complexe getal. Omdat de a_i reëel zijn, hebben we, krachtens de formules (1.34) en (1.36), an II 7,

$$\overline{f(\alpha)} = \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n}$$

$$= a_0\bar{\alpha}^n + a_1\bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n = f(\bar{\alpha}).$$

Dus is $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} = 0$. Hierbij is $\bar{\alpha} \neq \alpha$, omdat α niet-reëel ondersteld is. Schrijven we

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 + bz + c \ ;$$

hierin zijn $b = -(\alpha+\bar{\alpha})$, $c = \alpha\bar{\alpha}$ reëel. We delen $f(z)$ door z^2+bz+c. Quotiënt en rest (hoogstens van de eerste graad) hebben dan reële coëfficiënten. Dus

$$f(z) = (z^2+bz+c) \ f_1(z) + pz + q,$$

waar $f_1(z)$ een polynoom is met reële coëfficiënten en p en q reëel zijn. Nu hebben we $f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = 0$. Daar α en $\bar{\alpha}$ de nulpunten zijn van z^2+bz+c, is dus

$$p\alpha + q = 0, \quad p\bar{\alpha} + q = 0 \ .$$

Wegens $\alpha \neq \bar{\alpha}$ volgt hieruit $p=q=0$. Dus $f(z)=(z^2+bz+c) \ f_1(z)$.

Samenvattend kunnen we zeggen, dat een polynoom $f(x)$ met reële coëfficiënten onder alle omstandigheden te schrijven is als het product van een reële, lineaire of een reële, kwadratische vorm en een polynoom $f_1(x)$, dat eveneens reële coëfficiënten heeft. Door herhaalde toepassing van dit resultaat vinden we tenslotte:

Een polynoom $f(x)$ met reële coëfficiënten is het product van louter lineaire of kwadratische vormen, alle met reële coëfficiënten. In formule:

$$(1) \quad f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{j} (x-\alpha_j) \cdot \prod_{i=1}^{k} (x^2 + b_i x + c_i) \ ,$$

waar $j \geq 0$, $k \geq 0$ en $j + 2k = n$, terwijl de α_j, b_i, c_i alle reëel zijn.

De lineaire en kwadratische vormen in het rechterlid van (1) kunnen gedeeltelijk samenvallen. Hebben hierbij twee kwadratische vormen - met reële coëfficiënten en hoogste coëfficiënt 1 - een niet-reëel nulpunt α gemeen, dan hebben ze ook beide $\bar{\alpha}$ als nulpunt en zijn ze dus identiek. Is α een niet-reëel nulpunt van $f(x)$, dan is $\bar{\alpha}$ een nulpunt met dezelfde multipliciteit.

We beschouwen nu een gebroken rationale functie $\frac{g(x)}{f(x)}$, waar $f(x)$ en $g(x)$ polynomen zijn en $f(x)$een graad ≥ 1 heeft. Door uitdelen krijgen we

$$\frac{g(x)}{f(x)} = k(x) + \frac{h(x)}{f(x)} \ ,$$

waar $k(x)$ en $h(x)$ weer polynomen zijn en $h(x)$ van lager graad is dan $f(x)$.

<u>Bewering.</u> Zijn $P(x)$ en $Q(x)$ twee polynomen zonder gemeenschappelijke nulpunten, met graad $\geq$ 1, en is $P(x) . Q(x) = f(x)$, dan bestaat er één

en slechts één paar polynomen $A(x)$ en $B(x)$, zodanig dat geldt:

1. $A(x)$ heeft lager graad dan $P(x)$
2. $B(x)$ heeft lager graad dan $Q(x)$
3. $\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{A(x)}{P(x)} + \frac{B(x)}{Q(x)}$.

Bewijs. Laten n,s,t de graden van resp. $f(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ zijn. Dan is $n=s+t$. Laten $P(x)$ en $Q(x)$ gegeven zijn door

$$P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_sx^s \quad (p_s \neq 0)$$

$$Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_t\,x^t \;(q_t \neq 0).$$

Het polynoom $h(x)$ heeft een graad $\leqq$ n-1. Laat het gegeven zijn door

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n-1}\,x^{n-1}$$

(hierbij is niet noodzakelijk $c_{n-1} \neq 0$). We zoeken nu een polynoom $A(x)$ met graad $\leqq s-1$ en een polynoom $B(x)$ met graad $\leqq t-1$, zeg

$$A(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \ldots + \alpha_{s-1}\,x^{s-1}$$

$$B(x) = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \ldots + \beta_{t-1}\,x^{t-1} ,$$

zodanig dat geldt $h(x) = A(x)\,Q(x) + B(x)\,P(x)$. We moeten dus hebben

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_kx^k = \sum_{\mu=0}^{s-1} \alpha_\mu x^\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{t} q_\nu x^\nu + \sum_{\mu=0}^{t-1} \beta_\mu x^\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{s} p_\nu x^\nu .$$

We gebruiken nu de eigenschap dat, als twee polynomen identiek zijn, corresponderende coëfficiënten gelijk zijn. We moeten dus hebben:

$$(2) \qquad c_k = \sum \alpha_\mu q_{k-\mu} + \sum \beta_\mu p_{k-\mu} \quad (k=0,1,\ldots, n-1) ,$$

waarbij de sommaties in het rechterlid uitgestrekt worden over de μ met $0 \leqq \mu \leqq s-1$, $0 \leqq k-\mu \leqq t$, resp. $0 \leqq \mu \leqq t-1$, $0 \leqq k-\mu \leqq s$. We hebben hier te maken met n lineaire vergelijkingen met n onbekenden $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{t-1}$. Uit de theorie der lineaire vergelijkingen (zie al 19, (I)) weten we dat dit stelsel één en slechts één oplossing toelaat, als de determinant van de coëfficiënten in de rechterleden van de vergelijkingen (2) van nul verschilt. Die determinant, zeg R, ziet er als volgt uit (nullen in de opengelaten driehoeken):

$$R = \begin{vmatrix} q_0 & & & p_0 & & \\ q_1 & q_0 & & p_1 & p_0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & & q_0 & p_{s-1} & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & p_s & & p_0 \\ q_t & & \vdots & & p_s & \vdots \\ & q_t & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & q_t & & & p_s \end{vmatrix}$$

s kolommen t kolommen

Immers elke q_i komt als coëfficiënt van een willekeurige α_μ voor in de vergelijking (2) met bekende term $c_{i+\mu}$; en elke q_j komt voor als coëfficiënt van een willekeurige β_ν in de vergelijking (2) met bekende term $c_{j+\nu}$.

Gelukkig behoeven we bovenstaande determinant niet uit te rekenen om te bewijzen dat $R \neq 0$ is. Stel eens dat $R=0$ is. Dan heeft het stelsel homogene vergelijkingen

$$(3) \qquad 0 = \sum_\mu \alpha_\mu q_{k-\mu} + \sum_\mu \beta_\mu p_{k-\mu},$$

dat uit (2) ontstaat door de c_k door 0 te vervangen, een van nul verschillende oplossing (zie al 23, (III)). Dat betekent, dat er twee polynomen $A(x)$ en $B(x)$ zijn, niet beide identiek nul en met graden $\leqq s-1$ resp. $t-1$, zodanig dat

$$A(x)\,Q(x) + B(x)\,P(x) = 0.$$

Dus $B(x)\,P(x) = -A(x)\,Q(x)$. Dus $P(x)$ is deelbaar op $A(x)\,Q(x)$. Nu is $A(x)$ van lager graad van $P(x)$. Dan moet $P(x)$ een nulpunt met $Q(x)$ gemeen hebben. Dit is in strijd met de onderstelling dat $P(x)$ en $Q(x)$ geen gemeenschappelijke nulpunten hebben. Dus is $R \neq 0$.

Uit het voorgaande volgt dat er α_μ, β_ν zijn, zodat aan (2) voldaan is, dus dat er polynomen $A(x)$ en $B(x)$ met graden $\leqq s-1$ resp. $t-1$ zijn, zodanig dat $h(x) = A(x)\,Q(x) + B(x)\,P(x)$. Daaruit volgt

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{P(x).Q(x)} = \frac{A(x)}{P(x)} + \frac{B(x)}{Q(x)}.$$

Daarmee is de bewering aangetoond.

Kunnen we $P(x)$ of $Q(x)$ splitsen in twee polynomen zonder gemeenschappelijke nulpunten, beide met graad ≥ 1, dan kunnen we bovenstaand procédé voortzetten en in $\frac{A(x)}{P(x)} + \frac{B(x)}{Q(x)}$ een der termen vervangen door de som van twee echte breuken met noemers van lager graad. Nu weten we dat de noemer $f(x)$ van de beschouwde breuk te schrijven is als product van lineaire en/of kwadratische vormen, waarbij de laatste geen reëel nulpunt hebben. Nemen we identieke vormen samen, dan vinden we dat $f(x)$ te schrijven is als een product van de volgende gedaante:

$$(4)\quad f(x)=a_0(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_j)^{n_j}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\dots\dots(x^2+b_kx+c_k)^{m_k};$$

hierin zijn j en k gehele getallen ≥ 0 en $n_1,n_2,\dots,n_j$; $m_1,\dots,m_k$ natuurlijke getallen met $n_1+n_2+\dots+n_j+2(m_1+\dots+m_k)=n$. Verder zijn de getallen $a_1,a_2,\dots,a_j$ twee aan twee verschillend en ook de paren $(b_1,c_1),\dots,(b_k,c_k)$ zijn twee aan twee verschillend. Tenslotte hebben dan twee factoren in het rechterlid van (4) nooit een nulpunt gemeen. Uit een en ander volgt dat we $h(x)/f(x)$ kunnen splitsen op de volgende wijze:

$$(5)\quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h_1(x)}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{h_2(x)}{(x-a_2)^{n_2}} + \dots + \frac{h_j(x)}{(x-a_j)^{n_j}} +$$

$$+ \frac{h_{j+1}(x)}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \dots + \frac{h_{j+k}(x)}{(x^2+b_kx+c_k)^{m_k}},$$

met zekere polynomen $h_1(x)$, $h_2(x),\dots,h_{j+k}(x)$, elk van lager graad dan de bijbehorende noemer.

We kunnen nog elk der polynomen $h_i(x)$ ontwikkelen naar machten van de bijbehorende lineaire of kwadratische vorm. B.v.

$$h_1(x)=c_{n_1-1}(x-a_1)^{n_1-1} + c_{n_1-2}(x-a_1)^{n_1-2} + \dots + c_1(x-a_1) + c_o,$$

zodat

$$\frac{h_1(x)}{(x-a)^{n_1}} = \frac{c_{n_1-1}}{x-a_1} + \frac{c_{n_1-2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{c_1}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \frac{c_o}{(x-a_1)^{n_1}};$$

$$h_{j+1}(x)=(d_{m_1-1}x+e_{m_1-1})(x^2+b_1x+c_1)^{m_k-1} + \dots$$

$$+(d_1x+e_1)(x^2+b_1x+c_1) + d_ox+e_o,$$

zodat

$$\frac{h_{j+1}(x)}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} = \frac{d_{m_1-1}x+e_{m_1-1}}{x^2+b_1x+c} + \dots + \frac{d_1x+e_1}{(x^2+b_1x+c)^{m_1-1}} + \frac{d_ox+e_o}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}$$

De conclusie is nu:

f(x) laat een splitsing toe van de gedaante (4), waarbij de vormen $x-a_i$ twee aan twee verschillend zijn en de vormen $x^2+b_ix+c_i$ geen reëel nulpunt hebben en eveneens twee aan twee verschillend zijn; verder is de echte breuk $h(x)/f(x)$ te schrijven als som van termen van de gedaante

$$(5)\quad \frac{A_{i,r}}{(x-a_i)^r} \qquad (r \leq n_i,\ i=1,2,\dots,j)$$

en termen van de gedaante

$$(6)\quad \frac{B_{i,s}x + C_{i,s}}{(x^2+b_ix+c_i)^s} \qquad (s \leq m_i;\quad i=1,2,\dots,k),$$

met zekere constanten $A_{i,r}$, $B_{i,s}$, $C_{i,s}$.

Hiermee is de beoogde splitsing in partiële breuken gevonden. De vraag doet zich meteen voor, hoe we zo snel mogelijk de daarbij optredende coëfficiënten A,B,C berekenen. De weg, waarlangs we bovenstaand resultaat gevonden hebben, is daarvoor minder bruikbaar. We maken direct gebruik van de mogelijkheid van zo'n splitsing en zullen achtereenvolgens een aantal gevallen van opklimmende gecompliceerdheid behandelen. Aangezien het niet op onze weg ligt hogere-machtsvergelijkingen op te lossen, zullen we steeds van een splitsing van f(x) van de gedaante (4) uitgaan.

a) f(x) heeft slechts enkelvoudige reële nulpunten $a_1,a_2,\dots,a_n$.

Het is geen beperking te nemen $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Bij gegeven h(x), met graad $<n$, zijn er constanten A_1, $A_2,\dots,A_n$, zodanig dat

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Vermenigvuldiging van beide leden met f(x) geeft:

$$h(x) = A_1 \prod_{i\neq 1}(x-a_i) + A_2 \prod_{i\neq 2}(x-a_i) + \dots + A_n \prod_{i\neq n}(x-a_i).$$

Substitueren we hierin $x=a_1$, dan blijft rechts slechts de eerste term over. Dus

$$A_1 = \frac{h(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}.$$

Men gaat gemakkelijk na dat geldt:

$$f'(a_1) = \left(\frac{d}{dx}\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)\right)_{x=a_1} = (a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n).$$

Dus is $A_1=h(a_1)/f'(a_1)$. Algemeen hebben we:

$$A_i=\frac{h(a_i)}{f'(a_i)}=\frac{h(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}.$$

Voorbeeld.

$$\frac{3x^2-6x+5}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2},$$

met $A=\frac{2}{2.-1.3}=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{14}{-2.-3}=\frac{7}{3}$, $C=\frac{5}{3.4}=\frac{5}{12}$, $D=\frac{-29}{12}$.

b) $f(x)$ heeft slechts reële nulpunten $a_1,a_2,\ldots,a_j$, met multipliciteiten $n_1,n_2,\ldots,n_j$, niet alle 1. Dan is

$$\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{n_1}}+\ldots+\frac{A_{1,n_1}}{x-a_1}+\ldots\ldots+\frac{A_{j,n_j}}{x-a_j}$$

Na vermenigvuldiging met $f(x)$ verdwijnen de breuken. Substitueren we dan $x=a_i(i=1,2,\ldots,j)$, dan vinden we in elk geval de constanten $A_{11},A_{21},\ldots,A_{j,1}$. Om de overige constanten te berekenen vullen we een aantal waarden van x in, zodat we lineaire vergelijkingen voor de nog onbekende constanten krijgen.

We kunnen ook de termen, waarvan we de coëfficiënten kennen, naar links brengen, factoren $x-a_1$, $x-a_2,\ldots,x-a_j$ uitdelen en dan het eerste procédé herhalen. We lichten dit toe aan de hand van het volgende

Voorbeeld. $$\frac{3x^4+x^3+2x^2+x+1}{x(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+1)^3}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{F}{x+1},$$

met nog te bepalen coëfficiënten A,B,C,D,E,F. We hebben

$$3x^4+x^3+2x^2+x+1=A(x-1)^2(x+1)^3+Bx(x+1)^3+Cx(x-1)(x+1)^3+Dx(x-1)^2+$$
$$+Ex(x-1)^2(x+1)+Fx(x-1)^2(x+1)^2.$$

Substitutie van $x=0,1,-1$ geeft achtereenvolgens:

$$A=1,\quad B=1,\quad D=-1.$$

Dus $3x^4+x^3+2x^2+x+1-(x-1)^2(x+1)^3-x(x+1)^3+x(x-1)^2=$
$$=Cx(x-1)(x+1)^3+Ex(x-1)^2(x+1)+Fx(x-1)^2(x+1)^2,$$

of wel $-x^5+x^4+x^3-x^2=x(x^2-1)\left\{C(x+1)^2+E(x-1)+F(x-1)(x+1)\right\}$.

Delen door $x(x^2-1)$, wat automatisch mogelijk is, geeft

$$-x(x-1)=C(x+1)^2+E(x-1)+F(x-1)(x+1).$$

Substitueren we hierin x=1 en x= -1, dan krijgen we C=0, E=1. Om F te vinden, substitueren we nu maar x=0. Dat geeft C-E-F=C, dus F= -1. Tenslotte is dus

$$\frac{3x^4+x^3+2x^2+x+1}{x(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\ .$$

c) Het algemene geval. We kunnen hier beginnen met op dezelfde wijze als vroeger de coëfficiënten te bepalen die bij de lineaire vormen horen. Om de overige coëfficiënten te bepalen substitueren we een aantal waarden voor x en krijgen dan een aantal lineaire betrekkingen. Of we laten complexe getallen toe en substitueren de nulpunten van de optredende kwadratische vormen.

Voorbeeld.

$$\frac{x+4}{x(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}\ ,$$

met nog te bepalen constanten A,B,C,D,E. Wegwerken van de noemers geeft

$$x+4= A(x^2+1)(x^2+4) + x(Bx+C)(x^2+4) + x(Dx+E)(x^2+1).$$

Substitutie van x=0 geeft A=1. We substitueren nu een nulpunt van x^2+1, d.i. x= +i of x= -i. Dat geeft:

$$i + 4 = i(Bi+C).3= -3B + 3Ci.$$

Dus B= -4/3, C=1/3. Substitutie van x=2i geeft

$$2i + 4 = 2i(2Di+E).-3= 12D - 6Ei,$$

dus D=1/3, E= -1/3. We hebben dus

$$\frac{x+4}{x(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{x} + \frac{-4x+1}{3(x^2+1)} + \frac{x-1}{3(x^2+4)}\ .$$

Ons rest nu nog de vormen (5) en (6) te integreren. Wat de vormen (5) betreft, hoeven we slechts op te merken dat de formules (5) en (3) op p.144 onmiddellijk geven:

$$\int \frac{dx}{x-a_i} = \log|x-a_i| \qquad (x > a_i \text{ of } x < a_i),$$

$$\int \frac{dx}{(x-a_i)^r} = \frac{1}{1-r}(x-a_i)^{1-r} = -\frac{r-1}{(x-a_i)^{r-1}} \quad \text{als } r > 1.$$

Daar nu r een natuurlijk getal is, heeft de laatste formule betekenis zowel voor $x > a_1$ als voor $x < a_1$.

Nu de vormen (6). Berekenen we eerst

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx,$$ waar x^2+bx+c geen reëel nulpunt heeft.

Zoals bekend, is de vorm x^2+bx+c positief voor alle waarden van x. We zetten $\frac{1}{4}b^2-c=d$. Dan is $d<0$, daar de vorm x^2+bx+c geen reëel nulpunt heeft. We merken nu op:

1) in de breuk $\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$ is de teller de afgeleide van de noemer; dus is deze breuk zelf de afgeleide van $\log(x^2+bx+c)$, i.e.

$$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \log(x^2+bx+c).$$

2) de integraal $\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$ brengen we terug tot (20) door te substitueren $x+\frac{1}{2}b=u$ (bedenkende dat $-d$ positief is). We krijgen dan

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{du}{u^2-d} = \frac{1}{\sqrt{-d}}\,\text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{-d}} = \frac{1}{\sqrt{-d}}\,\text{arc tg}\,\frac{x+\frac{1}{2}b}{\sqrt{-d}}\,.$$

Gebruikmakend van de voorgaande uitkomsten vinden we:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}B(2x+b)+C'}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}B\log(x^2+bx+c) + \frac{C'}{\sqrt{-d}}\,\text{arc tg}\,\frac{x+\frac{1}{2}b}{\sqrt{-d}}\,,$$

met $C'=C-\frac{1}{2}Bb$.

Vervolgens beschouwen we de integraal

$$P_r=P_r(u) = \int \frac{du}{(u^2+1)^r} \qquad \text{(r een natuurlijk getal).}$$

De integraal P_1 kennen we (zie (15),p.145). Voor $r>1$ vinden we, door de integraal P_{r-1} partieel te integreren, met $\frac{1}{(u^2+1)^{r-1}}$ als te differentiëren factor en 1 als te integreren factor,

$$P_{r-1} = \frac{u}{(u^2+1)^{r-1}} + 2(r-1)\int \frac{u^2du}{(u^2+1)^r}\,.$$

Splitsing van de teller in de laatste integraal geeft:

$$P_{r-1} = \frac{u}{(u^2+1)^{r-1}} + 2(r-1)(P_{r-1}-P_r),$$

dus

$$P_r = \frac{1}{2(r-1)}\cdot\frac{u}{(u^2+1)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2}P_{r-1}\,.$$

We kunnen nu P_r voor elk natuurlijk getal r bepalen. B.v.

$$P_3 = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{4} P_2 = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3u}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8} \text{ arc tg } u.$$

We kunnen nu algemeen de vorm(6) integreren wegens

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^r}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}B(2x+b)+C'}{(x^2+bx+c)^r}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}B \cdot \frac{-1}{(r-1)(x^2+bx+c)^{r-1}} + C'\int \frac{dx}{((x+\frac{1}{2}b)^2-d)^r}$$

$$= \tfrac{1}{2}B \cdot \frac{-1}{(r-1)(x^2+bx+c)^{r-1}} + \frac{C'}{\sqrt{(-d)}^{\,r-1}}\, P_r\left(\frac{x+\frac{1}{2}b}{\sqrt{-d}}\right) \qquad (r>1).$$

Resumerend kunnen we zeggen dat een primitieve van een rationale functie altijd een som is van logarithmen van lineaire of kwadratische vormen, van arcustangenten (dit alles met numerieke coëfficiënten) en/ of een rationale functie.

We besluiten met enige opmerkingen over gevallen waarin men de integraal van een rationale functie sneller kan vinden dan met de hierboven uiteengezette methoden.

I. Is een polynoom in x een even of oneven functie van x, dan ontbreken in dat polynoom alle even resp. alle oneven machten van x. Is dus de teller van een breuk $h(x)/f(x)$ even of oneven, en eveneens de noemer, dan is die breuk te schrijven als een gehele macht van x maal een rationale functie in x^2. Zo kan men onmiddellijk herleiden:

$$\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4},$$

waarbij A en B volgen uit $x^2+3=A(x^2+4) + B(x^2+1)$, hetgeen geeft $A=2/3$, $B=1/3$.

II. Is een rationale functie gegeven in de gedaante $(Bx+C)(x^2+bx+c)^{-r}$, waar r een natuurlijk getal en $\frac{1}{4}b^2-c>0$ is, dan integreren we die het snelst op dezelfde wijze als in het geval $\frac{1}{4}b^2-c<0$. Er komen dan, naast een rationale functie, logarithmen van kwadratische vormen te voorschijn, die ontbindbaar zijn en dus geschreven kunnen worden als sommen van logarithmen van lineaire vormen.

III. Beschouwen we een integraal $\int x^p(x\pm 1)^q\,dx$, waarbij p en q geheel zijn en minstens één negatief. Is q positief, dan ontwikkelen we $(x\pm 1)^q$. Is $q=-1$ en $p>0$, dan voeren we de deling door $x\pm 1$ uit (als vroeger). Is $q<-1$, maar klein t.o.v. p, dan kan het de moeite lonen door partiële integratie q te reduceren tot -1. Verder valt op te merken dat substitutie van $x\pm 1=u$ of $x=\frac{1}{u}$ leidt tot

$$\int x^p(x\pm 1)^q\,dx = \int (u\mp 1)^p\, u^q\, du, \text{ resp.}$$

$$\int x^p(x\pm 1)^q\,dx = -\int u^{-p-q-2}(1\pm u)^q\,du.$$

Mogelijk komt men daarbij in een eenvoudiger geval terecht (b.v. als $p+q=-2$!).

IV. Beschouwen we een integraal $\int x^p(x^2\pm 1)^q\,dx$, waarbij p en q geheel zijn en minstens één negatief. Ingeval p oneven is, substitueren we $x^2\pm 1=u$. Voor $q<0$ kan het voordelig zijn door partiële integratie q te reduceren tot -1.

<u>Voorbeeld.</u> $\int \frac{x^8}{(x^2+1)^2}\,dx = -\int \tfrac{1}{2}x^7 \frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$$= \frac{-x^7}{2(x^2+1)} + \frac{7}{2}\int \frac{x^6 dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{-x^7}{2(x^2+1)} + \frac{7}{2}\int \left\{x^4-x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right\}dx$$

$$= \frac{-x^7}{2(x^2+1)} + \frac{7}{10}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}\text{ arc tg } x.$$

<u>Opgave 113.</u> Waarom kan een polynoom h(x) op de op p.152 aangegeven wijze naar machten van een gegeven kwadratische vorm worden ontwikkeld? Ontwikkel x^7 naar machten van x^2+2x+2.

<u>Opgave 114.</u> Bereken $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

<u>Opgave 115.</u> Leid met de methoden van deze § nog eens formule (17), p. 145 af.

<u>Opgave 116.</u> Leid een recursiebetrekking af voor

$$Q_r(u) = \int \frac{du}{(u^2-1)^r} \quad \text{(r een natuurlijk getal).}$$

<u>Opgave 117.</u> Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+x+4)^2}$. Bewijs dat deze integraal bestaat alvorens hem uit te rekenen.

<u>Opgave 118.</u> Bepaal

$$\int \frac{4x^2+1}{(5x+1)^3}\,dx, \qquad \int \frac{x^3+2x^2-1}{x(x-1)}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(x^2-1)^2},$$

$$\int \frac{5x^2-19x+18}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx\ , \qquad \int \frac{dx}{x^3-x^4-x^5+x^6}\ ,$$

$$\int \frac{x^4dx}{(1+x^3)^2}\ , \quad \int \frac{dx}{x^4+1}\ , \quad \int \frac{dx}{1+x^2+x^4}\ , \quad \int \frac{x^9}{(x+1)^{10}}\,dx\ .$$

§39. Integralen van functies met wortelvormen.

1. In een integraal van de gedaante

$$\int R(x,\ \sqrt[p]{ax+b},\ \sqrt[q]{ax+b},\dots)\,dx\ ,$$

waar $p,q,\dots$ natuurlijke getallen $\geqq 2$ zijn, a en b constanten en R een rationale functie in de daarachter volgende uitdrukkingen voorstelt, substitueren we $\sqrt[n]{ax+b}=u$ met $n=\text{k.g.v.}(p,q,\dots)$. Dan komt men terecht op een integraal van een rationale functie.

2. In $\int R(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx$ (n een natuurlijk getal)

substitueren we $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}=u$, waarna we op een integraal van een rationale functie terechtkomen. Ga na, waar de beschouwde integraal bestaat.

Voorbeelden: $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = -\int\frac{2u\,du}{(1-u^2)u} = -2\int\frac{du}{1-u^2} \qquad [\sqrt{1-x}=u]$$

$$= -2\log\left|\frac{1-u}{1+u}\right| = -2\log\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| \qquad (0<x<1);$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}} = \int\frac{(u^2-2)2u\,du}{u} = \frac{2}{3}u^3-4u \qquad [\sqrt{x+2}=u]$$

$$=(\frac{2}{3}x-\frac{8}{3})\sqrt{x+2}\ .$$

3. We behandelen nu uitvoerig de volgende integraal:

$$(1) \qquad \int x^m(ax^2+bx+c)^{p/2}\,dx\ ,$$

waarin a,b en c constanten zijn, m een geheel getal en p een <u>oneven</u> geheel getal is (m en p mogen negatief zijn). We sluiten de triviale gevallen, dat $a=0$ is of $\pm(ax^2+bx+c)$ een volkomen kwadraat is uit; dan valt n.l. (1) onder de reeds behandelde typen. Door een lineaire substitutie kan men deze integraal terugbrengen tot een der volgende:

$$\int x^m(x^2\pm1)^{p/2}\,dx\ , \qquad \int x^m(1-x^2)^{p/2}\,dx\ .$$

Voor de eerste moet het integratievak bevat zijn in $(-\infty,-1)$ of $(1,\infty)$, voor de laatste in $(-1,1)$.

Onmiddellijk op te lossen is het geval $m=1$. We hebben in dat geval:

$$(3) \qquad \int x(x^2 \pm 1)^{p/2}dx = \frac{1}{p+2}(x^2 \pm 1)^{\frac{p+2}{2}},$$

$$(3') \qquad \int x(1-x^2)^{p/2}dx = -\frac{1}{p+2}(1-x^2)^{\frac{p+2}{2}}.$$

Verder komt het geval $m=0$, $p=-1$ onder de standaardintegralen voor; zie de formules (16), (18) en (19), p.145.

We gaan nu na wat het effect is van substitutie van $x=1/u$ in de algemene integraal (2). Ook zullen we nagaan wat we kunnen bereiken met partiële integratie. Daarna zullen we recepten kunnen opstellen om (2) te berekenen voor willekeurige waarden van m en p (m geheel, p oneven geheel). Zetten we

$$I_{m,p} = I_{m,p}(x) = \int x^m(x^2+1)^{p/2}dx, \quad I'_{m,p} = I'_{m,p}(x) = \int x^m(x^2-1)^{p/2}dx,$$

$$I''_{m,p} = I''_{m,p}(x) = \int x^m(1-x^2)^{p/2}dx.$$

Bij substitutie van $x=1/u$ krijgen we

$$\int x^m(x^2+1)^{p/2}dx = -\int u^{-m}(1/u^2+1)^{p/2}\frac{du}{u^2}$$

$$= -\int u^{-m-p-2}(u^2+1)^{p/2}du,$$

of wel

$$I_{m,p}(x) = -I_{-m-p-2,p}(1/x).$$

Evenzo is

$$I'_{m,p}(x) = -I''_{-m-p-2,p}(1/x), \quad I''_{m,p} = -I'_{-m-p-2,p}(1/x)$$

(let op de mintekens in de wortelvorm).

Partiële integratie heeft verschillend effect, al naargelang we x^m of $(x^2+1)^{p/2}$, etc. als de te integreren factor opvatten. Integreren we de factor x^m, dan krijgen we voor de eerste integraal (2), ingeval $m \neq -1$,

$$\int x^m(x^2+1)^{p/2}dx = \int (x^2+1)^{p/2}\frac{d}{dx}\frac{x^{m+1}}{m+1}dx$$

$$= \frac{1}{m+1}x^{m+1}(x^2+1)^{p/2} - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\,px(x^2+1)^{\frac{p-2}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{m+1}x^{m+1}(x^2+1)^{p/2} - \frac{p}{m+1}\int x^{m+2}(x^2+1)^{\frac{p-2}{2}}dx.$$

We zijn dus terechtgekomen op een integraal van hetzelfde type, waarbij de exponent m met 2 verhoogd en p met 2 verlaagd is, dus m+p constant gebleven is. We kunnen de laatste integraal nog verder herleiden door de volgende overweging. Schrijven we $x^{m+2}=x^m\{(x^2+1)-1\}$, dan kunnen we de integraal als volgt splitsen:

$$\int x^{m+2}(x^2+1)^{\frac{p-2}{2}}dx=\int x^m(x^2+1)^{p/2}dx-\int x^m(x^2+1)^{\frac{p-2}{2}}dx.$$

In verband met het bovenstaande hebben we dus

$$(1+\frac{p}{m+1})\int x^m(x^2+1)^{p/2}dx =$$

$$\frac{1}{m+1}\,x^{m+1}(x^2+1)^{p/2}+\frac{p}{m+1}\int x^m(x^2+1)^{\frac{p-2}{2}}dx.$$

We onderstellen nu dat $1+\frac{p}{m+1}\neq 0$, i.e. $m+p\neq -1$ is. We zijn er in geslaagd de oorspronkelijke integraal terug te brengen op een van hetzelfde type, waarbij de exponent m dezelfde gebleven is en p met 2 verlaagd is. We kunnen de resultaten als volgt weergeven:

$$I_{m,p}(x)=\frac{1}{m+1}\,x^{m+1}(x^2+1)^{p/2}-\frac{p}{m+1}\,I_{m+2,p-2}(x)\quad (m\neq -1)$$

$$I_{m,p}(x)=\frac{1}{m+p+1}\,x^{m+1}(x^2+1)^{p/2}+\frac{p}{m+p+1}\,I_{m,p-2}(x)\ (m\neq -1,\ m+p\neq -1).$$

Beschouwen we nog even het geval $m+p=-1$. Dan is $1+\frac{p}{m+1}=0$ en volgt uit het bovenstaande onmiddellijk de waarde van $\int x^m(x^2+1)^{\frac{p-2}{2}}dx$. In dit geval is m even, zeg $m=2q$. Dan is $p-2=-1-m-2= -(2q+3)$. We hebben dus

$$(4)\quad I_{2q,-(2q+3)}(x)=\int x^{2q}(x^2+1)^{-\frac{2q+3}{2}}dx=\frac{-1}{2q+1}\,x^{2q+1}(x^2+1)^{-\frac{2q+1}{2}}.$$

Men kan dit resultaat ook afleiden door te substitueren $x=1/u$ en daarna (3) toe te passen.

Integreren we nu partieel, waarbij we $(x^2+1)^{p/2}$ als de te integreren factor nemen. We vinden:

$$\int x^m(x^2+1)^{p/2}dx=\int x^{m-1}\,\frac{d}{dx}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{p+2}{2}}}{p+2}\,dx$$

$$=\frac{1}{p+2}\,x^{m-1}\,(x^2+1)^{\frac{p+2}{2}}-\frac{m-1}{p+2}\int x^{m-2}(x^2+1)^{\frac{p+2}{2}}dx.$$

Nu is de exponent m met 2 verlaagd en p met 2 verhoogd. Door nog een splitsing toe te passen krijgen we:

$$\int x^{m-2}(x^2+1)^{\frac{p+2}{2}}dx=\int (x^m+x^{m-2})(x^2+1)^{p/2}dx$$

$$= \int x^m (x^2+1)^{p/2} dx + \int x^{m-2} (x^2+1)^{p/2} \, dx,$$

dus

$$(1+ \frac{m-1}{p+2}) \int x^m (x^2+1)^{p/2} dx=$$

$$\frac{1}{p+2}\, x^{m-1} (x^2+1)^{\frac{p+2}{2}} - \frac{m-1}{p+2} \int x^{m-2} (x^2+1)^{p/2} \, dx,$$

of wel

$$I_{m,p}(x) = \frac{1}{m+p+1}\, x^{m-1} (x^2+1)^{\frac{p+2}{2}} - \frac{m-1}{m+p-1}\, I_{m-2,p}(x) \qquad (m+p \neq -1).$$

Nu is dus m met 2 verlaagd en p constant gebleven.

Analoge herleidingen gelden voor de andere integralen (2).

We zijn nu in staat een algemeen recept te geven voor de berekening van de integralen (2). Het is als volgt:

A. m oneven, positief. Door partiële integratie, zonder daaropvolgende splitsing, de exponent m verlagen tot 1. Daarna formule (3) of (3') toepassen.

B. m even, $m+p < -1$. Door de substitutie $x=1/u$ komen we wegens $-m-p-2$ oneven, positief in het vorige geval terug.

C. m even, $m+p \gtreqless -1$. Zo nodig een- of meermalen op een der genoemde wijzen partieel integreren, telkens gevolgd door een splitsing van de integrand, totdat de som $m+p$ gereduceerd is tot -1. Vervolgens partieel integreren, zonder splitsen, tot $m=0$ en $p=-1$ geworden is. Men kan ook $m+p$ reduceren tot -3 en dan formule (4) toepassen.

D. m oneven, negatief. De substitutie $x=1/u$ leidt tot een der vorige gevallen.

Voorbeelden. I $\int \sqrt{1-x^2}\, dx \quad (-1 < x < 1)$

wordt volgens C berekend door partieel te integreren en daarna de integrand te splitsen. Differentiëren we hierbij de factor $\sqrt{1-x^2}$, dan krijgen we een integraal van het type (2) met $m=0$, $p=-1$. Dus herleiden we:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx,$$

dus

$$2\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2} \text{ arc sin } x \; (-1 < x < 1).$$

II. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}x^3\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{3}x^3\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}\int x^2\sqrt{1-x^2}dx,$$

dus

$$\frac{4}{3}\int x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{3}x^3\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int x \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2}dx;$$

in verband met I dus

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\text{arc sin } x.$$

III $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1+1/u^2}}$ $\qquad [u = \frac{1}{x}]$

$$= -\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+1}} = -\sqrt{u^2+1} = -\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}.$$

Later zullen we zien hoe, speciaal in bepaalde integralen, goniometrische substituties soms sneller tot resultaat leiden.

4. De integraal

$$\int g(x)(\sqrt{ax^2+bx+c})^p\,dx,$$

waar $g(x)$ een polynoom is, a,b,c constanten zijn en p een oneven geheel getal is, wordt door een geschikte lineaire substitutie overgevoerd in een som van integralen van het hierboven behandelde type.

5. De integraal

$$I = \int \frac{g(x)}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

waar $g(x)$ een polynoom is en k een natuurlijk getal, is tot het vorige type terug te brengen. We schrijven daartoe

$$\frac{g(x)}{(x+\alpha)^k} = g_1(x) + \frac{g_2(x)}{(x+\alpha)^k},$$

waar $g_1(x)$ en $g_2(x)$ polynomen zijn en $g_2(x)$ een graad $< k$ heeft. We krijgen dan

$$I = \int \frac{g_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \int \frac{g_2(x)}{(x+\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

De eerste integraal is van het vorige type. In de tweede substitueren we $x+\alpha = \frac{1}{u}$; hij gaat dan over in

$$\int \frac{g_3(\frac{1}{u})u^{k-1}}{\sqrt{lu^2+mu+n}}\,du,$$

waar $g_3(\frac{1}{u})$ een zeker polynoom in $\frac{1}{u}$ is van graad $< k$, en dus $g_3(\frac{1}{u})u^{k-1}$ een polynoom in u, en l,m,n zekere constanten zijn. De laatste integraal is dus van het vorige type.

6. We behandelen nu de integraal

$$(5) \qquad \int \frac{g(x)}{(dx^2+ex+f)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

waar $g(x)$ een polynoom is, m een natuurlijk getal en a,b,c,d,e,f constanten zijn. Het is geen beperking aan te nemen dat de graad van $g(x)$ ten hoogste 2m-1 is. We mogen onderstellen dat de vorm dx^2+ex+f geen reële nulpunten heeft, omdat we in dat geval (5) kunnen terugbrengen tot een som van integralen van het type 5, door n.l. $\frac{g(x)}{(dx^2+ex+f)^m}$ in partiële breuken te splitsen. Verder mogen we onderstellen dat de vorm dx^2+ex+f geen veelvoud is van de vorm ax^2+bx+c, d.w.z. daaruit ontstaat door vermenigvuldiging met een constante: in dat geval is (5) van het type 4.

Onder de genoemde onderstellingen proberen we de substitutie

$$(6) \qquad x = \frac{\alpha z+\beta}{z+1},$$

met nog te bepalen constanten α en β. De beide kwadratische vormen gaan dan over in

$$\frac{1}{(z+1)^2}\left\{d(\alpha z+\beta)^2+e(\alpha z+\beta)(z+1)+f(z+1)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{(z+1)^2}\left\{(d\alpha^2+e\alpha+f)z^2+(2d\alpha\beta+e\alpha+e\beta+2f)z+(d\beta^2+e\beta+f)\right\},$$

resp.

$$\frac{1}{(z+1)^2}\left\{a(\alpha z+\beta)^2+b(\alpha z+\beta)(z+1)+c(z+1)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{(z+1)^2}\left\{(a\alpha^2+b\beta+c)z^2+(2a\alpha\beta+b\alpha+b\beta+2c)z+(a\beta^2+b\beta+c)\right\}.$$

We willen nu α en β zó bepalen dat de termen met z wegvallen, dus dat geldt:

$$(7) \qquad \begin{cases} 2d\alpha\beta+e(\alpha+\beta)+2f=0 \\ 2a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+2c=0. \end{cases}$$

Is $ae-bd=0$, dan kunnen we α en β niet uit (7) oplossen. Maar in dat geval worden de beide vormen dx^2+ex+f, ax^2+bx+c tot een zuivere vierkantsvorm teruggebracht als we substitueren $x=\frac{2z-b}{2a}$.

Beschouwen we nu het geval $ae-bd\neq 0$. Dan leiden we uit (7) af:

$$\alpha\beta = \frac{bf-ce}{ae-bd}, \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{cd-af}{ae-bd}.$$

Dus zijn α en β wortels van de volgende vierkantsvergelijking in ξ:

$$(ae-bd)\xi^2 + 2(af-cd)\xi + (bf-ce)=0.$$

We beweren dat deze vierkantsvergelijking twee verschillende reële wortels heeft. Het is daartoe voldoende te laten zien dat zijn discriminant, zeg D, positief is. We hebben

$$D = (af-cd)^2 - (ae-bd)(bf-ce).$$

Hierbij is $(ae-bd)(bf-ce)$ een homogene kwadratische vorm in b en e; splitsen we, na vermenigvuldiging met $-4df$, een kwadraat af, dan vinden we:

$$\begin{aligned} &-4df(ae-bd)(bf-ce)\\ &= +4df\left\{dfb^2-(af+cd)e+ace^2\right\}\\ &= \left\{2dfb-(af+cd)e\right\}^2 +4acdfe^2-(af+cd)^2 e^2\\ &= \left\{2dfb-(af+cd)e\right\}^2 -(af-cd)^2 e^2. \end{aligned}$$

We merken op dat df positief is, omdat dx^2+ex+f verondersteld werd geen reële nulpunten te bezitten. We hebben nu:

$$\begin{aligned} D &= (af-cd)^2 + \frac{1}{4df}\left[(2dfb-(af+cd)e^2)-(af-cd)^2 e^2\right]\\ &= \frac{1}{4df}\left[(af-cd)^2(4df-e^2) + (2dfb-(af+cd)e)^2\right]. \end{aligned}$$

De factor $4df-e^2$, het tegengestelde van de discriminant van de vorm dx^2+ex+f, is zeker positief. We merkten al op dat $df>0$ is. Uit de laatste uitdrukking voor D volgt dus dat $D\geqq 0$ is, terwijl voor $D=0$ vereist is:

$$af-cd=0, \quad 2dfb-(af+cd)e=0,$$

dus

$$af=cd \text{ en } bf=ce.$$

Stelt men $\frac{a}{d}=\lambda$ (vgl. $d\neq 0$), dan leidt dit tot

$$a=\lambda d, \quad c=\lambda f, \quad b=\lambda e.$$

Maar dit kan niet, omdat we uitgesloten hebben, dat de vormen dx^2+ex+f

en ax^2+bx+c evenredig zouden zijn. Dus is $D>0$. Dus, als $ae-bd\neq 0$ is, dan zijn er twee reële, verschillende getallen α en β, zodanig dat (7) geldt. We mogen dan de substitutie (6) uitvoeren, met die waarden van α en β.

Laten we bij de genoemde substitutie hebben:

$$dx^2+ex+f=\frac{1}{(z+1)^2}\quad(d_1z^2+f_1),$$

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{(z+1)^2}\quad(a_1z^2+c_1).$$

Wegens $\frac{dx}{dz}=\frac{(z+1)-(\alpha z+\beta)}{(z+1)^2}=\frac{\alpha-\beta}{(z+1)^2}$

gaat dan (5) over in

$$(\alpha-\beta)\int\frac{g(\frac{\alpha z+\beta}{z+1})(z+1)^{2m-1}}{(d_1z^2+f_1)^m\sqrt{a_1z^2+c_1}}dz\ ;$$

daar $g(x)$ een polynoom van hoogstens de graad $2m-1$ is, is hierbij $g(\frac{\alpha z+\beta}{z+1})(z+1)^{2m-1}$ een polynoom in z van hoogstens de graad $2m-1$, zeg $h(z)$.

De conclusie is dat onder de in de aanvang genoemde onderstellingen in beide gevallen: $^{1)}$ $ae-bd=0$; $^{2)}$ $ae-bd\neq 0$ de integraal (5) terug te brengen is tot een integraal van de vorm

$$(5')\qquad\int\frac{h(z)}{(d_1z^2+f_1)^m\sqrt{a_1z^2+c_1}}\,dz,$$

waar $a_1\neq 0$, $d_1\neq 0$ en $h(z)$ een polynoom in z is. We gaan nu na hoe we (5') kunnen integreren.

We splitsen $h(z)$ in de som van twee polynomen $h_1(z)$ en $h_2(z)$, waarbij $h_1(z)$ alleen oneven machten van z en $h_2(z)$ alleen even machten van z bevat. In

$$\int\frac{h_1(z)}{(d_1z^2+f_1)^m\sqrt{a_1z^2+c_1}}\,dz$$

substitueren we $\sqrt{a_1z^2+c_1}=u$; we hebben

$$\frac{du}{dz}=\frac{a_1z}{\sqrt{a_1z^2+c_1}}\ ,\ \text{dus } z\,\frac{dz}{du}=\frac{u}{a_1}\ ;$$ dus komt er een integraal van de vorm

$$\int\frac{h^*(u)}{(d_2u^2+f_2)^m}\,du$$

met een zeker polynoom $h^*(u)$ in u. De integraal

$$\int \frac{h_2(z)}{(d_1z^2+f_1)^m\sqrt{a_1z^2+c_1}}\,dz$$

brengen we tot de vorige terug d.m.v. de substitutie $z=\frac{1}{t}$: er komt dan in de teller een polynoom met alleen oneven machten van t.

Voorbeeld I. $$I=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\ .$$

Hier is $m=1$ en de teller zeker hoogstens van de graad $2m-1=1$. De vorm x^2-x+1 heeft geen reële nulpunten en is geen veelvoud van x^2+1. Dus zijn de voorgaande beschouwingen van toepassing. Substitutie van $x=\frac{\alpha z+\beta}{z+1}$ in de vormen x^2-x+1, x^2+1 geeft:

$$x^2-x+1=\frac{1}{(z+1)^2}\left\{(\alpha^2-\alpha+1)z^2+(2\alpha\beta-\alpha-\beta+2)z+\beta^2-\beta+1\right\},$$

$$x^2+1=\frac{1}{(z+1)^2}\left\{(\alpha^2+1)z^2+(2\alpha\beta+2)z+\beta^2+1\right\}.$$

We stellen nu $2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0$, $2\alpha\beta+2=0$. Dit geeft $\alpha\beta=-1$, $\alpha+\beta=0$. Dus $\alpha=1$, $\beta=-1$ of $\alpha=-1$, $\beta=1$.

Doen we de keuze $\alpha=-1$, $\beta=1$, d.w.z. substitueren we $x=\frac{1-z}{1+z}$. Dan komt er

$$I=\int_1^0 \frac{-2(z+1)}{(3z^2+1)\sqrt{2z^2+2}}\,dz=\sqrt{2}\int_0^1\frac{zdz}{(3z^2+1)\sqrt{z^2+1}}+\sqrt{2}\int_0^1\frac{dz}{(3z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

$$=\sqrt{2}(I_1+I_2).$$

We hebben

$$I_1=\int_0^1\frac{zdz}{(3z^2+1)\sqrt{z^2+1}}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{udu}{(3u^2-2)u}$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{du}{u^2-2/3}=\frac{1}{3\sqrt{2/3}}\cdot\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-\sqrt{2/3}}{u+\sqrt{2/3}}\right|\Bigg/_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\log\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\log(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2});$$

$$I_2=\int_0^1\frac{dz}{(3z^2+1)\sqrt{z^2+1}}=-\int_\infty^1\frac{1}{(1+3/t^2)\sqrt{1+1/t^2}}\ \frac{dt}{t^2}$$

$$=\int_1^\infty\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=\int_{\sqrt{2}}^\infty\frac{u\,du}{(u^2+2)u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_{\sqrt{2}}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} .$$

Dus tenslotte

$$I = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \log (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} .$$

II $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} .$

Door substitutie van $x = \frac{\alpha z+\beta}{z+1}$ krijgen we:

$$x^2-x+1 = \frac{1}{(z+1)^2} \left\{ (\alpha^2-\alpha+1)z^2+(2\alpha\beta-\alpha-\beta+2)z+\beta^2-\beta+1 \right\} ,$$

$$x^2+x+1 = \frac{1}{(z+1)^2} \left\{ (\alpha^2+\alpha+1)z^2+(2\alpha\beta+\alpha+\beta+2)z+\beta^2+\beta+1 \right\} .$$

We bepalen α en β zodanig dat $2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0$, $2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0$. Dat geeft $\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta=-1$, dus b.v. $\alpha=-1$, $\beta=1$. We vinden

$$I = \int_0^1 \frac{2(z+1)dz}{(3z^2+1)\sqrt{z^2+3}} = I_1 + I_2,$$

met

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2z\ dz}{(3z^2+1)\sqrt{z^2+3}} = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2u\ du}{(3u^2-8)u}$$

$$= \frac{2}{3.2.\sqrt{8/3}} \log \left| \frac{u-\sqrt{8/3}}{u+\sqrt{8/3}} \right| \Bigg/_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \log \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(3+\sqrt{8})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(3-\sqrt{8})} = \frac{1}{6}\sqrt{6} \log (\sqrt{3}-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}),$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{2dz}{(3z^2+1)\sqrt{z^2+3}} = 2\int_1^{\infty} \frac{t\ dt}{(t^2+3) \quad 1+3t^2}$$

$$= 2\int_2^{\infty} \frac{\frac{1}{3}u\ du}{\frac{1}{3}(u^2+8)u} = \frac{2}{\sqrt{8}} \text{ arc tg } \frac{u}{\sqrt{8}} \Big|_2^{\infty}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ arc tg } \sqrt{2},$$

dus

$$I = \frac{1}{6}\sqrt{6} \log(\sqrt{3}-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ arc tg } \sqrt{2}.$$

§ 40. Integratie van rationale functies van sin x en cos x.

We beschouwen allereerst de integraal

$$(1) \qquad \int \cos^m x \sin^n x \, dx,$$

waar m en n gehele getallen zijn. Is m of n <0, dan mag het integratievak geen punt $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ resp. $k\pi$ (k geheel) bevatten.

a) Zij een der exponenten oneven, b.v. m. Dan gaat (1) door substitutie van sin x =u over in de integraal van een rationale functie van u. Want $\cos x = \frac{d}{dx}\sin x$ en een even macht van cos x is rationaal uit te drukken in sin x.

b) Zijn beide exponenten even, dan voert in elk geval de substitutie tg x=u tot de integraal van een rationale functie. Want

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx}\,\mathrm{tg}\,x, \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x},$$

$$\text{dus } \int \cos^m x \sin^n x \, dx = \int \cos^{m+2} x \sin^n x \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int (1+u^2)^{-\frac{m+2}{2}} \left(1+\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{n}{2}} du \qquad [u = \mathrm{tg}\,x].$$

De substitutie tg x = u is zeker geoorloofd in een interval dat géén punt $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ bevat. Op analoge wijze kan men de substitutie cot x=u gebruiken; die is geoorloofd in een interval dat géén punt $k\pi$ bevat.

c) Zijn beide exponenten positief, dan kan men door toepassing van goniometrische formules de integrand herleiden tot de som van een aantal sinussen en cosinussen en daarna integreren. Men kan b.v. gebruiken $\sin^2 x \cos^2 x = (\frac{1}{2}\sin 2x)^2 = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$.

d) Zijn beide exponenten even, is $m+n>0$, maar een van de exponenten negatief, dan kan men partieel integreren tot de negatieve exponent nul is geworden en dan verder volgens c) te werk gaan.

e) Het speciale geval m+n=0. We hebben dan te maken met de integraal $\int \mathrm{tg}^n x \, dx$, waar n een geheel getal is. Voor n=0 resp. 1 hebben we:

$$\int dx = x, \quad \int \mathrm{tg}\,x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\log|\cos x|.$$

Voor $n>1$ splitsen we de integrand:

$$\mathrm{tg}^n x = \mathrm{tg}^{n-2} x . \mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}^{n-2} x . \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \mathrm{tg}^{n-2} x . \frac{1}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^{n-2} x,$$

zodat
$$\int tg^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\ tg^{n-1}x - \int tg^{n-2}x\, dx.$$

Dit is een recursieformule die ons in staat stelt om $\int tg^n x\, dx$ te berekenen voor $n > 1$, omdat we die integraal kennen voor $n=0$ en $n=1$.

Is $n < 0$, dan is $m=-n > 0$ en schrijven we de gegeven integraal liever als $\int \cot^m x\, dx$. Die kan op dezelfde wijze behandeld worden.

Voorbeelden. 1) $\int \sin^{10}x \cos x\, dx = -\int \sin^{10}x \frac{d \sin x}{dx} dx = -\frac{\sin^{11}x}{11}$

2) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{1}{1-\cos^2 x} \frac{d}{dx} \cos x\, dx$$

$$= +\tfrac{1}{2} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

wat nog herleid kan worden tot:

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{2 \cos^2 \frac{1}{2}x} = \log \left| tg\, \tfrac{1}{2}x \right|. \quad (x \neq k\pi)$$

3) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{1-\sin^2 x} \frac{d \sin x}{dx} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1-\cos(x+\pi/2)}{1+\cos(x+\pi/2)}$$

$$= \log \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \qquad (x \neq (k+\tfrac{1}{2})\pi).$$

4) $$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = -\int \frac{1}{(1-\sin^2 x)^2} \frac{d \sin x}{dx} dx = -\int \frac{du}{(1-u^2)^2} \quad [u = \sin x]$$

wegens $$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{u}{1-u^2} - \int u . \frac{1}{(1-u^2)^2} .2u\, du = \frac{u}{1-u^2} - 2\int \frac{du}{(1-u^2)^2} + 2\int \frac{du}{1-u^2}$$

hebben we
$$\int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2} + \frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2} = \frac{1}{4} \log \left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2};$$

dus is tenslotte
$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = -\frac{1}{4} \log \left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} \qquad (x \neq (k+\tfrac{1}{2})\pi).$$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int (1+\cot^2 x)\,\frac{d\cot x}{dx}\,dx = -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x \quad (x \neq k\pi).$

6) $\displaystyle\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x.$$

7) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx = +\frac{\sin^3 x}{\cos x} - 3\int \frac{1}{\cos x}\sin^2 x \cos x\, dx$

$$= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\sin 2x \quad (x \neq (k+\tfrac{1}{2})\pi).$$

8) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg} x.\,\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \int \operatorname{tg} x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \log|\cos x| \quad (x \neq (k+\tfrac{1}{2})\pi).$$

9) $\displaystyle\int \cot^2 x\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x - x \quad (x \neq k\pi).$

We merken op dat men op geheel analoge wijze de integraal

(2) $$\int \operatorname{ch}^m x \operatorname{sh}^n x\, dx,$$

waar m en n gehele getallen zijn, kan behandelen. Men heeft immers analoge formules voor de afgeleiden van sh x, ch x, th x, cth x. Zo heeft men:

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \int \frac{du}{u^2-1} \qquad [u = \operatorname{ch} x].$

Dus
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}.$$

11) $\displaystyle\int \operatorname{th}^3 x\, dx = \int \operatorname{th} x.\,\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int \operatorname{th} x\, dx - \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x$

$$= \log \operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x.$$

Men kan de integralen, beschouwd in het begin van § 39, terugbrengen tot de hier beschouwde, als men substitueert $x = \sin u$, $x = \cos u$, $x = \operatorname{sh} u$ of $x = \pm\operatorname{ch} u$. Men maakt hierbij gebruik van de formules

$$\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x, \quad \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|, \quad \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = |\operatorname{sh} x|.$$

Dus in $\int x^m(x^2+1)^{p/2}dx$ substitueren we $x=\mathrm{sh}\ u$, waardoor we krijgen

$$\int x^m(x^2+1)^{p/2}dx=\int \mathrm{sh}^m u\ \mathrm{ch}^{p+1}u\ du.$$

Evenzo vinden we door substitutie van $x=\sin u$:

$$\int x^m(1-x^2)^{p/2}dx=\int \sin^m u\ \cos^{p+1}u\ du\ \left(-1<x<1;\ -\tfrac{\pi}{2}<u<\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Tenslotte is

$$\int x^m(x^2-1)^{p/2}dx=\pm\int \mathrm{ch}^m u\ \mathrm{sh}^{p+1}u\ du,$$

met als substitutiefunctie $x=\mathrm{ch}\ u$ in het interval $x>1$ en $x=-\mathrm{ch}\ u$ in het interval $x<-1$.

Speciaal voor bepaalde integralen leiden deze substituties soms snel tot resultaat. We hebben b.v.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\pi/2}\cos u.\cos u\ du=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos 2\ u+1)du$$

$$=\left[\frac{1}{4}\sin 2\ u+\tfrac{1}{2}u\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

Hier staat te lezen, dat de oppervlakte van een kwart van de eenheidscirkel gelijk is aan $\pi/4$ (zie ook de definitie van π als halve omtrek van de eenheidscirkel op p.118).

Elke integraal

(3) $$\int R(\sin x,\ \cos x)\ dx,$$

waarbij $R(\sin x, \cos x)$ rationaal opgebouwd is uit de functies $\sin x$ en $\cos x$, gaat over in de integraal van een rationale functie als we substitueren

$$\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}x=u \quad \text{of} \quad \cot\tfrac{1}{2}x=u.$$

We hebben immers:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ x=\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}x}=\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}x),$$

$$\sin x=2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x=\frac{2\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}x}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x},$$

$$\cos x=\cos^2\tfrac{1}{2}x-\sin^2\tfrac{1}{2}x=\cos^2\tfrac{1}{2}x\ (1-\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}x)=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x}.$$

We vinden dus:

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int \frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x}\, R\left(\frac{2\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}x}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x}, \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x}\right) \frac{d\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}x}{dx}\, dx$$

$$= \int \frac{2}{1+u^2}\, R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) du \qquad \left[u=\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ x\right].$$

De substitutie is geoorloofd in elk interval dat geen punt $(2k+1)\pi$ bevat en ook geen punt waar $R(\cos x, \sin x)$ oneindig wordt.

We beschouwen speciaal de integraal

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0).$$

Deze integraal bestaat in elk interval dat geen wortel van $\mathrm{tg}\ x = -\frac{a}{b}$ bevat. Substitutie van $\mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\ x=u$ in een interval, dat bovendien geen punt $(2k+1)\pi$ bevat, geeft:

$$\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x} = \int \frac{}{\left\{a(1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}x)+2\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}x\right\}\ \cos^2\frac{1}{2}x} = 2\int \frac{du}{a(1-u^2)+2bu}$$

$$= 2\int \frac{-a\ du}{(au-b)^2-(a^2+b^2)} = 2\int \frac{dv}{v^2-(a^2+b^2)} \qquad [au+b=v]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\frac{v+\sqrt{a^2+b^2}}{v-\sqrt{a^2+b^2}}\right| ,$$

dus

$$\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\frac{a\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}x-b+\sqrt{a^2+b^2}}{a\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}x-b-\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

We merken op dat de uitdrukking achter de logarithme een eindige limiet, en wel limiet 1 heeft, in elk punt $(2k+1)\pi$. We kunnen hier dus de hoofdstelling toepassen op elk segment dat geen wortel van $\mathrm{tg}\ x=-\frac{a}{b}$ bevat.

Een andere wijze van behandeling is de volgende:

$$\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x} = \int \frac{a\cos x+b\sin x}{(a\cos x+b\sin x)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{a^2+b^2-(b\cos x-a\sin x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(b\cos x-a\sin x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b\cos x-a\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}-b\cos x+a\sin x}\right|.$$

Dit antwoord kan tot het vorige worden herleid. We voeren dit niet uit.

Zijn a en c constanten $\neq 0$, dan moet men ook $\int \frac{dx}{a \cos x + c}$ met de substitutie $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = u$ behandelen. We hebben

$$\int \frac{dx}{a \cos x+c} = \int \frac{1}{a(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x)+c(1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x)} \cdot \frac{dx}{\cos^2\frac{1}{2}x} = 2\int \frac{du}{a+c+(c-a)u^2}$$

$\left[u=\operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right]$. Bij de verdere herleiding maakt het verschil uit of $a+c$ en $c-a$ positief, negatief of nul zijn. Bijzonder eenvoudig zijn de gevallen $a+c=0$ en $a-c=0$. We hebben dan

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2\frac{1}{2}x} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x, \quad \int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2 \sin^2\frac{1}{2}x} = -\cot \tfrac{1}{2} x.$$

Het bovenstaande is geldig in elk interval dat geen wortel van $\cos x = -\frac{c}{a}$ en geen punt $(2k+1)\pi$ bevat.

Op analoge wijze worden behandeld

$$\int \frac{dx}{b \sin x+c}, \quad \int \frac{dx}{a \cos x+b \sin x+c}.$$

<u>Voorbeelden</u>. 1) $$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4 \cos x-3 \sin x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(2-2 \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x-3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}x)\cos^2\frac{1}{2}x}$$

$$= \int_0^{\operatorname{tg} \pi/8} \frac{du}{2-2u^2-3u}.$$

Deze herleiding is zeker geoorloofd, daar het segment $(0, \pi/4)$ geen punt $(2k+1)\pi$ en geen wortel van $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ bevat. We berekenen nu eerst $\alpha = \operatorname{tg} \pi/8$. We hebben $1 = \operatorname{tg} \pi/4 = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$; in verband met $\alpha > 0$ dus $\alpha = -1+\sqrt{2}$.

We krijgen dus:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4 \cos x-3 \sin x} = -\int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{du}{2u^2+3u-2} = -\tfrac{1}{2}\int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{du}{(u+\frac{3}{4})^2-\frac{25}{16}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_{3/4}^{-1/4+\sqrt{2}} \frac{dv}{v^2-\frac{25}{16}} = +\frac{1}{5} \log \left|\frac{5/4+v}{5/4-v}\right| \Bigg|_{3/4}^{-1/4+\sqrt{2}} = \frac{1}{5} \log \frac{(1+\sqrt{2})\frac{1}{2}}{(\frac{3}{2}-\sqrt{2})2}$$

$$= \frac{1}{5} \log \frac{\sqrt{2}+1}{2(3-2\sqrt{2})} = \frac{1}{5} \log \frac{(\sqrt{2}+1)^3}{2}$$

2) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ moet gesplitst worden. We hebben:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{dx}{(2+2\ \text{tg}^2\tfrac{1}{2}x+1-\text{tg}^2\tfrac{1}{2}x)\cos^2\tfrac{1}{2}x} = 2\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{arc tg}\ \frac{\text{tg}\tfrac{1}{2}x}{\sqrt{3}},$$

$$\text{dus} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \text{arc tg}\ \frac{\text{tg}\tfrac{1}{2}x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\pi} + \text{arc tg}\ \frac{\text{tg}\tfrac{1}{2}x}{\sqrt{3}}\Big|_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ .$$

3) $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2\cos x+\sin x+3} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2-2\ \text{tg}^2\tfrac{1}{2}x+2\ \text{tg}\tfrac{1}{2}x+3+3\ \text{tg}^2\tfrac{1}{2}x)\cos^2\tfrac{1}{2}x} =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+2u+5} = 2\int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2+4} = \text{arc tg}\ v\Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ .$$

Soms kan men een integraal van het type (3) rationaal maken door te substitueren tg x=u. Indien dat zo is, dan is deze substitutie te prefereren, omdat hij minder bewerkelijk is. We volstaan met enige voorbeelden.

1) $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\cos x+\sin x)(\cos x+2\sin x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\text{tg}\ x)(1+2\ \text{tg}\ x)}\ \frac{d\ \text{tg}\ x}{dx}\ dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{du}{(u+1)(2u+1)} = \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{2u+1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \log \frac{2u+1}{u+1}\Big|_0^{\infty} = \log 2.$$

2) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\ dx}{(\cos x+\sin x)(1+\cos^2 x)} = \int_0^{\infty} \frac{du}{(u+1)(u^2+2)}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{u-1}{u^2+2} + \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \left[-\frac{1}{6}\log|u^2+2| + \frac{1}{3\sqrt{2}}\ \text{arc tg}\ \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\log|u+1| \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\ \text{arc tg}\ \frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{6}\log \frac{u^2+2}{(u+1)^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{12}\pi\sqrt{2} + \frac{1}{6}\log 2.$$

§41. Integratie van functies van e^x, $\log x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$.

We behandelen enkele typen.

I. $\int x^n e^x\,dx$ (n een natuurlijk getal).

Door partieel te integreren en daarbij de factor x^n te integreren vinden we $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx$.
Door dit te herhalen komen we tenslotte terecht op $\int e^x dx = e^x$.

II. $\int e^x \cos x\,dx$.

We integreren nu twee maal partieel, daarbij b.v. beide keren de factor e^x integrerend. Dan krijgen we:

$$\int e^x\ x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

We zijn op de uitgangsintegraal terechtgekomen en vinden

$$\int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x).$$

Evenzo bepaalt men $\int e^x \sin x\,dx$. In plaats van I en II kan men natuurlijk ook $\int x^n e^{ax}\,dx$, $\int e^{ax} \cos bx\,dx$ beschouwen (a,b constanten).

III. $\int x^\alpha \log x\,dx$ (α een constante).

Door substitutie van $\log x = u$ gaat deze integraal over in

$\int e^{(\alpha+1)u}\,u\,du$, wat van het type I is. Is $\alpha \neq -1$, dan kunnen we ook partieel integreren:

$$\int x^\alpha \log x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\log x - \frac{1}{(\alpha+1)^2}\,x^{\alpha+1}.$$

IV. $\int x^n \operatorname{arc\,sin} x\,dx$ (n een natuurlijk getal).

Door partiële integratie krijgen we

$$\int x^n \operatorname{arc\,sin} x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,sin} x - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Daarmee is de integraal teruggevoerd op een van bekend type.

Op analoge wijze behandelt men $\int x^n \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

<u>Opgave 119</u>. Bereken $\int_0^1 \frac{}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $\int_0^1 \sqrt[6]{\frac{x+3}{x+4}}\,dx$.

Opgave 120. Bepaal $\int x^2(x^2-1)^{-5/2}\,dx \quad (x > 1 \text{ of } x < -1)$,

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2}\,dx \;(-1 < x < 1), \quad \int \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\,dx \quad (-1 < x < 1).$$

Opgave 121. Geef aan hoe de integraal

$$\int R(x)\,(ax^2 + bx + c)^{p/2}\,dx,$$

waar $R(x)$ een rationale functie voorstelt, a,b en c constanten zijn en p een oneven, geheel getal is (> 0 of < 0), behandeld moet worden.

Opgave 122. Bepaal

$$\int \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx\,.$$

Opgave 123. Bepaal $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\cos^2 x}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^4 x}$, $\displaystyle\int \sin^3 x\,\cos^3 x\,dx$,

$$\int \frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx, \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}, \int \frac{dx}{\sin x+3}\,.$$

Opgave 124. Bepaal $\int x\,e^x \sin x\,dx$, $\int x^3 \sin x\,dx$, $\int \sqrt[3]{x}\,\log x\,dx$,

$$\int (\arcsin x)^2\,dx, \quad \int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx, \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx \;(a,b > 0).$$

Opgave 125. Leid recursieformules af voor

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx, \quad \int \mathrm{tg}^n\,x\,dx, \quad \int x^n \cos\alpha x\,dx.$$

§ 42. Integratie van reeksen.

We weten reeds dat rationale functies en functies met wortelvormen vaak primitieven hebben, die niet meer tot deze klasse van functies behoren. En slechts in een aantal gevallen kunnen we functies, die exponentiële of goniometrische uitdrukkingen, of de inversen daarvan (logarithmische resp. cyclometrische uitdrukkingen), bevatten, in "gesloten vorm" integreren. Er zijn echter andere methoden om een integraal aan te pakken. B.v. methoden met behulp waarvan we in vele gevallen een primitieve kunnen bepalen in de vorm van een oneindige reeks van functies. Men begint daarbij met de integrand in een reeks te ontwikkelen. We zullen hier allereerst een aantal stellingen behandelen betreffende de integratie van reeksen van functies. Uiteraard zullen we daarbij gebruik maken van een aantal begrippen en resultaten, behandeld in de cursus analyse II, speciaal toegepast voor reële functies. Van fundamenteel belang is het begrip "uniforme convergentie van een reeks functies". Voor reële functies, gedefinieerd op een interval, luidt het als volgt (zie an II, pp.41 en 45):

Laten $f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$ reële functies zijn, alle gedefinieerd op een segment of interval (a,b). Dan heet de reeks functies $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>uniform convergent</u> op het interval (a,b), als er op (a,b) een functie $s(x)$ bestaat, zó dat er bij elk getal $\varepsilon > 0$ een rangnummer N is te vinden met

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x) \right| < \varepsilon \qquad \text{als } n > N \text{ en } x \in (a,b).$$

De functie $s(x)$, indien hij bestaat, is eenduidig bepaald en heet de <u>som</u> van de reeks.

<u>Stelling</u>. Laten de functies $f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$ gedefinieerd, begrensd en integreerbaar zijn op een segment (a,b) (dus a en b eindig). Indien dan de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>uniform convergeert</u> op het segment (a,b), dan is ook de som van die reeks integreerbaar over (a,b) en er geldt:

$$(1) \qquad \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx,$$

m.a.w. integratie en sommatie mogen worden verwisseld.

<u>Bewijs</u>. Zij $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) \quad (n=1,2,\dots)$, $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

We bewijzen eerst dat $s(x)$ integreerbaar is over (a,b). Zij $\varepsilon > 0$. Er is een rangnummer m, zodanig dat

$$|s(x) - s_m(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{voor } a \leqq x \leqq b.$$

De schommeling van $s(x)-s_m(x)$ over (a,b) is dan kleiner dan $2.\frac{\varepsilon}{4(b-a)} =$ $= \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Dus is het somverschil van $s(x)-s_m(x)$ t.o.v. een willekeurige verdeling van (a,b) kleiner dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ (zie p.83). Verder is de functie $s_m(x)$ eigenlijk integreerbaar over (a,b), als som van eindig veel eigenlijk integreerbare functies. Er is dus een verdeling D van (a,b), zó dat het somverschil van $s_m(x)$ t.o.v. D kleiner is dan $\frac{1}{2}\varepsilon$. Het somverschil van $s(x)=\{s(x)-s_m(x)\}+s_m(x)$ t.o.v. D is dan kleiner dan ε. Er volgt dat $s(x)$ integreerbaar is over (a,b) (zie eerste integrabiliteitscriterium, p.87).

Vervolgens leiden we (1) af. Zij weer $\varepsilon > 0$. Er is een rangnummer n_0, zó dat

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{als } n > n_0 \text{ en } a \leqq x \leqq b.$$

Daar $s(x)$ integreerbaar is over (a,b), mogen we opschrijven:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b s_n(x)\,dx + \int_a^b \{s(x) - s_n(x)\}\,dx.$$

Voor $n > n_0$ hebben we

$$\left|\int_a^b s(x)\,dx - \int_a^b s_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \{s(x) - s_n(x)\}\,dx\right|$$

$$\leqq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon .$$

Dus is

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x) = \int_a^b s(x)\,dx.$$

De integraal in het linkerlid mogen we schrijven als

$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx+\ldots+\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx$ (herhaalde toepassing van stelling V, p.90). Dus:

$$(2) \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx.$$

De som in het rechterlid van (1) (som van een reeks getallen!) is per definitie de limiet in het linkerlid van (2). Daarmee is (1) bewezen.

Gevolg. Is een reeks van op een segment (a,b) begrensde, integreerbare functies uniform convergent op (a,b), dan is

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt \quad \text{voor } a \leqq x \leqq b.$$

In verband met de eigenschap I, p.96 en de eigenschap (7.7), an II 42, volgt hieruit:

Een op een segment (a,b) uniform convergente reeks van aldaar continue functies heeft een primitieve op (a,b), en wel o.a. de som van de integralen van die functies over (a,x), waar $a < x < b$.

De volgende uitspraak is nagenoeg aequivalent met deze eigenschap:

Een reeks van functies $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$, differentieerbaar op een segment (a,b), mag termsgewijs worden gedifferentieerd voor $a < x < b$, als de afgeleiden $\frac{d}{dx}\varphi_n(x)$ continu zijn op het segment (a,b) en de reeks dier afgeleiden uniform convergeert op (a,b).

Een bijzonder geval is het geval van een functie $f(x)$, voorgesteld door een machtreeks

$$(*) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots ,$$

convergerend voor $-R < x < R$ $(R > 0)$. We hebben:

$$(**) \quad \int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots \quad (-R < x < R).$$

Omgekeerd is het rechterlid van $(*)$ de afgeleide van het rechterlid van $(**)$ voor $-R < x < R$. Dus machtreeksen mogen termsgewijs gedifferentieerd worden. In de cursus analyse II (p.48) is dit ook bewezen voor complexe waarden van het argument binnen de convergentiecirkel, en voor machtreeksen met complexe coëfficiënten. Doch nu hebben we, zij het nog slechts voor reële functies, een veel algemener resultaat.

Voorbeeld I. Voor $|x| < 1$ mogen we herleiden:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

We merken op, dat hieruit volgt:

$$\text{arc tg } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (|x| < 1).$$

(voor complexe waarden van x afgeleid in an II, p.76).

II. Voor $|x| < 1$ is evenzo (zie ook an II 68)

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} .$$

We behandelen nu twee stellingen over integratie van reeksen, waarbij de voorwaarden iets zwakker zijn.

Stelling. Zij (a,b) een begrensd interval en $f_n(x)$ begrensd en integreerbaar over (a,b) $(n=1,2,\ldots)$. Zij de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniform convergent op elk inwendig subsegment (α,β) van (a,b). Laat er verder een getal M zijn met de eigenschap:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M \text{ voor alle } n \text{ en alle } x \text{ met } a<x<b.$$

Dan is $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ integreerbaar over (a,b) en er geldt

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

Bewijs. Stellen we $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $(n=1,2,\ldots)$; $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Uit de voorwaarden volgt, in verband met de voorgaande stelling, dat $s(x)$ integreerbaar is over elk inwendig subsegment (α,β) van (a,b). Voor elke x met $a<x<b$ is $|s_n(x)| \leq M$, ongeacht n, dus ook $|s(x)| \leq M$. Dan is $s(x)$ ook integreerbaar over (a,b) (zie de stelling op p.97). Het interesseert ons hierbij niet of $s(x)$ ook gedefinieerd is in de punten a en b (uit de voorwaarden van de stelling volgt niet dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ en $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ convergeren); we kunnen desgewenst aanvullend definiëren $s(a)=s(b)=0$.

Verder merken we op dat, omdat de functies $f_n(x)$ integreerbaar zijn over (a,b), ook de partiële sommen $s_n(x)$ dat zijn. We hebben nu, als $a<\alpha<\beta<b$,

$$\left| \int_a^b s(x)\,dx - \int_a^b s_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \{s(x) - s_n(x)\} \, dx \right|$$

$$= \left| \int_a^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{b} \right|$$

$$\leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} \{s(x) - s_n(x)\} \, dx \right| + 2M(\alpha - a) + 2M(b-\beta),$$

Dan hangen de getallen a_n niet van α af en is $|F_n(\alpha)| \leqq a_n$ $(a < \alpha < \beta;\ n=1,2,\ldots)$. Uit de voorwaarden van de stelling volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert. Wegens het criterium van Weierstrass (zie an II 46) is dan de reeks functies $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ uniform convergent op het interval (a,β). Uit de voorwaarden van de stelling volgt ook dat $F_n(\alpha)$ een eindige rechterlimiet heeft in $\alpha=a$, en wel $\int_a^{\beta} f_n(x)\,dx$. Dan heeft ook de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ een eindige rechterlimiet in $\alpha=a$, en wel $\lim_{\alpha\to a}^{+} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha\to a}^{+} F_n(\alpha)$ (zie an II 42-43).

Anders gezegd: $\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$ heeft, als functie van α, een eindige rechterlimiet in $\alpha=a$ en er geldt

$$\lim_{\alpha\to a}^{+} \int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\beta} f_n(x)\,dx.$$

Evenzo bewijst men

$$\int_{\alpha}^{b}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{b} f_n(x)\,dx.$$

Daaruit volgt de stelling.

Voorbeelden. I. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx$ bestaat. Immers de integrand is continu voor $x > 0$, heeft een rechterlimiet 1 in het punt $x=0$ (ga na), en voor $x > 1$ geldt $\frac{x}{e^x-1} < \frac{x}{x^3/3!} = \frac{6}{x^2}$, terwijl $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ bestaat. Om de integraal te berekenen, gaan we de integrand in één reeks ontwikkelen. En wel schrijven we $\frac{x}{e^x-1} = \frac{x\,e^{-x}}{1-e^{-x}}$; voor $x > 0$ hebben we dus

$$\frac{x}{e^x-1} = x\,e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = x\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

De laatste reeks convergeert niet voor $x=0$. Maar hij convergeert uniform op elk interval (α,β) met $\beta > \alpha > 0$. Verder is $|x\,e^{-nx}| = x\,e^{-nx}$ integreerbaar over $(0,\infty)$. En wel hebben we

$$\int_0^{\infty} x\,e^{-nx}\,dx = -\frac{1}{n}x\,e^{-nx}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{\infty} e^{-nx}\,dx$$

$$= 0 - \frac{1}{n^2}\,e^{-nx}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Tenslotte convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |x\ e^{-nx}|\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (zie an II 22, r.14). Dus is voldaan aan de voorwaarden van de stelling op p.182, met $a=0, b=\infty$, $f_n(x)=x\ e^{-nx}$. We hebben dus

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\ dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x\ e^{-nx}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x\ e^{-nx}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$

Men kan bewijzen dat de som van de laatste reeks gelijk is aan $\pi^2/6$.

II. De integraal $\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\ dt$ wordt tot de vorige teruggebracht door de substitutie $1-t=e^{-u}$, dus $t=1-e^{-u}$. We krijgen dan immers

$$\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\ dt = \int_0^{\infty} \frac{-u}{1-e^{-u}} \cdot \frac{d}{du}(1-e^{-u})\ du$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{u}{1-e^{-u}}\ e^{-u}\ du = -\int_0^{\infty} \frac{u}{e^u-1}\ du.$$

III. De integraal $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x-1}\ dx$ (a een constante > 0) bestaat ook en wordt op dezelfde wijze berekend als de integraal onder I. We berekenen daartoe eerst $\int_0^{\infty} \sin(ax) e^{-nx}\ dx$ $(n=1,2,\ldots)$. We hebben

$$\int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax\ dx = -\frac{1}{a} e^{-nx} \cos a\ x \Big|_0^{\infty} - \frac{n}{a} \int_0^{\infty} e^{-nx} \cos ax\ dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{n}{a^2} e^{-nx} \sin ax \Big|_0^{\infty} - \frac{n^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax\ dx,$$

zodat
$$\int_0^{\infty} e^{-nx} \sin ax\ dx = \frac{1}{a} : \left(1+\frac{n^2}{a^2}\right) = \frac{a}{n^2+a^2} .$$

Verder is
$$\int_0^{\infty} |e^{-nx} \sin ax|\, dx < \int_0^{\infty} e^{-nx}\, ax\ dx,$$

wegens $\sin ax \leqq ax$ voor $x \geqq 0$. Dus is (zie de behandeling van voorbeeld I):

$$\int_0^{\infty} |e^{-nx} \sin ax|\, dx < \frac{a}{n^2}$$

(we merken op dat de schatting $|\sin ax| \leqq 1$, dus $|e^{-nx} \sin ax| \leqq e^{-nx}$ niet tot het gewenste doel voert).

En $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2}$ convergeert. Tenslotte is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin ax$ uniform convergent op elk interval (α, β) met $\beta > \alpha > 0$. We hebben dus, wederom op grond van de stelling op p.182,

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x-1}\,dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\sin ax\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}\sin ax\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{n^2+a^2}\,.$$

Men kan bewijzen dat de som van de gevonden reeks gelijk is aan $\frac{\pi}{2a}\operatorname{cth}\pi a - \frac{1}{2a^2}$.

IV. De integraal $\int_0^1 t^a \log(1-t)\,dt$ (a een constante) bestaat als $a > -2$. Voor $|t| < 1$ is

$$t^a \log(1-t) = -t^a \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}t^n = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}t^{n+a}.$$

De reeks in het rechterlid convergeert uniform op het interval (α,β), als $0 < \alpha < \beta < 1$. De functie $\frac{1}{n}t^{n+a}$ is integreerbaar over $(0,1)$ voor $n=1,2,\ldots$, mits $a > -2$, en we hebben daarbij

$$\int_0^1 \frac{1}{n}t^{n+a}\,dt = \frac{1}{n(n+1+a)}\,t^{n+1+a}\Big|_0^1 = \frac{1}{n(n+1+a)}\,.$$

De reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1+a)}$ convergeert. Dus is

$$\int_0^1 t^a \log(1-t)\,dt = -\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}t^{n+a}\,dt = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1+a)}\,.$$

Voor $a=-1$ krijgen we het antwoord terug dat we hierboven hadden (zie I en II).

V. Zij $a > -1$. Dan bestaat de integraal

$$\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x}}\,dx\,.$$

Voor $0 < x < 1$ hebben we (zie an II 72):

$$\frac{x^a}{\sqrt{1-x}} = x^a \sum_{n=0}^\infty \binom{-\frac12}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \binom{-\frac12}{n} x^{n+a}\,.$$

We beschouwen allereerst de binomiaalcoëfficiënt $\binom{-\frac12}{n}$ wat nader. We hebben

$$\binom{-\frac12}{n} = \frac{(-\frac12).(-\frac32)\ldots.(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = (-1)^n \frac{\frac12\cdot\frac32\ \ldots\ldots\frac{2n-1}{2}}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{1.3.5.\ \ldots(2n-1)}{2^n\,n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n.2.4.6.\ \ldots\ .(2n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,.$$

Een schatting voor $\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right|$ krijgen we als volgt:

$$\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right| = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n},$$

dus $\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$,

dus $\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}\right| < \sqrt{\frac{1}{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\qquad (n=1,2,\ldots)$.

De functies $(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{n+a}$ zijn alle integreerbaar over $(0,1)$. De reeks van deze functies convergeert uniform op elk interval (α,β) met $0<\alpha<\beta<1$, omdat in zo'n interval geldt

$$(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{n+a} < \frac{1}{\sqrt{n}}\alpha^a\beta^n < \alpha^a\beta^n \quad (n=1,2,\ldots).$$

Verder is

$$\int_0^1\left|\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{n+a}\right|dx < \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 x^{n+a}\,dx = \frac{1}{(n+a+1)\sqrt{n}} \quad (n=1,2,\ldots)$$

en $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a+1)\sqrt{n}}$ convergeert. Dus mogen we herleiden

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{n+a}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{n+a}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\cdot\frac{1}{n+a+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(n+a+1)}.$$

VI. We zullen nu bewijzen dat men de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ termsgewijs mag integreren over het vak $(0,\pi)$. We merken alvast op dat in elk geval elk der functies $\frac{\sin nx}{n}$ integreerbaar is over $(0,\pi)$.

Als voorbereiding beschouwen we de uitdrukking $B_{m,n}(x)$, gedefinieerd door

$$B_{m,n}(x) = \sum_{\nu=m}^{n}\sin\nu x \quad (0\leqq x\leqq\pi),$$

waar m en n natuurlijke getallen zijn met $n\geqq m$. We stellen nog $B_{m,m-1}(x)=0$ $(m=1,2,\ldots)$. We kunnen een schatting voor $B_{m,n}(x)$ afleiden door als volgt te werk te gaan. We vermenigvuldigen met $\sin\frac{1}{2}x$ en herleiden dan:

$$\sin \tfrac{1}{2} x . B_{m,n}(x) = \sum_{\nu=m}^{n} \sin \tfrac{1}{2} x \sin \nu x$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=m}^{n} \left\{ \cos(\nu - \tfrac{1}{2})x - \cos(\nu + \tfrac{1}{2})x \right\} = \tfrac{1}{2} \left\{ \cos(m-\tfrac{1}{2})x - \cos(n-\tfrac{1}{2})x \right\} .$$

Dus is $\left| \sin \tfrac{1}{2}x . B_{m,n}(x) \right| \leqq 1$. Voor $0 < x < \pi$ hebben we dus

$$\left| B_{m,n}(x) \right| \leqq \frac{1}{\sin \tfrac{1}{2}x} .$$

Laat nu δ een positief getal $< \tfrac{1}{2}\pi$ zijn. We beperken x tot het segment $(\delta, \pi - \delta)$. Door partiële sommatie (zie p.105) vinden we:

$$\sum_{\nu=m}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \sum_{\nu=m}^{n} \frac{1}{\nu} \left\{ B_{m,\nu}(x) - B_{m,\nu-1}(x) \right\}$$

$$= \sum_{\nu=m}^{n-1} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) B_{m,\nu}(x) + \frac{1}{n} B_{m,n}(x) .$$

Dus is, voor $m \geqq n$ en $\delta \leqq x \leqq \pi - \delta$,

$$\left| \sum_{\nu=m}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} \right| \leqq \frac{1}{\sin \tfrac{1}{2}\delta} \left\{ \sum_{\nu=m}^{n-1} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) + \frac{1}{n} \right\} = \frac{1}{m \sin \tfrac{1}{2}\delta} .$$

Voor de som in het linkerlid hebben we dus, op het segment $\delta \leqq x \leqq \pi - \delta$, een grens, die alleen van δ en m afhangt, en die tot nul nadert voor $m \to \infty$. Hieruit volgt dat de beschouwde reeks functies uniform convergeert op elk segment $(\delta, \pi - \delta)$ (zie an II 42, stelling (7.6)).

We beschouwen nu een willekeurig punt x met $0 < x < \pi$. We stellen $k = [\pi/x]$. Voor $n \leqq k$ hebben we, wegens $|\sin \nu x| \leqq \nu x$,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu x}{x} = nx \leqq kx \leqq \pi .$$

Voor $n > k$ hebben we

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\sin \nu x}{\nu} + \sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} .$$

Daarbij is $\left| \sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} \right| \leqq \frac{1}{(k+1)\sin \tfrac{1}{2}x}$.

Nu is $\frac{\sin t}{t}$ een monotoon dalende functie van t voor $0 < t < \tfrac{1}{2}\pi$, wegens $\frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t} = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t}{t^2}(t - \operatorname{tg} t) < 0$ voor $0 < t < \tfrac{1}{2}\pi$. Dus is $\frac{\sin \tfrac{1}{2}x}{x} > \frac{\sin \tfrac{1}{2}\pi}{\pi} = \frac{1}{\pi}$, dus $\sin \tfrac{1}{2} x > \frac{x}{\pi}$. Dus $\frac{1}{(k+1)\sin \tfrac{1}{2}x} < \frac{\pi}{(k+1)x} < 1$, wegens $k+1 > \pi/x$.

Voor $n > k$ hebben we dus

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}\right| \leqq \left|\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\sin \nu x}{\nu}\right| + \left|\sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}\right| < \pi + 1.$$

De partiële sommen van de beschouwde reeks zijn dus, uniform in n en x, begrensd door de constante $\pi+1$.

Op grond van het bovenstaande en de stelling op p.181 mogen we nu termsgewijs integreren:

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{-\cos nt}{n^2} \right|_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

§ 43. Integralen die afhangen van een parameter.

Reeds verschillende malen hebben we integralen beschouwd, waarbij in de integrand behalve de integratievariabele nog een parameter optreedt. B.v. $\int_a^b x^{\lambda} \, dx = \int_a^b \sin \alpha x \, dx$, enz. We hebben echter nooit zulke integralen onderzocht op hun afhankelijkheid van die parameter. We willen dat thans gaan doen. We hebben dan te maken met integralen, waarbij de integrand een functie van twee variabelen is. We maken eerst enige algemene opmerkingen over zulke functies.

We kennen reeds het begrip functie op een metrische ruimte (zie p.53). We hebben hier speciaal te maken met reële functies op een deelverzameling van E_2. Hierbij is E_2 de verzameling der geordende paren reële getallen $x=(x_1,x_2)$, met als metriek voor twee paren $x=(x_1,x_2)$ en $y=(y_1,y_2)$ de Euclidische afstand $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. Is X een deelverzameling van E_2, dan is een reële functie op X een voorschrift, waardoor aan elk punt $x=(x_1,x_2)$ van X een reëel getal $f(x)=f(x_1,x_2)$ toegevoegd wordt. Omdat de waarde van de functie afhangt van twee reële getallen, spreken we ook van reële functie van twee veranderlijken. Houden we x_1 of x_2 vast, dan wordt het een gewone functie van één veranderlijke.

Voor een dergelijke functie $f(x)=f(x_1,x_2)$ kunnen we verschillende soorten van continuïteit onderscheiden. En wel:

a) $f(x)$ is continu in een punt $a=(a_1,a_2)$, als functie van x, wil zeggen:

$$\varepsilon > 0 \rightarrow \delta > 0, \text{ zó dat } |f(x)-f(a)| < \varepsilon \text{ als } \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} < \delta$$

b) houden we x_2 vast, b.v. $x_2=a_2$, dan is $f(x_1,a_2)$, als functie van x_1, continu in a_1 indien geldt:

$$\varepsilon > 0 \rightarrow \delta > 0, \text{ zó dat } |f(x_1,a_2)-f(a_1,a_2)| < \varepsilon \text{ als } |x_1-a_1| < \delta .$$

Evenzo hebben we continuïteit van $f(a_1,x_2)$, als functie van x_2.

Is $f(x)$ continu in $a = (a_1,a_2)$, dan blijkbaar ook $f(x_1,a_2)$ in a_1, als functie van x_1, en $f(a_1,x_2)$ in a_2, als functie van x_2. Het omgekeerde geldt niet, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld. Zij $f(x_1, x_2)$ gedefinieerd op E_2 door:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sin \dfrac{x_1}{x_2} & \text{als } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{als } x_2 = 0. \end{cases}$$

Dan is $f(x_1, x_2)$ overal continu als functie van x_1, bij vaste x_2, èn als functie van x_2, bij vaste x_1. Maar $f(x_1, x_2)$ is niet continu in $(0,0)$, als functie van (x_1,x_2). Immers in een willekeurige omgeving van $(0,0)$ neemt $f(x_1,x_2)$ alle waarden tussen -1 en $+1$ aan.

Aan §§ 17 - 18 ontlenen we de volgende eigenschappen. Een verzameling X in E_2 is compact dan en slechts dan als hij begrensd en gesloten is. B.v. een begrensde rechthoek, met inbegrip van de rand. Is een functie $f(x)$ continu op een compacte verzameling, dan is hij daar ook uniform continu en begrensd.

We zullen de hier beschouwde functies voortaan aangeven met $f(x,y)$, $g(x,y)$, enz., waarbij x en y de beide reële veranderlijken zijn. Laten we eens een functie $f(x,y)$ hebben, waarbij y een zekere verzameling Y doorloopt en $f(x,y)$ voor elke waarde $y \in Y$ integreerbaar is over een vast, eindig interval (a,b).

Dan is $\int_a^b f(x,y)\,dx$ gedefinieerd voor $y \in Y$, en dus een zekere functie van y. Stellen we die functie voor door $F(y)$. Ons doel is nu voorwaarden voor $f(x,y)$ te vinden, waaronder de functie $F(y)$ continu, of zelfs differentieerbaar is in een bepaald punt. We zullen twee definities geven, elk gevolgd door een stelling.

Definitie 1. De functie $f(x,y)$ heet continu in een puntverdichtingspunt y_0 van Y, uniform voor $a \leq x \leq b$, indien geldt:

bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$, zó dat $|f(x,y)-f(x,y_0)| < \varepsilon$ voor alle x en y met $|y-y_0| < \delta, y \in Y$, $a \leqq x \leqq b$.

Dit is dus weer een nieuw begrip continuïteit. We merken meteen op, dat $f(x,y)$ zeker continu is in y_0, uniform voor $a \leqq x \leqq b$, indien er een getal $\eta > 0$ is, zodanig dat $f(x,y)$ continu is als functie van (x,y) voor $a \leqq x \leqq b$, $y_0 - \eta \leqq y \leqq y_0 + \eta$. Want dan is $f(x,y)$ uniform continu op die rechthoek, zodat geldt:

$\varepsilon > 0 \longrightarrow \delta > 0$ met $|f(x,y)-f(x',y')| < \varepsilon$ als

$|x-x'| < \delta, |y-y'| < \delta$, (x,y) en (x',y') in die rechthoek.

Dus is zeker aan de in de definitie optredende voorwaarde voldaan. We bewijzen nu de volgende

Stelling 1. Zij $f(x,y)$ gedefinieerd voor $a \leqq x \leqq b$, $y \in Y$ en integreerbaar over (a,b) voor elke $y \in Y$. Zij $f(x,y)$ continu in y_0, uniform voor $a \leqq x \leqq b$. Dan is de functie $F(y)$, bepaald op Y door

$$f(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

continu in y_0.

In het bijzonder mogen we de stelling toepassen als $f(x,y)$ continu is als functie van (x,y) op een zekere rechthoek $a \leqq x \leqq b$, $y_0-\eta \leqq y \leqq y_0+\eta$. Dan is automatisch $f(x,y)$ integreerbaar over (a,b), als functie van x, voor $y_0-\eta \leqq y \leqq y_0+\eta$, en ook continu in y_0, uniform in x.

Bewijs van stelling 1. Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$, zodanig dat $|f(x,y)-f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ als $a \leqq x \leqq b$, $|y-y_0| < \delta, y \in Y$. Voor $|y-y_0| < \delta$, $y \in Y$ is dus ook

$$|F(y)-F(y_0)| = \left| \int_a^b \{f(x,y)-f(x,y_0)\}\,dx \right|$$

$$\leqq \int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx \leqq \varepsilon.$$

Hieruit volgt de continuïteit van $F(y)$ in y_0.

We willen nu komen tot een analoge stelling voor het differentieren van $F(y)$. We letten eerst op $f(x,y)$. We noemen $f(x,y)$ differentieerbaar naar x in een punt (x_0,y_0), als de functie van één veranderlijke $f(x,y_0)$ differentieerbaar is in x_0. Evenzo heet $f(x,y)$ differentieerbaar naar y in (x_0,y_0) als de functie $f(x_0,y)$ differentieerbaar is in y_0. Men is gewoon bij differentiatie van functies van meer variabelen naar een der variabelen in plaats van een "d" een "∂" te schrijven. In het hierbeschouwde geval heeft men de volgende notaties tot zijn beschikking (wanneer de opgeschreven limieten bestaan en eindig zijn):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \left(\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right)_{x=x_0} = f'_x(x_0,y_0),$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \left(\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}\right)_{y=y_0} = f'_y(x_0,y_0).$$

Bestaan deze limieten op een zekere verzameling, dan heeft men twee nieuwe functies van de variabelen x en y; ze worden aangegeven met $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y)$ resp. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y)$. Deze twee functies worden de partiële afgeleiden van $f(x,y)$ naar x resp. y genoemd. Men heeft b.v.

$$\frac{\partial xy^2}{\partial x} = y^2, \qquad \frac{\partial xy^2}{\partial y} = 2xy.$$

<u>Definitie 2</u>. De functie $f(x,y)$ heet differentieerbaar naar y, in het punt y_0, <u>uniform voor $a \leq x \leq b$</u>, indien geldt:

1) $f(x,y)$ is gedefinieerd op een zekere rechthoek $a \leqq x \leqq b$, $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$ $(\eta > 0)$

2) $f(x,y)$ is differentieerbaar naar y in elk punt (x,y_0) met $a \leqq x \leqq b$

3) bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat een δ met $0 < \delta < \eta$, zodanig dat

$$\left| \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0) \right| < \varepsilon \text{ als } a \leqq x \leqq b,\ |y-y_0| < \delta,\ y \neq y_0.$$

Globaal gezegd: het verschil tussen het differentie-en het differentiaalquotient van $f(x,y)$, als functie van y, in y_0 nadert uniform tot nul als $y \to y_0$. Aan de voorwaarde is zeker voldaan als $f(x,y)$ differentieerbaar is naar y, niet slechts in elk punt (x,y_0) met $a \leqq x \leqq b$, maar zelfs op een hele rechthoek $a \leqq x \leqq b$, $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$, en bovendien de partiële afgeleide $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ continu is op die rechthoek. We tonen dit als volgt aan:

Allereerst is $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y)$ uniform continu op de rechthoek $a \leqq x \leqq b$, $y_0 - \frac{1}{2}\eta \leqq y \leqq y_0 + \frac{1}{2}\eta$. Dus is er een getal δ met $0 < \delta < \frac{1}{2}\eta$, zodanig dat $|f'_y(x,y) - f'_y(x,y_0)| < \varepsilon$ als $a \leqq x \leqq b$, $|y-y_0| < \delta$. Bij elk punt (x,y) met $a \leqq x \leqq b$, $|y-y_0| < \delta$, $y \neq y_0$ is er, krachtens de middelwaardestelling (zie p.69), een getal y^* tussen y_0 en y met $\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} = f'_y(x,y^*)$. Hieruit volgt de voorwaarde 3). We bewijzen nu:

<u>Stelling 2</u>. Zij $f(x,y)$ gedefinieerd voor $a \leqq x \leqq b$, $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$ $(\eta > 0)$ en integreerbaar over (a,b) voor $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$. Zij $f(x,y)$ differentieerbaar naar y in het punt y_0, uniform voor $a \leqq x \leqq b$. Laat tenslotte $f'_y(x,y_0)$ integreerbaar zijn over (a,b). Dan is de functie $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ differentieerbaar in y_0. Bovendien geldt de formule

$$(1) \qquad F'(y_0) = \int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx.$$

<u>Bewijs</u>. Zij $\varepsilon > 0$. Er is een positief getal $\delta < \eta$, zodanig dat

$$\left| \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ als } a \leqq x \leqq b,\ |y-y_0| < \delta,\ y \neq y_0.$$

Nu is, voor $y \neq y_0$, $|y-y_0| < \eta$,

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0}\left\{\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)dx\right\} = \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\,dx,$$

dus
$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} - \int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx = \int_a^b \left\{\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0)\right\} dx.$$
Dus is
$$\left|\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} - \int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx\right| \leqq \int_a^b \left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0)\right| dx$$
$$\leqq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon \quad \text{als } |y-y_0| < \delta,\ y \neq y_0.$$
Hieruit volgen de beide beweringen van de stelling.

Aan de voorwaarden van stelling 2 is zeker voldaan als $f(x,y)$ integreerbaar is over (a,b) voor $y_0-\eta < y < y_0+\eta$ en $f'_y(x,y)$ bestaat en continu is in de rechthoek $a \leqq x \leqq b$, $y_0-\eta < y < y_0+\eta$. Dan is vanzelf $f'_y(x,y_0)$ integreerbaar over (a,b).

Voorbeelden. I $\int_0^b e^{-xy}\,dx$ (b eindig) is een continue functie van y.

II $\int_0^1 \sin x^2y\,dx$ is een continue functie van y.

III Zij $b>0$ en zij $f(x,y)$ de functie, gedefinieerd door
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & \text{als } 0 < x \leqq b \quad , \quad y \text{ willekeurig} \\ y & \text{als } x=0 \quad , \quad y \text{ willekeurig.} \end{cases}$$
Hierbij is $f(0,y)$ zó gekozen dat $f(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, voor elke y. Voor elke y is $f(x,y)$ continu als functie van x en dus integreerbaar over $(0,b)$. We merken vervolgens op dat voor willekeurige p en q geldt
$$|\sin p - \sin q| = |2\cos \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q)| \leqq |2 \sin \tfrac{1}{2}(p-q)| \leqq |p-q|.$$
Voor $0 < x \leqq b$ is dus
$$|f(x,y)-f(x,y_0)| = \left|\frac{\sin xy - \sin xy_0}{x}\right| \leqq . \left|\frac{xy-xy_0}{x}\right| = |y-y_0| ,$$
terwijl ook $|f(0,y)-f(0,y_0)| = |y-y_0|$. Dus is $f(x,y)$ continu in een willekeurig punt y_0, uniform voor $0 \leqq x \leqq b$. Dan mogen we stelling 1 toepassen. Dit leert ons dat $\int_0^b f(x,y)\,dx = \int_0^b \frac{\sin xy}{x}\,dx$

een continue functie van y is.

IV We zullen thans door toepassing van stelling 2 de volgende integraal berekenen:
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

We bewijzen eerst dat deze integraal bestaat. De functie $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ is continu voor $x>0$ en heeft eindige limiet 1 in $x=0$. We passen nu de tweede middelwaardestelling van de integraalrekening (zie p.106) toe op de integraal $\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$, waar $b>a>0$. De factor $\frac{1}{x}$ is positief en monotoon dalend voor $x>0$. Dus is (zie p.108, laatste alinea § 29):

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^{\xi}\sin x\,dx, \text{ met een zekere } \xi \text{ tussen } a \text{ en } b.$$

Dus

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \frac{1}{a}\left|\int_a^{\xi}\sin x\,dx\right| = \frac{1}{a}\left|\cos a-\cos\xi\right| \leq \frac{2}{a}.$$

Dus is er bij elke $\varepsilon>0$ een getal $p>0$ te vinden, zó dat

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{als } b>a>p.$$

Dus heeft $\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx$ een eindige limiet voor $a\to\infty$, d.w.z. de beschouwde integraal bestaat. We merken op dat $\frac{\sin x}{x}$ niet absoluut integreerbaar is over $(0,\infty)$.

Om de integraal te berekenen stellen we $F_k=\int_0^{2k\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$ (k een natuurlijk getal). Dan is $I=\lim_{k\to\infty} F_k$. Vervolgens vormen we uit F_k een integraal die van een parameter afhangt. We stellen

$$F_k(y) = \int_0^{2k\pi} e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Dan is zeker $F_k(0)=F_k$. De integrand is voor elke y continu als functie van x, en dus integreerbaar over $(0,2k\pi)$. Verder is

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\right\} = -e^{-xy}\sin x.$$

Dit is continu als functie van (x,y). Dus mogen we stelling 2 toepassen. Dat geeft:

$$F_k'(y) = -\int_0^{2k\pi} e^{-xy}\sin x\,dx.$$

De laatste integraal kunnen we berekenen:

$$\int_0^{2k\pi} e^{-xy}\sin x\,dx = -\int_0^{2k\pi} e^{-xy}\,\frac{d\cos x}{dx}\,dx$$

$$= -e^{-xy}\cos x\,\Big|_0^{2k\pi} - y\int_0^{2k\pi} e^{-xy}\cos x\,dx$$

$$= 1-e^{-2k\pi y}-y\ e^{-xy}\ \sin x\ \Big|_0^{2k\pi} -y^2\int_0^{2k\pi} e^{-xy}\ \sin x\ dx$$

$$= 1-e^{-2k\pi y}-y^2\int_0^{2k\pi} e^{-xy}\ \sin x\ dx,$$

dus

$$\int_0^{2k\pi} e^{-xy}\ \sin x\ dx = \frac{1-e^{-2k\pi y}}{1+y^2}\ .$$

Een en ander betekent dat we de afgeleide van $F_k(y)$ kennen. We hebben nu

$$F_k(y)=\int_0^y \left\{\frac{-1}{1+y^2}+\frac{e^{-2k\pi y}}{1+y^2}\right\} dy + C_k,$$

waar C_k een zekere integratieconstante is, die natuurlijk van k kan afhangen. We merken nu op dat uit de definitie van $F_k(y)$ volgt dat $\lim\limits_{y\to\infty} F_k(y)=0$ is. Immers

$$\left|F_k(y)\right| \leqq \int_0^{2k\pi} e^{-xy}\ \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx \leqq \int_0^{2k\pi} e^{-xy}\ dy$$

$$< \int_0^{\infty} e^{-xy}\ dy = \frac{1}{y}\ .$$

Dus is

$$C_k= -\lim_{y\to\infty}\int_0^y \left\{\frac{-1}{1+y^2}+\frac{e^{-2k\ \ y}}{1+y^2}\right\} dy$$

$$= -\int_0^{\infty}\left\{\frac{-1}{1+y^2}+\frac{e^{-2k\ \ y}}{1+y^2}\right\} dy.$$

Verder is $F_k=F_k(0)=C_k$. Dus vinden we tenslotte

$$I= \lim_{k\to\infty} F_k= \lim_{k\to\infty} C_k$$

$$= +\int_0^{\infty}\frac{dy}{1+y^2} - \lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-2k\pi y}}{1+y^2}\ dy$$

$$= \text{arc tg } y\ \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2},$$

wegens $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-2k\pi y}}{1+y^2}\ dy < \int_0^{\infty} e^{-2k\pi y}\ dy = \frac{1}{2k\pi}$.

Dus $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}$.

§ 44. Oneigenlijke integralen die afhangen van een parameter.

Uit het laatste voorbeeld in § 43 volgt

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} t,$$

waar sign t = 1,0,-1 al naargelang $t>0$, $t=0$, $t<0$. Het linkerlid is dus geen continue functie van t. Anderzijds weten we uit § 43, voorbeeld III, dat de corresponderende integraal over een eindig vak wel een continue functie van t is. Om voor oneigenlijke integralen tot analoge stellingen te komen als in § 43 hebben we dus nog extra voorwaarden nodig.

Definitie. Zij (a,b) een eindig of oneindig interval. Zij f(x,y) gedefinieerd voor $y \in Y$, $x \in (a,b)$ en integreerbaar over (a,b) voor $y \in Y$. Dan zeggen we dat $\int_a^\beta f(x,y)\,dx$ $(a<\beta<b)$ op Y uniform convergeert tot $\int_a^b f(x,y)\,dx$ voor $\beta \to b$, indien geldt: bij elke $\varepsilon>0$ is er een linkeromgeving B van b, zodanig dat

$$\left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{als } y\in Y,\ \beta\in B.$$

Stelling. Een functie $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ is continu in y_0, indien geldt:

1) f(x,y) is gedefinieerd voor $y\in Y$, $a<x<b$ en is voor $y\in Y$ integreerbaar over (a,b)

2) y_0 is punt-verdichtingspunt van Y en $\int_a^\beta f(x,y)\,dy$ is voor $a<\beta<b$ continu in y_0 als functie van y

3) $\int_a^\beta f(x,y)\,dx$, waar $a<\beta<b$, convergeert op Y uniform naar $\int_a^b f(x,y)\,dx$.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Er is krachtens 3) een linkeromgeving B van b, zó dat $\left|\int_\beta^b f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ als $\beta\in B$, $y\in Y$. Kies zo'n β. Wegens 2) is $\int_a^\beta f(x,y)\,dy$, als functie van y, continu in y_0. Er is dus een getal $\delta>0$, zodanig dat

$$\left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx - \int_a^\beta f(x,y_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{als } |y-y_0|<\delta,\ y\in Y.$$

We hebben dus, voor $|y-y_0|<\delta$, $y\in Y$,

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx\right| =$$

$$=\left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx - \int_a^\beta f(x,y_0)\,dx + \int_\beta^b f(x,y)\,dx - \int_\beta^b f(x,y_0)\,dx\right|$$

$$\leqq \left|\int_a^\beta (x,y)\,dx - \int_a^\beta f(x,y_0)\,dx\right| + \left|\int_\beta^b f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_\beta^b f(x,y_0)dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Dus is $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ continu in y_0.

Een analoge definitie, met bijbehorende stelling, heeft men voor uniforme convergentie van $\int_\alpha^b f(x,y)\,dx$, waar $a<\alpha<b$, voor $\alpha \to a$.

Stelling. Laat f(,xy) voldoen aan de volgende voorwaarden:

1) $f(x,y)$ is gedefinieerd op een rechthoek $a<x<b$, $y_0-\eta<y<y_0+\eta$ ($\eta>0$) en is als functie van x integreerbaar over (a,b) voor $y_0-\eta<y<y_0+\eta$

2) $f'_y(x,y_0)$ bestaat voor $a<x<b$ en is integreerbaar over (a,b)

3) voor elke β met $a<\beta<b$ geldt: is $F(\beta,y)=\int_a^\beta f(x,y)\,dx$, dan is $\left(\frac{\partial F(\beta,y)}{\partial y}\right)_{y=y_0}=\int_a^\beta f'_y(x,y_0)\,dx$

4) er is een getal α met $a<\alpha<b$ en een functie $\omega(x)$, alleen van x afhangend, zodanig dat

$$\left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0)\right| < \omega(x)$$

voor $a<x<b$, $y_0-\eta<y<y_0+\eta$, en dat $\int_\alpha^b \omega(x)\,dx$ bestaat.

Dan mag ook $\int_a^b f(x,y)\,dx$ onder het integraalteken gedifferentieerd worden voor in het punt y_0, d.w.z. als $F(v)=\int_a^b f(x,y)\,dx$, dan is $F'(y_0)=\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx$.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$ en $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$. We maken het differentiequotient van $F(y)$ op en vergelijken dat met de te verwachten limiet: voor $0<|y-y_0|<\eta$ is

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} - \int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx = \int_a^b \left\{\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0)\right\} dx.$$

Er is een getal β tussen a en b met $\int_\beta^b \omega(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Nu is $F(\beta,y)=$ $=\int_a^\beta f(x,y)\,dx$, als functie van y, differentieerbaar in y_0. Er is dus, als we op 3) letten) een getal δ met $0<\delta<\eta$, zodanig dat

$$\left|\frac{F(\beta,y)-F(\beta,y_0)}{y-y_0} - \left(\frac{\partial F(\beta,y)}{\partial y}\right)_{y=y_0}\right| = \left|\int_a^\beta \left\{\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0)\right\} dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{als } |y-y_0| < \delta,\ y \neq y_0 \ .$$

Dus is, voor $|y-y_0| < \delta$, $y \neq y_0$,

$$\left| \frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} - \int_a^b f'_y(x,y_0)dx \right| = \left| \int_a^b \left\{ \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0) \right\} dx \right|$$

$$\leqq \left| \int_a^{\beta} \right| + \left| \int_{\beta}^b \right| \leqq \left| \int_a^{\beta} \right| + \left| \int_{\beta}^b w(x)\, dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Hieruit volgt de stelling.

Als eerste toepassing beschouwen we de functie $F(y)$, bepaald door

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \ . \ \frac{\sin x}{x}\, dx \ .$$

Voor $y=0$ staat hier de integraal $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, waarvan we reeds op p.19? bovenaan, gezien hebben, dat hij bestaat. Voor $y > 0$ bestaat de integraal ook, o.a. wegens

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}\sin x}{x}\, dx \right| \leqq \int_0^{\infty} \left| e^{-xy} . \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\leqq \int_0^{\infty} e^{-xy}\, dx = \frac{1}{y} \ .$$

Dus is $F(y)$ gedefinieerd voor $y \geqq 0$. We gaan nu bewijzen dat $F(y)$ continu is voor $y \geqq 0$.

We zetten $f(x,y)=e^{-xy} . \frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ en nemen $f(0,y)=1$ (zodat $f(x,y)$ continu is als functie van x voor $x \geqq 0$). Voor willekeurige y en y_0 is

$$f(x,y)-f(x,y_0)=e^{-xy_0} \ . \ \frac{\sin x}{x} \ . \ (e^{-x(y-y_0)}-1),$$

dus $\quad |f(x,y)-f(x,y_0)| \leqq |e^{-x(y-y_0)}-1| \quad$ als $x \geqq 0$.

Dus is $f(x,y)$ continu in een willekeurig punt $y=y_0$, uniform voor $0 \leqq x \leqq b$ $(b > 0)$.

Zij $y \geqq 0$. Krachtens het tweede gemiddeldetheorema van de integraalrekening is, als $\beta > \alpha > 0$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} . \frac{\sin x}{x}\, dx = e^{-\alpha y} \int_{\alpha}^{\xi} \frac{\sin x}{x}\, dx \ ,$$

met een zekere ξ tussen α en β. Wegens de convergentie van $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ en wegens $e^{-\alpha y} \leqq 1$ is er dus bij elke $\varepsilon > 0$ een $p > 0$ te vinden, zodanig dat

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{als } \beta > \alpha > p.$$

Dan is ook

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-xy}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^{\alpha} e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\int_{\alpha}^{\infty}\right| \leqq \varepsilon \text{ als } \alpha > \beta.$$

Dus convergeert $\int_0^{\alpha} e^{-xy}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx$ uniform tot $\int_0^{\infty}$ voor $y \geqq 0$.

Krachtens de stelling op p.195 is nu $F(y)$ continu voor $y \geqq 0$.

Vervolgens geven we een kortere methode om $F(0) = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ te berekenen (zie p.193-194). We werken nu met $F(y)$ i.p.v. met $F_k(y)$. We stellen weer $f(x,y)=e^{-xy}\cdot\frac{\sin x}{x}$. We hebben

$$f'_y(x,y) = -e^{-xy}\sin x \qquad (x>0,\ y>0).$$

De functie $f'_y(x,y)$ is integreerbaar naar x over $(0,\infty)$, als $y>0$. Verder geldt voor elke $\beta > 0$, omdat $f'_y(x,y)$ continu is als functie van (x,y) op de rechthoek $0 \leqq x \leqq \beta$, $y>0$, dat $\int_0^{\beta} f(x,y)dx$ onder het integraalteken gedifferentieerd mag worden. Anders gezegd: als $F(\beta,y)=\int_0^{\beta} f(x,y)dx$, dan is $\frac{\partial F(\beta,y)}{\partial y} = \int_0^{\beta} f'y(x,y)dx$ (zie stelling 2, p.191 en de opmerking daarboven). Daarmee zijn de voorwaarden 1),2),3) van de stelling op p.196 geverifieerd.

Zij nu a een positief getal. Voor $y \geqq a$ is $|f'_y(x,y)| \leqq e^{-ax}$. Toepassing van de middelwaardestelling van de differentiaalrekening leert dan

$$\left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0)\right| < 2e^{-ax}$$

als $x > 0$, $y \neq y_0$, $y \geqq a$, $y_0 \geqq a$. Nu bestaat $\int_0^{\infty} e^{-2ax}\,dx$. Omdat a willekeurig was, volgt hieruit dat voorwaarde 4) van bovengenoemde stelling geldt als $y_0 > 0$ (met bijpassende $\omega(x)$ en η).

Op grond van de genoemde stelling hebben we dus:

$$F'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin x\,dx \quad (y>0).$$

De integraal rechts hebben we al meermalen berekend. Er geldt $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$. Dus is $F(y) = -\text{arc tg } y + C$ (voor $y>0$), waar C een nog te bepalen integratieconstante is. Nu is $\lim\limits_{y\to\infty} F(y)=0$ en $\lim\limits_{y\to\infty} \text{arc tg } y=\pi/2$. Dus is $C=\pi/2$.

Hierboven hebben we bewezen dat $F(y)$ continu is voor $y \geqq 0$. Dus is $F(0)=C$. Dus hebben we

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = F(0) = C = \pi/2.$$

We geven nu nog twee voorbeelden.

I. Berekening van $\int_0^1 \frac{x^y-1}{\log x}\, dx \quad (y > -1)$.

De integraal bestaat. Want in een geschikte rechteromgeving van de oorsprong is $|\log x| > 1$ en $|x^y-1| < \max(1,x^y)$, dus $\left|\frac{x^y-1}{\log x}\right| < \frac{1}{x^p}$ met een zekere p tussen 0 en 1. En voor $0<x<1$ is de integrand continu als functie van x. Tenslotte is

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^y-1}{\log x} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{y \log x}-1}{\log x} = \lim_{u \to 0} \frac{e^{uy}-1}{u} = \left(\frac{d}{dy} e^{uy}\right)_{y=0}=1.$$

Zij $0<\alpha<\beta<1$. Dan is $f(x,y)$ eigenlijk integreerbaar over (α,β). Verder is $f'_y(x,y)=x^y$. Dus is $f'_y(x,y)$ integreerbaar over $(0,1)$ voor $y>-1$. Ook is $f'_y(x,y)$ continu als functie van (x,y) voor $0<x<1$, $y>-1$. Tenslotte is, voor $y>-p>-1$,

$$|f'_y(x,y)| < x^{-p}, \quad \int_0^1 x^{-p}\, dx \quad \text{convergent.}$$

Toepassing van de stellingen over het differentiëren van een integraal geeft nu, als we de beschouwde integraal voorstellen door $F(y)$:

$$F'(y)=\int_0^1 x^y\, dx = \frac{1}{y+1}.$$

Dus is $F(y)= \log(y+1) + C$ voor $y>-1$, met een zekere constante C. Vanzelf is $F(y)$ continu voor $y>-1$. Wegens $F(0)=0$ is $C=0$. Dus

$$\int_0^1 \frac{x^y-1}{\log x}\, dx = \log(y+1).$$

II Zij $F(y) = \int_0^{\pi/2} \log(\sin^2 x+y)\, dx \quad (y \geqq 0)$.

De integraal bestaat zeker. Is $0<\alpha<1$, dan is de integrand continu als functie van (x,y) op de rechthoek $\alpha \leqq x \leqq 1$, $y \geqq 0$. Verder is, voor $x>0$, $|\log(\sin^2 x+y)| \leqq |\log \sin^2 x| + \log(y+1)$. Dus convergeert $\int^{\pi/2} \log(\sin^2 x+y)dx$ uniform tot $\int_0^{\pi/2}$ als y behoort tot een segment $(0,b)(b>0)$. Dus is $F(y)$ continu voor $y \geqq 0$.

Voor $y>0$ is $\frac{\partial}{\partial y} \log(\sin^2 x+y)= \frac{1}{\sin^2 x+y}$, continu als functie van (x,y). De beschouwde integraal is eigenlijk voor $y>0$. Dus is

$$F'(y)=\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x+y} \quad (y>0).$$

We berekenen deze integraal d.m.v. de substitutie tg x = u. Dat geeft

$$F'(y)=\int_0^{\pi/2} \frac{1}{tg^2x+y/\cos^2x}\cdot\frac{dx}{\cos^2x}=\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+y(1+u^2)}=\frac{1}{y+1}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+\frac{y}{y+1}}$$

$$=\frac{1}{y+1}\sqrt{\frac{y+1}{y}}\ \text{arc tg}\ u\sqrt{\frac{y+1}{y}}\ \Bigg|_{u=0}^{u=\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{y(y+1)}}\ .$$

Dus $F(y)=\frac{\pi}{2}\int_0^y \frac{dv}{\sqrt{v(v+1)}}+C$, met een zekere constante C. We hebben

$$\int_0^y \frac{dv}{\sqrt{v(v+1)}}=\int_{\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1/4}}=\log\left(t+\sqrt{t^2-1/4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}}\ ,$$

dus

$$F(y)=\frac{\pi}{2}\log\left\{(y+\tfrac{1}{2})+\sqrt{y(y+1)}\right\}+C'=\log\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}+\sqrt{\frac{y}{2}}\right)+C',$$

met een zekere nieuwe constante C'.

We bepalen nu C'. Voor $y\longrightarrow\infty$ is

$$\frac{1}{\sqrt{2y}}\left\{\sqrt{\frac{y+1}{2}}+\sqrt{\frac{y}{2}}\right\}=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\tfrac{1}{2}\longrightarrow 1.$$

Dus is $F(y)=\pi\log\sqrt{2y}+C'+\varphi(y)$, waar

$$\varphi(y)=\pi\log\left\{\frac{1}{\sqrt{2y}}\left(\sqrt{\frac{y+1}{2}}+\sqrt{\frac{y}{2}}\right)\right\}\longrightarrow 0 \text{ voor } y\longrightarrow\infty.$$

Verder is er bij elke $\varepsilon>0$ een $p>0$, zodanig dat $\left|\log(1+\frac{\sin^2x}{y})\right|<\varepsilon$ als $y>p$, uniform voor $0\leqq x\leqq 1$. Dus is

$$F(y)=\int_0^{\pi/2}\log(\sin^2x+y)\,dx=\int_0^{\pi/2}\log y\,dx+\int_0^{\pi/2}\log\left(1+\frac{\sin^2x}{y}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\log y+\varphi^*(y),$$

waar $|\varphi^*(y)|<\frac{\pi}{2}\varepsilon$ voor $y>p$, dus $\varphi^*(y)\to 0$ voor $y\longrightarrow\infty$. Vergelijking van beide uitdrukkingen voor F(y) geeft $C'=-\frac{\pi}{2}\log 2$. Dus is

$$F(y)=\int_0^{\pi/2}\log(\sin^2x+y)dx=\pi\log\frac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}{2}\quad(y>0).$$

Daar F(y) continu is voor $y\geqq 0$, volgt nog

$$\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx=\tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2}\pi\log 2.$$

Einde van deze cursus