STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 28b

Avondcursus wiskunde 1954-1956;

Analyse 11.

W.Peremans.

1956

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Avondcursus 1954-1955

Analyse II

door

Dr W. Peremans

§ 1. Complexe getallen.

In dit gedeelte van de cursus analyse zullen wij ons bezig houden met die onderwerpen, welke wij wensen te behandelen voor complexe getallen; de hoofdschotel zal worden gevormd door de theorie van de oneindige reeksen.

Zoals al in de cursus analyse I is betoogd, bezitten de reële getallen vergeleken bij de rationele getallen onder meer het voordeel dat positieve getallen, zoals het getal 2, een vierkantwortel bezitten (zie an I 19). Anders uitgedrukt: de vergelijking $x^2-2=0$ bezit in de verzameling der reële getallen wel een oplossing, maar in de verzameling der rationale getallen geen oplossing.

Beschouwen wij nu echter de vergelijking $x^2+1=0$, dan bezit deze zelfs in de verzameling der reële getallen geen oplossing. Immers voor ieder reëel getal a geldt $a^2 \geq 0$, dus $a^2+1 \geq 1$, zodat er geen a kan bestaan waarvoor $a^2+1=0$ geldt.

We zullen de verzameling der reële getallen nu uitbreiden tot de verzameling der complexe getallen; na deze uitbreiding zal de vergelijking $x^2+1=0$ wel een oplossing blijken te bezitten. Om aan deze uitbreiding iets te hebben, zullen we natuurlijk met deze complexe getallen moeten kunnen rekenen, d.w.z. optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, waarbij zoveel mogelijk van de rekenregels van de reële getallen behouden moeten blijven. Voordat dit geschied is, heeft het trouwens geen zin om van oplosbaarheid der vergelijking $x^2+1=0$ te spreken. Men zou verder kunnen vragen, welke zin het heeft één speciale vergelijking, zoals $x^2+1=0$, oplosbaar te maken, daar er misschien dan wel nog andere vergelijkingen overblijven die niet oplosbaar zijn. Het blijkt echter, dat voor complexe getallen geldt, dat iedere algebraïsche vergelijking met complexe coëfficiënten (dat is een vergelijking

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$ met $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ en alle a_k complexe getallen), een complexe wortel bezit. Het is deze z.g. hoofdstelling van de algebra, (die we overigens eerst na geruime tijd zullen kunnen bewijzen), die pas de volledige rechtvaardiging geeft van de overgang tot complexe getallen.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Om enig idee te krijgen hoe we te werk zullen moeten gaan, nemen we maar eens een symbool i, dat als oplossing van $x^2+1=0$ zal moeten fungeren, d.w.z. waarvoor zal moeten gelden $i^2=-1$. We zullen dit symbool moeten kunnen optellen en vermenigvuldigen met reële getallen; zo zullen we ook moeten kunnen vormen $a+bi$, waarin a en b reële getallen zijn. Nu blijkt echter, dat we formeel op de "getallen" $a+bi$ de hoofdbewerkingen kunnen toepassen, waarbij we, als we steeds $i^2=-1$ stellen, wéér "getallen" van hetzelfde type krijgen:

1°. Optelling $(a+bi)+(c+di)= a+c+(b+d)i$.
2°. Aftrekking $(a+bi)-(c+di)= a-c+(b-d)i$.
3°. Vermenigvuldiging $(a+bi)(c+di)= ac+adi+bci+bdi^2= (ac-bd)+(ad+bc)i$.
4°. Deling. Het bepalen van $\frac{a+bi}{c+di}$ betekent het zoeken van $x+yi$, dusdanig, dat $(c+di)(x+yi)=a+bi$, of $(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi$, d.w.z. het oplossen van $cx-dy=a$, $dx+cy=b$. Als nu c en d niet beide $=0$ zijn is $c^2+d^2>0$ en heeft dit de oplossing $x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Het spreekt vanzelf, dat dit alles geen enkele bewijskracht bezit; het heeft alleen de heuristische waarde, dat we verwachten met uitdrukkingen van het type $a+bi$ te kunnen volstaan. In een dergelijke symbolische uitdrukking heeft het plusteken vooralsnog in het geheel niet de betekenis van een optelling noch het symbool i van een "getal". Voorlopig hebben we dus eigenlijk alleen te maken met een <u>paar</u> (a,b) van reële getallen. Dergelijke paren zullen we nu voor de definitie van complexe getallen gebruiken. Voor de definities van de hoofdbewerkingen zal het bovenstaande ons als richtsnoer kunnen dienen.

Evenals in de cursus analyse I duiden we de verzameling der reële getallen aan met de letter Γ. We vormen nu de verzameling der geordende paren (a,b) van elementen van Γ (dus $a\in\Gamma$, $b\in\Gamma$). We noemen twee paren (a,b) en (c,d) dan en slechts dan gelijk als $a=c$ en $b=d$. Ter afkorting duiden we paren wel aan met kleine Griekse letters.

We definiëren nu van twee paren (a,b) en (c,d) een <u>som</u> $(a,b)+(c,d)$ als volgt $(a,b)+(c,d)= (a+c,b+d)$. De plustekens in het rechterlid betekenen de bekende optelling van reële getallen. De operatie bestaande uit het vormen van de som van twee paren noemen we <u>optelling</u>. Hiervoor gelden de volgende eigenschappen;

(1.1) Voor ieder tweetal paren α ... β geldt $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

Bewijs: Laat $\alpha=(a_1,a_2)$ en $\beta=(b_1,b_2)$ zijn. Dan is $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ en $\beta+\alpha=(b_1+a_1,b_2+a_2)$. Daar voor de reële getallen a_1,a_2,b_1,b_2 geldt $a_1+b_1=b_1+a_1$ en $a_2+b_2=b_2+a_2$, geldt $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

(1.2) Voor ieder drietal paren α, β en γ geldt $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

Bewijs: Laat $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$ en $\gamma=(c_1,c_2)$ zijn. Dan is $\alpha+(\beta+\gamma)=(a_1,a_2)+(b_1+c_1,b_2+c_2)=(a_1+(b_1+c_1),\ a_2+(b_2+c_2))$ en $(\alpha+\beta)+\gamma=$ $=(a_1+b_1,a_2+b_2)+(c_1,c_2)=((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2)$. Maar $a_1+(b_1+c_1)=$ $=(a_1+b_1)+c_1$ en $a_2+(b_2+c_2)=(a_2+b_2)+c_2$, dus $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

(1.3) Bij ieder tweetal paren α en β is een paar ξ te vinden, zodat $\alpha+\xi=\beta$.

Bewijs: Laat $\alpha=(a_1,a_2)$ en $\beta=(b_1,b_2)$ zijn. Het paar $\xi=(b_1-a_1,b_2-a_2)$ voldoet klaarblijkelijk.

De optelling van paren voldoet dus aan de op blz. an I 1 opgestelde eigenschappen A1,A2 en A3 en dus ook aan de daar uit deze eigenschappen afgeleide eigenschappen.

Zo is er één en slechts één paar "nul", dat we ter onderscheiding van het reële getal nul met ω zullen aanduiden, zodat van ieder paar α geldt $\alpha+\omega=\omega+\alpha=\alpha$. Klaarblijkelijk is $\omega=(0,0)$. Verder is er bij ieder tweetal paren α en β slechts één ξ met de in (1.3) verlangde eigenschap $\alpha+\xi=\beta$. Deze ξ wordt het <u>verschil</u> van β en α genoemd, en $\beta-\alpha$ geschreven. De operatie bestaande uit het vormen van een verschil wordt <u>aftrekking</u> genoemd. Het verschil $\omega-\alpha$ noemen we $-\alpha$. Er geldt dan, zoals we al hebben aangetoond:

(1.4) $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$.

(1.5) $-(a,b)=(-a,-b)$.

Verder gelden de volgende regels (evenals in an I):

(1.6) $-(-\alpha)=\alpha$.

(1.7) $\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$.

(1.8) $-(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta)$.

We definiëren nu voor twee paren (a,b) en (c,d) een <u>product</u> $(a,b)(c,d)$ als volgt $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$. De operatie bestaande uit het vormen van het product van twee paren noemen we <u>vermenigvuldiging</u>. Hiervoor gelden de volgende eigenschappen:

(1.9) Voor ieder tweetal paren α en β geldt $\alpha\beta=\beta\alpha$.

Bewijs: Laat $\alpha=(a_1,a_2)$ en $\beta=(b_1,b_2)$ zijn. Dan is $\alpha\beta=$ $=(a_1b_1-a_2b_2,\ a_1b_2+a_2b_1)$ en $\beta\alpha=(b_1a_1-b_2a_2,\ b_1a_2+b_2a_1)$, dus $\alpha\beta=\beta\alpha$.

(1.10) Voor ieder drietal paren α, β en γ geldt $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.

<u>Bewijs</u>: Laat $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$ en $\gamma=(c_1,c_2)$ zijn. Dan is $\alpha(\beta\gamma)=(a_1,a_2)(b_1c_1-b_2c_2,b_1c_2+b_2c_1)=$
$=(a_1b_1c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2-a_2b_2c_1,a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1-a_2b_2c_2)$ en $(\alpha\beta)\gamma=$
$=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)(c_1,c_2)=$
$=(a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2,a_1b_1c_2-a_2b_2c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1)$, dus
$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.

(1.11) Bij ieder tweetal paren α en β, waarvoor geldt $\alpha\neq\omega$, is een paar ξ te vinden, zodat $\alpha\xi=\beta$.

<u>Bewijs</u>: Laat $\alpha=(a_1,a_2)$ en $\beta=(b_1b_2)$ zijn. Wegens $\alpha\neq\omega$, is $a_1^2+a_2^2\neq 0$. Kiezen we

$$\xi=\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2},\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+a_2^2}\right),\text{ dan is }\alpha\xi=(b_1,b_2)=\beta.$$

(1.12) Voor ieder drietal paren α, β en γ geldt $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

<u>Bewijs</u>: Laat $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$ en $\gamma=(c_1,c_2)$ zijn. Dan is
$\alpha(\beta+\gamma)=(a_1,a_2)(b_1+c_1,b_2+c_2)=(a_1b_1+a_1c_1-a_2b_2-a_2c_2,a_1b_2+a_1c_2+a_2b_1+a_2c_1)$
en $\alpha\beta+\alpha\gamma=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)+(a_1c_1-a_2c_2,a_1c_2+a_2c_1)=$
$=(a_1b_1-a_2b_2+a_1c_1-a_2c_2,a_1b_2+a_2b_1+a_1c_2+a_2c_1)$, dus $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

De vermenigvuldiging voldoet dus aan de op blz. an I 3 opgestelde eigenschappen A4,A5,A6 en A7. De daar gemaakte gevolgtrekkingen zijn dus ook geldig.

Er is dus één en slechts één paar "één", dat we ter onderscheiding van het reële getal 1 met ε zullen aanduiden, zodat voor elk paar α geldt $\alpha\varepsilon=\varepsilon\alpha=\alpha$. Klaarblijkelijk geldt $\varepsilon=(1,0)$. Verder is er bij ieder tweetal paren α en β, waarvoor geldt $\alpha\neq\omega$, slechts één ξ met de in (1.11) verlangde eigenschap $\alpha\xi=\beta$. Deze ξ heet het <u>quotiënt</u> van β en α en wordt $\frac{\beta}{\alpha}$ geschreven. De operatie bestaande uit het vormen van een quotiënt wordt <u>deling</u> genoemd. Het quotiënt $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ schrijven we ook α^{-1}.

Verder geldt (analoog met an I (1.10) t.e.m. (1.20)):

(1.13) Voor ieder drietal paren α, β en γ geldt $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$.

(1.14) Voor ieder paar α geldt $\omega\alpha=\alpha\omega=\omega$.

(1.15) Voor ieder drietal paren α, β en γ geldt $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ en $(\alpha-\beta)\gamma=\alpha\gamma-\beta\gamma$.

(1.16) Voor ieder tweetal paren α en β geldt $(-\alpha)\beta=-\alpha\beta$, $\alpha(-\beta)=$ $=-\alpha\beta$ en $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$.

(1.17) Voor ieder tweetal paren α en β, waarvoor geldt $\alpha\beta=\omega$, geldt $\alpha=\omega$ of $\beta=\omega$ (of beide).

(1.18) Voor ieder tweetal paren α en β, waarvoor geldt $\alpha\neq\omega$ en $\beta\neq\omega$, geldt $(\alpha\beta)^{-1}=\alpha^{-1}\beta^{-1}$.
(1.19) Voor ieder tweetal paren α en β, waarvoor geldt $\alpha\neq\omega$ en $\beta\neq\omega$, geldt $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$, $(\frac{\alpha}{\beta})^{-1}=\frac{\beta}{\alpha}$.
(1.20) Voor ieder viertal paren α,β,γ en δ, waarvoor geldt $\beta\neq\omega$ en $\delta\neq\omega$, geldt $\frac{\alpha}{\beta}\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$.
(1.21) Voor ieder paar α, waarvoor geldt $\alpha\neq\omega$, geldt $\frac{\alpha}{\varepsilon}=\alpha$ en $\frac{\alpha}{\alpha}=\varepsilon$.
(1.22) Voor ieder drietal paren α, β en γ, waarvoor geldt $\beta\neq\omega$ en $\gamma\neq\omega$, geldt $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}$.
(1.23) Voor ieder viertal paren α,β,γ en δ, waarvoor geldt $\beta\neq\omega$ en $\delta\neq\omega$, geldt $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$.

Verder geldt nog, zoals onmiddellijk te verifiëren valt:
(1.24) (0,1)(0,1)=(-1,0).
(1.25) Voor ieder tweetal reële getallen a en b geldt (a,0)+(b,0)(0,1)= = (a,b).

Hiermee is de verzameling van paren voorzien van de vier hoofdbewerkingen, waarbij aan de lichaamseigenschappen (zie an I § 1) is voldaan. Het verkregen systeem staat echter geheel los naast dat van de reële getallen en is er dus geen uitbreiding van, zoals we gewenst hadden. Hieraan zullen we nu tegemoet komen. We beschouwen daartoe de paren (a,0) met willekeurige reële a. Hiervoor gelden de volgende eigenschappen (steeds voor willekeurige reële a en b):
(1.26) (a,0)=(b,0) geldt dan en slechts dan als a=b.
(1.27) (a,0)+(b,0)=(a+b,0).
(1.28) (a,0)-(b,0)=(a-b,0).
(1.29) (a,0)(b,0)=(ab,0).
(1.30) Als b≠0, geldt $\frac{(a,0)}{(b,0)}=(\frac{a}{b},0)$.

Uit deze eigenschappen volgt, dat met ieder reëel getal a precies één paar (a,0) correspondeert en dat de vier hoofdbewerkingen op de corresponderende paren op precies dezelfde wijze uitgevoerd worden als op de reële getallen zelf. We verwijderen nu uit de verzameling der paren de paren van het type (a,0) en stellen er de overeenkomstige reële getallen voor in de plaats. De hoofdbewerkingen in deze nieuwe verzameling worden gedefinieerd door eerst eventueel optredende reële getallen door hun corresponderende paren te vervangen, door vervolgens de hoofdbewerking volgens de hierboven gegeven definities voor paren uit te voeren en ten slotte, als eventueel in het resultaat een paar van het type (a,0) te voorschijn komt, dit paar weer door het corresponderende reële getal a te vervangen. Om b.v. $\sqrt{2}$+(3,1) te bepalen, bepalen we eerst ($\sqrt{2}$,0)+(3,1)=($\sqrt{2}$+3,1) en we vinden $\sqrt{2}$+(3,1)=($\sqrt{2}$+3,1). Om (3,1)(6,2) te bepalen, bepalen we eerst (3,1)(6,2)=(16,0) en vervangen vervolgens (16,0) door 16; we vinden dus (3,1)(6,2)=16. De zo gedefinieerde hoofdbewerkingen stemmen voor reële getallen op grond van (1.27) t.e.m.(1.30) overeen met de bekende overeenkomstige hoofdbewerkingen voor reële getallen, zodat hierin geen mogelijkheid tot verwarring besloten ligt. Verder stemmen gelijkheid en ongelijkheid van reële getallen en corresponderende paren op grond van (1.26) met elkaar overeen. De nu verkregen verzameling noemt men de verzameling der complexe getallen. Deze bevat de verzameling der reële getallen als deelverzameling.

Door de verwijdering van de paren $(a,0)$ zijn ook de paren ω en ε verdwenen en vervangen door 0 resp. 1. We kunnen nu het gebruik van paren geheel overboord gooien als we het paar $(0,1)$ aangeven met het symbool i. Op grond van (1.25) is dan ieder paar (a,b) met $b \neq 0$ op één en slechts één manier te schrijven in de vorm $a+bi$ en ieder reëel getal a in de vorm $a+0i$. Ieder complex getal is dus op één en slechts één wijze te schrijven in de vorm $a+bi$ met reële a en b. Uit (1.24) volgt dan dat $ii=-1$. We behoeven de complexe getallen nu ook niet langer uitsluitend met Griekse letters te schrijven.

Het spreekt vanzelf, dat de tot nu toe afgeleide eigenschappen van paren met enige voor de hand liggende wijzigingen (zoals b.v. de vervanging van ω door 0 en van ε door 1) ook gelden voor complexe getallen.

Verder kunnen op geheel analoge wijze als in an I § 4 is geschied algemene sommen en producten en machten worden ingevoerd. In het bijzonder heeft men voor een complex getal a en een natuurlijk getal n, dat $a^1=a, a^{n+1}=a^n a$, en, voor $a \neq 0$, $a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. Voor $n=1$ is dit laatste in overeenstemming met de manier waarop wij a^{-1} voor paren hebben gedefinieerd. Er geldt dan een met an I (4.12) overeenkomende eigenschap voor complexe getallen:

(1.31) Als a en b complexe getallen en p en q gehele getallen zijn, als $a \neq 0$ en als $b \neq 0$, dan geldt:

$$a^p a^q = a^{p+q},$$
$$a^p b^p = (ab)^p,$$
$$(a^p)^q = a^{pq},$$
$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p;$$

Als p en q natuurlijke getallen zijn, gelden deze betrekkingen ook nog als $a=0$ of $b=0$ (of beide) is.

Het bewijs gaat op geheel dezelfde wijze als voor reële getallen.

Machten met niet-gehele exponenten zullen we pas later invoeren.

Als $a=b+ci$ (b en c reëel) een willekeurig complex getal is, heet b het reële deel van a (geschreven Re a of $\mathcal{R}a$) en c het imaginaire deel van a (geschreven Im a of $\mathfrak{I}a$); dus $a=\mathfrak{R}a+i\ \mathfrak{I}a$. Als het reële deel van een complex getal gelijk is aan nul, heet het complexe getal zuiver imaginair. Verder heet $\bar{a}=b-ci$ dan het toegevoegd complexe (of geconjugeerd complexe) van a. Omdat blijkbaar $a+\bar{a}=2b$ en $a-\bar{a}=2ci$, geldt:

(1.32) $\mathfrak{R}a=\frac{1}{2}(a+\bar{a})$.

(1.33) $\mathfrak{I}a=\frac{1}{2i}(a-\bar{a})$.

Verder geldt, als we steeds het toegevoegd complexe van een getal aangeven door boven het symbool van dat getal een streep te zetten, voor willekeurige complexe getallen a en b:

(1.34) $\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$.

(1.35) $\overline{a-b}=\bar{a}-\bar{b}$.

(1.36) $\overline{ab}=\bar{a}\bar{b}$.

(1.37) Als $b \neq 0$, geldt $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$.

Bewijs: Als $a=c+id$, $b=e+if$ (c,d,e en f reëel) geldt $\overline{a\pm b}=\overline{c\pm e+i(d\pm f)}=c\pm e-i(d\pm f)=c-id\pm(e-if)=\bar{a}\pm\bar{b}$. Verder geldt $\overline{ab}=\overline{ce-df+i(cf+de)}=ce-df-i(cf+de)=(c-id)(e-if)=\bar{a}\bar{b}$. Tenslotte geldt, als $b \neq 0$, $b\frac{a}{b}=a$, dus $\bar{a}=\overline{b\frac{a}{b}}=\bar{b}\overline{\left(\frac{a}{b}\right)}$, dus $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}=\overline{\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Opgave 1. Als $a_0,a_1,\dots,a_n$ en z complexe getallen zijn, geldt

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_k\bar{z}^k.$$

Opgave 2. Als a_0 en a_1 complexe getallen zijn, bepaal dan die complexe getallen z, waarvoor geldt $z^2+a_1z+a_0=0$ (m.a.w. bepaal de complexe wortels van een vierkantsvergelijking met complexe coëfficiënten). Aanwijzing: beschouw eerst het geval $a_1=0$.

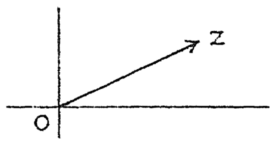
Opgave 3. Bewijs, dat een complex getal dan en slechts dan reëel is, als het gelijk is aan zijn toegevoegd complexe. Bewijs, dat een complex getal dan en slechts dan zuiver imaginair is, als het het tegengestelde is van zijn toegevoegd complexe.

Opgave 4. Toon aan dat voor ieder complex getal a geldt $\bar{\bar{a}}=a$.

We zullen nu een meetkundig beeld van de verzameling der complexe getallen maken. We zullen in het vervolg met behulp van dit meetkundige beeld vaak meetkundige illustraties van eigenschappen van complexe getallen geven. Zelfs zullen we vaak voor begrippen betreffende complexe getallen een meetkundige terminologie gebruiken. Dit alles sluit het feit niet uit , dat we bij onze bewijzen in de analyse nooit van meetkundige overwegingen gebruik zullen maken: we behandelen de analyse geheel onafhankelijk van stellingen uit de meetkunde.

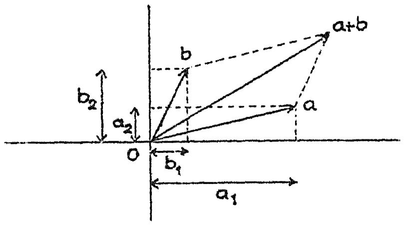
Als we dit voor ogen houden, is er geen enkel bezwaar tegen, ter veraanschouwelijking aan begrippen en stellingen over complexe getallen een meetkundige interpretatie te geven (zie voor analoge opmerkingen ook an I 20).

In het platte vlak voeren we, zoals in de analytische meetkunde gebruikelijk is, twee onderling loodrechte coördinaatassen in (X-as e Y-as; snijpunt O); ieder punt van het vlak is dan gekarakteriseerd door een paar (x,y) reële getallen, zijn coördinaten genaamd. Ieder complex getal z is op één en slechts één manier te schrijven in de vorm $z = x+iy$ met x en y reëel; we voegen nu aan het getal z het punt (x,y) van het platte vlak toe. Op deze wijze ontstaat een eeneenduidige betrekking tussen de complexe getallen en de punten van het platte vlak. Als deze betrekking tot stand gebracht is, noemen we het vlak het <u>complexe vlak</u>. We spreken dan wel kortheidshalve van "het punt z" als we bedoelen "het punt dat overeenkomt met het complexe getal z" en kennen aan de punten bepaalde eigenschappen toe die de corresponderende complexe getallen bezitten. Zo spreken we b.v. van een reëel punt als het met het punt corresponderende complexe getal reëel is. De X-as noemen we de <u>reële as</u>, de Y-as de <u>imaginaire as</u>. De reële as is de verzameling van de reële punten, de imaginaire as van de zuiver imaginaire punten. De oorsprong is het punt O. In plaat: van door een punt stellen we een complex getal z ook wel voor door



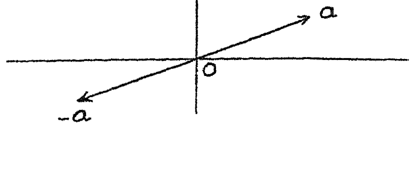
een <u>vector</u>, dat is een gericht lijnstuk (een "pijl" beginnende in het punt O en eindigende in het punt z.

Meetkundig komt het optellen van twee complexe getallen a en b op het volgende neer. Verplaats de vector Ob evenwijdig met zichzelf, dusdanig dat zijn beginpunt in het eindpunt van Oa komt te liggen;

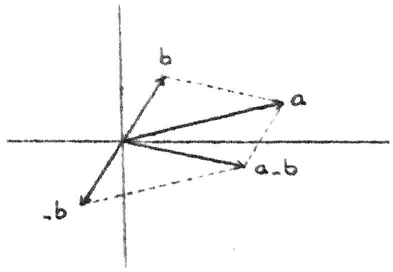


zijn eindpunt is dan het punt $a+b$ (<u>vectoroptelling</u>). Laat n.l. $a = a_1+ia_2$ en $b = b_1+ib_2$ (a_1, b_1, a_2 en b_2 reëel) zijn, dan is $a+b=(a_1+b_1) + i(a_2+b_2)$. Het is nu meetkundig eenvoudig in te zien, dat bovengenoemde constructie, toegepast op de punten (a_1,a_2) en (b_1,b_2) het punt (a_1+b_1, a_2+b_2) oplevert In de figuur is het geval getekend dat de punten in het eerste kwadrant liggen; ook bij ligging in andere kwadranten is de stelling echter geldig.

Om de aftrekking meetkundig te interpreteren, interpreteren we eerst het tegengestelde $-a$ van een punt a. Als $a = a_1+ia_2$ (a_1 en a_2 reëel) is $-a = -a_1+i(-a_2)$. Blijkbaar is de vector die $-a$ voorstelt



even lang als en tegengesteld gericht met de vector die a voorstelt. Om $a-b$ te vinden kunnen we a en -b optellen. We zien dan een duidelijke meetkundige illustratie van het feit dat $(a-b)+b = a$.



Interpretatie van vermenigvuldiging en deling stellen we uit tot we over het begrip "hoek" beschikken.

Opgave 5. Interpreteer de commutatieve eigenschap van de optelling als een meetkundige eigenschap van parallelogrammen.

We hebben gezien, dat de lichaamseigenschappen van reële getallen voor complexe getallen behouden blijven. We kunnen ons nu afvragen in hoeverre dit ook voor andere in de cursus analyse I behandelde eigenschappen het geval is. Met de ordeningseigenschappen (zie an I § 2) is dat niet het geval: het is niet mogelijk in de verzameling der complexe getallen een ordening te definiëren, dusdanig dat aan de voorwaarden B1 en B2 van an I § 2 voldaan is. Stel namelijk dat dit wel gelukt is. Dan geldt ook de uit B1 en B2 afgeleide eigenschap an I (2.4), die zegt dat uit $a \neq 0$ volgt $a^2 > 0$. Nu is $i \neq 0$, dus $-1 = i^2 > 0$. Verder is $-1 \neq 0$, dus $1 = (-1)^2 > 0$. Uit B2 volgt dan $0 = 1+(-1) > 0$, hetgeen een tegenstrijdigheid is.

Hoewel het begrip absolute waarde van een reëel getal met behulp van de ordening gedefinieerd is, is het toch mogelijk dit begrip voor complexe getallen zo te definiëren, dat het overeenkomstige eigenschappen bezit als bij reële getallen en dat het voor reële getallen met de oude definitie overeenstemt. We zullen de definitie van $|a|$ zo geven dat dit getal meetkundig de afstand van het punt a tot de oorsprong (of met andere woorden de lengte van de vector Oa) voorstelt. Nu is de afstand van het punt (a_1,a_2) tot de oorsprong gelijk aan $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

We merken nu eerst op, dat voor ieder complex getal $a = a_1+ia_2$ (a_1 en a_2 reëel) geldt dat $a\bar{a} = a_1^2+a_2^2$, dus dat $a\bar{a}$ een reëel getal ≥ 0 is, dat dan en slechts dan $= 0$ is, als $a = 0$. Het heeft dus zin om over $\sqrt{a\bar{a}}$ te spreken.

Voor ieder complex getal a definiëren we nu $|a| = \sqrt{a\bar{a}}$.

Deze definitie levert in de eerste plaats de hierboven gegeven meetkundige interpretatie. Verder is de definitie voor reële getallen in overeenstemming met de vroeger gegeven definitie. Immers als a reëel is, is $\bar{a} = a$ en $|a| = \sqrt{a^2}$, d.w.z. $|a| = a$ als $a \geq 0$ en $|a| = -a$ als $a < 0$ (zie an I § 7). Er gelden nu de volgende eigenschappen:

(1.38) Voor ieder complex getal a geldt $|a| \geq 0$ en dan en slechts dan $|a| = 0$, als $a = 0$.

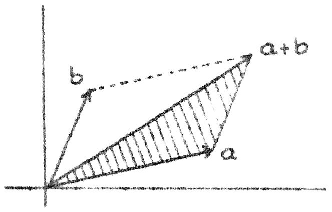
Bewijs: Het volgt uit de hierboven gemaakte opmerkingen over $a\bar{a}$.

(1.39) Voor ieder tweetal complexe getallen a en b geldt $|ab| = |a|\,|b|$.

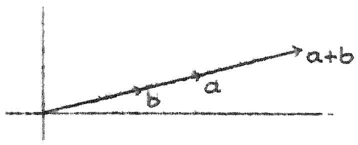
Bewijs: $|ab|^2 = ab\,\overline{ab} = a\bar{a}b\bar{b} = |a|^2\,|b|^2$, dus $|ab| = |a|\,|b|$.

(1.40) Voor ieder tweetal complexe getallen a en b geldt $|a+b| \leqq |a| + |b|$ (<u>driehoeksongelijkheid</u>).

Alvorens (1.40) te bewijzen geven wij er een meetkundige interpretatie van. Bij de meetkundige constructie van a+b ontstaat een



driehoek waarvan de zijden lengten $|a|$, $|b|$ en $|a+b|$ hebben. Nu komt (1.40) overeen met de meetkundige stelling dat een zijde van een driehoek kleiner is dan de som van de twee andere zijden. Dat in (1.40) $\leqq$ staat inplaats van $<$ komt omdat de driehoek ook kan "ontaarden" tot een lijnvormige figuur. De benaming "driehoeksongelijkheid" is daarmee ook verklaard.



Daar we geen beroep willen doen op meetkundige stellingen geven we nu een **analytisch** bewijs van (1.40).

<u>Bewijs:</u> $\mathfrak{J}(a\bar b)$ is een reëel getal dus $-4(\mathfrak{J}(a\bar b))^2 \leqq 0$, dus $(2i\mathfrak{J}(a\bar b))^2 \leqq 0$, dus $(a\bar b - \bar a b)^2 \leqq 0$, dus $(a\bar b - \bar a b)^2 \leqq 0$, dus $(a\bar b + \bar a b)^2 \leqq 4a\bar a b\bar b$, dus $a\bar b + \bar a b \leqq 2|a|\,|b|$ (immers het rechterlid is de vierkantswortel van het rechterlid van de vorige uitdrukking; ook als het linkerlid negatief zou zijn geldt de ongelijkheid), dus $a\bar a + b\bar b + a\bar b + \bar a b \leqq a\bar a + b\bar b + 2|a|\,|b|$, dus $(a+b)(\bar a + \bar b) \leqq (|a| + |b|)^2$ dus $|a+b|^2 \leqq (|a| + |b|)^2$, dus $|a+b| \leqq |a| + |b|$.

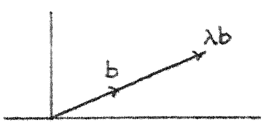
De volgende stelling geeft aan onder welke omstandigheden in (1.40) het gelijkteken geldt:

(1.41) Voor twee complexe getallen a en b geldt $|a+b| = |a| + |b|$ dan en slechts dan als $a\bar b$ reëel en $\geqq 0$ is.

<u>Bewijs:</u> Als $a\bar b$ reëel en $\geqq 0$ is, is $a\bar b + \bar a b = 2\mathcal{R}(a\bar b) \geqq 0$ en $\mathfrak{J}(a\bar b) = 0$. Het bewijs van (1.40) kan nu met gelijktekens herhaald worden. Als omgekeerd gegeven is $|a+b| = |a| + |b|$ kan het bewijs van (1.40) met gelijktekens van achteren naar voren gelezen worden. In de eerste plaats levert dit $\mathfrak{J}(a\bar b) = 0$, in de tweede plaats volgt uit $a\bar b + \bar a b = 2|a|\,|b|$, dat $a\bar b + \bar a b \geqq 0$, dus $\mathcal{R}(a\bar b) \geqq 0$. Dus $a\bar b$ is reëel en $\geqq 0$.

We kunnen de voorwaarde van (1.41) ook nog in een andere vorm brengen. Als $b = 0$, is $a\bar b$ reëel en $\geqq 0$. Als $b \neq 0$ en $a\bar b$ reëel en $\geqq 0$, dan is $b\bar b$ reëel en >0, dus $\frac{a}{b} = \frac{a\bar b}{b\bar b}$ reëel en $\geqq 0$, dus $a = \lambda b$ met reële $\lambda \geqq 0$. Als omgekeerd $b \neq 0$ en $a = \lambda b$ met reële $\lambda \geqq 0$, is $a\bar b = \lambda b\bar b$ reëel en $\geqq 0$. Hiermee hebben we dus gevonden:

(1.42) Voor twee complexe getallen a en b geldt $|a+b| = |a| + |b|$ dan en slechts dan als $b = 0$ of als $a = \lambda b$ met reële $\lambda \geqq 0$.



Meetkundig is als $b \neq 0$ en λ reëel en $\geqq 0$, het punt λb een punt gelegen op de halve lijn met beginpunt 0 gaande door b.

Meetkundig geeft (1.42) dus juist, dat de driehoeksongelijkheid een gelijkheid wordt als de driehoek op de wijze ontaardt als hierboven al was aangegeven.

We definiëren nu de <u>afstand</u> van twee complexe getallen a en b als $|b-a|$.

Deze afstandsdefinitie voldoet aan de axioma's van een metrische ruimte (zie an I § 16). Het axioma (α) volgt uit (1.38), het axioma (β) volgt uit $|a-b| = |(-1)(b-a)| = |-1||b-a| = |b-a|$, het axioma ($\gamma$) volgt uit (1.40). De complexe getallen vormen dus een metrische ruimte.

We merken nog op dat de afstandsdefinitie ook overeenkomt met het gewone begrip afstand in de meetkunde. Immers als $a = a_1+ia_2$ en $b = b_1+ib_2$ (a_1, b_1, a_2 en b_2 reëel) is $|b-a| = |(b_1-a_1)+i(b_2-a_2)| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ en dit is juist de meetkundige afstand van de punten (a_1,a_2) en (b_1,b_2).

De toevoeging die we tot stand gebracht hebben tussen de complexe getallen en de punten van het platte vlak berust op het feit dat er een eeneenduidige toevoeging bestaat tussen de complexe getallen $a = a_1+ia_2$ en de paren (a_1,a_2) van reële getallen, d.w.z. tussen de complexe getallen en de punten van de tweedimensionale Euclidische ruimte E_2 (zie an I 51, voorbeeld II); bij deze toevoeging stemt de afstandsdefinitie ook overeen. Deze toevoeging heeft nu echter niets meetkundigs meer en het is dan ook volkomen geoorloofd om de in de cursus analyse I voor E_2 afgeleide eigenschappen op complexe getallen toe te passen. Zo hadden we ons eigenlijk het bewijs van (1.40) wel kunnen besparen, omdat (1.40) direct af te leiden is uit de geldigheid van axioma (γ) in E_2 (zie an I 52). We zullen in de toekomst van deze toevoeging nog gebruik maken.

We zullen nu nog enige begrippen voor complexe getallen invoeren, die we meetkundige namen zullen geven. Dat deze begrippen met de overeenkomstige meetkundige begrippen in het complexe vlak overeenstemmen, zal, mede in verband met hierboven behandelde, duidelijk zijn.

We definiëren dat het complexe getal c <u>tussen</u> de complexe getallen a en b ligt, als geldt $|b-a| = |c-a|+|b-c|$.

Hierbij valt op te merken dat dit een begrip tussen in de ruime zin is: tot de punten die tussen a en b liggen behoren a en b zelf. Verder geldt dat als c tussen a en b ligt, c ook tussen b en a ligt.

(1.43) Het complexe getal c ligt dan en slechts dan tussen de complexe getallen a en b als er een reëel getal λ bestaat, zodat $c = (1-\lambda)a+ + \lambda b$ en $0 \leq \lambda \leq 1$.

<u>Bewijs</u>: Stel eerst dat $|b-a| = |c-a| + |b-c|$. Als $c = a$, geldt $c = (1-\lambda)a+\lambda b$ met $\lambda = 0$; als $c \neq a$, dan is, volgens (1.42), $\frac{b-c}{c-a} = \mu$

reëel en ≥ 0. Hieruit volgt $c = \frac{\mu}{\mu+1}a + \frac{1}{\mu+1}b$; stellen we $\lambda = \frac{1}{\mu+1}$, dan is $\lambda > 0$ en $1-\lambda = \frac{\mu}{\mu+1} \geq 0$, dus $\lambda \leq 1$ en $c = (1-\lambda)a + \lambda b$. Stel nu omgekeerd, dat gegeven is $c = (1-\lambda)a + \lambda b$, en $0 \leq \lambda \leq 1$, dan is $c-a = \lambda(b-a)$ en $b-c = (1-\lambda)(b-a)$. Als $\lambda = 0$ is $c = a$ en als $a = b$, is $c = a$; in beide gevallen is $|b-a| = |c-a| + |b-c|$. Als $\lambda \neq 0$ en $a \neq b$, is $\frac{b-c}{c-a} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ reëel en ≥ 0, dus, wederom volgens (1.42), $|b-a| = |c-a| + |b-c|$.

Voor reële getallen komt het begrip tussen overeen met het bekende begrip tussen, dat berust op de ordening der reële getallen. We drukken dit uit in de volgende stelling.

(1.44) Als a en b reële getallen zijn en als $a \leq b$, dan ligt het complexe getal c dan en slechts dan tussen a en b als c reëel is en $a \leq c \leq b$.

Opgave 6. Bewijs (1.44).

Als a en b complexe getallen zijn en $a \neq b$ definiëren we het lijnstuk ab als de verzameling van de complexe getallen z tussen a en b, de halve lijn ab als de verzameling der complexe getallen z, waarvoor geldt dat z tussen a en b ligt of b tussen a en z ligt en de rechte lijn ab als de verzameling der complexe getallen, waarvoor geldt dat z tussen a en b ligt of b tussen a en z ligt of a tussen z en b ligt.

We merken op dat het lijnstuk (resp. de rechte lijn) ab hetzelfde (resp. dezelfde) is als het lijnstuk (resp. de lijn) ba, maar dat de halve lijn ab niet dezelfde is als de halve lijn ba.

(1.45) Het complexe getal z behoort dan en slechts dan tot de halve lijn ab als er een reëel getal λ bestaat, zodat $z = (1-\lambda)a + \lambda b$ en $0 \leq \lambda$.

Bewijs: Stel dat z behoort tot de halve lijn ab. Als z tussen a en b ligt is er een reëel getal λ zodat $z = (1-\lambda)a + \lambda b$ en $0 \leq \lambda \leq 1$. Als b tussen a en z ligt is er een reëel getal μ zodat $b = (1-\mu)a + \mu z$ en $0 \leq \mu \leq 1$. Nu is $\mu \neq 0$, want $\mu = 0$ impliceert $b = a$, hetgeen uitgesloten is. Dus geldt $z = \frac{\mu-1}{\mu}a + \frac{1}{\mu}b$. Stellen we $\lambda = \frac{1}{\mu}$, dan is $1 \leq \lambda$ en $1-\lambda = \frac{\mu-1}{\mu}$, dus $z = (1-\lambda)a + \lambda b$. Stel nu omgekeerd, dat gegeven is $z = (1-\lambda)a + \lambda b$ en $0 \leq \lambda$. Als $\lambda \leq 1$, ligt z tussen a en b. Als $\lambda > 1$, is $b = \frac{\lambda-1}{\lambda}a + \frac{1}{\lambda}z$. Stellen we $\mu = \frac{1}{\lambda}$, dan is $0 < \mu < 1$ en $1-\mu = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, dus b tussen a en z.

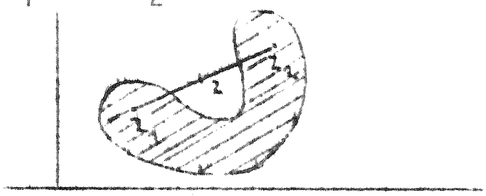
(1.46) Het complexe getal z behoort dan en slechts dan tot de rechte lijn ab als er een reëel getal λ bestaat, zodat $z = (1-\lambda)a + \lambda b$.

Opgave 7. Bewijs (1.46).

Stelling (1.46) levert een parametervoorstelling van de rechte lijn ab met een reële parameter λ. Vergelijk ook am I 6.

Als a een complex getal is en r een reëel getal $r > 0$, definiëren we de cirkel (resp. de gesloten cirkelschijf en de open cirkelschijf) met middelpunt a en straal r als de verzameling der complexe getallen z waarvoor geldt $|z-a| = r$ (resp. $|z-a| \leq r$ en $|z-a| < r$).

Een verzameling V van complexe getallen heet convex als uit $z_1 \in V$, $z_2 \in V$ en z tussen z_1 en z_2 volgt $z \in V$. Anders uitgedrukt: een verzameling V heet convex als hij met ieder tweetal getallen ook het verbindende lijnstuk bevat. Het in de figuur hiernaast gearceerde gebied is dus niet convex.



Opgave 8. Bewijs dat de volgende verzamelingen convex zijn: de verzameling van alle complexe getallen, een lijnstuk, een halve lijn, een rechte lijn, een gesloten cirkelschijf, een open cirkelschijf.

Opgave 9. Bewijs dat de open cirkelschijven met middelpunt a dezelfde zijn als de omgevingen van a in de metrische ruimte der complexe getallen (zie an I 53).

Opgave 10. Bewijs dat de volgende verzamelingen gesloten zijn in de metrische ruimte der complexe getallen: lijnstukken, halve lijnen, rechte lijnen, cirkels, gesloten cirkelschijven.

Opgave 11. Bewijs dat Γ een rechte lijn is.

(1.47) Als c op de halve lijn ab ligt en $c \neq a$ is de halve lijn ac dezelfde als de halve lijn ab.

Bewijs: Er is een reëel getal $\lambda > 0$ waarvoor geldt $c = (1-\lambda)a + \lambda b$. Stel nu dat z op de halve lijn ac ligt dan is er een reëel getal $\mu \geq 0$, zodat $z = (1-\mu)a + \mu c$, dus $z = (1-\mu)a + \mu(1-\lambda)a + \mu\lambda b = (1-\mu\lambda)a + \mu\lambda b$ en $\mu\lambda \geq 0$, dus z ligt op de halve lijn ab. Stel omgekeerd dat z op de halve lijn ab ligt, dan is er een reëel getal $\sigma \geq 0$, zodat $z = (1-\sigma)a + \sigma b$. Verder is $b = \frac{\lambda-1}{\lambda} a + \frac{1}{\lambda} c$, dus $z = (1-\sigma)a + \frac{\sigma(\lambda-1)}{\lambda} a + \frac{\sigma}{\lambda} c = (1-\frac{\sigma}{\lambda})a + \frac{\sigma}{\lambda} c$ en $\frac{\sigma}{\lambda} \geq 0$, dus z ligt op de halve lijn ac.

(1.48) Als c en d op de rechte lijn ab liggen en $c \neq d$, dan is de rechte lijn cd dezelfde als de rechte lijn ab.

Opgave 12. Bewijs (1.48).

We lassen nu een meetkundige beschouwing in. In de meetkunde kennen we **bewegingen**, dat zijn zekere transformaties van het platte vlak in zichzelf. Ze hebben de eigenschap dat afstanden behouden blijven, d.w.z. als a en b twee punten zijn, die door een beweging in c resp. d overgaan, is de afstand van c tot d gelijk aan de afstand van a tot b. We beperken ons tot eigenlijke bewegingen, waarbij het platte vlak in zichzelf bewogen wordt, in tegenstelling tot oneigenlijke bewegingen, waarbij het vlak in de ruimte omgeklapt wordt (b.v. een draaiing van het vlak over 180° in de ruimte om een as die in het vlak is gelegen. Als we over bewegingen spreken bedoelen we eigenlijke bewegingen. Voor bewegingen geldt het volgende: als a,b,c en d vier punten van het vlak zijn en $|b-a| = |d-c| \neq 0$, is er één en slechts één beweging die a in c en b in d overvoert. In het bijzonder is dit voor $a=c$, $b=d$, $a\neq b$ alleen de identieke transformatie, d.i. de transformatie die ieder punt in zich zelf afbeeldt. Een bijzonder geval van een beweging is een verschuiving of translatie die ieder punt in een vaste richting over een vaste afstand verschuift. Het is duidelijk dat in het complexe vlak een translatie Uz wordt voorgesteld door $Uz=z+a$ met vaste a.

Na deze meetkundige beschouwingen keren we terug tot de complexe getallen. We beschouwen transformaties van complexe getallen, dat zijn afbeeldingen Uz die aan ieder complex getal z een complex getal Uz toevoegen. We beperken ons nu tot die transformaties, die de eigenschap hebben, dat voor ieder tweetal complexe getallen z_1 en z_2 geldt $|Uz_2-Uz_1| = |z_2-z_1|$. Neem eens zo'n transformatie en stel $U0=a$, $U1=b$, dan is $|b-a| = |U1-U0| = |1-0| = 1$, dus $(\bar{b}-\bar{a})(b-a)=1$. Definieer nu de transformatie $Vz = (\bar{b}-\bar{a})(Uz-a)$, dan is $V0=0$ en $V1=1$; voor willekeurige z_1 en z_2 geldt $|Vz_2-Vz_1| = |(\bar{b}-\bar{a})(Uz_2-Uz_1)| = |z_2-z_1|$. Voor willekeurige z geldt dus $|Vz| = |Vz-0| = |Vz-V0| = |z-0| = |z|$ en $|Vz-1| = |Vz-V1| = |z-1|$. Noem ter afkorting $Vz=u$, dan is $u\bar{u}=z\bar{z}$ en $(u-1)(\bar{u}-1)=(z-1)(\bar{z}-1)$. Schrijven we dit laatste uit en gebruiken we $u\bar{u}=z\bar{z}$, dan vinden we $u+\bar{u}=z+\bar{z}$. Dan is $(u-z)(u-\bar{z})= u^2-(z+\bar{z})\,u+z\bar{z}=u^2-(u+\bar{u})u+u\bar{u}=0$, dus $u=z$ of $u=\bar{z}$, dus voor iedere z geldt $Vz=z$ of $Vz=\bar{z}$. We onderscheiden nu twee gevallen:

1°. $Vi=i$. Stel een getal z_1, waarvoor geldt $Vz_1=\bar{z}_1$, dan is $|\bar{z}_1-i| = |Vz_1-Vi| = |z_1-i|$, dus $(\bar{z}_1-i)(z_1+i)=(z_1-i)(\bar{z}_1+i)$, dus $2i(z_1-\bar{z}_1)=0$, dus $z_1=\bar{z}_1$. Voor iedere z geldt dus $Vz=z$.

2°. $Vi=-i$. Stel een getal z_2, waarvoor geldt $Vz_2=z_2$, dan is $|z_2+i| = |Vz_2-Vi|=|z_2-i|$, dus $(z_2+i)(\bar{z}_2-i)=(z_2-i)(\bar{z}_2+i)$, dus $2i(z_2-\bar{z}_2)=0$, dus $z_2=\bar{z}_2$. Voor iedere z geldt dus $Vz=\bar{z}$.

Uit $Vz=(\bar{b}-\bar{a})(Uz-a)$ volgt $(b-a)Vz=Uz-a$, dus $Uz=(b-a)Vz+a$. Daar nu geldt $Vz=z$ voor alle z of $Vz=\bar{z}$ voor alle z, geldt ook $Uz=(b-a)z+a$ voor alle z of $Uz=(b-a)\bar{z}+a$ voor alle z. Daar $|b-a| =1$ is Uz dus te schrijven in de vorm $Uz=uz+v$ of in de vorm $Uz=u\bar{z}+v$ in beide gevallen met $|u| =1$.

Nemen we omgekeerd een transformatie $Uz=uz+v$ met constante u en v en $|u| =1$, dan is $|Uz_2-Uz_1| = |u(z_2-z_1)| = |z_2-z_1|$ voor willekeurige z_1 en z_2. Hiermee hebben we de volgende stelling bewezen.

(1.49) De transformaties Uz van complexe getallen, waarvoor geldt $|Uz_2-Uz_1| = |z_2-z_1|$ voor willekeurige complexe getallen z_1 en z_2, zijn die en slechts die transformaties, die te schrijven zijn in de gedaante $Uz=uz+v$ of $Uz=u\bar{z}+v$ met willekeurige constante u en v en $|u| =1$.

Een transformatie $Uz=u\bar{z}+v$ met $|u|=1$ correspondeert niet met een beweging. Stel n.l. dat dit wel zo is, dan correspondeert de transformatie $Wz=Uz-v$ ook met een beweging. Er geldt $Wz=u\bar{z}$. Nu is $W0=0$; voor $u=1$ geldt $W1=1$ en voor $u\neq 1$ geldt $W(i(1-u))=u(-i(1-\bar{u}))=-iu+i=i(1-u)$. In ieder geval zijn er dus twee verschillende punten die in zich zelf overgaan. Dus is Wz de identieke transformatie; voor $u=1$ geeft dit voor $z=i$ en voor $u\neq 1$ geeft dit voor $z=1$ een tegenstrijdigheid. Dus is $Uz=u\bar{z}+v$ geen beweging. Verder geldt voor ieder tweetal complexe getallen u en v met $|u|=1$, dat er een beweging bestaat die 0 in v en 1 in u+v overvoert, want $|u+v-v| = |u| =1= |1-0|\neq 0$. Op grond van hetgeen we hebben gevonden moet deze beweging Uz in de gedaante $Uz=u_1z+v_1$ met $|u_1| = 1$ te schrijven zijn. Uit $U0=v$ en $U1=u+v$ volgt dan direct $u_1=u$ en $v_1=v$. Dus correspondeert met iedere transformatie $Uz=uz+v$ met constante u en v en $|u|=1$ een beweging. Uit deze beschouwingen volgt, dat de volgende definities een passende meetkundige betekenis hebben.

We definiëren een beweging als een transformatie Uz van de verzameling der complexe getallen die te schrijven is in de gedaante $Uz=uz+v$ met constante u en v en $|u|=1$.

We definiëren een translatie als een transformatie Uz van de verzameling der complexe getallen, die te schrijven is in de gedaante $Uz=z+v$ met constante v.

Uit (1.49) volgt dan

(1.50) Voor een beweging Uz geldt $|Uz_2-Uz_1| = |z_2-z_1|$ voor willekeurige z_1 en z_2.

We merken nog op dat de transformaties $Uz=u\bar{z}+v$ met $|u|=1$ corresponderen met de oneigenlijke bewegingen. We zullen hiervan echter geen gebruik maken en gaan er daarom ook niet op in.

We definiëren een dekpunt van een transformatie van de verzameling der complexe getallen als een punt dat door de transformatie in zich zelf wordt overgevoerd.

Opgave 13. Stel een onderzoek in naar de dekpunten van bewegingen.

Opgave 14. Bewijs de volgende beweringen over een transformatie $Uz=u\bar{z}+v$ met constante u en v en $|u|=1$:

1^o. Als U minstens één dekpunt heeft, geldt $v=-u\bar{v}$;

2^o. Als $v=-u\bar{v}$ heeft U minstens één dekpunt (Aanwijzing: voor u=1 is $\frac{1}{2}v$ en voor $u\neq 1$ is $\frac{v}{1-u}$ een dekpunt);

3^o. Als $v=-u\bar{v}$ is de verzameling van de dekpunten van U een rechte lijn (Aanwijzing: als c een dekpunt is, is voor u=1 ook c+1 en voor $u\neq 1$ ook $c+i(1-u)$ een dekpunt).

Als a,b en c complexe getallen zijn, waarvoor geldt $a\neq b$ en $a\neq c$, noemen we het stelsel van de twee halve lijnen ab en ac de hoek (ab,ac). De hoeken (ab,ac) en (de,df) heten even groot als er een beweging bestaat die de halve lijn ab in de halve lijn de en de halve lijn ac in de halve lijn df overvoert.

In de meetkunde wordt aan iedere hoek een reëel getal toegevoegd, dat de hoekmaat (of ook wel de grootte) van de hoek wordt genoemd; hierbij is voldaan aan de volgende eisen:

1^o. de hoekmaten van twee hoeken zijn dan en slechts dan gelijk als de hoeken even groot zijn.
2^o. als a,b,c en d punten zijn, waarvoor geldt $a \neq b$, $a \neq c$ en $a \neq d$, dan is de hoekmaat van de hoek (ad,ab) de som van de hoekmaten van de hoek (ac,ab) en van de hoek (ad,ac).

Op het probleem van de bepaling van een hoekmaat komen we later nog terug.

§ 2. Limieten in de complexe getallen.

We behandelen limieten in complexe getallen met behulp van de in § 1 besproken afbeelding van de complexe getallen op de Euclidische ruimte E_2. We herhalen een aantal begrippen, die ook al in de cursus analyse I zijn behandeld.

Een rij $a_1, a_2, \dots$ complexe getallen heet een fundamentaalrij als bij ieder positief reëel getal ε een natuurlijk getal N te vinden is zodat uit $n > N$ en $m > N$ volgt $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Een rij $a_1, a_2, \dots$ complexe getallen heet convergent met limiet a ($\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$) als bij ieder positief reëel getal ε een natuurlijk getal N te vinden is, zodat uit $n > N$ volgt $|a - a_n| < \varepsilon$.

Een rij $a_1, a_2, \dots$ complexe getallen heet begrensd als er een reëel getal K bestaat, zodat $|a_n| \leq K$ voor alle n.

Er gelden de volgende stellingen:

(2.1) Een convergente rij complexe getallen heeft slechts één limiet.

Bewijs: Zie an I 60.

(2.2) Een rij complexe getallen is dan en slechts dan convergent als hij een fundamentaalrij is (m.a.w. de metrische ruimte der complexe getallen is volledig).

Bewijs: Zie an I 57.

(2.3) Een convergente rij is begrensd.

Bewijs: Laat de rij $a_1, a_2, \dots$ convergent zijn met limiet a. Dan is er een N zodat voor $n > N$ geldt $|a_n - a| < 1$. De getallen $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|$ hebben een grootste; noem deze A. Laat K de grootste der twee getallen $|a| + 1$ en A zijn, dan geldt $|a_n| \leq K$ voor alle n; immers voor $n \leq N$ volgt dit uit $|a_n| \leq A \leq K$ en voor $n > N$ uit $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1 \leq K$.

Als $a_1, a_2, \dots$ een rij complexe getallen is en $a_n = b_n + ic_n$ met reële b_n en c_n dan heet de rij $b_1, b_2, \dots$ de rij der reële delen van de rij

$a_1, a_2, \ldots$ en de rij $c_1, c_2, \ldots$ de rij der imaginaire delen van de rij $a_1, a_2, \ldots$.

(2.4) Een rij complexe getallen is dan en slechts dan convergent, als de rijen der reële delen en der imaginaire delen van de gegeven rij convergent zijn. Bovendien geldt als de limiet van de gegeven rij a is en de limiet van de rij der reële (resp. imaginaire) delen b (resp. c), $a=b+ic$.

<u>Bewijs</u>: Geheel analoog met het bewijs van de stelling onderaan an I 62.

(2.5) Als de rijen complexe getallen $a_1, a_2, \ldots$ en $b_1, b_2, \ldots$ convergent zijn met limieten a resp. b dan is de rij $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots$ (resp. $a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots$ en $a_1b_1, a_2b_2, \ldots$) convergent met limiet $a+b$ (resp. $a-b$ en ab). Als bovendien $b \neq 0$ en $b_n \neq 0$ voor alle n is de rij $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ convergent met limiet $\frac{a}{b}$.

<u>Bewijs</u>: Laat $a_n = c_n + i\, d_n$, $b_n = e_n + i\, f_n$, $a = c + i\, d$ en $b = e + if$ zijn met reële c_n, d_n, e_n, f_n, c, d, e en f. Dan is op grond van (2.4) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Verder geldt $a_n+b_n = (c_n+e_n)+i(d_n+f_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n+e_n) = c+e$ en $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n+f_n) = d+f$. Dan is op grond van (2.4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = (c+e)+i(d+f) = a+b$. Analoog behandelt men het verschil, product en quotiënt.

(2.6) Als $a_1, a_2, \ldots$ een convergente rij complexe getallen is met limiet 0 en $b_1, b_2, \ldots$ is een begrensde rij complexe getallen, dan is de rij $a_1\, b_1, a_2\, b_2, \ldots$ convergent met limiet 0.

<u>Bewijs</u>: Er is een reëel getal K, zodat $|b_n| \leq K$ voor alle K. Hieruit volgt dat $K \geq 0$, dus $K+1 > 0$ is. Bij iedere reële $\varepsilon > 0$ is een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K+1}$; voor zulke n geldt dan ook $|a_nb_n| = |a_n|\,|b_n| \leq \frac{\varepsilon K}{K+1} < \varepsilon$. Dus $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = 0$.

(2.7) Als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dan is $|a_1|, |a_2|, \ldots$ convergent met limiet $|a|$.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt uit $||u|-|v|| \leq |u-v|$; deze ongelijkheid is geldig voor willekeurige complexe u en v, hetgeen op analoge wijze wordt bewezen als voor reële getallen (zie an I (7.6)).

Tenslotte merken we nog op dat de onderaan an I 60 voor metrische ruimten bewezen stelling uiteraard ook geldt voor complexe getallen. In het bijzonder geldt dus dat een rij, die ontstaat door verschikking van een convergente rij, convergent is met dezelfde limiet, dat een deelrij van een convergente rij convergent is met dezelfde limiet en dat een rij, die ontstaat door in een convergente rij op willekeurige plaatsen een eindig aantal elementen in te lassen, convergent is met dezelfde limiet.

Opgave 15. Als de rij $a_1, a_2, \ldots$ convergent is en alle a_n liggen op hetzelfde lijnstuk, dan ligt de limiet ook op dat lijnstuk.

§3. Oneindige reeksen.

Als $a_1, a_2, \ldots$ een rij complexe getallen is, vormen we de rij $A_1, A_2, \ldots$ gedefinieerd door $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. We noemen de rij A_n de reeks $\sum_n a_n$. De a_n heten de termen van de reeks, de A_n de partiële sommen. Als de rij A_n convergeert met limiet A, zeggen we dat de reeks $\sum_n a_n$ convergeert met de som A. We schrijven dan ook $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dus geldt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Eigenlijk is de theorie van de reeksen dus in wezen geen nieuwe theorie, daar deze op die der rijen (n.l. die der partiële sommen) terug te brengen is. Omgekeerd is echter ook de theorie der convergente rijen als een speciaal geval van de theorie der reeksen op te vatten: iedere rij is n.l. ook als rij der partiële sommen van een reeks op te vatten. Als n.l. een rij $a_1, a_2, \ldots$ gegeven is definiëren we een rij $u_1, u_2, \ldots$ als volgt:

$u_1 = a_1$ en $u_n = a_n - a_{n-1}$ voor $n > 1$, dan is $U_1 = u_1 = a_1$ en $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$ voor $n > 1$, dus a_n is juist de rij der partiële sommen van u_n. Het eigen karakter van de theorie van de oneindige reeksen ontstaat, doordat we nu kwesties samenhangende met convergentie in verband brengen met de termen van de reeks en niet met de partiële sommen.

Wat de notatie betreft, zullen we, zoals hierboven ook al is geschied, zoveel mogelijk vasthouden aan de conventie om de elementen en de partiële sommen van eenzelfde reeks met corresponderende kleine letters en hoofdletters te schrijven.

Uit de definitie volgt direct dat een reeks $\sum_n a_n$ convergent is met som A als bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $\left| A - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$. Maar op grond van (2.2) is een reeks ook dan en slechts dan convergent als de partiële sommen een fundamentaalrij vormen, d.w.z. als bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor $m > N$, $n > N$ geldt $\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$. Is nu $m > n$ (het geval $m=n$ kan buiten beschouwing blijven omdat de verlangde betrekking dan altijd geldt), dan is $m = n+p$ met een natuurlijk getal p en $\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. Hieruit volgt:

(3.1) Een reeks $\sum_n a_n$ is dan en slechts dan convergent als bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor $n > N$ en willekeurige natuurlijke p geldt $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$.

Het prettige van (3.1) is, dat men de som van de reeks niet behoeft te kennen om de convergentie te bewijzen.

Hieruit volgt dat analoog als bij rijen de begintermen er voor de convergentie niets toe doen. Dat is niet zo vanzelfsprekend als het lijkt; men bedenke slechts dat als men b.v. de eerste term van een reeks verandert, hierdoor alle partiële sommen veranderen. Er is dan ook een belangrijk verschil met rijen: bij verandering van een eindig aantal termen van een convergente reeks blijft weliswaar de convergentie bewaard, maar kan de som veranderen. We hebben dus gevonden:

(3.2) Als men in een convergente reeks een eindig aantal termen verandert, is de veranderde reeks ook convergent, maar de som kan een andere zijn dan die van de oorspronkelijke reeks.

Neemt men in (3.1) p=1 dan komt er $|a_{n+1}| < \varepsilon$; dus voor $n > N+1$ is $|a_n| < \varepsilon$. Hieruit volgt:

(3.3) Als de reeks $\sum_n a_n$ convergeert, geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Het omgekeerde van (3.3) geldt niet, zoals we spoedig zullen zien.

Men begint een reeks in plaats van met de index 1 ook wel met een ander geheel getal en definieert $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$ als deze limiet bestaat. Uit (3.1) volgt weer, dat het geen invloed op de convergentie heeft met welke index we beginnen. Verder geldt voor $p < q \leq n$ ook $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{n} a_k$. Hieruit volgt:

(3.4) Als p en q gehele getallen zijn, waarvoor $p < q$ geldt, dan bestaan $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ en $\sum_{k=q}^{\infty} a_k$ beide wel of beide niet en als beide wel bestaan geldt $\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{\infty} a_k$.

We formuleren onze stellingen meestal voor reeksen die met de index 1 beginnen; het is dan eenvoudig de overeenkomstige stellingen voor reeksen met willekeurige beginindex hieruit af te leiden. Als we geen beginindex noemen, is deze 1.

De volgende stelling drukt uit dat we de termen van een reeks in groepjes bij elkaar mogen nemen zonder dat dit aan de convergentie en de som van de reeks iets verandert.

(3.5) Als de reeks $\sum_n a_n$ convergeert, als $m_1, m_2, \ldots$ een stijgende rij natuurlijke getallen is en als de rij $b_1, b_2, \ldots$ gedefinieerd wordt door

$b_1 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k$ en $b_n = \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k$ voor $n > 1$, dan is de reeks $\sum_n b_n$ convergent met dezelfde som als $\sum_n a_n$.

$$\underline{\text{Bewijs}}:\ B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{k=1}^{m_1} a_k + \sum_{n=2}^{N} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k = \sum_{k=1}^{m_N} a_k = A_{m_N}.$$

De rij der partiële sommen van $\sum_n b_n$ is dus een deelrij van de rij der partiële sommen van $\sum_n a_n$ en convergeert dus met dezelfde limiet.

Het omgekeerde van (3.5) geldt niet. Zo is de reeks $\sum_n 0$ convergent, maar de reeks $\sum_n (-1)^n$ niet en toch ontstaat uit de laatste reeks, als we groepjes van twee termen bij elkaar nemen ($m_n = 2n$) de eerste reeks. Men mag dus geen termen "splitsen".

Een reeks die niet convergent is, heet divergent. Als de termen van de reeks reëel zijn, zijn de partiële sommen ook reëel; het kan dan gebeuren dat de limiet van de partiële sommen $+\infty$ of $-\infty$ is. Men zegt dan dat de reeks eigenlijk divergent is met som $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(3.6) (Convergentiecriterium voor reeksen met reële niet-negatieve termen).

Als de termen van een reeks reëel en $\geqslant 0$ zijn, dan is de reeks convergent of eigenlijk divergent met som $+\infty$ en wel convergent als de rij der partiële sommen begrensd is en divergent als de rij der partiële sommen niet begrensd is. In beide gevallen is de som $\geqslant$ een willekeurige partiële som.

Bewijs: Laat de reeks $\sum_n a_n$ zijn met $A_1, A_2, \ldots$ als rij der partiële sommen. Voor $m > n$ geldt nu $A_m - A_n = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k \geqslant 0$. De rij der partiële sommen is dus reëel en monotoon niet-dalend en heeft dus, volgens de stelling op blz. an I 40, een limiet. Als de limiet eindig is, is de rij $A_1, A_2, \ldots$ convergent en dus begrensd (2.3); de reeks $\sum_n a_n$ is dan convergent. Als de limiet oneindig is, kan de limiet niet $-\infty$ zijn omdat $A_n \geqslant A_1$ voor alle n, dus is de limiet $+\infty$. De rij $A_1, A_2, \ldots$ is dan klaarblijkelijk ook niet begrensd en de reeks $\sum_n a_n$ is eigenlijk divergent met som $+\infty$. De laatste bewering van onze stelling volgt uit de stelling dat de limiet van een monotoon niet-dalende rij $\geqslant$ ieder element van die rij is; deze stelling wordt op blz. an I 40 weliswaar niet uitdrukkelijk geformuleerd, maar het bewijs ervan is wel in het daar gegeven bewijs opgesloten.

We merken nog op, dat de voorwaarde dat $a_1 \geqslant 0$ is, niet gebruikt is in het bewijs en dus weggelaten kan worden. Men kan trouwens nog verder gaan en de stelling ook nog bewijzen voor het geval dat $a_n \geqslant 0$ slechts geldt voor alle $n > N$ voor een vaste N. In dat geval kan men de bewering dat de som $\geq A_n$ ook alleen opstellen voor $n > N$. We gaan hierop niet in.

(3.7). Als r een complex getal is, waarvoor geldt $|r| < 1$, dan is $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

<u>Bewijs</u>: Het is evident, dat als $a_1, a_2, \dots$ een rij complexe getallen is, waarvoor geldt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, dan ook geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Het is dus voldoende te bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} |r^n| = 0$. Nu is $|r^n| = |r|^n$ (volledige inductie). Verder is voor $r = 0$ de stelling evident. We veronderstellen dus $0 < |r| < 1$, dan is $\frac{1}{|r|} > 1$. Dus is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|r|^n} = +\infty$ (zie an I 28, punt 7). Hieruit volgt $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ (zie an I 31, (9.9)).

(3.8). Als r een complex getal $\neq 1$ en n een natuurlijk getal is, geldt $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

<u>Bewijs</u>: Volledige inductie. Voor $n = 1$ is de stelling evident. Als de stelling voor een zekere n geldt, is $\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}$.

Met behulp van (3.7) en (3.8) kunnen we de convergentie van een <u>meetkundige reeks</u> $\sum_n r^n$ behandelen. Als $|r| \geq 1$, is ook $|r^n| = |r|^n \geq 1$, zodat op grond van (3.3) de reeks zeker divergent is. Als $|r| < 1$, volgt uit $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ en (3.7), dat $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$. Gewoonlijk laat men een meetkundige reeks bij de index 0 beginnen.

(3.9) Een meetkundige reeks $\sum_n r^n$ is divergent als $|r| \geq 1$ en convergent als $|r| < 1$. In het laatste geval is $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

<u>Opgave 16</u>. Bereken $\sum_{n=m}^{\infty} r^n$ voor $|r| < 1$.

We beschouwen nu de reeks $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$. Er geldt $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, dus $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Daar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

<u>Opgave 17</u>. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

(3.10). Als de reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ convergeren, convergeert ook $\sum_n (a_n + b_n)$ met een som die de som is van de sommen van $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$.

(3.11). Als de reeks $\sum_n a_n$ convergeert en c is een complex getal, dan convergeert $\sum_n ca_n$ met een som die c maal de som van $\sum_n a_n$ is.

<u>Opgave 18</u>. Bewijs (3.10) en (3.11).

Een reeks $\sum_n a_n$ heet <u>absoluut convergent</u> als de reeks $\sum_n |a_n|$ convergent is.

(3.12). Een reeks die absoluut convergent is, is convergent.

Bewijs: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right|$. Pas hierop (3.1) toe.

Het omgekeerde van (3.12) geldt niet; we zullen in de toekomst voorbeelden ontmoeten van reeksen die convergent maar niet absoluut convergent zijn.

Als $a_1, a_2, \ldots$ een rij complexe getallen en $b_1, b_2, \ldots$ een rij reële getallen ≥ 0 is en als er een N bestaat zodat voor $n > N$ geldt $|a_n| \leq b_n$ (resp. $|a_n| \geq b_n$), dan heet de reeks $\sum_n b_n$ een majorant (resp. minorant) van de reeks $\sum_n a_n$.

(3.13). (Majorantcriterium). Als $\sum_n b_n$ een majorant van $\sum_n a_n$ is en als $\sum_n b_n$ convergeert, dan convergeert $\sum_n a_n$ absoluut.

Bewijs: Als voor $n > N$ geldt $b_n \geq |a_n|$, dan geldt voor $n > N$ ook $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right|$. Pas hierop (3.1) toe.

Met behulp van (3.13) zien we dat $\sum_n \frac{1}{n^2}$ convergeert, want $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ voor $n \geq 2$ en $\sum_n \frac{1}{n(n-1)}$ convergeert omdat $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ convergeert. De harmonische reeks $\sum_n \frac{1}{n}$ evenwel is divergent, want

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{m} \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \frac{1}{2^j} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2} =$$

$= 1 + \frac{1}{2}n$; hieruit volgt dat de partiële sommen niet begrensd zijn, zodat de reeks divergent is. De harmonische reeks is een voorbeeld, dat aantoont dat (3.3) niet omgekeerd kan worden, want $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Verder is $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ voor reële $\alpha \geq 2$ convergent, omdat $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ en voor reële $\alpha \leq 1$ divergent. Was de reeks in dit geval n.l. convergent dan zou uit $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ volgen dat de harmonische reeks convergent was, hetgeen niet het geval is. We noemen $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ hyperharmonische reeksen; het geval dat $1 < \alpha < 2$ zullen we spoedig afhandelen.

We merken nog op dat convergentiecriteria die geldig zijn voor reeksen met reële termen ≥ 0 ook gebruikt kunnen worden voor willekeurige reeksen $\sum_n a_n$, door ze toe te passen op $\sum_n |a_n|$. Als convergentie gevonden wordt, kunnen we concluderen tot absolute convergentie van $\sum_n a_n$; als divergentie gevonden wordt kunnen we echter alleen concluderen, dat $\sum_n a_n$ niet absoluut convergeert, hetgeen niet behoeft te betekenen dat $\sum_n a_n$ divergeert. We kunnen dit op (3.6) toepassen, maar ook op sommige convergentiecriteria, die in de toekomst zullen worden behandeld.

We bewijzen nu de volgende hulpstelling:

(3.14). Als $F(x)$ een reële differentieerbare functie is gedefinieerd voor $x > b$, als $F'(x)$ monotoon niet stijgend is en als $F'(x) \geq 0$ voor alle $x > b$, dan geldt voor ieder geheel getal $N > b$ dat $\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=N}^{n} F'(k) - F(n) \right\}$ bestaat en een reëel getal $\geq -F(N)$ is.

Bewijs: Volgens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening is er bij ieder geheel getal $k > b$ een reëel getal ξ met $k < \xi < k+1$ te vinden zodat $F(k+1)-F(k)=F'(\xi)$. Omdat $F'(x)$ monotoon niet stijgend is en $\xi > k$, geldt $F'(\xi) \leq F'(k)$, dus $F(k+1)-F(k) \leq F'(k)$. Op analoge wijze bewijst men dat voor $k > b+1$ geldt $F(k)-F(k-1) \geq F'(k)$. Nu geldt voor $m > n \geq N$ dat $\sum_{k=N}^{n} F'(k)-F(n) - \left\{ \sum_{k=N}^{m} F'(k)-F(m) \right\} =$ $= F(m)-F(n) - \sum_{k=n+1}^{m} F'(k) = \sum_{k=n+1}^{m} F(k) - \sum_{k=n}^{m-1} F(k) - \sum_{k=n+1}^{m} F'(k) =$ $= \sum_{k=n+1}^{m} F(k) - \sum_{k=n+1}^{m} F(k-1) - \sum_{k=n+1}^{m} F'(k) = \sum_{k=n+1}^{m} \left\{ F(k)-F(k-1)-F'(k) \right\} \geq$ ≥ 0. Omdat $F'(x) \geq 0$ is $F(x)$ monotoon niet dalend, dus voor $n > b$ geldt $F(n+1) \geq F(n)$. Dus geldt voor $n \geq N$ dat $\sum_{k=N}^{n} F'(k)-F(n) \geq$ $\geq \sum_{k=N}^{n} \left\{ F(k+1)-F(k) \right\} - F(n) = \sum_{k=N+1}^{n+1} F(k) - \sum_{k=N}^{n} F(k)-F(n) =$ $= F(n+1)-F(N)-F(n) \geq -F(N)$. De rij $b_N, b_{N+1}, \ldots$ gedefinieerd door $b_n = \sum_{k=N}^{n} F'(k)-F(n)$ is dus monotoon niet stijgend en verder geldt $b_n \geq -F(N)$ voor alle $n \geq N$. Dus bestaat $\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=N}^{n} F'(k)-F(n) \right\}$ en is een reëel getal $\geq -F(N)$.

Met behulp van (3.14) bewijzen we de volgende stelling.

(3.15). (Integraalcriterium). Als bij de reeks $\sum_n a_n$ een reële differentieerbare functie $F(x)$ te vinden is, die gedefinieerd is voor $x > b$ en waarvoor geldt dat $F'(x)$ monotoon niet stijgend is en $F'(x) \geq 0$ voor alle $x > b$, zodat voor $n > b$ geldt $a_n = F'(n)$, dan is $\sum_n a_n$ convergent (resp. eigenlijk divergent) als $\lim_{x\to\infty} F(x)$ een reëel getal (resp. ∞) is. Als $\sum_n a_n$ convergent is, geldt voor $N > b$ dat $\sum_{n=N}^{\infty} a_n \geq \lim_{x\to\infty} F(x) - F(N)$.

Bewijs: In ieder geval bestaat $\lim_{x\to\infty} F(x)$ omdat $F(x)$ monotoon niet dalend is; om dezelfde reden is $\lim_{x\to\infty} F(x) \neq -\infty$. Als $\lim_{x\to\infty} F(x)$ een reëel getal a is, is ook $\lim_{n\to\infty} F(n) = a$. Volgens (3.14) is $\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=N}^{n} F'(k)-F(n) \right\}$ een reëel getal c voor $N > b$. Door optelling vinden we dat $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} F'(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} a_k$ bestaat en $= a+c$. Dus convergeert $\sum_n a_n$. Wegens $c \geq -F(N)$ vinden we nog $\sum_{n=N}^{\infty} a_n \geq$ $\geq \lim_{x\to\infty} F(x) - F(N)$. Als $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$, is ook $\lim_{n\to\infty} F(n) = \infty$. Door toepassing van opgave 53 op blz. an I 42 vinden we dat $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} F'(k) =$ $= \infty$, dus dat $\sum_n a_n$ eigenlijk divergent is.

We merken op, dat (3.15) een criterium is voor reeksen met reële termen ≥ 0 zodat de hierboven gemaakte opmerking betreffende dergelijke criteria van toepassing is. Verder merken we op dat we om (3.15) op een gegeven reeks $\sum_n a_n$ te kunnen toepassen we eerst een functie $f(x)$ moeten vinden zodat $f(n) = a_n$ voor voldoend grote n en vervolgens een functie $F(x)$ waarvan $f(x)$ de afgeleide is. Het laatste probleem, n.l. het vinden van een functie met gegeven afgeleide wordt in de integraalrekening uitvoerig behandeld. Dit verklaart ook de naam integraalcriterium.

De hyperharmonische reeksen $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha}}$ kunnen we met het integraalcriterium behandelen. Neem hiertoe voor $\alpha \neq 1$ de functie $F(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Dan is $F'(x) = x^{-\alpha}$. Deze voldoet aan de eisen van (3.15) als $\alpha \geq 0$. Nu geldt $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$ als $\alpha < 1$ en $= 0$ als $\alpha > 1$. Dus is $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ convergent voor $\alpha > 1$ en divergent voor $0 \leq \alpha < 1$. Dat de reeks voor $\alpha < 0$ divergent is volgt uit het feit dat de termen niet naar nul convergeren. We hebben dus de volgende stelling gevonden.

(3.16). De reeks $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ is convergent voor $\alpha > 1$ en divergent voor $\alpha \leq 1$. Voor $\alpha > 1$ geldt $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.

Nemen we $F(x) = \log x$, dan is $F'(x) = \frac{1}{x}$. Dit voldoet aan de eisen van (3.15); verder is $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$. We vinden dus nogmaals dat de harmonische reeks divergent is. Uit (3.14) kunnen we echter nog iets anders afleiden, n.l. dat $\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right\}$ bestaat en $\geq -\log N$ is. Voor $N = 1$ noemt men deze limiet de constante van Euler. γ. Er geldt $\gamma = 1 + \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right\} \geq 1 - \log 2$. Nu is in de cursus analyse I bewezen dat $\frac{e^x - 1}{x}$ voor $x > 0$ een stijgende functie is waarvoor geldt $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (zie an I 74). Hieruit volgt $e - 1 > 1$, dus $e > 2$. Daaruit volgt weer $\log 2 < 1$, dus $\gamma > 0$. We merken nog op dat het niet bekend is of γ rationaal of irrationaal is.

Opgave 19. Bewijs dat $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ divergent is (Aanwijzing: $F(x) = \log \log x$).

Opgave 20. Toon aan voor welke reële waarden van α de reeks $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ convergent dan wel divergent is.

Opgave 21. Probeer de meetkundige reeks met het integraalcriterium te behandelen en leid een schatting voor $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ af voor $0 < r < 1$. Vergelijk deze schatting met het bekende exacte resultaat.

Opgave 22. Bewijs dat $\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}}$ convergent is (Aanwijzing: gebruik (3.13) en (3.16)).

§ 4. Een onderwerp uit de reële analyse.

Voor het vervolg hebben we een onderwerp uit de reële analyse nodig, dat we nu zullen behandelen.

Zoals bekend, zeggen we dat een rij reële getallen $a_1, a_2, \ldots$ convergent is met als limiet het reële getal a als bij ieder positief reëel getal ε een N te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $|a_n - a| < \varepsilon$. Deze laatste ongelijkheid kunnen we ook schrijven $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. We gaan dit nu verzwakken door alleen te eisen $a_n < a + \varepsilon$. Verder merken we op, dat als ε een willekeurig positief reëel getal is, $a + \varepsilon$ een willekeurig reëel getal $> a$ is. We eisen dus nu voor a dat bij ieder getal $b > a$ een N te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $a_n < b$. Door deze eis is het getal a echter in het geheel niet vastgelegd. Immers als a aan de eis voldoet en a' is een willekeurig reëel getal $> a$, dan voldoet a' ook aan de eis, immers ieder reëel getal $> a'$ is ook $> a$. Het heeft echter wel zin om te vragen naar het kleinste getal a dat aan de eis voldoet. We zullen dit nu gaan preciseren, waarbij we tevens de punten ∞ en $-\infty$ in de beschouwingen zullen betrekken.

Bij een rij reële getallen $a_1, a_2, \dots$ beschouwen we de verzameling V bestaande uit die reële getallen x, waarvoor geldt, dat er een N bij te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $a_n < x$. De N in deze definitie mag van x afhangen. Verder is het duidelijk dat als voor twee reële getallen x en y geldt $x \in V$ en $y > x$, dan ook geldt $y \in V$. Het is mogelijk dat V leeg is, zoals we zullen zien (zie (4.4)); als V niet leeg is, is het het interval $(\inf V, \infty)$, dat aan de linkerkant gesloten of open kan zijn. Immers als z een reëel getal $> \inf V$ is, is er een reëel getal x zodat $x < z$ en $x \in V$ geldt; dan is echter ook $z \in V$. Dit alles verklaart de volgende definitie (lim sup is de afkorting van limes superior):

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \infty \text{ , als } V \text{ leeg is;}$$

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \inf V\text{, als } V \text{ niet leeg is.}$$

We merken op dat er in het tweede geval $-\infty$ uit kan komen en verder dat we afspreken $-\infty < \infty$, $-\infty < x$ en $x < \infty$ voor ieder reëel getal x. Er geldt dan de volgende stelling:

(4.1). $\limsup_{n \to \infty} a_n$ is het kleinste punt (reëel getal, ∞ of $-\infty$), waarvoor geldt dat bij ieder reëel getal b groter dan dat punt een N te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $a_n < b$.

Bewijs: Dat $\limsup_{n \to \infty} a_n$ aan de geëiste voorwaarde voldoet is duidelijk. We bewijzen nu nog dat het het kleinste punt is, dat aan die voorwaarde voldoet. Als x een reëel getal is $< \limsup_{n \to \infty} a_n$, dan is er ook een reëel getal y, zodat $x < y < \limsup_{n \to \infty} a_n$ geldt. Als nu x aan de voorwaarde voldoet, is er een N zodat voor $n > N$ geldt $a_n < y$, dus $y \in V$. Dit is evenwel in strijd met de definitie van $\limsup_{n \to \infty} a_n$. Hiermee is (4.1) bewezen.

We beschouwen nu bij een rij reële getallen $a_1, a_2, \dots$ de verzameling W bestaande uit die reële getallen x, waarvoor geldt dat er een N bij te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $a_n > x$ en we definiëren (lim inf is de afkorting van limes inferior):

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = -\infty \text{ , als } W \text{ leeg is;}$$

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \sup W\text{, als } W \text{ niet leeg is.}$$

Op geheel analoge wijze als (4.1) bewijst men de volgende stelling:

(4.2). $\liminf_{n \to \infty} a_n$ is het grootste punt (reëel getal, ∞ of $-\infty$), waarvoor geldt dat bij ieder reëel getal b kleiner dan dat punt een N te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $a_n > b$.

(4.3). Iedere rij reële getallen $a_1, a_2, \dots$ bezit een deelrij $b_1, b_2, \dots$ zodat $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$ en een deelrij $c_1, c_2, \dots$ zodat $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n$.

<u>Bewijs</u>: Stel eerst $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = -\infty$. Bij ieder reëel getal x bestaat dan een N zodat voor $n > N$ geldt $a_n < x$. Dus $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$; we kunnen voor de rij $b_1, b_2, \dots$ dus eenvoudig de rij $a_1, a_2, \dots$ zelf nemen. Stel nu $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$ een reëel getal a. Bij ieder natuurlijk getal m bestaat dan een index N_m zodat voor $n > N_m$ geldt $a_n < a + \frac{1}{m}$. Verder is er bij ieder natuurlijk getal m en bij iedere index M een n te vinden zodat geldt $n > M$ en $a_n \geq a - \frac{1}{2m} > a - \frac{1}{m}$. We definiëren nu door inductie een stijgende rij natuurlijke getallen $m_1, m_2, \dots$ zodat $|a - a_{m_k}| < \frac{1}{k}$ voor alle natuurlijke k. In de eerste plaats bestaat er een $m_1 > N_1$ zodat $a_{m_1} > a-1$; omdat $m_1 > N_1$ is, geldt ook $a_{m_1} < a+1$, dus $|a - a_{m_1}| < 1$. Stel nu dat $m_1, m_2, \dots, m_n$ gevonden zijn, zodat deze een stijgende rij vormen en zodat $|a - a_{m_k}| < \frac{1}{k}$ voor $k = 1, 2, \dots, n$. Noem P het grootste van de twee getallen N_{n+1} en m_n. Bij P is een $m_{n+1} > P$ te vinden zodat $a_{m_{n+1}} > a - \frac{1}{n+1}$; omdat $m_{n+1} > P \geq N_{n+1}$ is ook $a_{m_{n+1}} < a + \frac{1}{n+1}$, dus $|a - a_{m_{n+1}}| < \frac{1}{n+1}$. Omdat $m_{n+1} > P \geq m_n$ vormen de getallen $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$ een stijgende rij. Als we nu de rij $b_1, b_2, \dots$ definiëren door $b_n = a_{m_n}$, is deze rij een deelrij van de rij $a_1, a_2, \dots$. Verder geldt $|a - b_k| = |a - a_{m_k}| < \frac{1}{k}$ voor alle natuurlijke k, waaruit volgt dat $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Stel nu ten slotte dat $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \infty$. Bij ieder natuurlijk getal m en iedere index M is dan een n te vinden zodat geldt $n > M$ en $a_n \geq m+1 > m$. We definiëren nu door inductie een stijgende rij natuurlijke getallen $m_1, m_2, \dots$ zodat $a_{m_k} > k$ voor alle natuurlijke k. In de eerste plaats bestaat er een index m_1 zodat $a_{m_1} > 1$. Laat verder $m_1, \dots, m_n$ gevonden zijn zodat deze een stijgende rij vormen en zodat $a_{m_k} > k$ voor $k = 1, \dots, n$. Er is dan een m_{n+1} te vinden zodat $m_{n+1} > m_n$ en $a_{m_{n+1}} > n+1$. Als we nu de rij $b_1, b_2, \dots$ definiëren door $b_n = a_{m_n}$ is deze rij een deelrij van $a_1, a_2, \dots$ Verder geldt $b_k = a_{m_k} > k$ voor alle natuurlijke k, waaruit volgt dat $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Hiermee is het bewijs voor lim sup voltooid. Voor lim inf gaat het analoog.

(4.4). Als de rij reële getallen $a_1, a_2, \dots$ een limiet heeft, geldt

$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

<u>Bewijs</u>: Iedere deelrij van de rij $a_1, a_2, \dots$ heeft dezelfde limiet als de rij $a_1, a_2, \dots$ zelf. Nu volgt (4.4) direct uit (4.3).

(4.5). Als voor de rij reële getallen $a_1, a_2, \dots$ geldt dat er een reëel getal C en een index N bestaat zodat voor $n > N$ geldt $a_n \leq C$ (resp. $a_n \geq C$), dan geldt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq C$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq C$ (resp. $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq C$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq C$).

<u>Bewijs</u>: Met behulp van (4.3) reduceert (4.5) zich tot een eenvoudige stelling over limieten.

(4.6). Als x een punt (reëel getal, ∞ of $-\infty$) is, waarvoor geldt $x > \limsup_{n\to\infty} a_n$ of $x < \liminf_{n\to\infty} a_n$, dan bestaat er geen deelrij van de rij $a_1, a_2, \dots$ die x als limiet heeft.

<u>Bewijs</u>: Als $x > \limsup_{n\to\infty} a_n$, bestaat er een reëel getal y, waarvoor geldt $x > y > \limsup_{n\to\infty} a_n$. Er bestaat dan een N zodat voor $n > N$ geldt $a_n < y$. Laat nu $b_1, b_2, \dots$ een deelrij van $a_1, a_2, \dots$ zijn, dan is er een stijgende rij natuurlijke getallen $m_1, m_2, \dots$ zodat $b_k = a_{m_k}$ voor alle natuurlijke k. Er is dan zeker ook een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $m_n > N$, dus $b_n = a_{m_n} < y$. Als $b_1, b_2, \dots$ een limiet heeft, geldt $\lim_{n\to\infty} b_n \leq y < x$, dus in ieder geval niet $\lim_{n\to\infty} b_n = x$. Als $x < \liminf_{n\to\infty} a_n$, gaat het bewijs analoog.

(4.7). $\limsup_{n\to\infty} a_n$ (resp. $\liminf_{n\to\infty} a_n$) is het grootste (resp. kleinste) punt dat limiet is van een deelrij van $a_1, a_2, \dots$

<u>Bewijs</u>: Dit volgt direct uit (4.3) en (4.6).

(4.8). $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

<u>Bewijs</u>: De veronderstelling $\liminf_{n\to\infty} a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n$ levert met behulp van (4.6) en (4.3) direct een tegenstrijdigheid.

(4.9). Als $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, dan bestaat $\lim_{n\to\infty} a_n$ en is gelijk aan $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

<u>Bewijs</u>: Stel $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ een reëel getal a. Bij ieder positief reëel getal ε is dan een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $a_n < a+\varepsilon$ en een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $a_n > a-\varepsilon$. Noemen we N het grootste van de twee getallen N_1 en N_2 dan geldt voor $n > N$ dat $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$, dus $|a-a_n| < \varepsilon$. Hieruit volgt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Het geval dat $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ of $-\infty$, wordt op analoge wijze behandeld.

Uit (4.3) en (4.9) volgt nog de volgende stelling (die overigens ook met behulp van het in de cursus analyse I behandelde makkelijk te bewijzen is):

(4.10). Als voor een rij reële getallen geldt, dat alle deelrijen die een limiet hebben dezelfde limiet bezitten, dan bezit de rij zelf ook die limiet.

Opgave 23. Bepaal $\limsup\limits_{n\to\infty}$ en $\liminf\limits_{n\to\infty}$ van de rijen $a_1, a_2, \dots$ gedefinieerd door: 1° $a_n = n$, 2° $a_n = -n$, 3° $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 2^{-n}$, 4° een of andere aftelling van de rationale getallen tussen 0 en 1 (zie an I 46).

Bij een rij reële getallen $a_1, a_2, \dots$ beschouwen we nu bij een natuurlijk getal n de verzameling W_n der reële getallen a_k voor $k \geq n$. Deze verzameling is niet leeg; we kunnen dus sup W_n vormen en schrijven daarvoor $\sup\limits_{k \geq n} a_k$. Als $m > n$ is, geldt $W_m \subset W_n$ dus $\sup\limits_{k \geq m} a_k \leq \sup\limits_{k \geq n} a_k$. We onderscheiden nu twee gevallen:

1° $\sup\limits_{k \geq n} a_k = \infty$ voor alle n. We definiëren dan $a = \infty$.

2° Er bestaat een N, zodat $\sup\limits_{k \geq N} a_k = b_N$ een reëel getal is. Dan is ook $\sup\limits_{k \geq n} a_k$ een reëel getal b_n voor alle $n \geq N$; verder geldt voor $m > n \geq N$ dat $b_m \leq b_n$. Hieruit volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ bestaat; noem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, dan is a een reëel getal of $-\infty$.

We bewijzen nu dat in beide gevallen $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

1°. Neem een willekeurig reëel getal x. Bij ieder natuurlijk getal M is er een $n > M$ zodat $a_n \geq x$ omdat $\sup\limits_{k \geq M+1} a_k = \infty$. Hieruit volgt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2°. Neem een reëel getal $x > a$. Er bestaat dan een N_1 zodat geldt $\sup\limits_{k \geq N_1} a_k < x$; dus geldt voor alle $n > N_1$, dat $a_n \leq \sup\limits_{k \geq N_1} a_k < x$, dus $x \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Daar dit voor iedere $x > a$ geldt, is $a \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
Als $a = -\infty$, is ook $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Als a een reëel getal is, nemen we een reëel getal $x < a$. Voor alle n geldt dan $x < \sup\limits_{k \geq n} a_k$. Dus is bij iedere M een $n > M$ te vinden, zodat $x \leq a_n$, dus $x \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Daar dit voor iedere $x < a$ geldt is $a \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Dus is $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Voor lim inf kan een analoge beschouwing worden gegeven.

Als we in het geval dat $\sup\limits_{k \geq n} a_k = \infty$ voor alle n definiëren $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{k \geq n} a_k) = \infty$, kunnen we de resultaten van ons onderzoek als volgt samenvatten.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k \geq n} a_k). \tag{4.11}$$

Maken we de analoge afspraak $\lim\limits_{n\to\infty}(\inf\limits_{k \geq n} a_k) = -\infty$ als $\inf\limits_{k \geq n} a_k = -\infty$ voor alle n, dan vinden we

(4.12) $$\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (\inf_{k \geq n} a_k).$$

§ 5. Het machtswortelcriterium en het quotiëntencriterium voor reeksen.

(5.1) (Machtswortelcriterium van Cauchy). Als voor een rij complexe getallen $a_1, a_2, \dots$ geldt $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dan is de reeks $\sum_n a_n$ absoluut convergent; als $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ geldt, is de reeks $\sum_n a_n$ divergent.

Bewijs: Noem $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b$. Als $b < 1$, dan is er een reëel getal $r > 0$ zodat geldt $b < r < 1$. Bij deze r is er een N zodat voor $n > N$ geldt $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, dus $|a_n| < r^n$. Dus is $\sum_n r^n$ een majorant van $\sum_n a_n$. De meetkundige reeks $\sum_n r^n$ is convergent omdat $0 < r < 1$ (3.9), dus $\sum_n a_n$ is absoluut convergent (3.13). Laat nu $b > 1$ zijn en onderstel dat de reeks $\sum_n a_n$ convergent is. Dan is $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (3.3), dus er bestaat een N zodat voor $n > N$ geldt $|a_n| < 1$, dus ook $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Met behulp van (4.5) volgt hieruit $b = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$, hetgeen een tegenstrijdigheid is. Dus is de reeks $\sum_n a_n$ divergent als $b > 1$ is.

We merken op, dat over het geval dat $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ is niets beweerd wordt. We zullen spoedig aan voorbeelden zien, dat het in dat geval mogelijk is dat de reeks divergent is en dat de reeks convergent en zelfs absoluut convergent is.

(5.2) (Quotiëntencriterium van d'Alembert). Als voor een rij complexe getallen $a_1, a_2, \dots$, dusdanig dat $a_n \neq 0$ voor alle n, geldt $\limsup_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, dan is de reeks $\sum_n a_n$ absoluut convergent, als $\liminf_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ geldt, is de reeks $\sum_n a_n$ divergent.

Bewijs: Noem $\limsup_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = b$. Als $b < 1$, dan is er een reëel getal $r > 0$ zodat geldt $b < r < 1$. Bij deze r is er een N zodat voor $n > N$ geldt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r$. Nu geldt voor $n > N+1$:

$$\left|\frac{a_n}{a_{N+1}}\right| = \left|\frac{\prod_{k=N+2}^{n} a_k}{\prod_{k=N+1}^{n-1} a_k}\right| = \left|\frac{\prod_{k=N+1}^{n-1} a_{k+1}}{\prod_{k=N+1}^{n-1} a_k}\right| = \left|\prod_{k=N+1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \prod_{k=N+1}^{n-1} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < r^{n-N-1} .$$

Dus $|a_n| < \frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}} r^n$ voor $n > N+1$. Dus is $\sum_n \frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}} r^n$ een majorant van $\sum_n a_n$. De meetkundige reeks $\sum_n r^n$ convergeert, dus convergeert ook $\sum_n \frac{|a_{N+1}|}{r^{N+1}} r^n$ (3.11), dus convergeert $\sum_n a_n$ absoluut. Als

$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ is er een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Hieruit volgt op analoge wijze als boven dat $|a_n| > |a_{N_1+1}| > 0$ voor $n > N_1+1$. Onderstel nu $\sum_n a_n$ convergent, dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, hetgeen in strijd is met hetgeen we zojuist bewezen hebben. Dus is in dit geval $\sum_n a_n$ divergent.

We bewijzen nu dat het criterium van d'Alembert zwakker is dan dat van Cauchy. Hiermee bedoelen we dat voor iedere reeks, waarvan de convergentie kan worden aangetoond met het criterium van d'Alembert, de convergentie ook volgt uit het criterium van Cauchy en dat er reeksen bestaan waarvan de convergentie met het criterium van Cauchy kan worden aangetoond maar niet met dat van d'Alembert. De eerste van deze twee beweringen volgt uit

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (zie(5.3)), immers dan volgt uit $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ook $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. De tweede bewering zullen we met een voorbeeld aantonen. Neem n.l. de reeks $\sum_n 2^{-n-(-1)^n}$. Nu is $\sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}}$ en dit heeft limiet $\frac{1}{2}$ als $n \to \infty$. Het criterium van Cauchy geeft dus de convergentie van deze reeks. Aan de andere kant geldt

$$\frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-1+(-1)^n-(-1)^{n+1}}$$ en dit is $\frac{1}{8}$ voor oneven n en 2 voor even n. Met het criterium van d'Alembert kan niet tot convergentie van de reeks besloten worden (uiteraard ook niet tot divergentie, daar de reeks in werkelijkheid convergeert).

(5.3) Voor een rij complexe getallen $a_1, a_2, \ldots$, dusdanig dat $a_n \neq 0$ voor alle n, geldt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

<u>Bewijs</u>: Als $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, is de stelling evident. Verder is in ieder geval $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 0$ (4.5), we mogen dus veronderstellen dat $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = b$ een reëel getal ≥ 0 is. Bij een willekeurig reëel getal $\varepsilon > 0$ is een N_1 te vinden, zodat voor $n > N_1$ geldt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < b + \frac{1}{2}\varepsilon$. Op analoge wijze als in het bewijs van (5.2) concluderen we hieruit dat voor $n > N_1+1$ geldt $|a_n| < |a_{N_1+1}|(b+\frac{1}{2}\varepsilon)^{n-N_1-1}$, dus $\sqrt[n]{|a_n|} < |a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(b+\frac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n-N_1-1}{n}}$. Nu is $\lim_{n\to\infty} |a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(b+\frac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n-N_1-1}{n}} =$

$= b+\frac{1}{2}\varepsilon$; er is dus een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $|a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(b+\frac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n-N_1-1}{n}} <$ $< b+\varepsilon$. Noemen we N de grootste van N_1 en N_2 dan geldt voor $n > N$ dat $\sqrt[n]{|a_n|} < b+\varepsilon$. Hieruit volgt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq b$.

Voor latere toepassingen bewijzen we nog de volgende stelling.
(5.4) Als voor een **rij complexe** getallen $a_1, a_2, \ldots$, dusdanig dat $a_n \neq 0$ voor alle n, geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ bestaat, dan bestaat ook $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ en geldt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Bewijs: Stel eerst $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ een reëel getal b, dan is $b \geq 0$. Als ε een positief reëel getal is noemen we d de grootste van de twee getallen $b-\frac{1}{2}\varepsilon$ en 0, dan is $d \geq 0$. Er is dan een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $d < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < b+\frac{1}{2}\varepsilon$. Op analoge wijze als in het bewijs van (5.3) leidt men hieruit af dat voor $n > N_1+1$ geldt

$$|a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}} d^{\frac{n-N_1-1}{n}} < \sqrt[n]{|a_n|} < |a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(b+\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n-N_1-1}{n}}.$$

Nu is

$$\lim_{n\to\infty}|a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}} d^{\frac{n-N_1-1}{n}} = d \text{ en } \lim_{n\to\infty}|a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(b+\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n-N_1-1}{n}} = b+\tfrac{1}{2}\varepsilon\ ;$$

er is dus een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $d-\frac{1}{2}\varepsilon < |a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}} d^{\frac{n-N_1-1}{n}}$ en $|a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(b+\frac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n-N_1-1}{n}} < b+\varepsilon$. Noemen we N de grootste van N_1 en N_2 dan geldt voor $n > N$ dat $b-\varepsilon \leq d-\frac{1}{2}\varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < b+\varepsilon$, dus $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = b$. Stel nu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$. Bij ieder reëel getal $K > 0$ is dan een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $K+1 < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Op analoge wijze als in het bewijs van (5.3) leidt men hieruit af dat voor $n > N_1+1$ geldt $|a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(K+1)^{\frac{n-N_1-1}{n}} < \sqrt[n]{|a_n|}$. Nu is $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(K+1)^{\frac{n-N_1-1}{n}} =$ $K+1$; er is dus een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $K < |a_{N_1+1}|^{\frac{1}{n}}(K+1)^{\frac{n-N_1-1}{n}}$. Noemen we N de grootste van N_1 en N_2 dan geldt voor $n > N$ dat $K < \sqrt[n]{|a_n|}$, dus $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.

Opgave 24. Bewijs met behulp van (5.4), dat $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (zie ook an I opgave 86).

We laten nu aan voorbeelden zien dat er convergente en divergente reeksen $\sum\limits_n a_n$ bestaan, waarvoor geldt $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Een divergente reeks van deze soort is $\sum\limits_n 1$, een absoluut convergente is $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$, want $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, dus $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Uit theoretisch oogpunt verdient het criterium van Cauchy in alle opzichten de voorkeur boven dat van d'Alembert, want in de eerste plaats is het sterker en in de tweede plaats heeft het een mooiere vorm, immers bij Cauchy vallen de gevallen van absolute convergentie en divergentie uiteen in de gevallen lim sup < 1 en > 1; bij d'Alembert daarentegen kan pas bij lim inf > 1 tot divergentie besloten worden (zie nogmaals het voorbeeld boven (5.3)), waar voor een absoluut convergente reeks $\sum\limits_n a_n$ toch geldt $\limsup\limits_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$). Het nut van het criterium van d'Alembert is, dat het in vele gevallen gemakkelijker toe te passen is dan dat van Cauchy en ons daardoor in de gevallen, waarin het werkt in staat stelt de convergentie met minder moeite aan te tonen. Zo zien we met het criterium van d'Alembert direct, dat de reeks $\sum\limits_n \frac{1}{n!}$ convergent is; dit volgt namelijk direct uit $0 = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!}$.

Opgave 25. Onderzoek de convergentie van $\sum\limits_n \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ en $\sum\limits_n \frac{n^n}{n!}$.

Opgave 26. Onderzoek voor welke waarden van a de volgende reeksen convergeren: $\sum\limits_n \frac{n^a}{n!}$ (a reëel), $\sum\limits_n \frac{a^n}{n^2}$ (a complex).

§6. Differentieerbare complexe functies.

Een functie f(x), die gedefinieerd is op een deelverzameling X van de verzameling der complexe getallen en waarvan de functiewaarden complexe getallen zijn, heet een complexe functie.

Daar de complexe getallen een metrische ruimte vormen, kunnen we gebruik maken van hetgeen in de cursus analyse I is behandeld over functies, die gedefinieerd zijn op metrische ruimten. In het bijzonder geldt dit voor het begrip continue functie. Wegens het belang hiervan zullen we dit voor complexe functies nogmaals formuleren.

Een complexe functie f(x) gedefinieerd op een verzameling X heet continu in een punt a als a punt-verdichtspunt van X is en als bij ieder positief reëel getal ε een positief reëel getal δ bestaat, zodat voor alle X waarvoor geldt $x \in X$ en $|x-a| < \delta$ ook geldt $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Een complexe functie $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling X heet continu als voor iedere $a \in X$ geldt dat $f(x)$ continu in a is.

We wensen aan de stellingen over continue functies, welke in de cursus analyse I behandeld zijn, nog een stelling toe te voegen. We beginnen eerst met de volgende hulpstelling:

(6.1) Als $f(x)$ een continue functie is, gedefinieerd op een verzameling X, en als V een compacte deelverzameling van X is, dan is de verzameling W der functiewaarden $f(x)$ als $x \in V$ een compacte verzameling.

Bewijs: Deze stelling is een verscherping van de stelling midden op blz. an I 61, omdat niet ieder punt van V verdichtingspunt van V behoeft te zijn. Bij het bewijs van genoemde stelling wordt deze eigenschap evenwel niet gebruikt, zodat dit bewijs zonder meer als bewijs van (6.1) kan worden gebruikt.

We herinneren eraan, dat een functie $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling X, waarvan de verzameling der functiewaarden Y is, eeneenduidig heet als uit $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ en $x_1 \neq x_2$ volgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Als $f(x)$ eeneenduidig is, bestaat er een omkeerfunctie $g(y)$ gedefinieerd op Y, waarvan de verzameling der functiewaarden X is, zodat $g(f(x)) = x$ voor alle $x \in X$ en $f(g(y)) = y$ voor alle $y \in Y$.

(6.2) Als $f(x)$ een eeneenduidige continue functie is, gedefinieerd op een compacte metrische ruimte X met metriek ρ, waarvan de verzameling der functiewaarden een metrische ruimte Y is, met metriek σ, dan is de omkeerfunctie $g(y)$ van $f(x)$ ook continu.

Bewijs: We tonen eerst aan dat ieder punt y_0 van Y verdichtingspunt van Y is. Neem hiertoe een willekeurige omgeving U van y_0 en laat $g(y_0)=x_0$, dus $f(x_0) = y_0$ zijn. Omdat $f(x)$ continu in x_0 is, is er een omgeving V van x_0 dusdanig, dat uit $x \in X$, $x \in V$ volgt $f(x) \in U$. Omdat x_0 verdichtingspunt van X is bevat V oneindig veel punten $x \in X$, dus, omdat $f(x)$ eeneenduidig is, bevat U oneindig veel punten $f(x)$, dat zijn oneindig veel punten van Y. Dus is y_0 verdichtingspunt van Y. Neem een punt $b \in Y$; laat $g(b)=a$, dus $f(a)=b$ zijn. Bij een positief reëel getal ε beschouwen we de verzameling V bestaande uit de punten x van X waarvoor geldt $\rho(x,a) \geq \varepsilon$. V is als complement van een open verzameling gesloten en als gesloten deelverzameling van een compacte ruimte compact (an I 54 en an I 56). Als W de verzameling is van de punten y van Y, die functiewaarden $f(x)$ zijn van punten $x \in V$, dan is W compact op grond van (6.1). Verder geldt, omdat $f(x)$ eeneenduidig is en $a \notin V$, dat $b \notin W$. Als b een verdichtingspunt van W zou zijn, zouden we op analoge wijze als bovenaan blz. an I 57 een rij punten $b_n \in W$ kunnen maken, die alle verschillend zijn en waarvoor geldt $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Klaarblijkelijk zou dan b het enige verdichtingspunt van de verzameling der b_n zijn, hetgeen in strijd is met de compactheid van W, omdat $b \notin W$. Dus is b geen verdichtingspunt van W. Er bestaat dus een positief reëel getal δ, zodat voor ieder punt $y \in Y$ waarvoor geldt $\sigma(y,b) < \delta$, ook geldt $y \notin W$, dus $g(y) \notin V$, dus $\rho(g(y), g(b)) = \rho(g(y), a) < \varepsilon$. Dus is de functie g(y) continu in b, en daar b een willekeurig punt van Y is, is g(y) continu.

We merken nog op dat uiteraard g(y) ook eeneenduidig is en dat verder Y compact is op grond van (6.1), zodat g(y) evenals f(x) een eeneenduidige continue functie is, gedefinieerd op een compacte metrische ruimte.

We duiden de veranderlijke in een complexe functie gewoonlijk met de letter z aan en schrijven $z=x+iy$ (x en y reëel).

Omdat de verzameling der complexe getallen op te vatten is als een tweedimensionale Euclidische ruimte volgt uit hetgeen op blz.an I ... bewezen is, dat een compacte verzameling complexe getallen hetzelfde is als een begrensde gesloten verzameling complexe getallen. Uit (6.2) volgt nu:

(6.3) Van een eeneenduidige continue complexe functie, gedefinieerd op een begrensde gesloten verzameling is de omkeerfunctie ook eeneenduidig, continu en op een begrensde gesloten verzameling gedefinieerd.

We kunnen nu voor complexe functies differentieerbaarheid definiëren op een geheel analoge wijze als dit in de cursus analyse I voor reële functies geschied is (zie an I § 18). Zo heet een complexe functie f(x), gedefinieerd op een verzameling X, differentieerbaar in het punt a als a punt-verdichtingspunt van X is en als er een complex getal b bestaat, zodat bij ieder positief reëel getal ε een positief reëel getal δ bestaat, zodat uit $z \in X$, $z \neq a$ en $|z-a| < \delta$ volgt $\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - b\right| < \varepsilon$. Het getal b, dat door deze definitie ondubbelzinnig bepaald is, heet het differentiaalquotiënt van f(z) in het punt a; $b = \left(\frac{d\,f(z)}{dz}\right)_{z=a}$. We noemen een complexe functie f(z) differentieerbaar als hij differentieerbaar is in ieder punt van zijn definitieverzameling X; het differentiaalquotiënt is dan zelf een complexe functie gedefinieerd op X, die de afgeleide van f(z) wordt genoemd en geschreven $\frac{d\,f(z)}{dz}$ of $f'(z)$. Als $f'(z)$ differentieerbaar is heet f(z) tweemaal differentieerbaar en de afgeleide $f''(z)$ van $f'(z)$ heet de tweede afgeleide van f(z). Op analoge wijze definiëren we, wat het betekent dat f(z) n maal differentieerbaar is en wat de n^e afgeleide $f^{(n)}(z)$ van f(z) is. Als f(z) n maal differentieerbaar is voor ieder natuurlijk getal n heet f(z) willekeurig vaak (of oneindig vaak) differentieerbaar.

(6.4) Als f(z) differentieerbaar is in a, dan is f(z) continu in a.

Bewijs: Geheel analoog met het bewijs bovenaan blz. an I 65.

Voor differentieerbare complexe functies gelden geheel analoge rekenregels als voor differentieerbare reële functies (zie an I § 19).

(6.5) Als $f(z)$ en $g(z)$ complexe functies zijn, gedefinieerd op eenzelfde verzameling X en beide differentieerbaar in een punt a, dan zijn de functies $f(z) + g(z)$, $c\, f(z)$ (c een complexe constante) en $f(z)\, g(z)$ differentieerbaar in a en er geldt:

$$\left(\frac{d(f(z) + g(z))}{dz}\right)_{z=a} = \left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a} + \left(\frac{d\, g(z)}{dz}\right)_{z=a},$$

$$\left(\frac{d(c\, f(z))}{dz}\right)_{z=a} = c\left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a},$$

$$\left(\frac{d(f(z)\, g(z))}{dz}\right)_{z=a} = f(a)\left(\frac{d\, g(z)}{dz}\right)_{z=a} + g(a)\left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a}.$$

Bewijs: Geheel analoog met het bewijs van de eerste stelling van an I §19.

In plaats van $\frac{d\, f(z)}{dz}$ schrijven we ook wel $\frac{d}{dz}\, f(z)$.

(6.6) Als $f(z)$ en $g(z)$ complexe functies zijn, gedefinieerd op eenzelfde verzameling X en beide differentieerbaar in een punt a, en als $g(a) \neq 0$, dan zijn $\frac{1}{g(z)}$ en $\frac{f(z)}{g(z)}$ differentieerbaar in a en er geldt:

$$\left(\frac{d}{dz}\ \frac{1}{g(z)}\right)_{z=a} = -\frac{\left(\frac{d\, g(z)}{dz}\right)_{z=a}}{(g(a))^2},$$

$$\left(\frac{d}{dz}\,\frac{f(z)}{g(z)}\right)_{z=a} = \frac{g(a)\left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a} - f(a)\left(\frac{d\, g(z)}{dz}\right)_{z=a}}{(g(a))^2}.$$

Bewijs: Geheel analoog met het bewijs van de tweede stelling van an I §19.

Uit (6.5) en (6.6) volgt direct:

(6.7) Als $f(z)$ en $g(z)$ differentieerbare complexe functies zijn, gedefinieerd op dezelfde verzameling X en als c een complex getal is, dan geldt

$$\frac{d}{dz}\,(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z),$$

$$\frac{d}{dz}\,(c\, f(z)) = c\, f'(z),$$

$$\frac{d}{dz}\,(f(z)\, g(z)) = f(z)\, g'(z) + g(z)\, f'(z),$$

$$\frac{d}{dz}\ \frac{1}{g(z)} = -\frac{g'(z)}{(g(z))^2}, \text{ mits } g(z) \neq 0 \text{ voor alle } z \in X,$$

$$\frac{d}{dz}\,\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{g(z)\, f'(z) - f(z)\, g'(z)}{(g(z))^2}, \text{ mits } g(z) \neq 0 \text{ voor alle } z \in X.$$

De volgende stelling behandelt het differentiëren van samengestelde functies.

(6.8) Als $\varphi(z)$ en $g(w)$ complexe functies zijn, als a een punt van de definitieverzameling van $\varphi(z)$ is, als de definitieverzameling van $g(w)$ de verzameling van functiewaarden van $\varphi(z)$ en dus het punt $b = \varphi(a)$ bevat, als $\varphi(z)$ differentieerbaar is in a en als $g(w)$ differentieerbaar is in b, dan is de samengestelde functie $g(\varphi(z))$ differentieerbaar in a en er geldt:

$$\left(\frac{d}{dz} g(\varphi(z))\right)_{z=a} = \left(\frac{d\, g(w)}{dw}\right)_{w=b} \cdot \left(\frac{d\, \varphi(z)}{dz}\right)_{z=a} .$$

<u>Bewijs</u>: Geheel analoog met het bewijs van de derde stelling van an I § 19, ditmaal met toepassing van het algemene limiettheorema van de samengestelde functie van blz. an I 62.

De nu volgende stelling over het differentiëren van een inverse functie wijkt enigszins af van de overeenkomstige stelling voor reële functies.

(6.9) Als $f(z)$ een eeneenduidige complexe functie is, die differentieerbaar is in een punt a, als de omkeerfunctie $g(w)$ van $f(z)$ continu is in $b = f(a)$ en als $\left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a} \neq 0$, dan ~~is~~ $g(w)$ differentieerbaar in b en er geldt:

$$\left(\frac{d\, g(w)}{dw}\right)_{w=b} = 1 : \left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a} .$$

<u>Bewijs</u>: We passen het limiettheorema van de samengestelde functie van blz. an I 62 toe. Omdat $g(w)$ continu in b is, is b verdichtingspunt van de definitieverzameling van $g(w)$. Omdat $f(z)$ eeneenduidig is, is $\frac{z-a}{f(z)-f(a)}$ gedefinieerd voor alle $z \neq a$ uit de definitieverzameling van $f(z)$, dus is a verdichtingspunt van de definitieverzameling van $\frac{z-a}{f(z)-f(a)}$. Verder is $\lim_{w \to b} g(w) = g(b) = a$ en $\lim_{z \to a} \frac{z-a}{f(z)-f(a)} = 1 : \left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a}$. Verder is $g(w)$ eeneenduidig, dus uit $w \neq b$ volgt $g(w) \neq a$. We mogen dus concluderen dat $\lim_{w \to b} \frac{g(w)-a}{f(g(w))-f(a)} = 1 : \left(\frac{d\, f(z)}{dz}\right)_{z=a}$. Maar $\lim_{w \to b} \frac{g(w)-a}{f(g(w))-f(a)} =$
$= \lim_{w \to b} \frac{g(w)-g(b)}{w-b} = \left(\frac{d\, g(w)}{dw}\right)_{w=b}$. Hiermee is het bewijs voltooid.

Op geheel analoge wijze als voor reële functies ziet men in dat voor gehele n geldt $\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$ (waarbij $z \neq 0$ voor $n < 0$). Speciaal geldt dat de identieke functie $f(z) = z$ afgeleide 1 heeft. Verder heeft een constante functie afgeleide nul. Hieruit volgt dat de afgeleide van een polynoom $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ gelijk is aan $\sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} z^k$. Tevens blijkt hieruit dat een polynoom een continue functie is.

We bewijzen nu twee hulpstellingen.

(6.10) Als de complexe functie $f(z)$ differentieerbaar is in a, als $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = a$, en als voor alle n geldt dat $z_n \neq w_n$ en dat a tussen z_n en w_n ligt, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-f(w_n)}{z_n-w_n} = \left(\frac{d\,f(z)}{dz}\right)_{z=a}$.

Bewijs: Stellen we $\varepsilon_n = \frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a} - \left(\frac{d\,f(z)}{dz}\right)_{z=a}$ en $\delta_n = \frac{f(w_n)-f(a)}{w_n-a} - \left(\frac{d\,f(z)}{dz}\right)_{z=a}$, dan geldt op grond van de differentieerbaarheid van $f(z)$ dat $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Omdat a tussen z_n en w_n ligt, kunnen we schrijven $a = (1-\lambda_n)z_n + \lambda_n w_n$ met λ_n reëel en $0 \leq \lambda_n \leq 1$. Nu geldt $\frac{f(z_n)-f(w_n)}{z_n-w_n} - \left(\frac{d\,f(z)}{dz}\right)_{z=a} = \frac{(z_n-a)\,\varepsilon_n-(w_n-a)\,\delta_n}{z_n-w_n} =$

$= \lambda_n \varepsilon_n + (1-\lambda_n)\,\delta_n$. Omdat λ_n en $1-\lambda_n$ begrensd zijn, geldt op grond van (2.5) en (2.6) dat $\lim_{n\to\infty} (\lambda_n \varepsilon_n + (1-\lambda_n)\,\delta_n) = 0$. Hieruit volgt hetgeen bewezen moest worden.

(6.11) Als a en b verschillende complexe getallen zijn, als λ een reëel getal >1 is, als μ_1, μ_2 en μ_3 reële getallen zijn, waarvoor geldt $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \leq 1$, als $c = (1-\lambda)a + \lambda b$, als $u_1 = (1-\mu_1)a + \mu_1 b$, als $u_2 = (1-\mu_2)a + \mu_2 b$, als $u_3 = (1-\mu_3)a + \mu_3 b$, als $f(z)$ een complexe functie is, gedefinieerd op het lijnstuk ab, als n een natuurlijk getal is en als K een reëel getal is, zodat

$\left|\frac{f(u_3)-f(u_1)}{(u_3-c)^n-(u_1-c)^n}\right| \geq K$, dan is $\left|\frac{f(u_3)-f(u_2)}{(u_3-c)^n-(u_2-c)^n}\right| \geq K$ of

$\left|\frac{f(u_2)-f(u_1)}{(u_2-c)^n-(u_1-c)^n}\right| \geq K$.

Bewijs: Voor j = 1,2 of 3 geldt $(u_j-c)^n = (\lambda-\mu_j)^n(a-b)^n$. Hieruit volgt dat $(u_1-c)^n$, $(u_2-c)^n$ en $(u_3-c)^n$ twee aan twee verschillend zijn. Stellen we nu

$\nu = \frac{(u_3-c)^n-(u_2-c)^n}{(u_3-c)^n-(u_1-c)^n}$, dan is $\nu = \frac{(\lambda-\mu_2)^n-(\lambda-\mu_3)^n}{(\lambda-\mu_1)^n-(\lambda-\mu_3)^n}$; hieruit volgt dat ν reëel is en $0 < \nu < 1$ geldt. Verder is $\dfrac{f(u_3)-f(u_1)}{(u_3-c)^n-(u_1-c)^n} =$

$$= \frac{f(u_3)-f(u_2)}{(u_3-c)^n-(u_2-c)^n}\nu + \frac{f(u_2)-f(u_1)}{(u_2-c)^n-(u_1-c)^n}(1-\nu).$$ Ware nu

$$\left|\frac{f(u_3)-f(u_2)}{(u_3-c)^n-(u_2-c)^n}\right| < K \quad \text{en} \quad \left|\frac{f(u_2)-f(u_1)}{(u_2-c)^n-(u_1-c)^n}\right| < K,$$ dan zou gelden

$$K \leq \left|\frac{f(u_3)-f(u_1)}{(u_3-c)^n-(u_1-c)^n}\right| < \nu K + (1-\nu)K = K,$$ hetgeen een tegenstrijdigheid oplevert. Hiermee is de stelling bewezen.

We bewijzen nu een stelling, die we nog verscheidene malen zullen toepassen.

(6.12) Als a en b verschillende complexe getallen zijn, als c een complex getal is dat op de halve lijn ab, maar niet op het lijnstuk ab ligt, als f(z) een differentieerbare complexe functie is, waarvan de definitieverzameling het lijnstuk ab bevat en als n een natuurlijk getal is, dan bestaat er een punt ξ op het lijnstuk ab zodat

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-c)^n-(a-c)^n}\right| \leq \left|\frac{f'(\xi)}{n(\xi-c)^{n-1}}\right| .$$

<u>Bewijs</u>: We construeren met volledige inductie twee rijen complexe getallen $z_1, z_2, \ldots$ en $w_1, w_2, \ldots$ met de volgende eigenschappen: $z_m = (1-\lambda_m)a+\lambda_m b$, $w_m = (1-\mu_m)a+\mu_m b$, λ_m en μ_m reëel, $0 \leq \lambda_m < \mu_m \leq 1$, $\lambda_m \leq \lambda_{m+1}$, $\mu_m \geq \mu_{m+1}$, $\mu_m - \lambda_m = 2^{-m+1}$ en

$$\left|\frac{f(w_m)-f(z_m)}{(w_m-c)^n-(z_m-c)^n}\right| \geq \left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-c)^n-(a-c)^n}\right|.$$ We kiezen $z_1 = a$ en $w_1 = b$, dan is $\lambda_1 = 0$ en $\mu_1 = 1$ en voor $m = 1$ is aan de vereisten voldaan. Stel nu dat $z_1, \ldots, z_m$ en $w_1, \ldots, w_m$ gevonden zijn, zodat aan de vereisten voldaan is. Noem $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_m + \mu_m)$, dan geldt $0 \leq \lambda_m < \mu < \mu_m \leq 1$, $\mu - \lambda_m = \mu_m - \mu = \frac{1}{2}(\mu_m - \lambda_m) = 2^{-m}$. Verder noemen we $u = (1-\mu)a+\mu b$. Door (6.11) toe te passen vinden we dat

$$\left|\frac{f(w_m)-f(u)}{(w_m-c)^n-(u-c)^n}\right| \geq \left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-c)^n-(a-c)^n}\right| \quad \text{of} \quad \left|\frac{f(u)-f(z_m)}{(u-c)^n-(z_m-c)^n}\right| \geq$$

$$\geq \left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-c)^n-(a-c)^n}\right| .$$

Naar gelang van de ongelijkheid welke geldt, kiezen we $\lambda_{m+1} = \mu$, $\mu_{m+1} = \mu_m$ of $\lambda_{m+1} = \lambda_m$ en $\mu_{m+1} = \mu$. Vervolgens kiezen we

$z_{m+1} = (1-\lambda_{m+1})a+\lambda_{m+1}b$ en $w_{m+1} = (1-\mu_{m+1})a+\mu_{m+1}b$. Dan geldt dat λ_{m+1} en μ_{m+1} reëel zijn, $0 \leqq \lambda_{m+1} < \mu_{m+1} \leqq 1$, $\lambda_m \leqq \lambda_{m+1}$, $\mu_m \geqq \mu_{m+1}$, $\mu_{m+1}-\lambda_{m+1} = 2^{-(m+1)+1}$ en

$$\left|\frac{f(w_{m+1})-f(z_{m+1})}{(w_{m+1}-c)^n-(z_{m+1}-c)^n}\right| \geqq \left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-c)^n-(a-c)^n}\right|.$$

De rij $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ is een monotoon niet-dalende rij reële getallen tussen 0 en 1, dus geldt $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = \alpha$ met $0 \leqq \alpha \leqq 1$. De rij $\mu_1, \mu_2, \ldots$ is een monotoon niet-stijgende rij reële getallen tussen 0 en 1, verder is $\lim\limits_{m\to\infty} (\mu_m-\lambda_m) = 0$. Hieruit volgt $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m = \alpha$. Verder is $\lambda_m \leqq \alpha \leqq \mu_m$ voor alle m. Stellen we $\xi = (1-\alpha)a+\alpha b$, dan is $\xi = \left(1-\frac{\alpha-\lambda_m}{\mu_m-\lambda_m}\right)z_m + \frac{\alpha-\lambda_m}{\mu_m-\lambda_m}w_m$ en $0 \leqq \frac{\alpha-\lambda_m}{\mu_m-\lambda_m} \leqq 1$, dus ligt ξ tussen z_m en w_m voor alle m. Verder ligt ξ op het lijnstuk ab en is $w_m-z_m = 2^{-m+1}(b-a) \neq 0$. We kunnen dus (6.10) toepassen en vinden

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(w_m)-f(z_m)}{w_m-z_m} = f'(\xi) \text{ en } \lim_{m\to\infty} \frac{(w_m-c)^n-(z_m-c)^n}{w_m-z_m} = n(\xi-c)^{n-1},$$

Daar ξ op het lijnstuk ab ligt en c niet, is $n(\xi-c)^{n-1} \neq 0$. Dus geldt $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{f(w_m)-f(z_m)}{(w_m-c)^n-(z_m-c)^n} = \frac{f'(\xi)}{n(\xi-c)^{n-1}}$. Hieruit volgt nu direct

$$\left|\frac{f'(\xi)}{n(\xi-c)^{n-1}}\right| \geqq \left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-c)^n-(a-c)^n}\right|.$$

We merken nog op dat voor n = 1 de c geheel uit de bewezen ongelijkheid wegvalt. Wegens het bijzondere belang van dit geval zullen we de stelling hiervoor nogmaals formuleren.

(6.13) Als a en b verschillende complexe getallen zijn en als f(z) een differentieerbare complexe functie is, waarvan de definitieverzameling het lijnstuk ab bevat, dan bestaat er een punt ξ op het lijnstuk ab zodat $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqq |f'(\xi)|$.

In deze vorm lijkt de stelling een beetje op de middelwaardestelling van de reële differentiaalrekening.

Opgave 27. Bewijs dat onder de veronderstellingen van (6.12) bij ieder complex getal A een punt ξ op het lijnstuk ab bestaat zodat

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-c)^n-(a-c)^n} - A\right| \leqq \left|\frac{f'(\xi)}{n(\xi-c)^{n-1}} - A\right|.$$

(Aanwijzing: Het is niet nodig een bewijs analoog aan het bewijs van (6.12) te geven. De bewering is n.l. op eenvoudige wijze uit (6.12) af te leiden).

(6.14) Als van een differentieerbare complexe functie $f(z)$, gedefinieerd op een convexe verzameling X, de afgeleide overal nul is, dan is $f(z)$ een constante functie.

Bewijs: Neemt men twee verschillende punten a en b uit X, dan kan men (6.13) toepassen omdat X convex is. Er is dus een ξ in X zodat $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq |f'(\xi)| = 0$, dus $f(b)=f(a)$. Dus is de functie constant.

(6.15) Als voor twee differentieerbare complexe functies $f(z)$ en $g(z)$, gedefinieerd op dezelfde convexe verzameling X, geldt $f'(z) = g'(z)$ voor alle $z \in X$, dan is er een complex getal C zodat $g(z) = f(z)+C$ voor alle $z \in X$.

Bewijs: Pas (6.14) toe op de functie $h(z) = g(z)-f(z)$.

Men drukt de inhoud van (6.15) wel eens uit door te zeggen dat een functie door zijn afgeleide op een additieve constante na bepaald is.

§ 7. Rijen van functies.

We beschouwen een oneindige rij $f_1, f_2, \ldots$ waarvan elk element een functie $f_n(x)$ is. We veronderstellen dat alle functies $f_n(x)$ gedefinieerd zijn op een zelfde verzameling X in een metrische ruimte E met metriek ρ en dat de functiewaarden van alle functies $f_n(x)$ in dezelfde metrische ruimte F met metriek σ liggen. We bespreken het begrip convergentie voor dergelijke rijen functies. Kiest men een punt a in X, dan is de rij $f_1(a), f_2(a), \ldots$ een rij punten van F, waarvoor we het begrip convergentie kennen. Als deze rij voor iedere keuze van a in X convergent is zullen we de rij functies convergent noemen. Dit leidt tot de volgende definitie.

A. De rij functies $f_1, f_2, \ldots$ heet (puntgewijs) convergent met limiet f ($\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$), als bij iedere $a \in X$ en ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat zodat voor $n > N$ geldt $\sigma(f_n(a), f(a)) < \varepsilon$.

Dit begrip convergentie valt niet onder het vroeger behandelde begrip convergentie van rijen punten in een metrische ruimte. Weliswaar kunnen we de verzameling van de functies gedefinieerd op X en met functiewaarden in F vormen, maar in deze verzameling hebben we geen metriek ingevoerd. We kunnen dit op de volgende wijze proberen te doen. Beschouwen we twee dergelijke functies f en g en een element a van X dan is $\sigma(f(a), g(a))$ een reëel getal ≥ 0. Van de zo verkregen reële getallen voor alle a in X vormen we de bovenste grens en noemen deze $\sup\limits_{x \in X} \sigma(f(x), g(x))$; dit is een reëel getal of $+\infty$.

Als er $+\infty$ uitkomt, kunnen we het niet gebruiken; als er een reëel getal komt is het bruikbaar voor een metriekdefinitie als volgt.

Als een verzameling K bestaande uit functies, die gedefinieerd zijn op X en hun functiewaarden in F hebben, dusdanig is, dat voor ieder tweetal elementen f en g van K geldt dat $\sup_{x\in X} \sigma(f(x),g(x))$ een reëel getal is, dan definieert $\tau(f,g)=\sup_{x\in X} \sigma(f(x),g(x))$ een metriek τ op K.

Dat de eerste twee eigenschappen van een metriek (zie blz. an I 50) vervuld zijn, is evident (uiteraard heten twee functies f en g dan en slechts dan gelijk als voor alle $x\in X$ geldt $f(x) = g(x)$). Voor de derde eigenschap gaan we als volgt te werk. Kies een $a\in X$, dan geldt voor drie functies f,g en h uit K dat $\sigma(f(a),h(a))\leq$
$\leq \sigma(f(a),g(a))+\sigma(g(a),h(a)) \leq \sup_{x\in X} \sigma(f(x),g(x))+\sup_{x\in X} \sigma(g(x),h(x))=$
$= \tau(f,g)+\tau(g,h)$. Daar dit voor iedere a in X geldt, geldt ook
$\tau(f,h) = \sup_{x\in X} \sigma(f(x),h(x)) \leq \tau(f,g)+\tau(g,h)$.

In een dergelijke verzameling K bestaat nu een convergentiebegrip gebaseerd op de metriek τ. In die zin is een rij functies $f_1,f_2,\ldots$ convergent met limiet f (waarbij al deze functies in K liggen) als bij ieder reëel getal $\varepsilon>0$ een natuurlijk getal N bestaat zodat voor $n>N$ geldt $\tau(f_n,f)<\varepsilon$. Het is makkelijk in te zien dat dit op hetzelfde neerkomt als de volgende definitie.

B. De rij functies f_1, $f_2,\ldots$ heet <u>uniform</u>(of <u>gelijkmatig</u>) <u>convergent</u> met limiet f, als bij ieder reëel getal $\varepsilon>0$ een natuurlijk getal N bestaat zodat voor $n>N$ en alle $a\in X$ geldt
$\sigma(f_n(a),f(a))<\varepsilon$.

<u>Opgave 28</u>. Bewijs dat als $f_1,f_2,\ldots$ en f tot een verzameling K als boven behoren, de rij $f_1,f_2,\ldots$ dan en slechts dan uniform convergent is met limiet f als deze rij convergent is met limiet f in de zin van de metriek τ.

We merken op, dat definitie B ook kan worden gebruikt als men niet beschikt over een verzameling K als hierboven beschreven. Vergelijken we definities A en B dan zien we het volgende essentiële verschil: bij A mag N van ε en van a afhangen, bij B mag N van ε afhangen, <u>maar niet van a</u>. Hieraan zien we dat de volgende stelling evident is.

(7.1) Een uniform convergente rij functies is convergent.

We laten nu aan een voorbeeld zien dat het omgekeerde van (7.1) niet geldt. Neem als definitieverzameling het open interval (0,1) en $f_n(x) = x^n$. Nu geldt voor $0<a<1$ dat $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ (3.7), dus de rij functies is convergent met als limiet de functie die overal nul is. De rij is echter niet uniform convergent. Ware dit n.l. wel zo dan was er een N zodat voor $n > N$ gold $a^n < \frac{1}{2}$, speciaal $a^{N+1} < \frac{1}{2}$ voor alle a met $0 < a < 1$. Dit is echter in strijd met $\lim\limits_{x \to 1} x^{N+1} = 1$.

Naast het begrip convergente rij kunnen we nu ook het begrip fundamentaalrij beschouwen. We komen dan tot de volgende definities.

C. De rij functies $f_1, f_2, \ldots$ heet een fundamentaalrij als bij iedere $a \in X$ en ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat, zodat voor $n > N$ en $m > N$ geldt $\sigma(f_n(a), f_m(a)) < \varepsilon$.

D. De rij functies $f_1, f_2, \ldots$ heet een uniforme fundamentaalrij als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat, zodat voor $n > N$, $m > N$ en alle $a \in X$ geldt $\sigma(f_n(a), f_m(a)) < \varepsilon$.

Voor functies uit een klasse K als boven stemt definitie D overeen met het begrip fundamentaalrij t.o.v. de metriek τ.

(7.2) Een uniforme fundamentaalrij functies is een fundamentaalrij.

(7.3) Een convergente rij functies is een fundamentaalrij.

(7.4) Een uniform convergente rij functies is een uniforme fundamentaalrij.

(7.5) Als de ruimte F, waar de functiewaarden in liggen, volledig is, is een fundamentaalrij functies convergent.

De bewijzen van deze vier stellingen zijn zo eenvoudig, dat we ze overslaan. Iets moeilijker is het bewijs van de volgende stelling.

(7.6) Als de ruimte F, waar de functiewaarden in liggen, volledig is, is een uniforme fundamentaalrij functies uniform convergent.

Bewijs: Dat de rij functies $f_1, f_2, \ldots$ convergent is volgt uit (7.2) en (7.5). Noem de limietfunctie f. Bij een reëel getal $\varepsilon > 0$ is een N_1 zodat voor $n > N_1$ en $m > N_1$ en alle $a \in X$ geldt $\sigma(f_n(a), f_m(a)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor een $a \in X$ is een N_2 (die van a kan afhangen!) zodat voor $m > N_2$ geldt $\sigma(f_m(a), f(a)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Als $M = 1 + \max(N_1, N_2)$, dan geldt voor $n > N_1$ dat $\sigma(f_n(a), f(a)) \leq \sigma(f_n(a), f_M(a)) + \sigma(f_M(a), f(a)) < \varepsilon$. Bij ε is dus een N_1 gevonden zodat voor $n > N_1$ en alle $a \in X$ geldt $\sigma(f_n(a), f(a)) < \varepsilon$. De rij is dus uniform convergent.

De limiet van een convergente rij continue functies behoeft niet continu te zijn. Neem als definitieverzameling het gesloten interval $(0,1)$ en $f_n(x) = x^n$. Deze rij functies is convergent; voor de limietfunctie f geldt $f(x)=0$ voor $0 \leq x < 1$ en $f(1)=1$. De functies f_n zijn alle continu, maar de functie f klaarblijkelijk niet. Voor uniform convergente rijen functies evenwel geldt de volgende stelling, die de voornaamste rechtvaardiging is van de invoering van het begrip uniforme convergentie.

(7.7) Als de rij functies $f_1, f_2, \ldots$ uniform convergent is met limiet

f en als alle functies f_n continu zijn in het punt a, dan is f ook continu in a.

Bewijs: Bij een reëel getal $\varepsilon > 0$ is een N zodat voor $n > N$ en alle $b \in X$ geldt $\sigma(f_n(b),f(b)) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Omdat f_{N+1} continu is in a, is er een reëel getal $\delta > 0$ zodat voor $x \in X$ met $\rho(x,a) < \delta$ geldt $\sigma(f_{N+1}(x),f_{N+1}(a)) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Voor die x geldt nu ook $\sigma(f(x),f(a)) \leq$ $\leq \sigma(f(x),f_{N+1}(x)) + \sigma(f_{N+1}(x),f_{N+1}(a)) + \sigma(f_{N+1}(a),f(a)) < \varepsilon$. Dus f is continu in a.

We bewijzen nu de volgende hulpstelling.

(7.8) Als X een compacte metrische ruimte is, bestaat er een reëel getal L zodat $\rho(x,y) \leq L$ geldt voor alle x en y in X.

Bewijs: Uit de hulpstelling onderaan blz.an I 57 volgt dat er een eindig aantal punten $a_1,\dots,a_n$ in X bestaat zodat ieder punt van X tot minstens een van deze punten een afstand < 1 heeft. Noemen we nu L_1 het grootste van de getallen $\rho(a_i,a_j)$ als i en j alle getallen van 1 tot n doorlopen, en $L = L_1+2$. Nemen we nu twee punten x en y in X dan is er een a_i zodat $\rho(x,a_i) < 1$ en een a_j zodat $\rho(y,a_j) < 1$. Dan is $\rho(x,y) \leq \rho(x,a_i) + \rho(a_i,a_j) + \rho(a_j,y) <$ $< L_1+2 = L$.

(7.9) De verzameling van alle continue functies, gedefinieerd op een vaste compacte ruimte X en met functiewaarden in een vaste metrische ruimte F, vormen een metrische ruimte R ten opzichte van de metriek τ, gedefinieerd door $\tau(f,g) = \sup_{x\in X} \sigma(f(x),g(x))$. Als bovendien F volledig is, is R ook volledig.

Bewijs: We moeten eerst bewijzen dat $\sup_{x\in X} \sigma(f(x),g(x))$ een reëel getal is. We nemen daartoe twee willekeurige continue functies f en g, gedefinieerd op X en met functiewaarden in F. Laat de verzamelingen van hun functiewaarden Y resp. Z zijn. Dan zijn Y en Z compact (6.1), dus op grond van (7.8) is er een reëel getal L_1 zodat $\sigma(f(x_1),f(x_2)) \leq L_1$ voor alle x_1 en x_2 in X en een reëel getal L_2 zodat $\sigma(g(x_1),g(x_2)) \leq L_2$ voor alle x_1 en x_2 in X. Neem een willekeurig punt a in X en noem $L_3 = \sigma(f(a),g(a))$. Voor een willekeurig punt b in X geldt dan

$$\sigma(f(b),g(b)) \leq \sigma(f(b),f(a)) + \sigma(f(a),g(a)) + \sigma(g(a),g(b)) \leq L_1+L_3+L_2.$$

Dus is $\sup_{x\in X} \sigma(f(x),g(x))$ een reëel getal $\leq L_1+L_3+L_2$. Uit de hierboven gegeven beschouwingen over een verzameling K volgt dan, dat τ een metriek definieert. Veronderstel nu dat F volledig is. Laat $f_1,f_2,\dots$ een fundamentaalrij zijn ten opzichte van de metriek τ. Dan is de rij een uniforme fundamentaalrij en dus op grond van (7.6) uniform convergent met een limietfunctie f die op grond van (7.7) continu is en bovendien de limiet is van de rij ten opzichte van de metriek τ. Hiermede is het bewijs voltooid.

In het bijzonder volgt hieruit de stelling geformuleerd op blz. an I 57, waarbij de eis, dat de functies begrensd zijn door een vaste constante nog kan vervallen.

Opgave 29. Bewijs dat de rij functies $f_n(x) = x^n(1-x)$ gedefinieerd op het gesloten interval (0,1) uniform convergent is.

Opgave 30. Bewijs dat de rij functies $f_n(x) = nx^n(1-x)$ gedefinieerd op het gesloten interval (0,1) convergent maar niet uniform convergent is.

We behandelen nu een stelling over de differentieerbaarheid van de limiet van een rij differentieerbare functies.

(7.10) Als $f_1, f_2, \dots$ een rij differentieerbare complexe functies is, alle gedefinieerd op dezelfde convexe verzameling X, als de rij $f_1', f_2', \dots$ der afgeleiden uniform convergeert met limiet g en als er een punt a in X bestaat, zodat $f_1(a), f_2(a), \dots$ convergeert, dan convergeert de rij $f_1, f_2, \dots$ met een limiet f die differentieerbaar is en g als afgeleide heeft.

Bewijs: We bewijzen eerst, dat $f_1, f_2, \dots$ convergeert. Voor het punt a is dit gegeven, we nemen dus een $b \neq a$ in X. Omdat X convex is kunnen we op de functie $f_m - f_n$ stelling (6.13) toepassen: er is een punt ξ in X zodat

$$\left| \frac{f_m(b) - f_n(b) - f_m(a) + f_n(a)}{b-a} \right| \leq \left| f_m'(\xi) - f_n'(\xi) \right| .$$

Op grond van (7.4) is de rij $f_1', f_2', \dots$ een uniforme fundamentaalrij: bij een reëel getal $\varepsilon > 0$ bestaat een N_1, zodat voor $m > N_1$ en $n > N_1$ en alle z in X geldt $|f_m'(z) - f_n'(z)| < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$. Verder is de rij $f_1(a), f_2(a), \dots$ een fundamentaalrij, dus is er een N_2 zodat voor $m > N_2$ en $n > N_2$ geldt $|f_m(a) - f_n(a)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Noem N de grootste van N_1 en N_2 dan geldt voor $m > N$ en $n > N$ dat $|f_m(b) - f_n(b)| \leq$

$$|f_m(b) - f_n(b) - f_m(a) + f_n(a)| + |f_m(a) - f_n(a)| \leq |b-a|\,|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| +$$

$+|f_m(a) - f_n(a)| < \varepsilon$. De rij $f_1, f_2, \dots$ is dus een fundamentaalrij en dus op grond van (7.5) convergent. We bewijzen nu de differentieerbaarheid van de limietfunctie f in een willekeurig punt b van X met afgeleide $g(b)$. Daartoe vormen we de rij functies $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ gedefinieerd door $\varphi_n(z) = \frac{f_n(z) - f_n(b)}{z-b}$ voor $z \neq b$ en $\varphi_n(b) = f_n'(b)$. Dan is φ_n continu (ook in b). Voor een willekeurige $c \neq b$ in X geldt dan op grond van (6.13) dat er bij de functie $f_m - f_n$ een η in X bestaat, zodat

$$\left| \frac{f_m(c) - f_n(c) - f_m(b) + f_n(b)}{c-b} \right| \leq \left| f_m'(\eta) - f_n'(\eta) \right| .$$

Verder is er bij een reëel getal $\varepsilon > 0$ een N_3 zodat voor $m > N_3$ en $n > N_3$ e[n] z in X geldt $|f'_m(z) - f'_n(z)| < \varepsilon$. Voor deze m en n en voor $c \neq b$ geldt dan $|\varphi_m(c) - \varphi_n(c)| =$

$$= \left| \frac{f_m(c) - f_m(b) - f_n(c) + f_n(b)}{c-b} \right| \leq |f'_m(\eta) - f'_n(\eta)| < \varepsilon \;;$$

verder geldt $|\varphi_m(b) - \varphi_n(b)| = |f'_m(b) - f'_n(b)| < \varepsilon$. De rij $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ is dus een uniforme fundamentaalrij en dus op grond van (7.6) uniform convergent met een limietfunctie φ die op grond van (7.7) continu is. Voor $z \neq b$ is nu $\varphi(z) = \frac{f(z)-f(b)}{z-b}$ en $\varphi(b) = g(b)$. Omdat φ continu is, geldt $\lim\limits_{z \to b} \frac{f(z)-f(b)}{z-b} = g(b)$, dus $\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=b} = g(b)$. Dus f is differentieerbaar met g als afgeleide.

De in (7.10) gevonden betrekking kunnen we ook als volgt schrijven $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{df_n(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$. Men drukt dit wel uit door te zeggen, dat onder de veronderstellingen van (7.10) limietovergang en differentiatie verwisseld mogen worden.

Opgave 31. Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1)$ voor reële $x > 0$ met behulp van (7 ...

§8. Reeksen van functies. Machtreeksen.

We beschouwen nu reeksen $\sum\limits_n f_n$ van complexe functies. Op de rij $F_1, F_2, \ldots$ der partiële sommen gedefinieerd door $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ kunnen [we] toepassen hetgeen in de vorige paragraaf is behandeld. Zo noemen we [een] reeks functies dan en slechts dan convergent resp. uniform convergent als de bijbehorende rij der partiële sommen convergent resp. uniform convergent is. De daarbij gevonden limietfunctie noemen we de somfunctie van de reeks. Op grond van (7.4) en (7.6) is een reeks dan en slechts dan uniform convergent als de rij der partiële sommen een uniforme fundamentaalrij is. Door dit met (3.1) te combineren vinden we de volgende stelling.

(8.1) Een reeks $\sum\limits_n f_n$ van functies gedefinieerd op X is dan en slechts dan uniform convergent als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een N te vinden is, zodat voor alle $n > N$, willekeurige natuurlijke p en alle $z \in X$ geldt $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$.

Het majorantcriterium voor uniforme convergentie luidt als volgt

(8.2) Als $\sum\limits_n f_n$ en $\sum\limits_n g_n$ reeksen van functies zijn, gedefinieerd op X, als $g_n(z)$ reëel en ≥ 0 voor alle n en alle $z \in X$, als er een N bestaat zodat voor $n > N$ en alle $z \in X$ geldt $|f_n(z)| \leq g_n(z)$ en als $\sum\limits_n g_n$ uniform convergent is, dan is $\sum\limits_n f_n$ uniform convergent.

<u>Bewijs</u>: Voor $n > N$ geldt $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)$.
Met behulp van (8.1) vinden we hetgeen te bewijzen was.

Een belangrijk speciaal geval van (8.2) ontstaat als $g_n(z)$ voor alle n een constante functie M_n is. Als $\sum_n M_n$ convergent is, is deze reeks, als reeks van functies opgevat, natuurlijk ook uniform convergent. Dit geeft de volgende stelling.

(8.3) (<u>Criterium van Weierstrass</u>). Als $\sum_n f_n$ een reeks van functies is, gedefinieerd op X, als $\sum_n M_n$ een convergente reeks met reële elementen ≥ 0 is en als er een N bestaat, zodat voor $n > N$ en alle $z \in X$ geldt $|f_n(z)| \leq M_n$, dan is $\sum_n f_n$ uniform convergent.

Als voor een reeks functies $\sum_n f_n$ alle functies f_n continu zijn dan zijn de partiële sommen als sommen van een eindig aantal continue functies ook continu. Door toepassing van (7.7) vinden we

(8.4) Als de reeks functies $\sum_n f_n$ uniform convergent is en als alle f_n continu zijn dan is de somfunctie ook continu.

Ook stelling (7.10) kunnen we, gebruik makende van het feit dat de afgeleide van een som gelijk is aan de som van de afgeleiden, voor reeksen vertalen:

(8.5) Als van een reeks $\sum_n f_n$ alle functies f_n gedefinieerd zijn op eenzelfde convexe verzameling X en differentieerbaar zijn, als $\sum_n f'_n$ uniform convergeert en als er een punt a in X bestaat, zodat $\sum_n f_n(a)$ convergeert, dan convergeert $\sum_n f_n$ en er geldt $\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} f_n(z)$.

Men drukt dit wel uit door te zeggen, dat onder de veronderstellingen van (8.5) een reeks termsgewijs gedifferentieerd mag worden.

We bewijzen nu eerst een hulpstelling.

(8.6) Als $a_1, a_2, \ldots$ een rij reële getallen is en C is een reëel getal ≥ 0, dan geldt als $\limsup_{n\to\infty} a_n$ een reëel getal is, $\limsup_{n\to\infty} Ca_n =$
$= C \limsup_{n\to\infty} a_n$ en als $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ en $C > 0$, $\limsup_{n\to\infty} Ca_n = \infty$.

<u>Bewijs</u>: Stel eerst dat $\limsup_{n\to\infty} a_n$ een reëel getal is. Als $C=0$ is de bewering evident. Als $C > 0$ volgt de bewering makkelijk uit (4.7) en uit het feit, dat voor een convergente rij $b_1, b_2, \ldots$ en een getal K geldt $\lim_{n\to\infty} Kb_n = K \lim_{n\to\infty} b_n$. Als $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ volgt de bewering uit het feit, dat uit $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ en $C > 0$ volgt $\lim_{n\to\infty} Cc_n = \infty$.

Een belangrijk speciaal geval van reeksen van functies vormen de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Hierbij is de term met $n=0$ als een constante op te vatten, d.w.z. we maken de afspraak $C^0=1$. Voor $z=0$ is de reeks convergent met som a_0. Passen we het criterium van Cauchy toe dan vinden we, dat de reeks absoluut convergeert als $\limsup_{n\to\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$ en divergeert als $\limsup_{n\to\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1$. Als $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ een reëel getal is dan volgt uit (8.6) dat $\limsup_{n\to\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Als $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ een reëel getal >0 is, dan volgt uit het voorafgaande dat voor de complexe getallen z waarvoor geldt $|z| < \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ de machtreeks absoluut convergeert en voor de complexe getallen z waarvoor geldt $|z| > \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ de machtreeks divergeert. Als $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ dan convergeert de machtreeks absoluut voor alle complexe z. Als $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, dan volgt uit (8.6) dat de machtreeks divergeert voor alle complexe $z \neq 0$. Noemen we nu $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ en maken we de afspraak, dat we $R=\infty$ stellen als $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ en $R=0$ als $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, dan kunnen we hetgeen gevonden is als volgt formuleren.

(8.7) Een machtreeks $\sum_n a_n z^n$ is absoluut convergent voor $|z| < R$ en divergent voor $|z| > R$, waarin R bepaald wordt door $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

De R in (8.7) noemen we de <u>convergentiestraal</u> van de machtreeks. De cirkel bepaald door $|z| = R$ heet de <u>convergentiecirkel</u> van de machtreeks. Het gebied bepaald door $|z| < R$, waarvan we aangetoond hebben, dat de machtreeks er absoluut convergeert, is voor reële $R > 0$ een open cirkelschijf (voor $R = \infty$ is het het hele complexe vlak). We merken nog op, dat we over het gedrag van de machtreeks voor $|z| = R$ niets bewezen hebben. Hiervoor zijn ook verschillende situaties mogelijk.

Uit (5.4) volgt nog, dat als $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ bestaat, de convergentiestraal R van de machtreeks ook gevonden kan worden uit $R = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Dit geldt ook als deze limiet 0 of ∞ is.

We geven enkele voorbeelden van machtreeksen. De meetkundige reeks $\sum_n z^n$ is een machtreeks met $R=1$; voor $|z| = 1$ is de reeks divergent. Voor $\sum_n \frac{1}{n^2} z^n$ geldt $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$; voor $|z| = 1$ is de reeks absoluut convergent, omdat $\sum_n \frac{1}{n^2}$ convergeert. Voor $\sum_n \frac{1}{n!} z^n$ geldt $R=\infty$ en voor $\sum_n n!z^n$ geldt $R=0$. Het is ook mogelijk, dat een machtreeks op sommige punten van zijn convergentiecirkel convergeert en op andere divergeert. Zo zullen we later kunnen bewijzen, dat de reeks $\sum_n \frac{1}{n} z^n$ convergeert voor alle z met $|z| = 1$ behalve voor $z=1$.

We kunnen ook algemenere machtreeksen van de vorm $\sum_n a_n(z-a)^n$ beschouwen. In het voorafgaande vervange men dan z door $z-a$. We vinden dan absolute convergentie binnen een cirkel met middelpunt a en straal R.

Een machtreeks $\sum_n a_n(z-a)^n$ met convergentiestraal $R>0$ bepaalt een functie $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ gedefinieerd voor $|z-a| < R$. Van deze functie zullen we de differentieerbaarheid aantonen. We laten hieraan nog de volgende stelling voorafgaan.

(8.8) Als R de convergentiestraal is van $\sum_n a_n(z-a)^n$ en r een reëel getal waarvoor geldt $0 \leq r < R$, dan convergeert de reeks uniform voor de verzameling der punten z bepaald door $|z-a| \leq r$.

Bewijs: Als $|z-a| \leq r$, dan geldt $|a_n(z-a)^n| = |a_n||z-a|^n \leq |a_n| r^n$. Omdat $r<R$, convergeert $\sum_n |a_n| r^n$. Op grond van (8.3) convergeert de reeks $\sum_n a_n(z-a)^n$ uniform voor $|z-a| \leq r$.

Voor $r=R$ behoeft (8.8) niet te gelden. Zie opgave 32.

Opgave 32. Bewijs dat $\sum_n z^n$ niet uniform convergeert voor $|z| < 1$.

Om de differentieerbaarheid van de door een machtreeks voorgestelde functie te bewijzen, willen we (8.5) toepassen. De reeks $\sum_n a_n(z-a)^n$ convergeert in ieder geval voor $z=a$. De reeks der afgeleiden $\sum_n na_n(z-a)^{n-1}$ heeft dezelfde partiële sommen (met de index een eenheid verschoven) als de machtreeks $\sum_n (n+1)\, a_{n+1}(z-a)^n$. Laat de convergentiestraal van deze laatste machtreeks R_1 zijn. Stel eerst $R_1 > 0$, dan is $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z-a)^n$ gedefinieerd voor $|z-a| < R_1$. Kies een reëel getal r waarvoor geldt $0 < r < R_1$, dan is voor $|z-a| \leq r$ de machtreeks die g(z) bepaalt uniform convergent. Omdat een cirkelschijf convex is kunnen we (8.5) toepassen, hetgeen oplevert dat $\sum_n a_n(z-a)^n$ voor $|z-a| \leq r$ convergent is en dat $\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}(z-a)^n$. Daar dit voor iedere positieve $r < R_1$ geldt, is $\sum_n a_n(z-a)^n$ convergent voor $|z-a| < R_1$, d.w.z. voor de convergentie-

straal R van deze machtreeks geldt $R \geq R_1$. (Deze laatste conclusie geldt uiteraard ook als $R_1=0$). De hierboven aangetoonde termsgewijze differentieerbaarheid voor $|z-a| \leq r$ geldt nu ook voor $|z-a| < R_1$. Neem hiertoe een willekeurige b met $|b-a| < R_1$ en kies r zo dat $|b-a| < r < R_1$ (b.v. $r=\frac{1}{2}(R_1+ |b-a|)$). Beperkt men nu z tot die waarden waarvoor geldt $|z-a| \leq r$, dan volgt de termsgewijze differentieerbaarheid uit het hierboven bewezene. Voor alle complexe z met $|z-b| < r-|b-a|$ geldt echter $|z-a| \leq |z-b|+|b-a|<r$. Als men in de differentieerbaarheidsdefinitie op blz. 34 de δ nu in ieder geval zo kiest, dat $\delta < r-|b-a|$, dan volgt de termsgewijze differentieerbaarheid in b nu ook als z de verzameling $|z-a| < R_1$ doorloopt. (Hetgeen we zojuist aangetoond hebben komt neer op het feit, dat voor differentieerbaarheid van een functie in een punt alleen de argumentwaarden van de functie in een omgeving van dat punt van belang zijn). Tenslotte tonen we nog aan dat $R=R_1$. Daar we al weten dat $R \geq R_1$ is, is het voldoende om $R \leq R_1$ aan te tonen, d.w.z. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|}$. Als $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ is de bewering evident. Stel daarom $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c$ een reëel getal ≥ 0. Bij een reëel getal $\varepsilon > 0$ bestaat dan een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $\sqrt[n]{|a_n|}<c+\frac{1}{2}\varepsilon$. Voor deze n geldt dan ook $\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} =$

$$= \sqrt[n]{n+1}\,\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \sqrt[n]{n+1}\,(c+\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Voor $n\to\infty$ nadert dit laatste tot $c+\frac{1}{2}\varepsilon$, omdat $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = 1$. Er is dus een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $\sqrt[n]{n+1}\,(c+\frac{1}{2}\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}} < c+\varepsilon$. Noemen we N de grootste van N_1 en N_2 dan geldt voor $n > N$ dat $\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} < c+\varepsilon$. Hieruit volgt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \leq c$, hetgeen te bewijzen was.

Hetgeen nu gevonden is vatten we samen in de volgende stelling.
(8.9) Als $R > 0$ de convergentiestraal is van de machtreeks $\sum\limits_n a_n(z-a)^n$, dan is voor $|z-a| < R$ de functie $A(z)= \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide de functie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}(z-a)^n$ is, behorende bij de machtreeks, die uit de oorspronkelijke machtreeks ontstaat door termsgewijs differentiëren. De laatste machtreeks heeft ook convergentiestraal R (dit laatste geldt ook als $R=0$).

Het spreekt vanzelf, dat men op de afgeleide weer dezelfde stelling kan toepassen, Zo kan men met volledige inductie makkelijk bewijzen, dat de door een machtreeks voorgestelde functie binnen zijn convergentiecirkel willekeurig vaak differentieerbaar is met als k^e afgeleide $A^{(k)}(z)= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\, a_{n+k}(z-a)^n$ (hierin is opgesloten de afspraak $0!=1$). Als we afspreken, dat de nulde afgeleide van een functie gelijk is aan de functie zelf, geldt deze formule ook voor $k=0$.

We merken nog op, dat uit (8.9) volgt dat een door een machtreeks voorgestelde functie binnen de convergentiecirkel continu is.

Opgave 33. Bewijs de hierboven gegeven formule voor $A^{(k)}(z)$.

Opgave 34. Bepaal de convergentiestralen van $\sum_n \frac{1}{n^n} z^n$ en $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.

§9. Reeksen van Taylor.

We willen trachten een gegeven functie $f(z)$ als een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ te schrijven. We weten al, dat als dat kan, dus $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, dan geldt $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(z-a)^n$, dus $f^{(k)}(a) = k!a_k$, dus $f(z)= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$. Als het dus mogelijk zal blijken een bepaalde functie als een machtreeks te schrijven, zal het in die gedaante moeten zijn.

We proberen eerst vast te stellen hoe goed de benadering is als we een partiële som van bovenstaande machtreeks nemen. We veronderstellen, dat $f(z)$ op het lijnstuk ab n maal differentieerbaar is en we noemen $R_n(b)=f(b)- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$ de n^e restterm van $f(z)$ in het punt b. Dan is de functie $g(z)=f(b)- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (b-z)^k$ gedefinieerd

op het lijnstuk ab en differentieerbaar; er geldt $g'(z)=$

$$= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(z)}{k!} (b-z)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!} (b-z)^{k-1} = - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(b-z)^{n-1}.$$

We passen hierop (6.13) toe; er bestaat dus een punt ξ op het lijnstuk ab zodat $|g(b)-g(a)| \leq |b-a|\,|g'(\xi)|$. Nu is $g(b)=0$, $g(a)=R_n(b)$; dus $|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|}{(n-1)!} |b-\xi|^{n-1} |f^{(n)}(\xi)|$. Dit heet de restschatting van Cauchy. We kunnen deze in een iets andere gedaante brengen door te schrijven $\xi=(1-\vartheta) a+ \vartheta b$ met reële ϑ en $0 \leq \vartheta \leq 1$, dan is $b-\xi = (1-\vartheta)(b-a)$, dus $|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^n}{(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-1} |f^{(n)}(a+\vartheta(b-a))|$.

Voor reële functies kan men door inplaats van (6.13) de middelwaardestelling van de differentiaalrekening toe te passen iets meer krijgen, n.l. $R_n(b) = \frac{(b-a)^n}{(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a+\vartheta(b-a))$ met $0 < \vartheta < 1$. Hiervoor behoeft $f(x)$ in de eindpunten a en b van het interval slechts $n-1$ maal differentieerbaar te zijn mitsde $(n-1)^e$ afgeleiden daar continu zijn. We hebben nu de volgende stelling verkregen.

(9.1) (Restschattingsstelling van Cauchy) Als een functie $f(z)$ gedefinieerd is op een lijnstuk ab en n maal differentieerbaar is en $R_n(b)= f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$, dan is er een punt ξ op het lijnstuk ab zodat geldt

$$|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|}{(n-1)!} |b-\xi|^{n-1} |f^{(n)}(\xi)| \;;$$

anders uitgedrukt: er is een reëel getal ϑ met $0 \leq \vartheta \leq 1$, zodat geldt

$$|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^n}{(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-1} \left|f^{(n)}(a+\vartheta(b-a))\right| .$$

Als f(x) een reële functie is, gedefinieerd op het segment ab, die n-1 maal differentieerbaar is met continue afgeleide en op het open interval ab n maal differentieerbaar, dan is er een reëel getal ϑ met $0 < \vartheta < 1$, zodat geldt

$$R_n(b) = \frac{(b-a)^n}{(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(a+\vartheta(b-a)).$$

We willen nu nog een tweede restschatting afleiden. Hiertoe nemen we weer aan dat f(z) op het lijnstuk ab n maal differentieerbaar is en definiëren $R_n(b)$ en g(z) als boven. We passen nu (6.12) toe op g(z) en op het lijnstuk ac, waarin c een punt tussen a en b is dat tussen a en b ligt maar $\neq a$ en $\neq b$ is. Dan ligt b op de halve lijn ac, maar niet op het lijnstuk ac. Uit (6.12) volgt nu dat er een punt ζ op het lijnstuk ac ligt, zodat $\left|\frac{g(c)-g(a)}{(c-b)^n-(a-b)^n}\right| \leq \left|\frac{g'(\zeta)}{n(\zeta-b)^{n-1}}\right|$. Schrijven we de bovenste grens van de getallen $|f^{(n)}(z)|$ als z het lijnstuk ab doorloopt als $\sup\limits_{\substack{z \text{ tussen} \\ a \text{ en } b}} |f^{(n)}(z)|$, dan volgt uit het bovenstaande dat

$$\left|\frac{f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (b-c)^k - R_n(b)}{(c-b)^n - (a-b)^n}\right| \leq \frac{1}{n!} \left|f^{(n)}(\zeta)\right| \leq \frac{1}{n!} \sup_{\substack{z \text{ tussen} \\ a \text{ en } b}} \left|f^{(n)}(z)\right| .$$

Het eerste lid van deze ongelijkheid is een continue functie van c, het laatste lid hangt niet van c af. Door c tot b te laten naderen vindt men $|R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} \sup\limits_{\substack{z \text{ tussen} \\ a \text{ en } b}} |f^{(n)}(z)|$. Dit heet de <u>restschatting van Lagrange</u>. Evenals in het vorige geval kunnen we deze in een andere gedaante brengen door te schrijven $z=(1-\vartheta)a+\vartheta b$, dan doorloopt ϑ de reële getallen tussen 0 en 1. Het geval dat f een reële functie is, is al in de cursus analyse I behandeld (an I 78). We hebben dus de volgende stelling verkregen.

(9.2) <u>(Restschattingsstelling van Lagrange)</u>. Als een functie f(z) gedefinieerd is op een lijnstuk ab en n maal differentieerbaar is en

$R_n(b) = f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$, dan geldt

$$\left|R_n(b)\right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} \sup_{\substack{z \text{ tussen} \\ a \text{ en } b}} \left|f^{(n)}(z)\right| ;$$

anders uitgedrukt:

$$\left|R_n(b)\right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} \sup_{0 \leq \vartheta \leq 1} \left|f^{(n)}(a+\vartheta(b-a))\right| .$$

Als $f(x)$ een reële functie is, gedefinieerd op het segment ab, die n-1 maal differentieerbaar is met continue afgeleide en op het open interval ab n maal differentieerbaar, dan is er een reëel getal ϑ met $0 < \vartheta < 1$, zodat geldt

$$R_n(b) = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta(b-a)).$$

We merken nog op dat de restschatting van Lagrange grote gelijkenis vertoont met de eventuele volgende term van de reeks.

We keren nu terug naar het probleem van het voorstellen van een functie door een machtreeks. Als $f(z)$ op het lijnstuk ab willekeurig vaak differentieerbaar is, dan is $R_n(b)$ gedefinieerd voor alle natuurlijke n. Als nu geldt $\lim_{n\to\infty} R_n(b)=0$, dan volgt daaruit

$f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$, dus dan is $f(z)$ in het punt b door een machtreeks voorgesteld. Om $\lim_{n\to\infty} R_n(b)=0$ te bewijzen kunnen bovenstaande restschattingen soms goede diensten bewijzen.

Een reeks $\sum_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ heet een <u>reeks van Taylor</u>; als $a=0$ ook <u>reeks van Mac Laurin.</u>

Als voorbeeld nemen we $f(x)=e^x$ gedefinieerd voor alle reële x. Dan is $f^{(n)}(x)=e^x$ en $f^{(n)}(0)=1$ voor alle natuurlijke n. We vinden nu dat $e^b= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k}{k!} + R_n(b)$. De stelling van Lagrange geeft $R_n(b)= \frac{b^n}{n!} e^{\vartheta b}$ met $0 < \vartheta < 1$. Nu is $e^{\lambda b}$ in ieder geval begrensd als λ het interval (0,1) doorloopt (wegens de monotonie van e^x varieert het tussen 1 en e^b); verder is $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} =0$ (ga dit na). Dus $\lim_{n\to\infty} R_n(b)=0$ voor alle reële b. Hiermee is de volgende stelling gevonden:

(9.3) Voor alle reële x geldt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad .$$

Speciaal is

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \quad .$$

Waarschuwing: Opdat een functie door zijn reeks van Taylor voorgesteld wordt is het niet voldoende, dat deze reeks convergeert. Voor een tegenvoorbeeld zie opgave 35. Als we echter $\lim_{n\to\infty} R_n(b)=0$ kunnen aantonen, dan bewijzen we daarmee tegelijkertijd dat de reeks in het punt b convergeert en dat hij in dat punt de functie voorstelt.

Opgave 35. Beschouw de functie f(x) gedefinieerd door $f(x)= e^{-x^{-2}}$ voor alle reële $x\neq 0$ en $f(0)=0$. Bewijs dat er bij ieder natuurlijk getal n een polynoom $P_n(x)$ bestaat zodat voor alle reële $x\neq 0$ geldt

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-x^{-2}}}{x^{3n}} \quad .$$

Bewijs, dat f(x) ook in het punt 0 willekeurig vaak differentieerbaar is en dat $f^{(n)}(0)=0$ voor alle natuurlijke n. Bepaal de reeks van Mac Laurin van f(x) en toon aan dat deze voor alle reële x convergeert, maar alleen voor x=0 de functie voorstelt.

Opgave 36. Bepaal de reeks van Mac Laurin van $\frac{1}{(1+z)^2}$. Voor welke waarden van z stelt deze de functie voor?

Opgave 37. Bepaal de reeks van Taylor van e^x in een willekeurig punt a.

In de numerieke wiskunde gebruikt men reeksontwikkelingen van functies om benaderde waarden van deze functies te berekenen door een aantal termen van de reeks uit te rekenen. De vraag rijst dan, hoe groot de fout is, die men dan maakt, of, anders gesteld, hoeveel termen van de reeks men moet gebruiken om een bepaalde nauwkeurigheid te bereiken. Om dit te beoordelen kunnen de restschattingen goede diensten bewijzen; deze geven immers juist een schatting van de fout die men maakt als men de functie vervangt door een partiële som van zijn reeksontwikkeling. Laten we ons b.v. de opgave stellen e te benaderen tot op minder dan $\frac{1}{100}$. Nu is $e=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + R_n$ en volgens Lagrange is $R_n = \frac{e^{\vartheta}}{n!} < \frac{e}{n!} < \frac{4}{n!}$ omdat we al weten dat $e<4$; verder is klaarblijkelijk $R_n > 0$. Als we nu n zo groot kiezen dat $\frac{4}{n!} \leq \frac{1}{100}$ dan is zeker $0< R_n<\frac{1}{100}$. Hieraan is voldaan voor n=6, want 6!=720. Dus

$$e=\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} + R_6= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + R_6 = \frac{163}{60} + R_6 .$$ Als we dus $\frac{163}{60}$ als benaderde waarde van e nemen maken we een fout die $<\frac{1}{100}$ is. We

kunnen echter, nu we over een betere benadering van e beschikken, deze fout nog wat nauwkeuriger schatten. We weten dat $0 < R_6 < \frac{e}{720}$, dus $720\, R_6 < e = \frac{163}{60} + R_6$, dus $0 < R_6 < \frac{163}{60.719}$. Tellen we hier $\frac{163}{60}$ bij op, dan vinden we $\frac{163}{60} < e < \frac{163}{60.719} + \frac{163}{60} = \frac{1956}{719}$. Schrijven we het in tiendelige breuken, dan vinden we $2{,}716 < e < 2{,}721$, waaruit blijkt dat de fout zelfs $< \frac{1}{200}$ is. Door ook nog gebruik te maken van $R_6 > \frac{1}{720}$ kunnen we nog een iets betere benadering krijgen: $\frac{1957}{720} = \frac{163}{60} + \frac{1}{720} < e$; dus $2{,}718 < e < 2{,}721$.

Opgave 38. Met hoeveel termen van de reeksontwikkeling kan volstaan worden om e met een fout $< 10^{-4}$ te benaderen?

In de cursus analyse I § 32 worden twee reële differentieerbare functies ingevoerd, die met sin x en cos x worden aangeduid en sinus en cosinus worden genoemd. Deze functies zijn gedefinieerd voor alle reële x en er geldt $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ en $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. Hieruit volgt $|\sin x| \leq 1$ en $|\cos x| \leq 1$ voor alle reële x. Van deze functies bepalen we de reeksen van Mac Laurin. Stel eerst $f(x) = \sin x$. Nu is $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ en $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$. Dit bewijzen we door volledige inductie. Voor n=1 geldt $n = 2.0+1$, dus $f^{(2.0+1)}(x) = f'(x) = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x = (-1)^0 \cos x$. Stel dat voor een zekere n de formules gelden. Als n even is, n=2m, dan is $f^{(2m+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}(x)}{dx} = \frac{df^{(2m)}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-1)^m \sin x = (-1)^m \cos x$.

Als n oneven is, n=2m+1, dan is $f^{(2m+2)}(x) = f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}(x)}{dx} = \frac{d\, f^{(2m+1)}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-1)^m \cos x = (-1)^{m+1} \sin x$. Er geldt $f^{(2n)}(0) = 0$ en $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Voor oneven n, n=2m+1, geldt dus $f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2m+1}(x)$; volgens Lagrange is $R_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}(-1)^m \cos \vartheta x$ met $0 < \vartheta < 1$, dus $|R_{2m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$. Voor even n, n=2m, geldt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2m}(x);$$ volgens Lagrange is

$R_{2m}(x) = \frac{x^{2m}}{(2m)!}(-1)^m \sin \vartheta x$ met $0 < \vartheta < 1$, dus $|R_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m}}{(2m)!}$. Voor alle natuurlijke n geldt dus $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}$. Nu is $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ voor alle reële x, dus $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ voor alle reële x. Dus

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Op grond van (8.9) volgt door termsgewijs differentiëren dat $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. We hebben dus gevonden:

(9.4) Voor alle reële x geldt

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots .$$

§ 10. De exponentiële, goniometrische en logarithmische functies.

De functie e^x is gedefinieerd voor alle reële x en hiervoor geldt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Deze machtreeks convergeert echter in het hele complexe vlak. We definiëren voor willekeurige complexe z nu $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, dan stemt dit voor reële waarden van z met de reeds eerder gedefinieerde functie overeen. In de theorie der analytische functies wordt bewezen, dat dit de enige differentieerbare functie is die voor alle complexe z gedefinieerd is en die voor reële x met e^x overeenstemt. We herinneren aan de afspraak om $z = x+iy$ (x en y reëel) te schrijven.

De afgeleide van e^z bepalen we door termsgewijs differentiëren van de machtreeks (8.9); dit levert $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, dus:

(10.1) $\frac{de^z}{dz} = e^z$.

De afgeleide van $e^z e^{-z}$ is nul, dus deze functie is constant (6.14); door $z=0$ te substitueren vinden we dat deze constante $=1$ is, dus:

(10.2) $e^z e^{-z} = 1$.

Hieruit volgt dat $e^z \neq 0$ voor alle z en $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

(10.3) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

Bewijs: Beschouw de functie $g(z) = e^{-z} e^{z+a}$. Nu is $g'(z) = 0$, dus $g(z)$ is constant. Door $z=0$ te substitueren vinden we dat deze constante $= e^a$ is, dus $e^{-z} e^{z+a} = e^a$. Vermenigvuldigt men beide leden met e^z en past men (10.2) toe dan vindt men $e^{z+a} = e^z e^a$, hetgeen te bewijzen was.

Opgave 39. Als voor de differentieerbare complexe functie $f(z)$, die gedefinieerd is op een convexe verzameling X, geldt $f'(z) = f(z)$ voor alle $z \in X$, dan is er een constante c, zodat $f(z) = c\, e^z$ voor alle $z \in X$. Bewijs dit.

Opgave 40. Bewijs dat $(e^z)^n = e^{nz}$ voor alle gehele n en alle complexe z.

Als zoals gebruikelijk $\bar{z}$ de toegevoegd complexe van z aangeeft, dan geldt op grond van opgave 1 en van (2.4) dat $e^{\bar{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} =$
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \overline{e^z}$, immers uit (2.4) is makkelijk af te leiden, dat uit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ volgt $\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \bar{a}$. Nu is $|e^z| = \sqrt{e^z\overline{e^z}} =$
$= \sqrt{e^z e^{\bar{z}}} = \sqrt{e^{z+\bar{z}}} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$, omdat $e^x > 0$ voor alle reële x. Dit geeft:

(10.4) $|e^z| = e^x$.

Hieruit volgt voor zuiver imaginaire $z=iy$ dat $|e^{iy}| = e^0 = 1$. Algemeen is $e^z = e^x e^{iy} = |e^z| e^{iy}$.

We beschouwen nu de afbeelding van het complexe vlak in het complexe vlak, die de functie e^z tot stand brengt. Lijnen evenwijdig met de reële as (y is constant) worden blijkbaar afgebeeld in halve lijnen met beginpunt in de oorsprong (met uitzondering van de oorsprong zelf), gaande door het punt e^{iy} gelegen op de eenheidscirkel (d.i. de cirkel met middelpunt in 0 en straal 1). Lijnen evenwijdig met de imaginaire as (x is constant) worden afgebeeld in cirkels met middelpunt 0 en stralen e^x. De afbeelding zal dus geheel bepaald zijn als we vastgesteld hebben hoe door e^{iy} de reële y in de eenheidscirkel worden afgebeeld. Hierbij zijn de volgende twee vragen van bijzonder belang.

1°. Is de afbeelding eeneenduidig?

2°. Wordt de eenheidscirkel door de afbeelding geheel bedekt? (d.w.z. is er bij ieder punt w op de eenheidscirkel een reële y zodat $e^{iy} = w$?).

Het antwoord op vraag 1° zal neen, het antwoord op vraag 2° ja luiden.

We breiden nu de functies sin x en cos x uit voor complexe argumentwaarden op analoge wijze als we dat bij e^x gedaan hebben. We definiëren dus $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ en $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

(10.5) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$,

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

<u>Bewijs</u>: $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}$ en $e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}$, dus $e^{iz} + e^{-iz} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n) i^n z^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ en } e^{iz} - e^{-iz} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n) i^n z^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Met behulp van (10.5) bewijst men gemakkelijk de volgende formules.

(10.6) $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1.$

(10.7) $\sin(-z) = -\sin z,\ \cos(-z) = \cos z.$

(10.8) $\frac{d \sin z}{dz} = \cos z,\ \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$

(10.9) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$
$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$

(10.10) $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin \frac{1}{2}(z_1+z_2) \cos \frac{1}{2}(z_1-z_2),$
$\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{1}{2}(z_1+z_2) \cos \frac{1}{2}(z_1-z_2),$
$\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin \frac{1}{2}(z_1+z_2) \sin \frac{1}{2}(z_1-z_2).$

(10.11) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (formule van Euler).

Opgave 41. Bewijs (10.6) tot en met (10.11). (Aanwijzing: sommige formules van deze groep kunnen makkelijk rechtstreeks uit andere formules uit deze zelfde groep worden afgeleid, dus zonder opnieuw (10.5) te gebruiken).

Aan de reeksen voor sin z en cos z ziet men direct dat deze functies voor reële z reëel zijn; trouwens ook uit het feit dat e^{-iz} het toegevoegd complexe van e^{iz} is voor reële z is dit met (10.5) direct af te leiden. Voor reële z geeft de formule van Euler dus de splitsing van e^{iz} in reëel en imaginair deel; vergelijk ook (10.5) met (1.32) en (1.33).

We bewijzen nu dat er een positief reëel getal y bestaat, waarvoor $e^{iy}=1$. Daartoe bewijzen we eerst dat er een positief reëel getal x bestaat waarvoor $\cos x=0$. Dit laatste zou makkelijk af te leiden zijn uit hetgeen in de cursus analyse I wordt behandeld. We willen hier echter een bewijs geven dat op de reeksvoorstelling van de cosinus berust. In de reeks die cos x bepaalt nemen we telkens twee opeenvolgende termen bij elkaar (hetgeen geoorloofd is op grond van (3.5)), als volgt:

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{2n-1} x^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{(-1)^{2n} x^{4n}}{(4n)!} \right\} = 1 +$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n)!} \left\{ (4n-1)\,4n - x^2 \right\}.$$ Omdat $(4n-1)4n \geqq 12$ voor alle natuurlijke n, bestaat de laatste reeks voor reële x met $0 < x < 3$ geheel uit positieve termen, waaruit volgt dat de som groter is dan een partiële som (3.6). Hieruit volgt $\cos x < 1 - \frac{x^2}{4!}\left\{12-x^2\right\} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$ voor $0 < x < 3$. Vult men hierin $x=\frac{8}{5}$ in, dan vindt men $\cos \frac{8}{5} < -\frac{13}{1875} < 0$. Verder is $\cos 0=1$ en cos x een continue reële functie. Er bestaat dus een x tussen 0 en

$\frac{8}{5}$, waarvoor cos x = 0.

Uit cos x=0 volgt $e^{ix}+e^{-ix}=0$, $e^{ix}=-e^{-ix}$, $e^{2ix}=-1$, $e^{4ix}=1$. Er bestaat dus een positief reëel getal y waarvoor $e^{iy}=1$. Daar ook $e^{0}=1$ is hiermee vraag 1^{0} ontkennend beantwoord.

We beschouwen nu de verzameling L bestaande uit de positieve getallen y waarvoor geldt $e^{iy}=1$; uit het bovenstaande volgt dat L niet leeg is. Noem α de onderste grens van L. Nu is $\lim_{y\to 0}\frac{e^{iy}-1}{y}=\left(\frac{de^{iy}}{dy}\right)_{y=0}=$ $=(ie^{iy})_{y=0}=i$; hieruit volgt dat er een omgeving van 0 is, zodat voor $y\neq 0$ in die omgeving geldt $e^{iy}-1\neq 0$. Er is dus een omgeving van 0, waar geen punten van L in liggen. Dus geldt $\alpha>0$. Als $e^{i\alpha}\neq 1$, dan zou er een omgeving van α zijn, waarbinnen ook $e^{iy}\neq 1$, in strijd met de definitie van α. Dus $e^{i\alpha}=1$; α is dus het kleinste positieve getal y waarvoor $e^{iy}=1$ geldt.

(10.12) Als voor twee complexe getallen a en b geldt $a^2=b^2$, dan is $a=b$ of $a=-b$.

<u>Bewijs</u>: $0=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Uit $(e^{\frac{1}{2}i\alpha})^2=e^{i\alpha}=1=1^2$ volgt met (10.12) dat $e^{\frac{1}{2}i\alpha}=1$ of $e^{\frac{1}{2}i\alpha}=-1$, maar de eerste gelijkheid is uitgesloten omdat α het kleinste positieve getal y is met $e^{iy}=1$. Dus $e^{\frac{1}{2}i\alpha}=-1$; vermenigvuldiging met $e^{-\frac{1}{4}i\alpha}$ geeft $e^{\frac{1}{4}i\alpha}=-e^{-\frac{1}{4}i\alpha}$, dus $\cos\frac{1}{4}\alpha=0$. Omdat bovendien uit cos x=0 volgt $e^{4ix}=1$, is $\frac{1}{4}\alpha$ het kleinste getal x waarvoor cos x=0 geldt. Voor $0\leq x<\frac{1}{4}\alpha$ is dus $\cos x>0$, dus op grond van (10.8) sin x stijgend; verder is sin 0=0, dus $\sin\frac{1}{4}\alpha>0$. Verder volgt uit $\cos\frac{1}{4}\alpha=0$, (10.6) en (10.12) dat $\sin\frac{1}{4}\alpha=\pm 1$. Dus $\sin\frac{1}{4}\alpha=1$; bovendien is klaarblijkelijk $\frac{1}{4}\alpha$ het kleinste positieve getal x, waarvoor sin x=1. Dit getal is in de cursus analyse I echter $\frac{1}{2}\pi$ genoemd. Dus $\alpha=2\pi$.

<u>Opgave 42</u>. Bewijs dat $\frac{1}{2}\pi$ tussen $\frac{7}{5}$ en $\frac{8}{5}$ ligt. (Aanwijzing: neem in de reeks voor cos x de termen op een andere wijze bij elkaar als hierboven is geschied).

Nu is $e^{2\pi in}=1$ voor alle gehele n (zie opgave 40). Neem een reëel getal y, dusdanig dat $e^{iy}=1$ en bepaal het gehele getal n zodat $n\leq\frac{y}{2\pi}<n+1$, dus $0\leq y-2\pi n<2\pi$. Nu is $e^{(y-2\pi n)i}=e^{iy}e^{-2\pi in}=1$; omdat 2π het kleinste positieve getal x is, waarvoor $e^{ix}=1$ geldt, is $y-2\pi n=0$, dus $y=2\pi n$. Als $e^{z}=1$, dan is $e^{x}=1$, dus x=0, dus z zuiver imaginair. We hebben dus gevonden

(10.13) $e^{z}=1$ geldt dan en slechts dan als $z=2\pi in$ (n willekeurig geheel).

Als $e^{z_1}=e^{z_2}$, is $e^{z_2-z_1}=1$, dus $z_2-z_1=2\pi in$. Als omgekeerd $z_2=z_1+2\pi in$, dan is $e^{z_2}=e^{z_1}$.

(10.14) $e^{z_1}=e^{z_2}$ geldt dan en slechts dan als $z_2=z_1+2\pi in$ (n willekeurig geheel).

Het feit dat $e^{z+2\pi i}=e^z$ drukt men wel uit dat e^z <u>periode</u> $2\pi i$ heeft. In het algemeen zegt men dat $f(z)$ periode ω heeft als $f(z+\omega)=f(z)$.

We vragen ons nu af voor welke complexe z geldt $\sin z=0$. Als $\sin z=0$, dan is $e^{iz}=e^{-iz}$, $e^{2iz}=1$, $2iz=2\pi in$, $z=n\pi$. Omgekeerd is $\sin n\pi = \frac{1}{2i}(e^{in\pi}-e^{-in\pi})=\frac{e^{-in\pi}}{2i}(e^{2in\pi}-1)=0$. Dus:

(10.15) $\sin z=0$ geldt dan en slechts dan als $z=n\pi$ (n willekeurig geheel).

We doen nu hetzelfde voor cos z. Als $\cos z=0$, is $e^{iz}=-e^{-iz}$, $e^{2iz}=-1$, $e^{4iz}=1$, $4iz=2\pi in$, $z=\frac{1}{2}n\pi$. Als n even is, $n=2m$, $z=m\pi$, dan is $\sin z=0$, maar dan kan op grond van (10.6) cos z niet $=0$ zijn. Dus is n oneven, $n=2m+1$, $z=\frac{1}{2}\pi+m\pi$. Nu is omgekeerd $\cos(\frac{1}{2}\pi+m\pi)=$
$=\frac{1}{2}(e^{(\frac{1}{2}\pi+m\pi)i}+e^{-(\frac{1}{2}\pi+m\pi)i})=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi i-m\pi i}(e^{\pi i+2m\pi i}+1)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi i-m\pi i}(e^{\pi i}+1)$.
Nu is $(e^{\pi i})^2=e^{2\pi i}=1=1^2$, dus op grond van (10.12) is $e^{\pi i}=1$ of $e^{\pi i}=-1$. Op grond van (10.13) is $e^{\pi i}=1$ uitgesloten, dus $e^{\pi i}=-1$, dus $\cos(\frac{1}{2}\pi+m\pi)=0$. Dus:

(10.16) $\cos z=0$ geldt dan en slechts dan als $z=\frac{1}{2}\pi+m\pi$ (m willekeurig geheel).

We beschouwen nu de functies sin x en cos x voor reële x nog wat nader. We hebben al gevonden dat $\cos\frac{1}{2}\pi=0$, $\sin\frac{1}{2}\pi=1$; voor $0\leq x\leq\frac{1}{2}\pi$ is sin x stijgend van 0 naar 1 en cos x dalend van 1 naar 0. In het algemeen geeft (10.6) dat uit $\sin x=0$ volgt $\cos x=\pm 1$ en uit $\cos x=0$ volgt $\sin x=\pm 1$. Uit $\sin\frac{1}{2}\pi=1$ en (10.8) volgt dat cos x in $\frac{1}{2}\pi$ dalend is, dus is $\cos x<0$ voor $\frac{1}{2}\pi<x\leq\pi$. Omdat $\sin\pi=0$, is dus $\cos\pi=-1$. Op grond van de continuïteit van cos x neemt deze functie op het segment $(0,\pi)$ alle reële waarden tussen -1 en $+1$ aan. Verder volgt uit $\sin\frac{1}{2}\pi=1$ en (10.7) dat $\sin(-\frac{1}{2}\pi)=-1$; sin x neemt dus op het segment $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ alle reële waarden tussen -1 en $+1$ aan.

Neem nu een willekeurig complex getal $w=u+iv$ (u en v reëel) met $|w|=1$. Dan is $u^2+v^2=1$, dus $-1\leq u\leq 1$. Er is een reëel getal x, zodat $\cos x=u$. Voor die x is $(\sin x)^2=1-(\cos x)^2=1-u^2=v^2$. Op grond van (10.12) is $\sin x=v$ of $\sin x=-v$. Als $\sin x=-v$, dan nemen we $x_1=-x$; er geldt dan $\cos x_1=\cos x=u$ en $\sin x_1=-\sin x=v$. In ieder geval bestaat er dus een reëel getal y zodat $\cos y=u$ en $\sin y=v$, dus $e^{iy}=\cos y+i\sin y=$ $=u+iv=w$. Vraag 2° is hiermee dus bevestigend beantwoord.

Nemen we nu een willekeurig complex getal $w\neq 0$, dan is $w=|w|\frac{w}{|w|}$ en $\left|\frac{w}{|w|}\right|=1$. Er is dus een reële y, zodat $e^{iy}=\frac{w}{|w|}$; verder is er wegens $|w|>0$ een reële x zodat $e^x=|w|$ (zie an I 50). Dus er geldt $e^z=e^xe^{iy}=w$. De afbeelding die door e^z tot stand wordt gebracht overdekt dus het gehele complexe vlak behalve het punt 0. Dit feit tezamen met (10.14) geeft ons de volgende stelling.

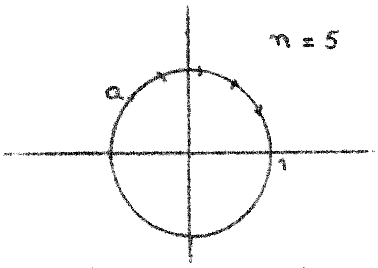
(10.17) Bij ieder complex getal $w \neq 0$ is een complex getal z te vinden zodat $e^z = w$; het complexe getal z, dat hieraan voldoet, is op gehele veelvouden van $2\pi i$ na bepaald.

Opgave 43. Bewijs dat voor willekeurige gehele n geldt $\sin(\frac{1}{2}\pi + n\pi) = (-1)^n$ en $\cos n\pi = (-1)^n$.

Opgave 44. Bewijs dat voor willekeurige complexe z en willekeurige gehele n geldt $\sin(z+2n\pi) = \sin z$ en $\cos(z+2n\pi) = \cos z$.

We noemen een reëel getal y, zodat $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$ een argument van w, geschreven $y = \arg w$. Dit is niet een functie van w volgens de door ons gegeven definitie van functie, want y is niet ondubbelzinnig door w bepaald. Het argument is slechts bepaald op veelvouden van 2π na. We zouden door zekere afspraken van arg w wel een functie kunnen maken, b.v. door voor te schrijven $0 \leqq \arg w < 2\pi$.

We onderzoeken nu de meetkundige betekenis van het argument. Daartoe nemen we een complex getal $a = b+ic$ (b en c reëel) met $|a| = 1$. We kunnen dan schrijven $a = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ met $0 \leqq \alpha < 2\pi$. We nemen nu



eerst het geval dat $c \geqq 0$; d.w.z. a ligt boven of op de reële as. Dan geldt $0 \leqq \alpha \leqq \pi$; immers als $\pi < \alpha < 2\pi$, dan is $\sin\alpha = -\sin(-\alpha) = -\sin(2\pi - \alpha) < 0$ wegens $0 < 2\pi - \alpha < \pi$. Voor een reëel getal y met $0 \leqq y \leqq \alpha$ geldt $\cos y \geqq \cos\alpha$ en $\sin y \geqq 0$, dus ligt $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ op de boven de reële as verlopende cirkelboog B die 1 met a verbindt. Voor natuurlijke n en gehele k met $0 \leqq k \leqq n$ vormen we $e^{\frac{ik\alpha}{n}}$; deze punten liggen dus alle op B. Nu geldt $\left|e^{\frac{i(k+1)\alpha}{n}} - e^{\frac{ik\alpha}{n}}\right| = \left|e^{\frac{ik\alpha}{n}}\left(e^{\frac{i\alpha}{n}} - 1\right)\right| = \left|e^{\frac{i\alpha}{n}} - 1\right|$; dit hangt alleen van n en niet van k af. De punten $e^{\frac{ik\alpha}{n}}$ voor $k=0,1,\dots,n$ verdelen de boog B in n stukken; de afstand tussen twee opeenvolgende punten is steeds dezelfde (in de figuur is dit voor $n=5$ getekend). De som van deze afstanden is dus $n\left|e^{\frac{i\alpha}{n}} - 1\right|$. De limiet hiervan als $n \to \infty$ is de booglengte van B (zie an I §31,2 blz. 114-116.) Nu is

$$\lim_{n\to\infty} n\left|e^{\frac{i\alpha}{n}} - 1\right| = \lim_{y \to 0}\left|\frac{e^{i\alpha y} - 1}{y}\right| = \left|\left(\frac{d\, e^{i\alpha y}}{dy}\right)_{y=0}\right| = \left|(i\alpha e^{i\alpha y})_{y=0}\right| = \alpha;$$

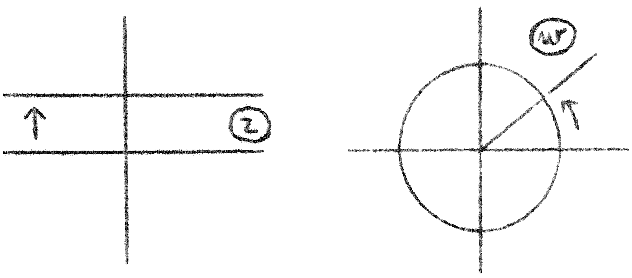
dit is dus de booglengte van B. Als $a = -1$ is deze dus $= \pi$.

We beschouwen nu het geval dat $c < 0$, dan is $\pi < \alpha < 2\pi$. Voor een reëel getal y met $\pi \leqq y \leqq \alpha$ geldt $\cos y \leqq \cos\alpha$ en $\sin y \leqq 0$, dus ligt e^{iy} op de beneden de reële as verlopende cirkelboog B_1 die -1 met a verbindt. Voor natuurlijke n en gehele k liggen de punten $e^{\frac{ik(\alpha-\pi)}{n}}$ voor $k=0,1,\dots,n$ op de boog B_1 en verdelen deze in n stukken;

de afstand tussen twee opeenvolgende punten is steeds dezelfde en wel $\left| e^{\frac{i(\alpha-\pi)}{n}} -1 \right|$. De booglengte van B_1 is $\lim\limits_{n\to\infty} n \left| e^{\frac{i(\alpha-\pi)}{n}} -1 \right| = \alpha-\pi$. De booglengte van de boog B die 1 met a verbindt en die bij 1 boven de reële as begint is dus $\pi+\alpha-\pi=\alpha$. Door a langs de eenheidscirkel onder de reële as tot 1 te laten naderen vinden we dat de omtrek van de eenheidscirkel 2π is.

Als w een willekeurig complex getal $\neq 0$ is, is $\frac{w}{|w|}$ het snijpunt, met de eenheidscirkel van de halve lijn Ow. Kiezen we arg w zo dat $0 \leqq \arg w < 2\pi$ dan is arg w de booglengte van de cirkelboog van de eenheidscirkel die 1 met $\frac{w}{|w|}$ verbindt en die bij 1 boven de reële as begint. De andere waarden van arg w ontstaan hieruit door er een geheel aantal malen de booglengte van de hele cirkel bij op te tellen. Er geldt $w=|w|\, e^{i \arg w} = |w| \left\{\cos(\arg w)+i \sin(\arg w)\right\}$.

We kunnen nu ook de meetkundige beschrijving van de afbeelding $w=e^z$ van het compleze z-vlak in het complexe w-vlak nader bepalen. Zoals we weten worden lijnen evenwijdig met de reële as (horizontale lijnen) afgebeeld in halve lijnen beginnend in O, waarbij punten die op dezelfde lijn evenwijdig met de imaginaire as (verticale lijnen) liggen, op dezelfde cirkel worden afgebeeld. Verschuiven we nu de horizontale lijnen in de richting van toenemend imaginair deel ("omhoog") dan draait de halve lijn in het w-vlak om O en wel is de op de eenheidscirkel van het w-vlak doorlopen booglengte gelijk aan de verticale verschuiving in het z-vlak. Bij verschuiving in het z-vlak over 2π is de halve lijn in het w-vlak in zijn oorspronkelijke stand teruggekeerd.



We noemen nu een z waarvoor geldt $e^z=w$ een <u>logarithme</u> van w, dus $z=\log w$. Ook deze is niet ondubbelzinnig bepaald. Als $e^z=w$ dan is $e^x=|w|$, dus $x=\operatorname{Log}|w|$ (de van vroeger bekende reële logarithme, die we nu ter onderscheiding met een hoofdletter L schrijven). Verder is $e^{iy}=\frac{w}{|w|}$, dus $y=\arg w$. We hebben dus gevonden

(10.18) $\log w = \operatorname{Log}|w| + i \arg w$ voor willekeurige $w\neq 0$.

De logarithme is dus op gehele veelvouden van $2\pi i$ na bepaald. We noemen die waarde van de logarithme waarvoor geldt $-\pi < \arg w \leqq \pi$ wel de <u>hoofdwaarde</u> van de logarithme; deze stemt voor reële w met de van vroeger bekende reële logarithme overeen. Ook de hoofdwaarde van de logarithme wordt wel met een hoofdletter L geschreven.

Neem een willekeurige $w_0\neq 0$ en kies daarbij een z_0 zodat $e^{z_0}=w_0$. Laat $z_0=x_0+iy_0$ zijn (x_0 en y_0 reëel). Kies verder een reëel getal α

zodat $\alpha < y_0 < \alpha+2\pi$. We beperken ons nu tot waarden van z waarvoor $\alpha \leqq y < \alpha+2\pi$. Voor die z is er een eeneenduidige betrekking met het w-vlak met uitzondering van w=0 tot stand gebracht door $e^z=w$. Dit is een continue afbeelding. We willen bewijzen, dat de omkering z=log w continu is in w_0 (en dan ook in alle punten waar arg $w \neq \alpha+2\pi n$ voor gehele n). Neem een rij w_n met $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=w_0$ en de bijbehorende punten z_n($e^{z_n}=w_n$; $z_n=x_n+iy_n$ met reële x_n en y_n). Als de rij der x_n naar boven onbegrensd zou zijn, dan bevatte deze rij een deelrij met lim= $+\infty$. Voor de corresponderende deelrij van w_n zou dan gelden lim $|w|= +\infty$, in strijd met $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=w_0$. De rij der x_n is dus naar boven begrensd. Als de rij der x_n naar beneden onbegrensd zou zijn, dan bevatte deze rij een deelrij met lim = $-\infty$. Voor de corresponderende deelrij van w_n zou dan gelden lim $|w|=0$, in strijd met $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=w_0\neq 0$. De rij der x_n is dus ook naar beneden begrensd. Er bestaat dus een reëel getal $\gamma > 0$, zodat $-\gamma \leqq x_n \leqq \gamma$ voor alle natuurlijke n. We bewijzen nu dat er een reëel getal $\beta < \alpha+2\pi$ bestaat, zodat voor alle natuurlijke n geldt $y_n \leqq \beta$. Stel n.l. dat dit niet zo is, dan is er bij iedere $\beta < \alpha+2\pi$ een n zodat $\beta < y_n < \alpha+2\pi$, dus $\limsup\limits_{n\to\infty} y_n= \alpha+2\pi$. Dus is er een deelrij van de rij der y_n waarvoor geldt lim= $\alpha+2\pi$. De corresponderende deelrij van de rij der x_n is begrensd en bezit dus zelf weer een convergente deelrij (4.3). De corresponderende deelrij van de rij der y_n is natuurlijk ook convergent met $\alpha+2\pi$ als limiet. De corresponderende deelrij der z_n heeft convergente rijen van reële en imaginaire delen en is dus zelf convergent; noem de limiet $z^*=x^*+iy^*$ (x^* en y^* reëel) met $y^*= \alpha+2\pi$. De corresponderende deelrij van de rij der w_n convergeert naar e^{z^*}, maar natuurlijk ook naar w_0, dus $e^{z^*}=w_0=e^{z_0}$, dus er is een geheel getal k zodat $z^*-z_0=2\pi ik$, dus $2\pi k=y^*-y_0= \alpha+2\pi-y_0$. Wegens $\alpha < y_0 < \alpha+2\pi$ geldt $0 < \alpha+2\pi-y_0 < 2\pi$, hetgeen in strijd is met $\alpha+2\pi-y_0=2\pi k$. Het bestaan van een β als boven beschreven is daarmee dus aangetoond. Er bestaan dus reële getallen β en γ, zodat voor alle natuurlijke n geldt $-\gamma \leqq x_n \leqq \gamma$, $\alpha \leqq y_n \leqq \beta < \alpha+2\pi$. De verzameling der complexe getallen z, waarvoor geldt $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$ en $\alpha \leqq y \leqq \beta$, is compact. Beperkt men de z tot deze verzameling dan is de functie e^z continu, eeneenduidig en gedefinieerd op een compacte verzameling, waaruit volgt dat de omkeerfunctie continu is (6.2). Daar de z_n alle in deze verzameling liggen volgt uit $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=w_0$ dat $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$. De continuïteit is hiermee dus aangetoond. Om de logarithme ondubbelzinnig bepaald en continu te maken kunnen we een <u>coupure</u> maken, bestaande uit de halve lijn beginnend in 0 voor welker punten $w\neq 0$ geldt arg w= $=\alpha+2\pi n$ (n geheel).

(10.19) Als voor een reëel getal α die complexe getallen w uitgesloten worden waarvoor arg w= $\alpha+2\pi n$ (gehele n), als verder w=0 uitgesloten wordt, als arg w voor de overige w zo gekozen wordt dat $\alpha <$ arg $w < \alpha+2\pi$

en als log w met behulp van deze waarde van arg w gedefinieerd wordt, dan is log w een continue functie.

Bij dezelfde afspraak als in (10.19) is log w ook differentieerbaar, want e^z is dan eeneenduidig en differentieerbaar met afgeleide $\neq 0$ en de omkeerfunctie is continu , dus volgens (6.9) is log w ook differentieerbaar en er geldt $\frac{d \log w}{dw} = 1 : \frac{de^z}{dz} = 1 : e^z = \frac{1}{w}$.

(10.20) Onder dezelfde voorwaarden als in (10.19) is log w een differentieerbare functie en geldt $\frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{w}$.

Opgave 45. Bewijs dat $\log w_1 w_2$ en $\log w_1 + \log w_2$ op een geheel veelvoud van $2\pi i$ na aan elkaar gelijk zijn.

We kunnen nu ook machten definiëren met willekeurige complexe exponenten en willekeurige complexe grondtallen $\neq 0$, door te stellen $a^b = e^{b \log a}$. In het rechterlid staat de al bekende macht van e met complexe exponent. Door het optreden van log a is de waarde van a^b in het algemeen niet ondubbelzinnig bepaald. De verschillende waarden die a^b kan aannemen ontstaan uit elkaar door vermenigvuldiging met $e^{2\pi inb}$ met gehele n. Alleen als b geheel is is deze factor altijd $=1$ en is er dus maar één waarde. We vergelijken de nu gedefinieerde macht in die gevallen waarin vroegere machtsdefinities van toepassing zijn met de toen gedefinieerde macht. Ter onderscheiding noemen we de nu gedefinieerde macht even a(b). Er zijn dan drie gevallen, waarvoor we al eerder machten gedefinieerd hebben.

1^o exponent geheel, grondtal complex $\neq 0$. We bewijzen de overeenstemming voor natuurlijke exponenten met volledige inductie. Nu is $a(1) = e^{\log a} = a = a^1$. Als verder $a(n) = a^n$, dan is $a(n+1) = e^{(n+1)\log a} = e^{n \log a + \log a} = e^{n \log a} e^{\log a} = a(n)a = a^n a = a^{n+1}$. Verder is $a(0) = e^0 = 1 = a^0$. Voor negatieve n stellen we $n = -m$; dan is $a(n) = a(-m) = e^{-m \log a} = \frac{1}{e^{m \log a}} = \frac{1}{a(m)} = \frac{1}{a^m} = a^{-m} = a^n$. In dit geval is er dus volledige overeenstemming.

2^o exponent reëel, grondtal reëel > 0. Nu is $a(b) = e^{b \log a}$ in het algemeen niet ondubbelzinnig bepaald (altijd als b niet geheel is), maar de oude waarde komt wel onder de nieuwe voor, n.l. als men voor log a de hoofdwaarde, dat is de gewone reële waarde Log a kiest.

3^o exponent complex, grondtal $=e$; nu is $e(b) = e^{b \log e} = e^b e^{2\pi inb}$ (n geheel); deze is in het algemeen niet ondubbelzinnig bepaald (altijd als b niet geheel is), maar de oude waarde komt wel onder de nieuwe voor, n.l. als men voor log e de hoofdwaarde Log e=1 kiest.

In geval 3^o leidt dit tot de eigenaardige moeilijkheid, dat men niet weet, als men e^b ziet staan, of hiermee de in het begin van deze paragraaf gedefinieerde waarde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ bedoeld wordt of één van de algemene waarden volgens de zoëven gegeven machtsdefinitie. We maken de afspraak dat als niet het tegendeel wordt vermeld met e^b de waarde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ wordt bedoeld. In het algemeen is voorzichtigheid met alle niet ondubbelzinnig bepaalde "functies" geboden; als men ermee gaat rekenen moet steeds vastgesteld worden welke waarde men wenst te gebruiken.

We kunnen $a^z = e^{z \log a}$ voor vaste $a \neq 0$ en veranderlijke z tot een ondubbelzinnig bepaalde functie maken door een vaste keuze van log a; dan is $\frac{da^z}{dz} = e^{z \log a} \log a = a^z \log a$ evenals vroeger. Bij z^b lukt dat niet; om differentieerbaarheid te bewerkstelligen moeten dan overeenkomstige afspraken worden gemaakt als vroeger bij log z; er geldt dan $\frac{dz^b}{dz} = \frac{de^{b \log z}}{dz} = \frac{be^{b \log z}}{z} = \frac{be^{b \log z}}{e^{\log z}} = be^{(b-1) \log z} = bz^{b-1}$. In de formule $\frac{dz^b}{dz} = bz^{b-1}$ moet in beide leden van de machtsdefinitie dezelfde waarde van log z worden gekozen.

Men zou kunnen vragen of de vroeger voor machten afgeleide formules zoals $a^c b^c = (ab)^c$, $a^b a^c = a^{b+c}$, $(a^b)^c = a^{bc}$ geldig blijven. Nu zijn hier in het algemeen zowel linker- als rechterlid van een gelijkheid niet ondubbelzinnig bepaald, maar men zou kunnen veronderstellen, dat de verzameling van waarden, die het linkerlid kan aannemen, dezelfde zou zijn als de verzameling van waarden, die het rechterlid kan aannemen. Voor de eerste der genoemde formules is dat inderdaad het geval (zie ook opgave 45), voor de beide andere behoeft dat niet zo te zijn. We gaan er in het algemene geval niet nader op in; wel geven we twee voorbeelden. Kiest men in de tweede formule b=i, c=-i, dan is b+c=0, dus $a^{b+c}=1$. Verder is $a^i = e^{i \log a - 2\pi j}$, $a^{-i} = e^{-i \log a + 2\pi k}$, dus $a^i a^{-i} = e^{2\pi(k-j)}$ met gehele j en k, dus $a^i a^{-i}$ doorloopt alle waarden $e^{2\pi n}$ (n geheel). Kiest men in de derde formule b=0, c=i, dan is bc=0, dus $a^{bc}=1$. Verder is $a^0=1$ en $1^i = e^{2\pi n}$ met willekeurige gehele n.

Opgave 46. Bewijs $(a^b)^n = a^{nb}$ voor gehele n; dit is zo op te vatten, dat de verzameling van waarden die het linkerlid kan aannemen dezelfde is als de verzameling van waarden die het rechterlid kan aannemen.

Opgave 47. Bepaal voor een complex getal $a \neq 0$ en een natuurlijk getal n de complexe getallen z, waarvoor geldt $z^n = a$ en bewijs dat dit juist de waarden zijn die $a^{\frac{1}{n}}$ kan aannemen en dat er n verschillende van deze waarden zijn. Speciaal neemt $a^{\frac{1}{2}}$ twee waarden aan, die elkaars tegengestelde zijn.

Opgave 48. Bewijs dat de complexe getallen z, waarvoor geldt $z^n=1$, de hoekpunten vormen van een regelmatige n-hoek beschreven in de eenheidscirkel.

§11. Enige onderwerpen uit de meetkunde van het complexe vlak.

Met behulp van het begrip argument kunnen we het probleem van het bepalen van een hoekmaat, dat in §1, blz.16 is aangeroerd, oplossen.

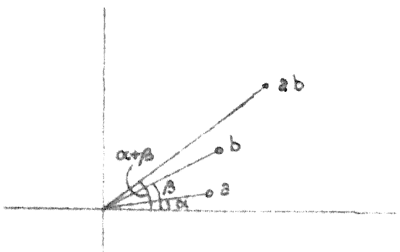
We hebben gevonden, dat als c een complex getal $\neq 0$ is, arg c de booglengte is van de boog van de eenheidscirkel die 1 met het snijpunt van de eenheidscirkel met de halve lijn Oc verbindt. Het ligt dus voor de hand om als hoekmaat van de hoek (Oc,O1) nu arg c te nemen. Om de hoekmaat van een willekeurige hoek (ac,ac) te definiëren passen we een beweging toe die a in O en b in een positief reëel getal r transformeert. Nu is $|b-a| = |r-O| = r$ (1.50). Stellen we de beweging in de vorm uz+v met $|u|=1$, dan geldt $ub+v=|b-a|$ en $ua+v=0$; dus $u = \frac{|b-a|}{b-a}$ en $v= -\frac{a|b-a|}{b-a}$. Deze beweging transformeert c in $\frac{|b-a|}{b-a}(c-a)$. Gebruik makende van het feit dat $\arg \frac{c-a}{b-a} = \arg \frac{|b-a|}{b-a}(c-a)$, definiëren we de hoekmaat $\varphi(ac,ab)$ van de hoek (ac,ab) als $\varphi(ac,ab)= \arg \frac{c-a}{b-a}$. Deze hoekmaat is slechts op gehele veelvouden van 2π na bepaald. Gebruik makend van het feit dat als a en b complexe getallen $\neq 0$ zijn, $\arg ab = \arg a + \arg b$ op een geheel veelvoud van 2π na, kan men makkelijk bewijzen dat de op blz. 16 gestelde eisen 1^o en 2^o voor een hoekmaat vervuld zijn, mits we gelijkheid opvatten als gelijkheid op een geheel veelvoud van 2π na.

Opgave 49. Bewijs dat de hierboven gedefinieerde hoekmaat in de zin van de zojuist gemaakte opmerking voldoet aan de eisen 1^o en 2^o van blz.16.

Men zou de hoekmaat ondubbelzinnig bepaald kunnen maken door te eisen dat hij ≥ 0 en $< 2\pi$ is; dan gaat 2^o echter nog niet in een gewone gelijkheid over daar de som van twee getallen $< 2\pi$ best $\geq 2\pi$ kan zijn.

De schrijfwijze van een complex getal $a\neq 0$ in de vorm $|a|\{\cos(\arg a) + i \sin (\arg a)\}$ met modulus en argument komt overeen met wat in de analytische meetkunde het bepalen van een punt door poolcoördinaten is genoemd. Het feit dat dit $|a|\, e^{i \arg a}$ is levert vaak nieuwe gezichtspunten op.

We kunnen nu een meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging van complexe getallen geven. Als a en b complexe getallen $\neq 0$ zijn, noemen we $\alpha = \arg a$ en $\beta = \arg b$, dan is $a= |a|\, e^{i\alpha}$, $b=|b|\, e^{i\beta}$, dus $ab = |a|\, e^{i\alpha}|b|\, e^{i\beta}= |ab|\, e^{i(\alpha+\beta)}$. De grootte van de hoek die de voerstraal van ab met de positieve reële as maakt is dus de som van de grootten van de hoeken die de voerstralen van a en b met de positieve reële as maken; de lengte van de voerstraal van ab is het product van de lengten van de voerstralen van a en b.



Opgave 50. Controleer met behulp van formules voor sinus en cosinus dat het product van $|a|\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ en $|b|\,(\cos\beta + i \sin\beta)$ gelijk is aan $|ab|\,(\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta))$.

Deling wordt op analoge wijze behandeld. Er komt dan een verschil van grootten van hoeken en een quotiënt van lengten van voerstralen.

Als a een complex getal $\neq 0$ is, $\arg a = \alpha$ en n een geheel getal, dan is $a^n = (|a|\ e^{i\alpha})^n = |a|^n\ e^{in\alpha} = |a^n|\ e^{in\alpha}$. Hieruit volgt:

(11.1) $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$ (formule van de Moivre).

Voor natuurlijke n geldt nu $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin\alpha)^k (\cos\alpha)^{n-k} = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{n-2k} +$$

$$+ i \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}(n-1)]} \binom{n}{2k+1} (-1)^k (\sin\alpha)^{2k+1} (\cos\alpha)^{n-2k-1} .$$

Dit geeft het volgende resultaat:

$$(11.2) \quad \cos n\alpha = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin\alpha)^{2k} (\cos\alpha)^{n-2k} ,$$

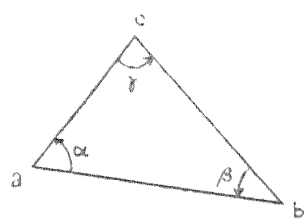
$$\sin n\alpha = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}(n-1)]} \binom{n}{2k+1} (-1)^k (\sin\alpha)^{2k+1} (\cos\alpha)^{n-2k-1} .$$

De formules (11.2) zijn door ons alleen voor reële α afgeleid; ze gelden echter voor willekeurige complexe α , hetgeen we niet zullen bewijzen.

Speciale gevallen van (11.2) zijn de volgende formules:

$$\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2,$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha ,$$
$$\cos 3\alpha = (\cos\alpha)^3 - 3(\sin\alpha)^2 \cos\alpha = 4(\cos\alpha)^3 - 3 \cos\alpha ,$$
$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha\ (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^3 = 3 \sin\alpha - 4(\sin\alpha)^3 .$$

Met behulp van het bovenstaande kunnen allerlei meetkundevraagstukken met complexe getallen opgelost worden. Het ligt niet op onze weg daarop hier uitvoerig in te gaan. We volstaan met een enkel voorbeeld. We willen de som van de grootten van de hoeken van een driehoek



berekenen. We moeten hierbij bedenken dat de grootte van een hoek zoals wij die hebben gedefinieerd afhangt van de volgorde van de benen van de hoek: $\varphi(ac,ab) = -\varphi(ab,ac)$. Voor de grootte van hoeken van een driehoek willen we een waarde hebben tussen 0 en π . Zoals de figuur getekend is moeten we voorde grootten α , β en γ van de drie hoeken van de driehoek abc nemen $\alpha = \arg \frac{c-a}{b-a}$, $\beta = \arg \frac{a-b}{c-b}$, $\gamma = \arg \frac{b-c}{a-c}$ (bij een andere ligging van de driehoek kan het zijn dat we voor alle drie de hoeken het tegengestelde moeten nemen). Nu is $\alpha + \beta + \gamma = \arg(\frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{a-b}{c-b} \cdot \frac{b-c}{a-c}) = \arg(-1) = \pi + 2n\pi$. De som van de grootten van de hoeken van een driehoek is dus gelijk aan de grootte van een gestrekte hoek (d.i. een hoek waarvan de benen de twee halve lijnen zijn, waarin een rechte lijn door een erop gelegen punt wordt verdeeld). We geven nog enige vraagstukken; hierbij valt op te merken, dat we een hoek recht zullen noemen, als zijn grootte op een geheel veelvoud van 2π na gelijk is aan $\pm\frac{1}{2}\pi$ in overeenstemming met $\varphi(01,01)=\frac{1}{2}\pi+2n\pi$. De halve lijnen ab en ac staan loodrecht op elkaar als de hoek (ab,ac) recht is.

Opgave 51. De halve lijnen ab en ac staan dan en slechts dan loodrecht op elkaar als $\frac{ab}{ac}$ zuiver imaginair is.

Opgave 52. Als a en b gegeven complexe getallen zijn met $a\neq b$, dan geldt voor een complex getal c dan en slechts dan $|c-a|=|c-b|$ als er een reëel getal λ bestaat, zodat $c=\frac{1}{2}(a+b)+\lambda i(b-a)$. Bewijs dit. Interpreteer dit resultaat ook meetkundig!

Opgave 53. Voor welke waarden van de λ uit opgave 52 staat ca loodrecht op cb?

Opgave 54. Op de zijden van een vierhoek abcd worden aan de buitenkant gelijkbenige rechthoekige driehoeken abe, bcf, cdg en dah beschreven met steeds de zijde van de vierhoek als hypotenusa (dit betekent dus dat voor de driehoek abe geldt $|e-a|=|e-b|$ en ea loodrecht op eb; analoog voor de andere driehoeken). Bewijs dat de lijnstukken eg en fh even lang zijn en loodrecht op elkaar staan (definieer eerst wat het betekent dat twee lijnstukken loodrecht op elkaar staan).

Opgave 55. Bewijs dat in een gelijkbenige driehoek de hoeken tegenover de gelijke benen even groot zijn.

§12. De logarithmische reeks en de binomiaalreeks.

We willen $\log(1+z)$ in een reeks van Mac Laurin ontwikkelen. Daartoe moeten we eerst afspraken maken om de differentieerbaarheid te waarborgen. We maken een coupure langs de negatieve reële as, d.w.z. we sluiten de reële getallen $z\leq -1$ uit, dat zijn n.l. $z=-1$ en die complexe z waarvoor $\arg(1+z)=\pi+2n\pi$. Voor de overige z nemen we de hoofdwaarde $\mathrm{Log}(1+z)$, dat is die welke gedefinieerd is met $\arg(1+z)$, welke voldoet aan $-\pi<\arg(1+z)<\pi$. Voor reële $z>-1$ stemt deze dan met de gewone reële logarithme overeen.

Opgave 56. Bewijs dat onder de hierboven gemaakte afspraken geldt

$$\frac{d^n\log(1+z)}{dz^n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n} \text{ voor alle natuurlijke n.}$$

Noemen we $f(z)=\mathrm{Log}(1+z)$, dan is $f(0)=0$ en $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ voor natuurlijke n. Dus $\mathrm{Log}(1+b)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{b^k}{k}+R_n(b)$. Het is duidelijk dat de reeks $\sum_n(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ convergentiestraal 1 heeft; we kunnen ons dus beperken tot het onderzoek van waarden van b met $|b|\leq 1$.

Voor $|b| < 1$ doen we dit met de restschatting van Cauchy. Deze geeft $|R_n(b)| \leq \frac{|b|^n}{(n-1)!}(1-\vartheta)^{n-1}\left|(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+\vartheta b)^n}\right| = |b|^n \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{|1+\vartheta b|^n}$ met $0 \leq \vartheta \leq 1$. Nu is, als we $b=c+id$ met c en d reëel stellen, $|1+\vartheta b| \geq 1+\vartheta c \geq 1-\vartheta$ en $|1+\vartheta b| \geq 1+\vartheta c \geq 1-|c| > 0$, dus $\frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{|1+\vartheta b|^n} \leq \frac{1}{1-|c|}$ begrensd. Verder is $\lim_{n\to\infty} |b|^n = 0$, dus op grond van (2.6) geldt $\lim_{n\to\infty} R_n(b)=0$. Voor $|b| < 1$ stelt de reeks dus de functie voor. Voor $|b|=1$ proberen we het met de restschatting van Lagrange. Deze geeft $|R_n(b)| \leq \frac{1}{n!}\sup_{0\leq\vartheta\leq 1}\frac{(n-1)!}{|1+\vartheta b|^n} =$
$= \frac{1}{n}\sup_{0\leq\vartheta\leq 1}\frac{1}{|1+\vartheta b|^n}$. Als nu $c \geq 0$, dan is $|1+\vartheta b| \geq 1+\vartheta c \geq 1$, dus $\sup_{0\leq\vartheta\leq 1}\frac{1}{|1+\vartheta b|^n} \leq 1$, dus $\lim_{n\to\infty} R_n(b)=0$; ook dan stelt de reeks de functie voor. Voor $c < 0$ valt dit hieruit niet af te leiden. We hebben de volgende stelling gevonden.

(12.1) (Logarithmische reeks) Voor alle complexe z waarvoor geldt $|z| < 1$ of $|z| = 1$ en $x \geq 0$ geldt

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots \quad .$$

Speciaal geldt

$$\operatorname{Log} 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$ (alternerende harmonische reeks).

Deze reeks levert ons een voorbeeld van een reeks die convergent, maar niet absoluut convergent is, immers de gewone harmonische reeks divergeert.

We zullen later kunnen aantonen dat de logarithmische reeks Log(1+z) voorstelt voor alle complexe z met $|z|=1$, behalve voor $z=-1$. Voor $z=-1$ is Log(1+z) trouwens niet gedefinieerd en bovendien de logarithmische reeks divergent (tegengestelde van de harmonische reeks).We zullen van dit nu nog onbewezen resultaat geen gebruik maken. Wel zullen we de logarithmische reeks gebruiken voor $z=i$ en $z=-i$, maar daarvoor hebben we de overeenstemming met Log(1+i) resp. Log(1-i) wel bewezen.

Als $|z| < 1$ of $|z| = 1$ en $x \leq 0$ geldt $\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-z)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Voor $|z| < 1$ of $z=i$ of $z=-i$ kunnen we de reeksen voor Log(1+z) en Log(1-z) beide gebruiken. Nu is $\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1-z) + 2\pi i n$; we zullen aantonen dat voor de zoëven genoemde waarden van z geldt $n=0$. Voor $|z| < 1$ geldt voor het reële deel $1+x$ van $1+z$ nu $1+x > 1-1=0$; voor de hoofdwaarde van $\arg(1+z)$ geldt dus $-\frac{1}{2}\pi < \arg(1+z) < \frac{1}{2}\pi$; op analoge wijze ziet men in dat voor de hoofdwaarde van $\arg(1-z)$ geldt

$-\frac{1}{2}\pi < \arg(1-z) < \frac{1}{2}\pi$. Dus er geldt $-\pi < \arg(1+z)-\arg(1-z) < \pi$, dus $n=0$. Voor $z=i$ of $z=-i$ is ook makkelijk te bewijzen dat $n=0$ met behulp van $\arg(1+i)=\frac{1}{4}\pi$ en $\arg(1-i)=-\frac{1}{4}\pi$ (ga dat na).

Nu is $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$. Hiermee is het volgende aangetoond.

(12.2) Voor alle complexe getallen z, waarvoor geldt $|z| < 1$ of $z=i$ of $z=-i$, geldt ook

$$\operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1} = 2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + \ldots \quad .$$

Later zullen we kunnen bewijzen dat de reeksvoorstelling in (12.2) ook geldt voor $|z|=1$ behalve voor $z=1$ en $z=-1$.

Noemen we $u=\frac{1+z}{1-z}$, dan is $z=\frac{u-1}{u+1}$ voor $u \neq -1$. Nu correspondeert $|z| < 1$ met $|u-1| < |u+1|$. Dit geeft $(u-1)(\bar{u}-1) < (u+1)(\bar{u}+1)$, $u\bar{u}-u-\bar{u}+1 < u\bar{u}+u+\bar{u}+1$ hetgeen dan en slechts dan vervuld is als het reële deel van u positief is. Dus $\left|\frac{u-1}{u+1}\right| < 1$ geldt dan en slechts dan als het reële deel van u positief is (dit is meetkundig ook duidelijk: de afstand van u tot 1 moet kleiner zijn dan de afstand van u tot -1). Met $z=i$ correspondeert $u=i$ en met $z=-i$ correspondeert $u=-i$. Dit levert ons de volgende stelling.

(12.3) Voor alle complexe getallen z, waarvoor geldt $x > 0$ of $z=i$ of $z=-i$, geldt ook

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n+1} = 2\,\frac{z-1}{z+1} + \frac{2}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots \quad .$$

Later zullen we kunnen bewijzen dat de reeksvoorstelling in (12.3) ook geldt voor zuiver imaginaire z behalve voor $z=0$.

We kunnen (12.3) b.v. gebruiken om Log z voor positieve reële z te berekenen. Voor enigszins grote z blijkt overigens de reeks zeer langzaam te convergeren. Om een restschatting te krijgen combineren we de restschattingen van de twee reeksen die tot deze reeks geleid hebben. Als we b.v. Log 2 in twee decimalen achter de komma willen berekenen, moet de fout $< 0{,}005 = \frac{1}{200}$ zijn. Om Log 2 te krijgen nemen we $z=\frac{1}{3}$ in (12.2). Nu geldt voor de restterm van de gewone logarithmische reeks volgens Cauchy $R_n(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3^n}\,\frac{1}{(n-1)!}\,(1-\vartheta)^{n-1}\,\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+\frac{1}{3}\vartheta)^n}$,

waaruit volgt $0 < (-1)^{n-1} R_n(\frac{1}{3}) < \frac{1}{3^n}$ en $R_n(-\frac{1}{3}) =$

$= \frac{(-1)^n}{3^n}\,\frac{1}{(n-1)!}\,(1-\vartheta)^{n-1}\,\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1-\frac{1}{3}\vartheta)^n}$, waaruit volgt $0 < -R_n(-\frac{1}{3}) <$

$\frac{1}{2.3^{n-1}}$. Beperken we ons voor het gemak tot even n dan is

$-\frac{1}{3^n} < R_n(\frac{1}{3})-R_n(-\frac{1}{3}) < \frac{1}{2.3^{n-1}}$. Daar van de resulterende reeks alle termen ≥ 0 zijn is de fout bij afbreken zeker ≥ 0 dus $0 \leq R_n(\frac{1}{3}) - R_n(-\frac{1}{3}) < \frac{1}{2.3^{n-1}}$. Als we nu zorgen dat $\frac{1}{2.3^{n-1}} \leq \frac{1}{200}$, dan is aan de voorwaarde voldaan. Dit is vervuld voor n=6. Nu is

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5.5} = \frac{842}{1215} \text{ , dus } \frac{842}{1215} \leq \text{Log } 2 < \frac{842}{1215} + \frac{1}{2.3^5} = \frac{1689}{2430} \text{ ,}$$

of $0{,}693 \leq \text{Log } 2 < 0{,}696$.

Om een logarithmentafel te maken moet men in een zekere benadering de logarithmen bepalen van een stel rationale getallen. Op grond van de eigenschappen van de logarithme is het daarvoor voldoende de logarithmen van de natuurlijke en zelfs van de ondeelbare natuurlijke getallen (z.g. priemgetallen) te kennen. Om de logarithme van een priemgetal p te bepalen, als die van de kleinere priemgetallen al bekend zijn, kunnen we als volgt te werk gaan: we gebruiken $p = \frac{p-1}{1-p^{-1}}$, dus Log p = = Log (p-1) - Log$(1-\frac{1}{p})$. Nu is p-1 een product van priemfactoren $< p$ en Log(p-1) dus bekend; Log$(1-\frac{1}{p})$ berekent men door in de reeks voor Log(1-z) te substitueren $z=\frac{1}{p}$. Voor niet te kleine p convergeert deze reeks zeer goed. Voor $p>2$ is het procédé nog iets te verbeteren, want dan is ook p+1 een product van priemfactoren $< p$ en men gebruikt $p^2 = \frac{(p-1)(p+1)}{1-p^{-2}}$. Voor kleine priemgetallen is dit procédé practisch nog niet zo bruikbaar, omdat voor een matige graad van nauwkeurigheid al een groot aantal termen van de reeks nodig is (men vergelijke het bovenstaande voorbeeld); voor deze bestaan er nog andere kunstgrepen om de berekening te bekorten. We gaan daar niet op in. Wel merken we nog op, dat als men in plaats van de hier gevonden natuurlijke logarithmen logarithmen met grondtal 10 (z.g. Brigg'se logarithmen) wil hebben, men het resultaat door log 10 moet delen, immers $^{10}\log a = \frac{\log a}{\log 10}$ (zie an I 75).

We geven nu nog een andere afleiding voor de reeksontwikkeling van Log (1+z), die eenvoudiger is dan de bovenstaande, maar alleen voor $|z| < 1$ geldig is. De functies Log (1+z) en $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ zijn beide voor $|z| < 1$ differentieerbare functies. De eerste heeft afgeleide $\frac{1}{1+z}$; van de tweede kan de afgeleide worden bepaald door termsgewijs differentiëren, hetgeen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ oplevert. Maar nu geldt $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ (meetkundige reeks); de beide functies hebben dus dezelfde afgeleide en zijn dus op een additieve constante na aan elkaar gelijk (5.15). Door z=0 te substitueren ziet men dat die constante nul is, dus Log (1+z) = $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ voor $|z| < 1$.

Dat deze afleiding mogelijk is berust op het feit, dat de afgeleide van Log (1+z) een zo eenvoudige functie is, dat de geldigheid van de reeksontwikkeling daarvoor onmiddellijk duidelijk is. Bij andere functies zal de methode meestal niet tot vereenvoudiging leiden. Bovendien levert deze methode ook niet de voor de practijk zo belangrijke restschattingen.

We willen nu $(1+z)^{\mu}$ (μ willekeurig complex) in een reeks van Mac Laurin ontwikkelen. We maken precies dezelfde afspraken over coupure en hoofdwaarde als hierboven bij log $(1+z)$.

Opgave 57. Bewijs dat onder de hierboven gemaakte afspraken geldt

$$\frac{d^n(1+z)^{\mu}}{dz^n} = \prod_{j=0}^{n-1} (\mu-j)(1+z)^{\mu-n} \text{ voor alle natuurlijke } n.$$

We definiëren nu voor complexe μ en natuurlijke n een binomiaalcoëfficiënt $\binom{\mu}{n} = \dfrac{\prod_{j=0}^{n-1}(\mu-j)}{n!}$; verder $\binom{\mu}{0} = 1$. Voor gehele $\mu \geqq 0$ stemt deze definitie overeen met die uit de algebra (zie al 2). Stellen we nu $f(z) = (1+z)^{\mu}$ dan is $f^{(n)}(z) = n!\binom{\mu}{n}(1+z)^{\mu-n}$ en $f^{(n)}(0) = n!\binom{\mu}{n}$ voor alle gehele $n \geqq 0$. Dus $(1+b)^{\mu} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\mu}{k} z^k + R_n(b)$. Als μ geheel en $\geqq 0$ is ($\mu = m$), dan bevat $\binom{m}{k}$ voor $k > m$ een factor $m-m=0$, dus is $\binom{m}{k} = 0$. De reeks van Mac Laurin reduceert zich dan tot een eindige som en voor $n > m$ is $R_n(b) = 0$ voor alle complexe b. Dit levert de uit de algebra bekende formule $(1+z)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^k$ voor alle complexe z (binomiaalformule van Newton). We sluiten het geval dat μ geheel en $\geqq 0$ is, nu verder uit. Dan is $\binom{\mu}{n} \neq 0$ voor alle n. We bepalen nu de convergentiestraal van de reeks; stel $\mu = \kappa + i\lambda$ (κ en λ reëel).

$$\text{Nu is } \left|\binom{\mu}{n} : \binom{\mu}{n+1}\right| = \left|\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\mu-j)(n+1)!}{n!\prod_{j=0}^{n}(\mu-j)}\right| = \frac{n+1}{|\mu-n|} = \frac{n+1}{\sqrt{(\kappa-n)^2+\lambda^2}} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2-2\kappa n+\kappa^2+\lambda^2}}$$

en dit nadert tot 1 als $n \to \infty$. De convergentiestraal is dus 1. Voor $|b| < 1$ beschouwen we nu de restschatting van Cauchy: $|R_n(b)| \leqq$

$$\leqq \frac{|b|^n}{(n-1)!}(1-\vartheta)^{n-1}\left|n!\binom{\mu}{n}(1+\vartheta b)^{\mu-n}\right| = n\left|\binom{\mu}{n}\right||b|^n(1-\vartheta)^{n-1}\left|(1+\vartheta b)^{\mu-n}\right|$$

met $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Evenals bij de logarithmische reeks geldt $|1+\vartheta b| \geqq 1-\vartheta$ en $|1+\vartheta b| \geqq 1-|c| > 0$. Verder geldt $\left|(1+\vartheta b)^{\mu-n}\right| = \left|e^{(\mu-n)\mathrm{Log}(1+\vartheta b)}\right| =$

$$= \left|e^{(\kappa-n+i\lambda)(\mathrm{Log}|1+\vartheta b| + i\arg(1+\vartheta b))}\right| = e^{(\kappa-n)\mathrm{Log}|1+\vartheta b| - \lambda\arg(1+\vartheta b)} =$$

$= |1+\vartheta b|^{\kappa-n} e^{-\lambda\arg(1+\vartheta b)}$. Nu is $e^{-\lambda\arg(1+\vartheta b)} \leqq e^{|\lambda|\pi}$ en

$(1-\vartheta)^{n-1}|1+\vartheta b|^{\kappa-n} = \left(\frac{1-\vartheta}{|1+\vartheta b|}\right)^{n-1}|1+\vartheta b|^{\kappa-1} \leqq |1+\vartheta b|^{\kappa-1}$; dit laatste is $\leqq 2^{\kappa-1}$ als $\kappa \geqq 1$ en $\leqq (1-|c|)^{\kappa-1}$ als $\kappa < 1$. Verder is $n\binom{\mu}{n} =$

$$= \frac{n\prod_{j=0}^{n-1}(\mu-j)}{n!} = \frac{\mu\prod_{j=1}^{n-1}(\mu-j)}{(n-1)!} = \frac{\mu\prod_{j=0}^{n-2}(\mu-1-j)}{(n-1)!} = \mu\binom{\mu-1}{n-1}. \text{ De reeks}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\mu-1}{n-1} z^{n-1}$ convergeert absoluut voor $|z| < 1$, dus $\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\mu-1}{n-1}\right| |b|^{n-1}=0$, dus ook $\lim_{n\to\infty} n\left|\binom{\mu}{n}\right| |b|^n = \lim_{n\to\infty} \mu|b| \left|\binom{\mu-1}{n-1}\right| |b|^{n-1} =0$. Uit dit alles samen volgt $\lim_{n\to\infty} R_n(b)=0$. We hebben dus de volgende stelling gevonden (die natuurlijk ook geldt als μ geheel en $\geqq 0$ is).

(12.4) (Binomiaalreeks) Voor alle complexe z, waarvoor geldt $|z| < 1$, geldt, als men $(1+z)^{\mu}$ met de hoofdwaarde van $\log(1+z)$ definieert:

$$(1+z)^{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\mu}{n} z^n .$$

Het is mogelijk om aan te tonen dat de binomiaalreeks $(1+z)^{\mu}$ ook nog voorstelt als $|z|=1$, $z\neq-1$, $\kappa > -1$. Verder blijkt de binomiaalreeks divergent voor $|z|=1$, $\kappa \leqq -1$ en voor $z=-1$, $\kappa \leqq 0, \mu\neq 0$. We gaan daar niet op in.

Opgave 58. Bereken $\sqrt[3]{3}$ tot op $\frac{1}{1000}$ nauwkeurig.

Opgave 59. Bewijs dat $\binom{\mu}{n}=\binom{\mu-1}{n} + \binom{\mu-1}{n-1}$ voor complexe μ en natuurlijke n (vergelijk al 2 opgave 6).

Opgave 60. Bewijs dat $\binom{\mu}{n} = (-1)^n \binom{-\mu+n-1}{n}$ voor complexe μ en gehele $n \geqq 0$. Controleer met behulp hiervan dat de binomiaalreeks voor $\mu = -1$ een meetkundige reeks oplevert. Bepaal ook de coëfficiënten van de binomiaalreeks voor $\mu=-2$ (zie ook opgave 36).

Opgave 61. Bewijs dat $(n+1)\binom{\mu}{n+1} = (\mu-n)\binom{\mu}{n}$ voor complexe μ en gehele $n \geqq 0$.

We geven nu nog een andere afleiding van de binomiaalreeks. Stel $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\mu}{n} z^n$ voor complexe z met $|z| < 1$. Dan is

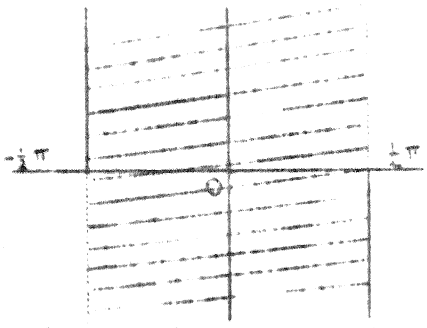
$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{\mu}{n+1} z^n$. Nu is $(1+z)g'(z)-\mu g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\mu}{n+1}z^n +$

$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\binom{\mu}{n+1}z^{n+1}-\mu \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\mu}{n}z^n= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)\binom{\mu}{n+1}+(n-\mu)\binom{\mu}{n}\right\} z^n=0$ (zie opgave 61). Stellen we nu $h(z)= (1+z)^{-\mu}g(z)$, dan is $h'(z) =$

$= (1+z)^{-\mu} g'(z) - \mu(1+z)^{-\mu-1} g(z) = \frac{(1+z)^{-\mu}}{1+z}((1+z)g'(z)- \mu g(z))=0$, dus $h(z)$ is constant. Door $z=0$ in te vullen vinden we dat de constante 1 is, dus $(1+z)^{-\mu}g(z)=1$, dus $g(z) = \frac{1}{(1+z)^{-\mu}}=1:e^{-\mu \mathrm{Log}(1+z)}= e^{\mu \mathrm{Log}(1+z)} =$
$= (1+z)^{\mu}$.

§13. Cyclometrische functies.

Als $\sin z_1 = \sin z_2$, dan is $0=\sin z_2-\sin z_1= 2 \cos \frac{1}{2}(z_2+z_1)\sin \frac{1}{2}(z_2-z_1)$, dus $\frac{1}{2}(z_2+z_1)=\frac{1}{2}\pi +n\pi$ of $\frac{1}{2}(z_2-z_1)=n\pi$, dus $z_2= \pi-z_1+2n\pi$ of $z_2=z_1+2n\pi$. Als omgekeerd $z_2= \pi-z_1+2n\pi$ of $z_2=z_1+2n\pi$ dan is $\sin z_1=\sin z_2$. Als we ons dus beperken tot die complexe waarden van z, waarvoor $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, of $x=\frac{1}{2}\pi$, $y \leqq 0$, of $x= -\frac{1}{2}\pi$, $y \geqq 0$ dan is sin z blijkbaar eeneenduidig; verder neemt sin z daar ook alle waarden aan die sin z voor willekeurige complexe z kan aannemen. Neemt men n.l. een willekeurig complex getal z, dan kan men daarbij zonder dat de waarde van sin z verandert een dusdanig geheel veelvoud van 2π bij optellen, dat $-\frac{1}{2}\pi \leqq x < \frac{3}{2}\pi$; als dan $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, nemen we $\pi - z$, dan is daarvoor $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$; als $x=\frac{1}{2}\pi$, $y > 0$, nemen we ook $\pi - z$, dan wordt $x=\frac{1}{2}\pi$, $y < 0$; als ten slotte $x= -\frac{1}{2}\pi$, $y < 0$, nemen we $\pi - z - 2\pi = -\pi - z$, dan wordt $x= -\frac{1}{2}\pi$, $y > 0$. Van de nu eeneenduidig gemaakte functie w=sin z, vormen we de omkeerfunctie en noemen deze arcsin w. Deze stemt voor reële w, waarvoor $-1 \leqq w \leqq 1$ geldt, met de in de cursus analyse I gedefinieerde functie overeen (zie an I 118). We weten overigens nog niet voor welke waarden van w de functie arcsin w gedefinieerd is; we zullen aantonen dat dit voor alle complexe w het geval is. Hiertoe voeren we eerst twee functies in die sh z en ch z worden geschreven en sinus hyperbolicus en cosinus hyperbolicus worden genoemd (zie ook an I §33) als volgt



$$\text{sh } z = \tfrac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) ,$$
$$\text{ch } z = \tfrac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}) .$$

Deze functies zijn reëel voor reële waarden van z en wel geldt voor reële x dat ch $x \geqq 1$, want $\text{ch } x - 1 = \frac{(e^{x}-1)^2}{2e^{x}}$ en dat sh x hetzelfde teken heeft als x, want $\text{sh } x = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$.

(13.1) $\sin z = -i \text{ sh } (iz)$, $\text{sh } z = -i \sin (iz)$,
$\cos z = \text{ch } (iz)$, $\text{ch } z = \cos (iz)$.

Met behulp van (13.1) kan men uit formules voor sin z en cos z formules voor sh z en ch z maken

Opgave 62. Bewijs (13.1) en maak formules voor $\frac{d \text{ sh } z}{dz}$, $\frac{d \text{ ch } z}{dz}$, $\text{sh}(z_1+z_2)$, $\text{ch}(z_1+z_2)$.

Opgave 63. Bepaal de reeksen van Mac Laurin van sh z en ch z.

(13.2) $\sin z = \text{ch } y \sin x + i \text{ sh } y \cos x$,
$\cos z = \text{ch } y \cos x - i \text{ sh } y \sin x$.

Bewijs: $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \text{ch } y \sin x + i \text{ sh } y \cos x$ en $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \text{ch } y \cos x - i \text{ sh } y \sin x$.

In (13.2) wordt de splitsing van sin z en cos z in reëel en imaginair deel gegeven.

We keren nu terug tot arcsin. Blijkbaar is arcsin $1=\frac{1}{2}\pi$ en arcsin $(-1)=-\frac{1}{2}\pi$.

(13.3) Voor alle complexe $w\neq 1$ en $\neq -1$ geldt $\arcsin w=\frac{1}{i}\log(iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}})$, mits in het rechterlid zowel bij $(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$ als bij de logarithme de hoofdwaarde wordt gekozen.

Bewijs: We tonen eerst aan dat het rechterlid gedefinieerd is voor alle $w\neq \pm 1$. Nu is $(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$ gedefinieerd als $1-w^2\neq 0$, d.w.z. $w\neq \pm 1$; de logarithme is gedefinieerd als $iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}}\neq 0$. Uit $iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}}=0$ zou volgen $iw=-(1-w^2)^{\frac{1}{2}}$, $-w^2=1-w^2$ hetgeen onmogelijk is. Verder geldt

$$\sin\left(\frac{1}{i}\log(iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}})\right)=\frac{1}{2i}\left(iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}}}\right)=$$

$=\frac{1}{2i}(iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}}-(1-w^2)^{\frac{1}{2}}+iw)=w$. Dus is arcsin w gedefinieerd; noem $z=\arcsin w$, dan is $\sin z=w$ en we moeten bewijzen dat $z=\frac{1}{i}\log(iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}})$.
Nu geldt $\frac{1}{i}\log(iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{i}\log(i\sin z+(1-(\sin z)^2)^{\frac{1}{2}})=$
$=\frac{1}{i}\log(((\cos z)^2)^{\frac{1}{2}}+i\sin z)$. Nu is $((\cos z)^2)^{\frac{1}{2}}=\cos z$ of $=-\cos z$. We zullen bewijzen dat het eerste het geval is. Voor een complex getal $a\neq 0$ geldt voor de met de hoofdwaarde gedefinieerde $a^{\frac{1}{2}}$ dat $\Re a^{\frac{1}{2}}=$ $\Re e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,|a|+\frac{1}{2}i\arg a}=|a|^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{1}{2}\arg a)\geq 0$ wegens $-\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{2}\arg a\leq\frac{1}{2}\pi$.
Verder volgt uit (13.2), $-\frac{1}{2}\pi\leq x\leq\frac{1}{2}\pi$ en $\mathrm{ch}\,y>0$, dat $\Re\cos z=\mathrm{ch}\,y\cos x\geq 0$. Als de reële delen >0 zijn, zijn we klaar. Als $\Re\cos z=0$ is, is $x=\pm\frac{1}{2}\pi$. Als $x=\frac{1}{2}\pi$ dan is $y<0$ en $\cos z=-i\,\mathrm{sh}\,y$, dus $\Im\cos z>0$; als $x=-\frac{1}{2}\pi$ dan is $y>0$ en $\cos z=i\,\mathrm{sh}\,y$, dus $\Im\cos z>0$. Dus is cos z zuiver imaginair $\neq 0$, dus $(\cos z)^2$ reëel <0; voor de hoofdwaarde geldt $\arg((\cos z)^2)=\pi$, dus $\frac{1}{2}\arg((\cos z)^2)=\frac{1}{2}\pi$, dus $\Im(((\cos z)^2)^{\frac{1}{2}})>0$. Ook in dit geval is dus $((\cos z)^2)^{\frac{1}{2}}=\cos z$. Verder geldt voor de hoofdwaarde dat $\arg e^{iz}=\arg e^{ix}=x$ omdat $-\frac{1}{2}\pi\leq x\leq\frac{1}{2}\pi$, dus $\mathrm{Log}\,e^{iz}=\mathrm{Log}\,e^{-y+ix}=$
$=-y+i\arg e^{ix}=-y+ix=iz$. Uit dit alles volgt dat $\frac{1}{i}\log(iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}})=$
$=\frac{1}{i}\log(\cos z+i\sin z)=\frac{1}{i}\log e^{iz}=z$. Daarmee is het bewijs van (13.3) voltooid.

Om de differentieerbaarheid te bewerkstelligen moeten we bij de hoofdwaarden ook nog de argumentwaarde π uitschakelen. Nu is $1-w^2$ dan en slechts dan reëel en ≤ 0 als w reëel en ≥ 1 of ≤ -1 is. Verder is hierboven bewezen dat $iw+(1-w^2)^{\frac{1}{2}}=e^{iz}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$. Dit is wegens $-\frac{1}{2}\pi\leq x\leq\frac{1}{2}\pi$ alleen dan reëel als $x=0$, maar dan is $\cos x=1$ en $e^{-y}>0$. De enige waarden van w die we dus moeten uitsluiten zijn de reële waarden ≥ 1 en ≤ -1. Voor de overige waarden van w is arcsin w differentieerbaar en er geldt

$$\frac{d\arcsin w}{dw}=1:\frac{d\sin z}{dz}=1:\cos z=1:(1-w^2)^{\frac{1}{2}}=(1-w^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

(13.4) Voor alle complexe z, behalve voor z reëel ≥ 1 of ≤ -1 geldt

$$\frac{d\arcsin z}{dz}=(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\quad\text{(hoofdwaarde in het rechterlid).}$$

Opgave 64. Bereken $\frac{d\arcsin z}{dz}$ met behulp van de formule in (13.3).

Om de reeks van Mac Laurin van arcsin z te bepalen, bepalen we eerst die van $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n z^{2n}$ voor $|z| < 1$. Nu heeft $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ voor $|z| < 1$ dezelfde afgeleide als arcsin z en stemt er dus op een additieve constante na mee overeen. Maar arcsin 0=0 en de reeks is ook =0 voor z=0. Verder geldt de volgende betrekking:

(13.5) $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ voor gehele $n \geq 0$.

Opgave 65. Bewijs (13.5).

Dit alles samen geeft de volgende stelling:

(13.6) Voor alle complexe z, waarvoor geldt $|z| < 1$, geldt

$$\arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}} = z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{3}{40} z^5 + \frac{5}{112} z^7 + \frac{35}{1152} z^9 + \dots \; .$$

Nu is $\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$. Er geldt n.l. $\sin 3x = 3 \sin x - 4(\sin x)^3$ (zie blz. 66); als $\sin x = \frac{1}{2}$ is $\sin 3x = 1$. Omdat sin 0=0 en $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ is er een reële x met $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, waarvoor $\sin x = \frac{1}{2}$; voor die x geldt echter $0 < 3x < \frac{3}{2}\pi$ en de enige y met $0 < y < \frac{3}{2}\pi$, waarvoor geldt sin y=1, is $y = \frac{1}{2}\pi$. Dus $\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$. Dus $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$.

(13.7) $\frac{1}{6}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{(2n+1)2^{4n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \dots \; .$

Men kan bewijzen dat de reeks in (13.6) de functie arcsin z ook nog voorsteltvoor alle complexe z met $|z|=1$. Men zou zo door z=1 te substitueren ook een reeks voor $\frac{1}{2}\pi$ kunnen krijgen.

De behandeling van de omkering van cos z brengen we terug op die van sin z met behulp van $\cos z = \sin(\frac{1}{2}\pi - z)$. Als $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi - x < \frac{1}{2}\pi$, of $\frac{1}{2}\pi - x = \frac{1}{2}\pi$, $-y \leq 0$, of $\frac{1}{2}\pi - x = -\frac{1}{2}\pi$, $-y \geq 0$, dan is $\sin(\frac{1}{2}\pi - z)$ eeneenduidig en neemt alle complexe waarden aan. Dus als $0 < x < \pi$, of $x=0$, $y \geq 0$, of $x = \pi$, $y \leq 0$, dan is cos z eeneenduidig en neemt alle complexe waarden aan. De omkering noemen we arccos w, dan stemt deze voor reële w, waarvoor $-1 \leq w \leq 1$ geldt, met de in de cursus analyse I gedefinieerde functie overeen. Verder volgt uit z=arccos w, dat $\frac{1}{2}\pi - z = \arcsin w$.

(13.8) $\arccos z = \frac{1}{2}\pi - \arcsin z$.

(13.9) Voor alle complexe z, behalve voor z reëel ≥ 1 of ≤ -1, geldt

$$\frac{d \arccos z}{dz} = -(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(hoofdwaarde in het rechterlid).}$$

We definiëren, in overeenstemming met de definitie voor reële veranderlijken, $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, gedefinieerd voor $z \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$. Dan geldt:

(13.10) $\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$, Uit de definitie van tg z leidt men direct af:

(13.11) $\frac{d \operatorname{tg} z}{dz} = 1+(\operatorname{tg} z)^2.$

Als $\operatorname{tg} z_1=\operatorname{tg} z_2$, dan is $\cos z_2 \sin z_1= \cos z_1 \sin z_2$, dus $\sin(z_2-z_1)=0$, dus $z_2=z_1+n\pi$. Als omgekeerd $z_2=z_1+n\pi$ dan is $\operatorname{tg} z_1=\operatorname{tg} z_2$. Als we ons beperken tot die complexe waarden van z, waarvoor $-\frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{1}{2}\pi$, $z \neq \frac{1}{2}\pi$, is tg z eenenduidig en neemt alle waarden aan die tg z aan kan nemen. De omkeerfunctie noemen we arctg w. We weten nog niet voor welke waarden van w, deze gedefinieerd is. Uit (13.10) volgt dat er geen z bestaat waarvoor tg z=i of tg z= - i (ga dat na). Hieruit volgt dat argtg w voor w=i en w= - i niet gedefinieerd is. Voor alle andere complexe w is dat wel het geval, zoals uit onderstaande stelling volgt.

(13.12) Voor alle complexe $w \neq i$ en $\neq -i$ geldt $\operatorname{arctg} w= \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}$, mits in het rechterlid voor de logarithme de hoofdwaarde wordt genomen.

Bewijs: Het rechterlid heeft zin, want $1+iw \neq 0$ en $1-iw \neq 0$. Verder geldt $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}\right) = \frac{1}{i} \frac{\frac{1+iw}{1-iw} -1}{\frac{1+iw}{1-iw} +1} = w$. Voor deze w is arctg w dus gedefinieerd. Het imaginaire deel van de hoofdwaarde van $\log \frac{1+iw}{1-iw}$ is $> -\pi$ en $\leq \pi$, dus het reële deel van $\frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}$ is $> -\frac{1}{2}\pi$ en $\leq \frac{1}{2}\pi$. Hieruit volgt dat $\operatorname{argtg} w= \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}$.

Opgave 66. Bewijs dat $\frac{1+iw}{1-iw}$ dan en slechts dan reëel en ≤ 0 is als w zuiver imaginair is en $|w| \geq 1$.

Om differentieerbaarheid te bewerkstelligen moeten we die waarden van w uitschakelen, waarvoor $\frac{1+iw}{1-iw}$ reëel en negatief is; dat zijn zuiver imaginaire w met $|w| \geq 1$ (zie opgave 66). Doen we dit dan is

$$\frac{d \operatorname{arctg} w}{dw} = 1 : \frac{d \operatorname{tg} z}{dz} = \frac{1}{1+(\operatorname{tg} z)^2} = \frac{1}{1+w^2}.$$

(13.13) Voor alle complexe z, behalve als z zuiver imaginair is en bovendien $|z| \geq 1$ geldt, geldt

$$\frac{d \operatorname{arctg} z}{dz} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Opgave 67. Bereken $\frac{d \operatorname{arctg} z}{dz}$ met behulp van de formule in (13.12).

Om de reeks van Mac Laurin van arctg z te krijgen gebruiken we de reeksontwikkeling van $\log \frac{1+z}{1-z}$ met daarin iz voor z gesubstitueerd (zie (12.2)). Dit geeft

$$\operatorname{arctg} z= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

(13.14) Voor alle complexe getallen z, waarvoor geldt $|z| < 1$, of z=1 of z= -1 geldt ook

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \dots \quad .$$

Omdat $\sin \frac{1}{4}\pi = \sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \cos \frac{1}{4}\pi$, is $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$, dus $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$. Hieruit volgt

(13.15) $\frac{1}{4}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (reeks van Leibniz).

Men kan bewijzen dat de reeksontwikkeling voor arctg z in (13.14) ook geldt voor $|z|=1$, $z \neq i$, $z \neq -i$.

De reeks in (13.15) convergeert slechts zeer langzaam. Een goed convergente reeks voor $\frac{1}{4}\pi$ krijgt men, door uit te gaan van de formule $\frac{1}{4}\pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ en de in deze formule optredende arctg met (13.14) te ontwikkelen.

Opgave 68. Druk $\operatorname{tg}(z_1+z_2)$ uit in $\operatorname{tg} z_1$ en $\operatorname{tg} z_2$.

Opgave 69. Bewijs dat $\frac{1}{4}\pi = 4.\operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$.

Opgave 70. Welke waarden neemt arcsin z aan als z reëel en ≥ 1 of ≤ -1 is? Welke waarden neemt arctg z aan als z zuiver imaginair en $|z| > 1$ is?

Opgave 71. Voor welke complexe z is sin z reëel?

§14. De hoofdstelling van de algebra.

In deze paragraaf zullen we de op blz. 1 aangekondigde hoofdstelling van de algebra bewijzen. Deze houdt in, dat bij een polynoom $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ van graad ≥ 1 (dus $n \geq 1$ en $a_n \neq 0$) met complexe coëfficiënten a_k een complex getal z_0 bestaat, zodat $f(z_0)=0$. Omdat het bewijs nogal ingewikkeld is, zullen we eerst een beschrijving geven van de grondgedachten, waarop het berust.

We beschouwen de functie $|f(z)|$; hiervan kunnen we bewijzen, dat als $|z|$ groot wordt, $|f(z)|$ ook groot wordt. Het bewijs berust hierop dat voor grote $|z|$ alle overige termen van het polynoom zeer klein worden, vergeleken bij de term $a_n z^n$ van de hoogste graad; verder is $\lim_{|z|\to\infty} |a_n z^n| = \infty$. Hieruit volgt dat we voor het zoeken naar een z_0, waarvoor $f(z_0)=0$ geldt, in ieder geval waarden van z met grote absolute waarde buiten beschouwing kunnen laten.

Uit het voorgaande volgt dat er een reëel getal $R > 0$ bestaat zodat voor alle complexe z met $|z|=R$ geldt $|f(z)| > |f(0)| = |a_0|$. We beperken ons nu tot die z waarvoor $|z| \leq R$ geldt; deze vormen een compacte verzameling. Omdat $|f(z)|$ een continue functie is, is de verzameling der functiewaarden $|f(z)|$ ook een compacte verzameling en wel van reële getallen, d.w.z. een begrensde en gesloten verzameling van reële getallen. Van een dergelijke verzameling is makkelijk aan te tonen, dat deze een kleinste element bezit. Dit betekent, dat er een z_0 bestaat met $|z_0| \leqq R$ zodat voor alle z met $|z| \leqq R$ geldt $|f(z)| \geqq |f(z_0)|$ (d.w.z. $|f(z)|$ is minimaal in z_0). Nu is het uitgesloten dat $|z_0| = R$; was n.l. $|z_0| = R$, dan was $|f(z_0)| > |f(0)|$, hetgeen in strijd is met het feit dat $|f(z)|$ minimaal is in z_0. Dus geldt $|z_0| < R$. Er is dan een omgeving $\mathcal{O}$ van z_0, zodat voor z in die omgeving geldt $|z| < R$.

We kunnen nu aantonen, dat als a een complex getal is, waarvoor geldt $f(a) \neq 0$, in iedere omgeving van a een b bestaat, waarvoor geldt $|f(b)| < |f(a)|$.

Met behulp hiervan kunnen we aantonen dat $f(z_0) = 0$. Als n.l. $f(z_0) \neq 0$, dan nemen we de omgeving $\mathcal{O}$ van z_0 en vinden daarin een z_1, zodat $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Omdat $|z_1| < R$, is dit in strijd met de minimaliteit van $|f(z)|$ in z_0. Dus $f(z_0) = 0$.

Na deze beschrijving geven we het bewijs. Hiertoe behandelen we eerst drie hulpstellingen.

(14.1) Als $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, als $n \geqq 1$ en als $a_n \neq 0$, dan is er een reëel getal $R > 0$, zodat voor alle z met $|z| = R$ geldt $|f(z)| > |f(0)| = |a_0|$.

<u>Bewijs</u>: Neem $R = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| + |a_0| + |a_n|}{|a_n|}$, dan is $R \geqq 1$. Als $|z| = R$, dan geldt

$$|f(z)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| = \left|a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \geqq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| =$$

$$= |a_n| R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \geqq |a_n| R^n - R^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = R^{n-1}\left(|a_n| R - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) =$$

$$= R^{n-1}(|a_0| + |a_n|) \geqq |a_0| + |a_n| > |a_0|.$$

(14.2) Als m een natuurlijk getal is en als c_0 en c_m twee complexe getallen $\neq 0$ zijn, dan bestaat er een reëel getal φ, zodat voor alle complexe w, waarvoor geldt $\arg w = \varphi$ en $0 < |w| \leqq \sqrt[m]{\left|\frac{c_0}{c_m}\right|}$, ook geldt $|c_0 + c_m w^m| = |c_0| - |c_m w^m|$.

<u>Bewijs:</u> Er zijn reële getallen α en β, zodat $c_0 = |c_0| e^{i\alpha}$ en $c_m = |c_m| e^{i\beta}$. Stel nu $w = |w| e^{i\varphi}$, dan is $c_0 + c_m w^m = |c_0| e^{i\alpha} + |c_m| e^{i\beta} |w|^m e^{im\varphi} = e^{i\alpha}(|c_0| + |c_m w^m| e^{i(m\varphi + \beta - \alpha)})$. Stellen we nu $\varphi = \frac{1}{m}(\alpha - \beta + \pi)$, dan is $e^{i(m\varphi + \beta - \alpha)} = e^{i\pi} = -1$ en $c_0 + c_m w^m = e^{i\alpha}(|c_0| - |c_m w^m|)$. Als nu $0 < |w| \leqq \sqrt[m]{\left|\frac{c_0}{c_m}\right|}$, dan is $|c_0| - |c_m w^m| \geqq 0$, dus $|c_0 + c_m w^m| = |c_0| - |c_m w^m|$.

(14.3) Als $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, als $n \geqq 1$, als $a_n \neq 0$ en als a een complex getal is waarvoor geldt $f(a) \neq 0$, dan bestaat bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een complex getal b zodat $|b - a| < \varepsilon$ en $|f(b)| < |f(a)|$.

<u>Bewijs</u>: Stel $w = z - a$, dan is $z = a + w$ en $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (a+w)^k =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} w^j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k a^{k-j} w^j.$$ Noemen we nu

$c_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k a^{k-j}$, dan is $f(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j w^j$. Nu is $c_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k =$ $= f(a) \neq 0$ en $c_n = a_n \neq 0$. Omdat $n \geq 1$ en $c_n \neq 0$, is er een kleinste natuurlijk getal m, waarvoor geldt $c_m \neq 0$. Kies nu bij deze c_0 en c_m een φ als in (14.2) en een w_1 met $\arg w_1 = \varphi$, zodat in het geval dat $m < n$ geldt $|w_1| = \min\left(1, \tfrac{1}{2}\varepsilon, \sqrt[m]{\left|\frac{c_0}{c_m}\right|}, \frac{|c_m|}{2\sum_{j=m+1}^{n} |c_j|}\right)$ en in het geval dat $m=n$ geldt $|w_1| = \min\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon, \sqrt[n]{\left|\frac{c_0}{c_n}\right|}\right)$. In ieder geval is dan w_1 een w als in (14.2). Als $m < n$ is voor $j \geq m+1$ wegens $|w_1| \leq 1$ verder $|w_1|^j \leq |w_1|^{m+1}$ en bovendien $|w_1| \sum_{j=m+1}^{n} |c_j| \leq \tfrac{1}{2}|c_m|$. Stellen we nu $b=a+w_1$, dan is $|b-a| = |w_1| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. Voor $m < n$ geldt nu $|f(b)| = \left|\sum_{j=0}^{n} c_j w_1^j\right| =$

$$= \left|c_0 + c_m w_1^m + \sum_{j=m+1}^{n} c_j w_1^j\right| \leq \left|c_0 + c_m w_1^m\right| + \sum_{j=m+1}^{n} \left|c_j w_1^j\right| =$$

$$= |c_0| - |c_m w_1^m| + \sum_{j=m+1}^{n} |c_j|\,|w_1|^j \leq |c_0| - |c_m w_1^m| + |w_1|^{m+1} \sum_{j=m+1}^{n} |c_j| \leq$$

$$\leq |c_0| - |c_m w_1^m| + \tfrac{1}{2}|c_m|\,|w_1|^m = |c_0| - \tfrac{1}{2}|c_m w_1^m| < |c_0| = |f(a)|\,.$$

Voor $m=n$ geldt $|f(b)| = |c_0 + c_n w_1^n| = |c_0| - |c_n w_1^n| < |c_0| = |f(a)|$. Hiermee is het bewijs van (14.3) voltooid.

(14.4) <u>(Hoofdstelling van de algebra)</u> Als $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, als $n \geq 1$ en als $a_n \neq 0$, dan bestaat er een complex getal z_0, waarvoor geldt $f(z_0)=0$.

<u>Bewijs</u>: Omdat $f(z)$ continu is, is ook $|f(z)|$ continu (ga dat na). We kiezen een reëel getal $R > 0$ als in (14.1) en beschouwen de verzameling V der complexe getallen z, waarvoor geldt $|z| \leq R$ (gesloten cirkelschijf). Dan is V begrensd en gesloten (zie opgave 10). Beschouw nu de verzameling W der getallen $|f(z)|$ voor $z \in V$. Op grond van (6.1) is ook W begrensd en gesloten; bovendien bestaat W uit reële getallen ≥ 0. Noem $w_0 = \inf W$. Stel $w_0 \notin W$, dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $w \in W$ zodat $w_0 \leq w < w_0 + \varepsilon$, dus $|w_0 - w| < \varepsilon$; voor die w geldt uiteraard $w \neq w_0$, omdat $w \in W$ en $w_0 \notin W$. Dus is w_0 een verdichtingspunt van W; dit is echter in strijd met het feit dat W gesloten is. Dus geldt $w_0 \in W$. Laat z_0 een complex getal zijn, waarvoor geldt $z_0 \in V$ en $f(z_0) = w_0$. Dan geldt voor ieder complex getal z met $|z| \leq R$, dat $|f(z)| \geq |f(z_0)|$. Stel nu $|z_0| = R$; daar $|0| \leq R$, geldt $|f(0)| \geq |f(z_0)|$. Uit (14.1) volgt echter $|f(z_0)| > |f(0)|$; dit geeft een tegenstrijdigheid. Dus $|z_0| \neq R$; daar in ieder geval $|z_0| \leq R$ is, geldt dus $|z_0| < R$. Stel nu $f(z_0) \neq 0$. Op grond van (14.3) bestaat er een complex getal b, zodat $|b - z_0| < R - |z_0|$ en $|f(b)| < |f(z_0)|$. Uit $|b - z_0| < R - |z_0|$ volgt $|b| \leq |b - z_0| + |z_0| < R - |z_0| + |z_0| = R$; hieruit volgt $|f(b)| \geq |f(z_0)|$. Dit geeft een tegenstrijdigheid; dus $f(z_0) = 0$. Hiermee is het bewijs van (14.4) voltooid.

Opgave 72. Als n een natuurlijk getal is en als a en b complexe getallen zijn, geldt $a^n - b^n = (a-b) \sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}$. Bewijs dit.

Opgave 73. Als $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, als $n \geq 1$ en als $a_n \neq 0$ dan geldt $f(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j)$, waarin $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ constante, niet noodzakelijk verschillende complexe getallen zijn. Als $f(a)=0$, dan is $a = \alpha_j$ voor een of ander natuurlijk getal j met $1 \leq j \leq n$. Bewijs deze beweringen.

Einde van het eerste-jaargedeelte

van de cursus analyse II.

Avondcursus 1955-1956

Analyse II

door

Dr W. Peremans

§ 15. Voorwaardelijke convergentie van oneindige reeksen.

Een reeks heet voorwaardelijk convergent als hij convergent, maar niet absoluut convergent is. Een voorbeeld van zo'n reeks is $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n}$, die convergent is met log 2 als som, maar niet absoluut convergent, omdat $\sum_{n}\frac{1}{n}$ divergent is. Hetgeen we tot nu toe aan convergentiekenmerken van reeksen hebben behandeld, had bijna uitsluitend betrekking op absolute convergentie. Een uitzondering vormden de gevallen, waarin convergentie van een reeks van Taylor op zijn convergentiecirkel werd aangetoond; aan zo'n geval is bovenstaand voorbeeld dan ook ontleend. We zullen nu enige convergentiecriteria afleiden, die speciaal bruikbaar zijn voor voorwaardelijk convergente reeksen. Een belangrijk hulpmiddel hierbij is partiële sommatie.

Laat k en N natuurlijke getallen zijn, waarvoor geldt $k \leq N$. Laat verder complexe getallen $a_1,\dots,a_N$ en $b_k,\dots,b_N$ gegeven zijn. We willen $\sum_{n=k}^{N} a_n b_n$ in een andere gedaante schrijven. Hiertoe noemen we, evenals vroeger, $A_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ voor $1 \leq n \leq N$, dan is $a_1 = A_1$ en $a_n = A_n - A_{n-1}$ voor $2 \leq n \leq N$. Stel nu eerst $k \geq 2$, dan geldt $\sum_{n=k}^{N} a_n b_n = \sum_{n=k}^{N} b_n(A_n - A_{n-1}) =$

$$= \sum_{n=k}^{N} b_n A_n - \sum_{n=k}^{N} b_n A_{n-1} = \sum_{n=k}^{N} b_n A_n - \sum_{n=k-1}^{N-1} b_{n+1}\ A_n = \sum_{n=k}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) +$$

$+ b_N A_N - b_k A_{k-1}$. Verder geldt (voor k=1) $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} a_n b_n$; passen we hierop de zojuist gevonden formule met k=2 toe dan vinden we

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + b_N A_N - b_2 A_1 = \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + b_N A_N .$$

Hiermee is de volgende stelling gevonden.

(15.1) (Partiële sommatie) Als k en N natuurlijke getallen zijn, waarvoor geldt $k \leq N$, als $a_1,\dots,a_N$ en $b_k,\dots,b_N$ complexe getallen zijn en als $A_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ voor $1 \leq n \leq N$, dan geldt

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + b_N A_N$$

en

$$\sum_{n=k}^{N} a_n b_n = \sum_{n=k}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + b_N A_N - b_k A_{k-1} \text{ voor } k \geq 2.$$

Door de afspraak $A_0=0$ (lege som), kunnen de twee formules van (15.1) tot een verenigd worden.

Neem nu twee oneindige rijen $a_1, a_2, \ldots$ en $b_1, b_2, \ldots$ en veronderstel dat de rij $A_1, A_2, \ldots$ begrensd is, d.w.z. er is een reëel getal $C > 0$ zodat $|A_n| \leq C$ voor alle natuurlijke n. Nu is $\left|\sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1})\right| \leq$ $\leq C \sum_{n=1}^{N-1} |b_n - b_{n+1}|$. De reeks $\sum_n |b_n - b_{n+1}|$ is dus een majorant van $\sum_n A_n(b_n - b_{n+1})$. Toepassing van (3.13) en (15.1) levert nu onmiddellijk het volgende convergentiecriterium.

(15.2) Als $a_1, a_2, \ldots$ en $b_1, b_2, \ldots$ rijen complexe getallen zijn, als $A_1, A_2, \ldots$ (de rij der partiële sommen van $a_1, a_2, \ldots$) begrensd is, als de rij $A_1 b_1, A_2 b_2, \ldots$ convergent is en als de reeks $\sum_n |b_n - b_{n+1}|$ convergent is, dan is de reeks $\sum_n a_n b_n$ convergent.

Daar de toepassing van (15.2) in practische gevallen vaak wat omslachtig is, behandelen we enige belangrijke speciale gevallen. Onderstel dat de rij $b_1, b_2, \ldots$ reëel en monotoon is. Als hij monotoon nietstijgend is, is $b_n \geq b_{n+1}$ dus $|b_n - b_{n+1}| = b_n - b_{n+1}$ voor alle n; als hij monotoon niet-dalend is, is $b_n \leq b_{n+1}$, dus $|b_n - b_{n+1}| = -(b_n - b_{n+1})$ voor alle n. Er geldt dus $\sum_{n=1}^{N} |b_n - b_{n+1}| = \pm \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n+1}) = \pm (b_1 - b_{N+1})$.

Als de rij $b_1, b_2, \ldots$ bovendien begrensd is, dan is hij convergent en dus convergeert de reeks $\sum_n |b_n - b_{n+1}|$. We moeten nu nog een voorwaarde vinden voor de convergentie van $A_1 b_1, A_2 b_2, \ldots$. Daar we al weten dat $b_1, b_2, \ldots$ convergeert, is de convergentie van $A_1, A_2, \ldots$, d.w.z. van $\sum_n a_n$ voldoende. Een andere mogelijkheid is te veronderstellen, dat $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, dan is voldoende te veronderstellen, dat $A_1, A_2, \ldots$ begrensd is (zie (2.6)). Dit levert ons de volgende twee convergentiecriteria.

(15.3) (<u>Convergentiecriterium van Abel</u>) Als $\sum_n a_n$ convergeert en als de rij $b_1, b_2, \ldots$ reëel, monotoon en begrensd is, dan convergeert $\sum_n a_n b_n$.

(15.4)(<u>Convergentiecriterium van Dirichlet</u>) Als $\sum_n a_n$ begrensde partiële sommen heeft, als de rij $b_1,b_2,\ldots$ reëel en monotoon is en als $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, dan convergeert $\sum_n a_nb_n$.

Een andere mogelijkheid is om uit te gaan van de convergentie van $\sum_n |b_n-b_{n+1}|$. Daaruit volgt de convergentie van $\sum_n (b_n-b_{n+1})$, maar $\sum_{n=1}^{N}(b_n-b_{n+1}) = b_1-b_{N+1}$, dus $b_1,b_2,\ldots$ convergeert. Evenals boven volgt de convergentie van $A_1b_1,A_2b_2,\ldots$ nu hetzij uit de convergentie van $A_1,A_2,\ldots$ hetzij uit $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ en uit de begrensdheid van $A_1,A_2,\ldots$. Dit geeft de volgende twee convergentiecriteria.

(15.5)(<u>Convergentiecriterium van du Bois-Reymond</u>) Als $\sum_n a_n$ convergeert en als voor de rij $b_1,b_2,\ldots$ geldt dat $\sum_n (b_n-b_{n+1})$ absoluut convergeert, dan convergeert $\sum_n a_nb_n$.

(15.6)(<u>Convergentiecriterium van Dedekind</u>) Als $\sum_n a_n$ begrensde partiële sommen heeft, als voor de rij $b_1,b_2,\ldots$ geldt dat $\sum_n (b_n-b_{n+1})$ absoluut convergeert en als $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, dan convergeert $\sum_n a_nb_n$.

Nemen we $a_n=(-1)^n$, dan is $A_n=\frac{1}{2}((-1)^n-1)$ (volledige inductie!), dus $|A_n|\le 1$, dus $A_1,A_2,\ldots$ begrensd. Als nu $b_1,b_2,\ldots$ reëel en monotoon is en als $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, dan convergeert $\sum_n (-1)^n b_n$ op grond van (15.4).

Een reeks $\sum_n c_n$ heet <u>alternerend</u>, als alle c_n reëel zijn en als hetzij $c_{2n-1}\le 0$, $c_{2n}\ge 0$ voor alle n, hetzij $c_{2n-1}\ge 0$, $c_{2n}\le 0$ voor alle n. De reeks heeft dus om beurten een term ≥ 0 en een term ≤ 0.

(15.7) (<u>Convergentiecriterium van Leibniz</u>) Als $\sum_n c_n$ alternerend is, als $|c_1|$, $|c_2|$,...monotoon is, en als $\lim_{n\to\infty} c_n=0$, dan is $\sum_n c_n$ convergent. Als $C_1,C_2,\ldots$ de rij der partiële sommen en C de som van $\sum_n c_n$ is, dan geldt voor een k, waarvoor $c_k>0$, dat $C\le C_k$, voor een k, waarvoor $c_k<0$, dat $C\ge C_k$ en voor een k, waarvoor $c_k=0$, dat $C=C_k$.

<u>Bewijs:</u> Stel eerst $c_{2n-1}\le 0$, $c_{2n}\ge 0$, dan is $c_n=(-1)^n|c_n|$; verder is $|c_1|,|c_2|,\ldots$ reëel en monotoon en $\lim_{n\to\infty}|c_n|=0$. Dus convergeert $\sum_n c_n$. Als $c_k=0$, dan is voor $n\ge k$ ook $c_n=0$, dus $C_n=C_k$, dus $C=C_k$. Als $c_k>0$, dan is k=2m. Voor $n>m$ geldt dan $C_{2n}=C_k+\sum_{j=2m+1}^{2n} c_j =$

$$=C_k+\sum_{j=m+1}^{n}(c_{2j-1}+c_{2j}) = C_k-\sum_{j=m+1}^{n}(|c_{2j-1}|-|c_{2j}|)\le C_k, \text{ dus } C\le C_k.$$

Als $c_k<0$, dan is k=2m-1. Voor $n>m$ geldt dan $C_{2n-1}=C_k+\sum_{j=2m}^{2n-1} c_j =$

$= C_k + \sum_{j=m}^{n-1} (c_{2j}+c_{2j+1}) = C_k + \sum_{j=m}^{n-1} (|c_{2j}| - |c_{2j+1}|) \geq C_k$, dus $C \geq C_k$. Als $c_{2n-1} \geq 0$, $c_{2n} \leq 0$, dan stellen we $d_n = -c_n$, dan voldoet $\sum_n d_n$ aan de eisen van de stelling; verder is $d_{2n-1} \leq 0$ en $d_{2n} \geq 0$. Als $c_k=0$, dan is $d_k=0$, dus $C = -D = -D_k = C_k$. Als $c_k > 0$, dan is $d_k < 0$, dus $D \geq D_k$, dus $C = -D \leq -D_k = C_k$. Als $c_k < 0$, dan is $d_k > 0$, dus $D \leq D_k$, dus $C = -D \geq -D_k = C_k$.

Uit (15.7) volgt opnieuw dat $\sum_n (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ convergeert.

Opgave 74. Bewijs, dat onder de veronderstellingen van (15.7) uit $c_k > 0$ (resp. $c_k < 0$) en $|c_{k+1}| > |c_{k+2}|$ volgt $C < C_k$ (resp. $C > C_k$). (Opmerking: dit is van belang als de rij $|c_1|, |c_2|, \ldots$ dalend is, omdat dan $|c_n| > |c_{n+1}|$ voor alle n).

Opgave 75. Voor welke reële waarden van x zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ convergent?

Opgave 76. Als $\sum_n a_n$ convergeert, dan convergeren $\sum_n \sqrt[n]{n}\, a_n$ en $\sum_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$. Bewijs dit.

De convergentiecriteria van Dirichlet en Dedekind kunnen soms ook gebruikt worden om convergentie van een machtreeks op zijn convergentiecirkel te bewijzen. Laat $\sum_n a_n z^n$ een machtreeks met eindige convergentiestraal $R > 0$ zijn en stel $|z| = R$. We schrijven $z = Rw$, dan is $|w| = 1$. Dan is $a_n z^n = a_n R^n w^n$. Voor $w \neq 1$ (d.w.z. $z \neq R$) geldt dan $\sum_{n=0}^{N} w^n = \frac{1-w^{N+1}}{1-w}$, dus $\left|\sum_{n=0}^{N} w^n\right| \leq \frac{2}{|1-w|}$ begrensd. Uit (15.4) volgt nu, dat als de rij $a_0, a_1R, a_2R^2, \ldots$ reëel (d.w.z. alle a_n reëel) en monotoon is en als $\lim_{n\to\infty} a_n R^n = 0$, dat $\sum_n a_n z^n$ convergeert voor alle z met $|z| = R$, behalve eventueel voor $z = R$. Uit (15.6) volgt, dat als $\sum (a_n R^n - a_{n+1} R^{n+1})$ absoluut convergeert en als $\lim_{n\to\infty} a_n R^n = 0$, dan $\sum_n a_n z^n$ convergeert voor alle z met $|z| = R$, behalve eventueel voor $z = R$.

Passen we dit toe op $a_n = \frac{1}{n}$ (voor $n \geq 1$; $a_0 = 0$), dan is $R = 1$; we vinden dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ convergeert voor alle z met $|z| = 1$, behalve voor $z = 1$. De logarithmische reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-z)^n$ convergeert dus voor alle z met $|z| = 1$, behalve voor $z = -1$. Hiermee is een deel aangetoond van de bewering op blz.68, dat de logarithmische reeks $\mathrm{Log}(1+z)$ nog voorstelt voor alle z met $|z| = 1$, behalve voor $z = -1$. We hebben nu bewezen, dat de reeks voor die waarden van z convergeert; later zullen we nog bewijzen dat de som van de reeks daar inderdaad $\mathrm{Log}(1+z)$ is.

Opgave 77. Bewijs dat de reeks van Mac Laurin van arctg z (zie (13.14)) convergent is voor alle z met $|z|=1$, behalve voor $z=i$ en $z=-i$.

We beschouwen nu het probleem, in hoeverre het veranderen van de volgorde van de termen in een reeks geoorloofd is. We geven eerst een afschrikwekkend voorbeeld, dat aantoont dat verandering van de volgorde van de termen van een reeks tot een reeks kan leiden met een andere som dan de oorspronkelijke reeks. Allereerst merken we op dat het inlassen van een willekeurig aantal termen, die $=0$ zijn, op de convergentie en de som van een reeks geen invloed heeft. We stellen nu het volgende schema op.

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 1+0-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+0-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+0-\frac{1}{8}+\ldots \\ -\frac{1}{2}\log 2 = & 0-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+0-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+0-\frac{1}{14}+\frac{1}{16}+\ldots \quad + \\ \hline \frac{1}{2}\log 2 = & 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\ldots \end{array}$$

De laatste reeks bestaat echter uit precies dezelfde termen als de reeks $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ in een andere volgorde! Het spreekt vanzelf dat het bovenstaande schema met stippeltjes geen streng bewijs is; het is echter niet moeilijk er een streng bewijs van te maken.

Opgave 78. Bewijs dat de reeks $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$ convergent is met som $\frac{1}{2}\log 2$.

Het is ook niet moeilijk een voorbeeld te geven van een verandering van volgorde, die een convergente reeks in een divergente reeks transformeert.

De hierboven vermelde ongelukken kunnen echter niet gebeuren, als de reeks absoluut convergeert, zoals we nu zullen aantonen. Eerst geven we een strenge definitie van "verandering van volgorde van de termen van een reeks".

Een reeks $\sum_n b_n$ heet een verschikking van de reeks $\sum_n a_n$ als er een eeneenduidige afbeelding $\varphi(n)$ van de verzameling der natuurlijke getallen op zichzelf bestaat, zodat $b_n=a_{\varphi(n)}$. Het is duidelijk dat dan ook omgekeerd $\sum_n a_n$ een verschikking van $\sum_n b_n$ is: $a_m=b_{\psi(m)}$, $\varphi(\psi(m))=m$, $\psi(\varphi(n))=n$.

(15.8) Als $\sum_n a_n$ absoluut convergert is en als $\sum_n b_n$ een verschikking van $\sum_n a_n$ is, dan is $\sum_n b_n$ ook absoluut convergent en de som van $\sum_n b_n$ is dezelfde als die van $\sum_n a_n$.

Bewijs: Kies een reëel getal $\varepsilon>0$. Omdat $\sum_n a_n$ absoluut convergeert is er een N_1, zodat voor $n>N_1$ geldt $\sum_{k=n+1}|a_k|<\frac{1}{2}\varepsilon$. Als A de som van $\sum_n a_n$ is, is er een N_2, zodat voor $n>N_2$ geldt $|A-\sum_{k=1}^{n} a_k|<\frac{1}{2}\varepsilon$.

Laat nu $b_n = a_{\psi(n)}$, $a_m = b_{\psi(m)}$ zijn. Noem $N = 1 + \max(N_1, N_2)$ en M de grootste van de getallen $\psi(1), \ldots, \psi(N)$. Onder de getallen $b_1, \ldots, b_M$ komen dus alle $a_1, \ldots, a_N$ eenmaal voor (naast eventueel nog andere). Voor $n > M$ geldt nu dat in $\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{m=1}^{N} a_m$ alle a's tegen bepaalde b's wegvallen; de resterende b's horen bij a's met een index $> N$. Hieruit volgt $\left| \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{m=1}^{N} a_m \right| \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$ omdat $N > N_1$. Verder is $\left| A - \sum_{k=1}^{N} a_k \right| < \frac{1}{2}\varepsilon$ omdat $N > N_2$. Voor $n > M$ geldt dus $\left| A - \sum_{k=1}^{n} b_k \right| < \varepsilon$. Dus convergeert $\sum_n b_n$ met som A. Om te bewijzen, dat $\sum_n b_n$ absoluut convergeert, bedenken we dat $\sum_n |b_n|$ uiteraard ook een verschikking van $\sum_n |a_n|$ is. Passen we hierop het reeds bewezen gedeelte van onze stelling toe, dan vinden we dat $\sum_n |b_n|$ convergeert, dus $\sum_n b_n$ absoluut convergeert.

Aan het hierboven gegeven voorbeeld zien we, dat (15.8) voor voorwaardelijk convergente reeksen niet behoeft te gelden: het voorbeeld gaf een verschikking van een reeks met een andere som dan de oorspronkelijke reeks. Het is zelfs zo, dat dit voor <u>iedere</u> voorwaardelijk convergente reeks mogelijk is. Om de zaak niet te ingewikkeld te maken zullen we ons beperken tot reeksen met reële termen; dan geldt dat bij iedere voorwaardelijk convergente reeks een verschikking van die reeks bestaat, die convergeert naar een willekeurig gegeven reëel getal σ. We drukken dit merkwaardige resultaat uit in de volgende stelling.

(15.9) (<u>Stelling van Riemann</u>) Bij een voorwaardelijk convergente reeks $\sum_n a_n$ met reële termen en een willekeurig reëel getal σ bestaat een verschikking, die convergeert met som σ.

Alvorens het bewijs van (15.9) te geven, geven we er een korte beschrijving van. We bewijzen eerst dat $\sum_n a_n$ oneindig veel positieve (resp. negatieve) termen bevat en dat de reeks, gevormd met deze termen, eigenlijk divergent is met som ∞ (resp. $-\infty$). We nemen nu eerst zoveel positieve termen van de reeks dat hun som juist boven σ uitkomt (dit kan wegens de eigenlijke divergentie) vervolgens zoveel negatieve termen, dat de som van alle gebruikte termen juist onder σ komt (ook dit kan wegens de eigenlijke divergentie), vervolgens weer zoveel positieve termen, dat de som van alle gebruikte termen juist boven σ uitkomt, enz. Bij elk van deze stappen (behalve eventueel bij de eerste als $\sigma < 0$; dit zou te vermijden zijn door in dat geval met de negatieve termen te beginnen) is het verschil van de partiële som en σ in absolute waarde minder dan de laatst gebruikte term. Daar $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ wordt dit verschil willekeurig klein als we het proces voldoende ver voortzetten. De zo verkregen reeks convergeert met som σ; als we er nog de in de reeks $\sum_n a_n$ eventueel voorkomende nullen tussenlassen, krijgen we een verschikking van $\sum_n a_n$. Het hierboven genoemde procédé is het makkelijkst te beschrijven; om technische redenen doen we het echter een klein beetje anders. In plaats var de reeks van de positieve termen van $\sum_n a_n$ te beschouwen, beschouwen we een reeks die nul is op de plaatsen waar $a_n \leq 0$ en $=a_n$ op de plaatsen waar $a_n > 0$. Dit heeft het voordeel, dat de positieve termen van a_n hetzelfde nummer houden. Analoog met de negatieve termen. Achteraf moeten dan nog overtollige nullen worden verwijderd.

Bewijs: We bepalen rijen $b_1, b_2, \ldots$ en $c_1, c_2, \ldots$ door de definitie $b_n = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|)$ en $c_n = \frac{1}{2}(a_n - |a_n|)$. Als $a_k \geq 0$, dus is $|a_k| = a_k$, dus $b_k = a_k$ en $c_k = 0$; als $a_k < 0$, dus is $|a_k| = -a_k$, dus $b_k = 0$ en $c_k = a_k$. In ieder geval is $b_n \geq 0$ en $c_n \leq 0$ voor alle n. Nu is $\sum_n b_n$ divergent, want uit de convergentie van $\sum_n b_n$ zou volgen, dat $\sum_n |a_n| = \sum_n (2b_n - a_n)$ convergent was. Omdat alle termen ≥ 0 zijn, is $\sum_n b_n$ eigenlijk divergent en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$. Evenzo bewijst men dat $\sum_n c_n$ eigenlijk divergent is en $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty$. Bij ieder reëel getal α en ieder geheel getal $m \geq 0$ is er een kleinste natuurlijk getal $n_1 > m$, zodat $\sum_{h=m+1}^{n_1} b_h > \alpha$ en een kleinste natuurlijk getal $n_2 > m$ zodat $\sum_{h=m+1}^{n_2} c_h < \alpha$. Er is dus een kleinste natuurlijk getal k_1 zodat $\sum_{h=1}^{k_1} b_h > \sigma$ (als $k_1 > 1$ is dus $\sum_{h=1}^{k_1-1} b_h \leq \sigma$). Noem $\rho_1 = \sum_{h=1}^{k_1} b_h - \sigma$, dan is $0 < \rho_1$ en als $k_1 > 1$ bovendien $\rho_1 \leq b_{k_1}$. Er is een kleinste getal m_1, zodat $\sum_{h=1}^{m_1} c_h < -\rho_1$ (als $m_1 > 1$ is dus $\sum_{h=1}^{m_1-1} c_h \geq -\rho_1$). Noem $\tau_1 = \sigma - \sum_{h=1}^{k_1} b_h - \sum_{h=1}^{m_1} c_h$, dan is $0 < \tau_1 \leq -c_{m_1}$ (voor $m_1 = 1$ volgt $\tau_1 \leq -c_{m_1}$ uit $\rho_1 > 0$). Er is nu een kleinste natuurlijk getal $k_2 > k_1$ zodat $\sum_{h=k_1+1}^{k_2} b_h > \tau_1$ (als $k_2 > k_1 + 1$ is dus $\sum_{h=k_1+1}^{k_2-1} b_h \leq \tau_1$). Noem $\rho_2 = \sum_{h=1}^{k_2} b_h + \sum_{h=1}^{m_1} c_h - \sigma$, dan is $0 < \rho_2 \leq b_{k_2}$. Er is nu een kleinste natuurlijk getal $m_2 > m_1$, zodat $\sum_{h=m_1+1}^{m_2} c_h < -\rho_2$ (als $m_2 > m_1 + 1$ is dus $\sum_{h=m_1+1}^{m_2-1} c_h \geq -\rho_2$). Noem $\tau_2 = \sigma - \sum_{h=1}^{k_2} b_h - \sum_{h=1}^{m_2} c_h$, dan is $0 < \tau_2 \leq -c_{m_2}$.

Door volledige inductie vindt men (ga dat na) twee stijgende rijen natuurlijke getallen $k_1, k_2, \ldots$ en $m_1, m_2, \ldots$, zodat, als we stellen $\rho_n = \sum_{h=1}^{k_n} b_h + \sum_{h=1}^{m_{n-1}} c_h - \sigma$ voor $n = 2, 3, \ldots$ en $\tau_n = \sigma - \sum_{h=1}^{k_n} b_h - \sum_{h=1}^{m_n} c_h$ voor $n = 1, 2, \ldots$, voor alle natuurlijke n geldt $0 < \rho_{n+1} \leq b_{k_{n+1}}$ en $0 < \tau_n \leq -c_{m_n}$.

Vorm nu een rij $d_1, d_2, \ldots$ als volgt

$b_1,\dots,b_{k_1},c_1,\dots,c_{m_1},b_{k_1+1},\dots,b_{k_2},c_{m_1+1},\dots,c_{m_2},b_{k_2+1},\dots,b_{k_3},\dots$

Noem nu een d_n met $n > k_1+m_1$, dan is d_n een element uit de rij $b_1,b_2,\dots$ of uit de rij $c_1,c_2,\dots$. Deze twee gevallen behandelen we nu apart.

1^0 $d_n=b_\nu$ met $\nu > k_1$, dan is er een μ met $k_\mu < \nu \leq k_{\mu+1}$. Nu is $D_n =$ $= \sum_{h=1}^{\nu} b_h + \sum_{h=1}^{m_\mu} c_h$, dus $D_n - \sigma \leq \rho_{\mu+1} \leq b_{k_{\mu+1}}$ en $D_n - \sigma \geq -\tau_\mu \geq c_{m_\mu}$. Dus $|\sigma - D_n| \leq \max(|b_{k_{\mu+1}}|, |c_{m_\mu}|)$.

2^0 $d_n=c_\nu$ met $\nu > m_1$, dan is er een μ met $m_\mu < \nu < m_{\mu+1}$. Nu is $D_n =$ $= \sum_{h=1}^{k_{\mu+1}} b_h + \sum_{h=1}^{\nu} c_h$, dus $D_n - \sigma \leq \rho_{\mu+1} \leq b_{k_{\mu+1}}$ en $D_n - \sigma \geq -\tau_{\mu+1} \geq c_{m_{\mu+1}}$. Dus $|\sigma - D_n| \leq \max(|b_{k_{\mu+1}}|, |c_{m_{\mu+1}}|)$.

Klaarblijkelijk is $|b_n| \leq |a_n|$ en $|c_n| \leq |a_n|$ voor alle natuurlijke n. Verder geldt $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Bij een reëel getal $\varepsilon > 0$ is er dus een N_1, zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| < \varepsilon$. Verder is er een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $k_n > N_1$, dus $|b_{k_n}| < \varepsilon$ en een N_3 zodat voor $n > N_3$ geldt $m_n > N_1$, dus $|c_{m_n}| < \varepsilon$. Noem nu $N_4=\max(N_2, N_3+1)$ en $N=k_{N_4}+m_{N_4}$. Voor $n > N$ geldt nu hetzij $d_n=b_\nu$ met $\nu > k_{N_4}$, dus er is een $\mu \geq N_4$ zodat $|\sigma - D_n| \leq$ $\leq \max(|b_{k_{\mu+1}}|, |c_{m_\mu}|) < \varepsilon$;
hetzij $d_n=c_\nu$ met $\nu > m_{N_4}$, dus er is een $\mu \geq N_4$ zodat $|\sigma - D_n| \leq$ $\leq \max(|b_{k_{\mu+1}}|, |c_{m_{\mu+1}}|) < \varepsilon$.

In ieder geval is voor $n > N$ dus $|\sigma - D_n| < \varepsilon$. Dus $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sigma$. Laat nu uit $d_1,d_2,\dots$ de elementen b_h, waarvoor $a_h < 0$, en de elementen c_h, waarvoor $a_h \geq 0$, weg. Alle weggelaten termen zijn $=0$. De resulterende reeks $\sum_n e_n$ voldoet dus ook aan $\sum_{n=1}^{\infty} e_n = \sigma$. Bovendien geldt dat $\sum_n e_n$ een verschikking is van $\sum_n a_n$ (ga dat na). Daarmee is (15.9) bewezen.

Op analoge wijze kan men bewijzen dat bij een voorwaardelijk convergente reeks met reële termen een verschikking bestaat die eigenlijk divergent is met som ∞ of $-\infty$, of die divergent en niet eigenlijk divergent is.

Voor reeksen met complexe termen geldt ook een met (15.9) analoge stelling. Welke waarden dan voor de som van een verschikking kunnen worden voorgeschreven, is moeilijker vast te stellen. In ieder geval is het zo, dat bij een voorwaardelijk convergente reeks een verschikking bestaat die niet convergent is met dezelfde som als de oorspronkelijke reeks; dit laatste is door splitsing in reële en imaginaire delen zonder veel moeite uit (15.9) af te leiden (zie opgave 80).

Opgave 79. Als $\sum_n a_n$ een reeks is met complexe termen, als $a_n=b_n+ic_n$ (b_n en c_n reëel) en als $\sum_n b_n$ en $\sum_n c_n$ absoluut convergent zijn, dan is $\sum_n a_n$ absoluut convergent. Bewijs dit.

Opgave 80. Als $\sum_n a_n$ een voorwaardelijk convergente reeks met complexe termen is, dan bestaat een verschikking van $\sum_n a_n$, waarvoor niet geldt, dat zij convergent is met dezelfde som als $\sum_n a_n$ (d.w.z. de verschikking is of divergent of convergent met een andere som dan $\sum_n a_n$). Bewijs dit.

§ 16. Het product van twee reeksen.

We gaan uit van twee convergente reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$, die we bij de index 0 laten beginnen. Noem de partiële sommen A_n, resp. B_n en de sommen A, resp. B. Nu is $A_nB_n=\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n} b_k=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_jb_k$. Dit is dus de som van alle producten a_jb_k met $j\leq n$ en $k\leq n$. We willen nu een reeks vormen met als termen $a_jb_k(j=0,1,\ldots;\ k=0,1,\ldots)$ en we hopen dat deze zal convergeren met som AB. We moeten echter een afspraak maken in welke volgorde we deze termen zullen nemen; op grond van de resultaten van de vorige paragraaf verwachten we dat deze afspraak van invloed zal zijn op het gevonden resultaat. Een dergelijke afspraak bevat een element van willekeur; we zullen ons baseren op de analogie met machtreeksen. Vorm de machtreeksen $\sum_n a_nz^n$ en $\sum_n b_nz^n$, dan is

$$\sum_{j=0}^{n} a_jz^j \sum_{k=0}^{n}b_kz^k = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_jb_kz^{j+k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n+j} a_jb_{k-j}z^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}\Big)z^k+\sum_{k=n+1}^{2n}\Big(\sum_{j=k-n}^{n} a_jb_{k-j}\Big)z^k.$$ Noemen we nu $c_k=$

$=\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$, dan is c_k de coëfficiënt van z^k in het product van de partiële sommen van de twee machtreeksen, althans als $n\geq k$. We noemen nu $\sum_n c_n$ de <u>productreeks</u> van de reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$. Omdat $\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}=\sum_{j=0}^{k} b_ja_{k-j}$ is $\sum_n c_n$ dan ook de productreeks van de reeksen $\sum_n b_n$ en $\sum_n a_n$. Allereerst geven we een voorbeeld, dat de productreeks van twee convergente reeksen niet behoeft te convergeren.

Opgave 81. Als a reëel en ≥ 1 is, als x reëel is en als $0<x<a$, dan geldt $\log x \log (a-x)\leq(\log \frac{1}{2}a)^2$. Bewijs dit.

Neem nu $a_0=b_0=a_1=b_1=0$ en $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\log n}$ voor $n\geq 2$, dan zijn $\sum\limits_n a_n$ en $\sum\limits_n b_n$ convergent (Leibniz). Voor $n\geq 4$ geldt nu $c_n=\sum\limits_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} =$
$= \sum\limits_{j=2}^{n-2} a_j b_{n-j} = \sum\limits_{j=2}^{n-2} \frac{(-1)^j}{\log j}\frac{(-1)^{n-j}}{\log(n-j)} = (-1)^n \sum\limits_{j=2}^{n-2} \frac{1}{\log j \log(n-j)}$. Op grond van opgave 81 geldt $\log j \log(n-j) \leq (\log\frac{1}{2}n)^2$, dus $|c_n| \geq \frac{n-3}{(\log \frac{1}{2}n)^2}$ en dit gaat naar ∞ als $n\to\infty$. Dus kan $\sum\limits_n c_n$ niet convergent zijn, want als $\sum\limits_n c_n$ convergent was, zou $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$ gelden.

We bewijzen nu echter, dat, als de productreeks convergeert, de som van deze reeks het product van de sommen van de twee gegeven reeksen is. Verder bewijzen we dat, als van twee reeksen de ene absoluut convergent is en de andere convergent, de productreeks convergent is. Er kunnen dus alleen ongelukken gebeuren, als beide gegeven reeksen voorwaardelijk convergent zijn.

We behandelen eerst een hulpstelling.

(16.1) Als de rij $a_0,a_1,\ldots$ convergeert en de rij $b_0,b_1,\ldots$ wordt gedefinieerd door $b_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ (rij der rekenkundige gemiddelden), dan convergeert de rij $b_0,b_1,\ldots$ en $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>Bewijs</u>: We beschouwen eerst het geval dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Kies een reëel getal $\varepsilon > 0$. Er is dan een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Verder is $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{N_1} |a_k|=0$, dus er is een N_2 zodat voor $n > N_2$ geldt $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{N_1} |a_k| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Noem $N=\max(N_1,N_2)$; voor $n > N$ geldt dan

$$|b_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_1} |a_k| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \, \frac{n-N_1}{n+1} < \varepsilon .$$

Dus $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. Neem nu het algemene geval $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-a)=0$; volgens het reeds bewezen gedeelte van de stelling is dus $0=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k-a) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - a) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k - a$; dus $\lim\limits_n \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a$.

Het omgekeerde van (16.1) geldt niet. Van een rij kan de rij der rekenkundige gemiddelden convergeren zonder dat de rij zelf convergeert. Zie opgave 82.

<u>Opgave 82</u>. Laat de rij $a_0,a_1,\ldots$ gedefinieerd zijn door $a_{2n}=0$ en $a_{2n+1}=1$ voor gehele $n \geq 0$. Deze rij convergeert niet. Bewijs dit en bewijs verder dat de rij der rekenkundige gemiddelden convergeert en bepaal de limiet.

(16.2) Als de productreeks van twee convergente reeksen convergent is, is de som van de productreeks het product van de sommen van de twee reeksen.

Bewijs: Laat de gegeven reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ zijn met partiële sommen A_n en B_n en sommen A en B. Voor de productreeks $\sum_n c_n$ geldt

$$C_n=\sum_{k=0}^{n} c_k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_jb_{k-j}=\sum_{j=0}^{n} a_j\sum_{k=0}^{n-j} b_k=\sum_{j=0}^{n} a_jB_{n-j}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}B_j.$$ Verder is $$\sum_{n=0}^{N} C_n=\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}B_j=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=j}^{N} a_{n-j}B_j=$$

$$=\sum_{j=0}^{N} B_j\sum_{n=0}^{N-j} a_n= \sum_{j=0}^{N} B_jA_{N-j}=A\sum_{j=0}^{N} B_j+\sum_{j=0}^{N} B_j(A_{N-j}-A).$$ Omdat de rij $B_0,B_1,\ldots$ convergent is, is er een reëel getal $K>0$ zodat $|B_n|\leq$ voor $n=0,1,2,\ldots$. Dus $\left|\sum_{n=0}^{N} C_n-A\sum_{j=0}^{N} B_j\right|=\left|\sum_{j=0}^{N} B_j(A_{N-j}-A)\right|\leq$

$\leq K\sum_{j=0}^{N} |A_j-A|$. Omdat $\lim_{j\to\infty} |A_j-A|=0$, geldt, volgens (16.1),

$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} |A_j-A|=0$. Uit $\lim_{j\to\infty} B_j=B$ volgt, nogmaals volgens (16.1),

$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} B_j=B$. Dus $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} C_n=AB$. Nu bestaat $\lim_{n\to\infty} C_n$; wederom volgens (16.1) geldt $\lim_{n\to\infty} C_n=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} C_n=AB$. Hiermee is de stelling bewezen.

(16.3)(Stelling van Mertens). Als van twee reeksen de ene convergeert en de andere absoluut convergeert, dan convergeert hun productreeks. Als beide absoluut convergeren, convergeert hun productreeks absoluut.

Bewijs: Laat $\sum_n a_n$ convergeren met som A, laat $\sum_n |a_n|$ convergeren met som A^* en laat $\sum_n b_n$ convergeren met som B. Aan het bewijs van (16.2) ontlenen we dat $C_n=\sum_{j=0}^{n} a_jB_{n-j}$. Dus $C_n-AB=\sum_{j=0}^{n} a_j(B_{n-j}-B)+$

$+B(\sum_{j=0}^{n} a_j-A)$, dus $|C_n-AB|\leq\sum_{j=0}^{n}|a_j|\,|B_{n-j}-B|+|B|\,|\sum_{j=0}^{n} a_j-A|$.

Er is een reëel getal $K>0$, zodat $|B_n-B|\leq K$ voor $n=0,1,2,\ldots$. Kies een reëel getal $\varepsilon>0$. Er is nu een N_1 zodat voor $n>N_1$ geldt $|\sum_{j=0}^{n} a_j-A|<$ $<\frac{\varepsilon}{3|B|+1}$, verder een N_2 zodat voor $n>N_2$ geldt $|B_n-B|<\frac{\varepsilon}{3A^*+1}$ en tenslotte een N_3 zodat voor $n>N_3$ geldt $\sum_{j=n+1}^{n+N_2+1}|a_j|<\frac{\varepsilon}{3K}$. Noem nu $N=\max(N_1,N_2+N_3+1)$; voor $n>N$ geldt dan $0<n-N_2<n$, $n-N_2-1>N_3$ en $n>N_1$;

verder geldt voor $j \leq n-N_2-1$, dat $n-j > N_2$. Dus

$$|C_n-AB| \leq \sum_{j=0}^{n-N_2-1} |a_j| \, |B_{n-j}-B| + \sum_{j=n-N_2}^{n} |a_j| \, |B_{n-j}-B| + |B| \left| \sum_{j=0}^{n} a_j - A \right| \leq$$

$$< \frac{\varepsilon}{3A^*+1} A^* + K \frac{\varepsilon}{3K} + |B| \frac{\varepsilon}{3|B|+1} < \varepsilon .$$ Dus $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} C_n = AB$. Als $\sum_n a_n$

en $\sum_n b_n$ beide absoluut convergeren, dan convergeert volgens het reeds bewezen gedeelte van de stelling $\sum_n c_n^*$, waarin $c_n^* = \sum_{j=0}^{n} |a_j| |b_{n-j}|$.

Maar $|c_n| = \left| \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \right| \leq c_n^*$, dus $\sum_n c_n^*$ is een majorant van $\sum_n c_n$.

Dus convergeert $\sum_n c_n$ absoluut.

Opgave 83. Bewijs nogmaals dat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ (zie (10.3)), ditmaal met behulp van de stellingen over het product van twee reeksen.

§ 17. Dubbelrijen en dubbelreeksen.

We gaan uit van een oneindige rij $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ en wel nemen we voor elk element van die rij zelf weer een oneindige rij. Laten we de rij α_n noemen $a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots$. Hetgeen aldus ontstaat noemen we een dubbelrij. Een schema hiervan kunnen we maken door de elementen van α_n van boven naar beneden te schrijven en vervolgens (zoals gebruikelijk) de elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ van links naar rechts; we krijgen dan het volgende rechthoekige schema

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

Een dubbelrij, waarvan de elementen tot een verzameling V behoren, is dus een toevoeging aan ieder geordend paar (m,n) natuurlijke getallen van een element a_{mn} van V . We noemen m de eerste index en n de tweede index van a_{mn}. Als dit om verwarring te voorkomen nodig is schrijven we een komma tussen de twee indices. Nemen we b.v. $m=27$ en $n=5$, dan schrijven we $a_{27,5}$; zouden we a_{275} schrijven, dan zou dit niet te onderscheiden zijn van het geval dat $m=2$ en $n=75$.

Een dubbelrij a_{mn} elementen van een metrische ruimte met metriek ρ heet convergent met limiet a (in formule: $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}=a$), als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat zodat voor alle natuurlijke getallen $m > N$ en $n > N$ geldt $\rho(a,a_{mn}) < \varepsilon$.

We kunnen ook één index (b.v. de tweede) vasthouden; we krijgen dan de rij $a_{1n}, a_{2n},\dots$ die ook kan convergeren: $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}=b_n$. De zo verkregen rij $b_1, b_2,\dots$ kan ook een limiet hebben: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$. We noemen een b_n een <u>kolomlimiet</u>. Evenzo $c_m = \lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}$ een <u>rijlimiet</u> en $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$. Al de genoemde limieten kunnen natuurlijk alleen gevormd worden als ze bestaan. De namen kolomlimiet en rijlimiet zijn in natuurlijke overeenstemming met het hierboven gegeven rechthoekige schema.

Er zijn nu drie limieten, die we met elkaar vergelijken, n.l. $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$. Men zegt wel, dat de laatste twee uit elkaar ontstaan door verwisseling van limietovergangen. De drie limieten hoeven niet tegelijkertijd te bestaan, of als ze bestaan aan elkaar gelijk te zijn. Ter illustratie hiervan geven we enige voorbeelden. Neem $a_{mn}=(-1)^n \frac{1}{m}$ voor $n > m$ en $a_{mn}=(-1)^m \frac{1}{n}$ voor $n \leq m$ (hoe ziet het rechthoekige schema er uit?) Nu is $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}=0$. De rij- en kolomlimieten bestaan geen van alle. Tweede voorbeeld: neem $a_{mn}=1$ voor $n > m$ en $a_{mn}=0$ voor $n \leq m$ (hoe ziet het rechthoekige schema er nu uit?). Nu bestaat $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}$ niet, $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}=1$, dus

$\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}=0\neq 1= \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}$. Aan dit laatste voorbeeld zien we dat verwisseling van limietovergangen niet altijd geoorloofd is, zelfs niet als beide bestaan.

Hierover valt meer te zeggen als we weten dat $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}$ bestaat. Weliswaar leert het eerste voorbeeld ons, dat in dat geval de rijlimieten niet behoeven te bestaan, maar we zullen zien, dat als ze bestaan, ze convergent zijn met $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}$ als limiet. Dit tonen we nu eerst aan.

(17.1) Als van een dubbelrij a_{mn} de dubbellimiet bestaat ($\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mn}=a$) benevens alle rijlimieten ($\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}=c_m$), dan convergeren de rijlimieten naar de dubbellimiet ($\lim\limits_{m\to\infty} c_m=a$).

<u>Bewijs</u>: Bij een reëel getal $\varepsilon > 0$ bestaat een N_1, zodat voor $m > N_1$ en $n > N_1$ geldt $\rho(a,a_{mn}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Houden we m even vast ($m > N_1$), dan bestaat er een N_2 (die in het algemeen van de keuze van m kan afhangen!), zodat voor $n > N_2$ geldt $\rho(c_m,a_{mn}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Kiezen we nu $n=1 + \max(N_1,N_2)$

dan is $\rho(a,c_m) \leq \rho(a,a_{mn}) + \rho(a_{mn},c_m) < \varepsilon$. De ongelijkheid $\rho(a,c_m) < \varepsilon$ geldt dus voor alle $m > N_1$. Dus $\lim_{m\to\infty} c_m = a$.

Het spreekt vanzelf, dat er een met (17.1) overeenkomende stelling voor kolomlimieten geldt.

Uit (17.1) en zijn analogon voor kolomlimieten volgt nu onmiddellijk de volgende stelling.

(17.2) Als $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn}$, $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ (voor alle m) en $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ (voor alle n) bestaan, dan bestaan $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ en $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ en geldt $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn}$.

Stelling (17.2) geeft dus een voldoende voorwaarde voor verwisselbaarheid van limietovergangen.

Opgave 84. Bereken $\lim_{m,n\to\infty} n\,(e^{(mn)^{-1}}-1)$.

We gaan nu uit van een dubbelrij a_{mn} complexe getallen en we willen de reeks $\sum a_{mn}$ vormen waarbij over alle paren (m,n) wordt gesommeerd. In het algemeen zal het resultaat afhangen van de volgorde waarin we de termen nemen. Als nu echter $\sum |a_{mn}|$ in een of andere volgorde genomen convergeert, dan is de som van $\sum a_{mn}$ onafhankelijk van de volgorde der termen; die som noemen we dan de dubbelsom $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ van de absoluut convergente dubbelreeks $\sum_{m,n} a_{mn}$. Daarnaast kunnen we trachten te vormen $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ en $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ (herhaalde reeksen). We merken op, dat deze geen verschikkingen van de dubbelreeks zijn, en dat we dus, zelfs als de dubbelreeks absoluut convergeert, a priori nog niets over hun convergentie kunnen beweren.

De herhaalde reeksen kunnen beide bestaan zonder aan elkaar gelijk te zijn. Hiervan geven we een voorbeeld. Stel

$$a_{nn} = \frac{1-3.2^{n-2}+2^{2n-1}}{3.2^{2n-2}},$$

$$a_{n+1,n} = \frac{-1+3.2^{n}-2^{2n+1}}{3.2^{2n}},$$

$$a_{mn} = 0 \text{ voor } m \neq n,\ m \neq n+1.$$

Nu is $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = a_{nn} + a_{n+1,n} = \frac{1}{2^{2n}}$, dus $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \frac{1}{3}$. Verder geldt voor $m \geq 2$ dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = a_{m,m-1} + a_{mm} = \frac{1}{2^m}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} = a_{11} = \frac{1}{2}$, dus $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1$.

Dit voorbeeld heeft het nadeel, dat de dubbelreeks $\sum_{m,n} a_{mn}$ in geen enkele volgorde convergeert. Een ander voorbeeld is

$$a_{11}=0,$$
$$a_{mn}=\frac{m-n}{2^{m+n-2}}\cdot\frac{(m+n-3)!}{(m-1)!(n-1)!}\quad \text{voor alle andere paren } (m,n).$$

Men kan bewijzen, dat $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}=-1$ en $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}=1$; verder is er een volgorde aan te geven, waarin $\sum_{m,n} a_{mn}$ convergeert. We gaan dit niet na.

Als de dubbelreeks echter absoluut convergeert convergeren de beide herhaalde reeksen; hun sommen zijn gelijk aan de som van de dubbelreeks (en dus ook onderling gelijk). Hiertoe bewijzen we eerst een hulpstelling.

(17.3) Als alle a_{mn} reëel en $\geqq 0$ zijn, convergeren $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ en $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ alle drie en zijn aan elkaar gelijk of ze convergeren geen van drieën.

Bewijs: We kiezen een of andere sommatievolgorde voor het sommeren van $\sum_{m,n} a_{mn}$. Als dat gebeurd is heeft het zin om van partiële sommen van $\sum_{m,n} a_{mn}$ te spreken. We vormen nu willekeurige stelsels van eindig veel paren m,n; we kunnen de som van de a_{mn} over zo'n stelsel paren vormen. We beschouwen de verzameling van al deze sommen. Dit is een verzameling V reële getallen $\geqq 0$, die begrensd of niet begrensd is.

1°. V is begrensd; noem zijn bovenste grens A. Nu geldt voor iedere partiële som van $\sum_{m,n} a_{mn}$, dat hij $\leqq A$ is. Dus convergeert $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ en is $\leqq A$. Bij iedere $\varepsilon>0$ is er een eindige som van termen a_{mn} die $>A-\varepsilon$ is; er is een partiële som van $\sum_{m,n} a_{mn}$ die al deze termen bevat, en die dus ook $>A-\varepsilon$ is. Hieruit volgt dat $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}=A$. Verder is $\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\leqq A$, dus convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ en is $\leqq A$. Nu is $\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} a_{jn}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\leqq A$. Dus $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ convergeert en is $\leqq A$. Bij iedere $\varepsilon>0$ is er een n zodat $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}>A-\varepsilon$. Verder is $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\geqq\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\geqq\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}$. Dus $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}=A$. Op analoge wijze bewijst men $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}=A$.

2°. V is onbegrensd. Bij iedere reële $B>0$ bestaat een eindige som van termen a_{mn} die $> B$ is. Een partiële som van $\sum_{m,n} a_{mn}$ die al die termen bevat is ook $> B$, dus $\sum_{m,n} a_{mn}$ is eigenlijk divergent. Nu bewijzen we, dat $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ niet convergeert. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ voor een of andere m niet convergeert zijn we klaar. Stel nu dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ voor alle m convergeert. Voor voldoende grote n is echter $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} > B$; dus $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \geqq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} > B$. Dus $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ convergeert niet. Op analoge wijze bewijst men, dat $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ niet convergeert.

(17.4) Als de dubbelreeks $\sum_{m,n} a_{mn}$ absoluut convergeert, convergeren $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ en zijn beide gelijk aan $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$.

<u>Bewijs</u>: Uit (17.3) volgt dat $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ convergeert. Uit de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ volgt de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$; verder is $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$. Uit dit laatste en uit de convergentie van $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ volgt met het majorantbeginsel de convergentie van $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$. Op analoge wijze bewijst men de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$. Noem $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A$. Kies een reële $\varepsilon > 0$. Dan is er een M zodat voor $m > M$ geldt $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} - A\right| = \left|\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} - A\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Verder is er een N(die van m kan afhangen!) zodat voor $n > N$ geldt $\left|\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$, dus $\left|\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} - A\right| < \varepsilon$. Met volledige inductie kunnen we nu twee stijgende rijen natuurlijke getallen $M_1, M_2, \ldots$ en $N_1, N_2, \ldots$ bepalen, zodat $\left|\sum_{k=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{M_n} a_{jk} - A\right| < \frac{1}{n}$ voor alle natuurlijke n (ga dat na). We kunnen nu in $\sum_{m,n} a_{mn}$ de volgorde van de termen zo nemen dat alle $\sum_{k=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{M_n} a_{jk}$ onder de partiële sommen voorkomen. Daaruit volgt dan $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = A = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$. Op analoge wijze bewijst men dat $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$.

Opgave 85. Onderzoek de convergentie van $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}+n^{\alpha}}$ voor reële waarden van α.

§18. Een stelling van Abel.

(18.1) Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergeert en als x reëel is met $0 \leqq x < 1$, dan geldt

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Bewijs: Noem $\sum_{k=0}^{n} a_k = A_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Met partiële sommatie vinden we $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x^k - x^{k+1}) + A_n x^n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k + A_n x^n$. Omdat $\sum_n a_n$ convergent is, heeft de machtreeks $\sum_n a_n z^n$ een convergentiestraal $\geqq 1$ en is $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zeker gedefinieerd voor $0 \leqq x < 1$. Omdat A_n begrensd is, is $\lim_{n\to\infty} A_n x^n = 0$ voor $0 \leqq x < 1$, dus $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ en $f(x) - A =$ $= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - A(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A)x^n$. Kies een reëel getal $\varepsilon > 0$. Er is dan een N, zodat voor $n > N$ geldt $|A_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dan is $|f(x)-A| \leqq (1-x)\sum_{k=0}^{N} |A_k - A| + (1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon x^n \leqq (1-x)\sum_{k=0}^{N} |A_k - A| + \frac{1}{2}\varepsilon$. Omdat $\lim_{x\to 1} (1-x)\sum_{k=0}^{N} |A_k - A| = 0$ is er een reëel getal $\delta > 0$ zodat voor $1-\delta < x < 1$ geldt $(1-x)\sum_{k=0}^{N} |A_k - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$; voor deze x geldt dan ook $|f(x)-A| < \varepsilon$. Dus $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Het omgekeerde van (18.1) geldt niet: het is mogelijk dat $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bestaat voor $0 \leqq x < 1$, maar dat $\sum_n a_n$ divergeert. Hiervan geven we het volgende voorbeeld: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ voor $0 \leqq x < 1$, dus

$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{2}$, maar $\sum_n (-1)^n$ is divergent.

Verder is het duidelijk dat (18.1) alleen iets nieuws oplevert als de convergentiestraal R van $\sum_n a_n z^n$ gelijk aan 1 is; als n.l. $R > 1$, dan volgt (18.1) direct uit de continuïteit van een door een machtreeks voorgestelde functie (zie blz.50 bovenaan).

Uit (18.1) kunnen we concluderen, dat, als een machtreeks in een bepaald punt op zijn convergentiecirkel convergeert, de som in dat punt continu aansluit bij de waarden binnen de convergentiecirkel van de door de machtreeks voorgestelde functie bij radiale nadering tot dat punt.

Hierbij verstaan we onder radiale nadering nadering op het lijnstuk dat het middelpunt van de cirkel met dat punt verbindt. Immers laat $\sum_n a_n(z-a)^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R>0$ zijn en laat ζ een punt op de convergentiecirkel zijn, d.w.z. $|\zeta-a|=R$. Het lijnstuk $a\zeta$ bestaat dan uit de punten $(1-\lambda)a+\lambda\zeta$ met reële λ en $0\leqq\lambda\leqq 1$. Stel verder dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta-a)^n$ convergeert. Volgens (18.1) geldt dan voor $0\leqq\lambda<1$ dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta-a)^n=\lim_{\lambda\to1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta-a)^n\lambda^n=\lim_{\lambda\to1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n((1-\lambda)a+$ $+\lambda\zeta-a)^n=\lim_{z\to\zeta}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ als z op het lijnstuk $a\zeta$ ligt.

Dit is in het bijzonder van belang in het geval dat we een Taylorreeks van een gegeven functie $f(z)$ hebben, waarvan we weten dat hij de functie voorstelt binnen de convergentiecirkel. Als dan voor een punt ζ op de convergentiecirkel geldt dat de Taylorreeks er convergeert en dat $f(z)$ er continu is dan volgt uit de stelling van Abel direct dat de reeks in dat punt de functie voorstelt; immers voor z op het lijnstuk $a\zeta$ geldt dan $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(\zeta-a)^n=\lim_{z\to\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(z-a)^n=$ $=\lim_{z\to\zeta} f(z)=f(\zeta)$.

Nemen we b.v. de logarithmische reeks $\mathrm{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ voor $|z|<1$. Op blz.84 is aangetoond, dat de reeks ook nog convergeert voor alle z met $|z|=1$, behalve voor $z=-1$. Voor deze waarden van z is $\mathrm{Log}(1+z)$ continu. We concluderen dat $\mathrm{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ ook nog geldt voor alle z met $|z|=1$, behalve voor $z=-1$. Hiermee is de desbetreffende bewering op blz.68 aangetoond. De overeenkomstige beweringen op blz.69 (na (12.2) en (12.3)) zijn hieruit gemakkelijk af te leiden (ga dat na).

§19. Oneindige producten.

Als $u_1,u_2,\dots$ een rij complexe getallen is, kunnen we de rij van de partiële producten $P_1,P_2,\dots$ vormen, gedefinieerd door $P_n=\prod_{k=1}^{n}u_k$. Het zou voor de hand liggen het oneindige product P te definiëren door $P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}u_k$, mits deze limiet bestaat. Dit zou echter het bezwaar hebben, dat als voor een of andere index k geldt $u_k=0$, het oneindige product P bestaat en $=0$, onverschillig wat de overige u_n zijn. We beginnen daarom te veronderstellen, dat de rij $u_1,u_2,\dots$ zo is, dat er slechts eindig veel natuurlijke getallen n zijn, waarvoor $u_n=0$. Hieronder valt ook het geval dat $u_n\neq0$ voor alle n. Er is dan zeker een m zodat voor $n\geqq m$ geldt $u_n\neq0$. Als alle $u_n\neq0$, kunnen we $m=1$ nemen. We splitsen nu van de partiële producten een beginstuk af, waar de eventuele factoren, die nul zijn, in zitten en definiëren de convergentie met de overblijvende stukken van de partiële producten. Dit wordt mogelijk gemaakt door de volgende hulpstelling.

(19.1) Als $u_1, u_2, \ldots$ een rij complexe getallen is, als m_1 en m_2 natuurlijke getallen zijn zodat voor alle n met $n \geq \min(m_1, m_2)$ geldt $u_n \neq 0$, dan bestaan $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_1+k}$ en $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_2+k}$ beide wel of beide niet en als beide wel bestaan zijn ze beide $=0$ of beide $\neq 0$ en geldt

$$\prod_{j=1}^{m_1-1} u_j \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_1+k} = \prod_{j=1}^{m_2-1} u_j \,.\, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_2+k},$$

waarin in het geval dat $m_1=1$ (resp. $m_2=1$), het lege product $\prod_{j=1}^{m_1-1} u_j$ (resp. $\prod_{j=1}^{m_2-1} u_j$) gelijk te stellen is aan 1.

<u>Bewijs</u>: Als $m_1=m_2$ is de stelling evident. We mogen dus zonder beperking van de algemeenheid veronderstellen dat $m_1 < m_2$. Noem $a = \prod_{j=m_1}^{m_2-1} u_j$, dan is $a \neq 0$, omdat $u_j \neq 0$ voor alle $j \geq m_1$. Voor $n \geq m_2$, geldt nu $\prod_{k=0}^{n} u_{m_1+k} = a \prod_{k=0}^{n-m_2} u_{m_2+k}$. Hieruit en uit $a \neq 0$ volgt nu direct dat $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_1+k}$ en $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_2+k}$ beide wel of beide niet bestaan en dat, als beide wel bestaan geldt dat ze beide $=0$ of beide $\neq 0$ zijn en dat $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_1+k} = a \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_2+k}$. In dat geval is

$$\prod_{j=1}^{m_1-1} u_j \,.\, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_1+k} = \prod_{j=1}^{m_1-1} u_j \,.\, a \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_2+k} = \prod_{j=1}^{m_2-1} u_j \,.\, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m_2+k}.$$

Dat dit laatste, onder de gemaakte afspraak, ook geldt als $m_1=1$ is duidelijk.

Als $u_1, u_2, \ldots$ een rij complexe getallen is, dusdanig dat er een m bestaat zodat $u_n \neq 0$ voor alle $n \geq m$, dan definiëren we dat het <u>oneindige product</u> $\prod_n u_n$ <u>convergent</u> is als $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m+k}$ bestaat en $\neq 0$ is; verder definiëren we in geval van convergentie het <u>product</u> $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ door de formule $\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \prod_{j=1}^{m-1} u_j \,.\, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m+k}$. Verder zeggen we dat het oneindige product divergent is, als het niet convergent is; dit zeggen we eveneens als $u_n=0$ voor oneindig veel n.

Uit (19.1) volgt dat convergentie of divergentie van een oneindig product niet afhangt van de keuze van m en verder in geval van convergentie, dat het product niet afhangt van de keuze van m.

We vestigen de aandacht op de volgende eigenaardigheid van deze definitie. Als $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m+k}=0$, dan heet het oneindige product divergent! We zeggen dan dat het naar nul divergeert. Neem b.v. $u_n = \frac{n}{n+1}$, dan is $u_n \neq 0$ voor alle n; we kunnen m=1 nemen en $\prod_{k=0}^{n} u_{1+k} =$
$= \prod_{k=1}^{n+1} u_k = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+2}$ en dit $\to 0$ als $n\to\infty$. Het oneindige product $\prod_n \frac{n}{n+1}$ divergeert naar nul.

Verder merken we op, dat het evenals bij reeksen mogelijk is oneindige producten bij een andere index dan 1 te laten beginnen. Dit heeft geen invloed op de convergentie, maar eventueel wel op het product.

Uit de definitie van convergentie volgt direct de volgende stelling.

(19.2) Een convergent oneindig product $\prod_n u_n$ heeft dan en slechts dan product 0 als er een k is waarvoor $u_k=0$.

(19.3) Als $\prod_n u_n$ convergent is, geldt $\lim_{n\to\infty} u_n=1$.

Bewijs: Laat m zo gekozen zijn, dat $u_n \neq 0$ voor alle $n \geq m$. Dan bestaat $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_{m+k}=b$ en $b\neq 0$. Voor $n > m$ geldt dan $u_n=$
$$= \frac{\prod_{k=0}^{n-m} u_{m+k}}{\prod_{k=0}^{n-m-1} u_{m+k}}, \text{ dus } \lim_{n\to\infty} u_n=1.$$

Wegens (19.3) schrijft men de factoren u_n van een oneindig product liever in de vorm $u_n=1+a_n$. Als dan $\prod_n (1+a_n)$ convergeert, geldt $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Het omgekeerde van (19.3) geldt niet; zie hiervoor het hierboven gegeven voorbeeld $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Als alle a_n reëel en ≥ 0 zijn, is de convergentie van oneindige producten eenvoudig op die van oneindige reeksen terug te brengen op grond van de volgende stelling.

(19.4) Als $a_1, a_2, \ldots$ een rij reële getallen ≥ 0 is, dan is $\prod_n (1+a_n)$ dan en slechts dan convergent als $\sum_n a_n$ convergent is.

Bewijs: Omdat $a_n \geq 0$ is, is $1+a_n \neq 0$ voor alle n. Veronderstel nu dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Voor reële $x \geq 0$ geldt $1+x \leq e^x$ (ga dat na), dus $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a_k} =$
$= e^{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq e^A$, dus $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ is begrensd en klaarblijkelijk monotoon

niet-dalend dus convergent. Veronderstel nu omgekeerd dat $\prod_n (1+a_n)$ convergeert. Er geldt $1+\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \prod_{k=1}^{n} (1+a_k)$ (volledige inductie^n), dus is $\sum_{k=1}^{n} a_k$ begrensd, dus $\sum_n a_n$ convergent.

Uit (19.4) volgt b.v. de divergentie van $\prod(1+\frac{1}{n})$. Deze is ook rechtstreeks in te zien want $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = n+1$ hetgeen divergeert; toepassing van (19.4) levert opnieuw de divergentie van de harmonische reeks.

Voor willekeurige a_n is dit verband niet zo eenvoudig. We leiden eerst een convergentiecriterium af dat analoog is met (3.1).

(19.5) Een oneindig product $\prod_n (1+a_n)$ is dan en slechts dan convergent, als bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een N bestaat zodat voor $n > N$ een willekeurige natuurlijke p geldt $\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+a_k)-1\right| < \varepsilon$.

Bewijs: Stel eerst dat $\prod_n (1+a_n)$ convergeert. Er is dan een m, zodat $a_n \neq -1$ voor alle $n \neq m$. Verder geldt voor $b_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a_{m+k})$, dat $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Er is nu een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$. Verder is er een N_2 zodat voor $n > N_2$ en willekeurige natuurlijke p geldt $|b_{n+p}-b_n| < \frac{1}{2}|b|\varepsilon$. Noem $N=m+\max(N_1,N_2)$; voor $n > N$ geldt dan

$$\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+a_k)-1\right| = \left|\frac{b_{n+p-m}}{b_{n-m}} - 1\right| = \frac{|b_{n+p-m}-b_{n-m}|}{|b_{n-m}|} < \varepsilon.$$

Neem nu omgekeerd aan, dat bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een N bestaat zodat voor $n > N$ en willekeurige natuurlijke p geldt $\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+a_k)-1\right| < \varepsilon$. Er is dan dus een N_3 zodat voor $n > N_3$ en willekeurige p geldt $\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+a_k)-1\right| < \frac{1}{2}$, dus $\frac{1}{2} < \left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+a_k)\right| < \frac{3}{2}$. Kiezen we $m=N_3+2$, dan is $a_n \neq -1$ voor $n \geqq m$. Kies nu een $\varepsilon > 0$, dan is er een N_4 zodat voor $n > N_4$ en willekeurige p geldt $\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+a_k)-1\right| < \frac{2}{3}\varepsilon$. Voor $n > N$ en willekeurige p geldt dan

$$\left|\prod_{k=0}^{n+p}(1+a_{m+k}) - \prod_{k=0}^{n}(1+a_{m+k})\right| = \left|\prod_{k=0}^{n}(1+a_{m+k})\right|\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+a_{m+k})-1\right| =$$

$$=\left|\prod_{k=m}^{m+n}(1+a_k)\right|\left|\prod_{k=m+n+1}^{m+n+p}(1+a_k)-1\right| < \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$ Dus $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+a_{m+k})$ bestaat. Uit $\left|\prod_{k=0}^{n}(1+a_{m+k})\right| = \left|\prod_{k=m}^{m+n}(1+a_k)\right| > \frac{1}{2}$ volgt dat deze limiet $\neq 0$ is.

Daarmee is de convergentie van $\prod_n (1+a_n)$ bewezen.

Evenals het analoge kenmerk bij reeksen is (19.5) meer van theoretisch dan van practisch belang.

Het oneindige product $\prod_n (1+a_n)$ heet <u>absoluut convergent</u> als $\prod_n (1+|a_n|)$ convergent is.

(19.6) Als $\prod_n (1+a_n)$ absoluut convergent is, is het convergent.

<u>Bewijs</u>: $\left|\prod_{k=n+1}^{n+p} (1+a_k)-1\right| \leqq \prod_{k=n+1}^{n+p} (1+|a_k|)-1$ bewijzen we door volledige inductie naar p. Voor p=1 is het evident. Stel dat het voor een bepaalde p geldt dan is $\left|\prod_{k=n+1}^{n+p+1} (1+a_k)-1\right| = \left|(1+a_{n+p+1})\left(\prod_{k=n+1}^{n+p} (1+a_k)-1\right)+a_{n+p+1}\right| \leqq$

$\leqq (1+|a_{n+p+1}|)\left(\prod_{k=n+1}^{n+p} (1+|a_k|)-1\right)+|a_{n+p+1}| = \prod_{k=n+1}^{n+p+1} (1+|a_k|)-1$, waarmee de formule door volledige inductie is bewezen. De stelling volgt nu direct uit (19.5).

Uit de definitie van absolute convergentie en uit (19.4) volgt direct de volgende stelling.

(19.7) Het product $\prod_n (1+a_n)$ is dan en slechts dan absoluut convergent als $\sum_n a_n$ absoluut convergent is.

We behandelen nu een criterium, dat convergentie van een oneindig product terugbrengt tot convergentie van een oneindige reeks.

(19.8) Het product $\prod_n (1+a_n)$ convergeert dan en slechts dan als er een natuurlijk getal m bestaat zodat $\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{Log}(1+a_n)$, waarin steeds de hoofdwaarden van de logarithme gekozen zijn, convergeert. De convergentie is dan en slechts dan absoluut als de corresponderende reeks absoluut convergeert. Als

$\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{Log}(1+a_n)=a$, dan is $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)=e^a \prod_{j=1}^{m-1} (1+a_j)$.

<u>Bewijs</u>: Stel eerst dat $\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{Log}(1+a_n)=a$ bestaat. Dit houdt in dat $a_n \neq -1$ voor $n \geqq m$. Verder is $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Log}(1+a_{m+k})=a$. Omdat de functie e^z continu is, geldt

$$e^a = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Log}(1+a_{m+k})} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} e^{\mathrm{Log}(1+a_{m+k})} =$$

$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+a_{m+k})$. Hieruit volgt dat $\prod_n (1+a_n)$ convergeert en dat $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)=e^a \prod_{j=1}^{m-1} (1+a_j)$. Veronderstel nu omgekeerd dat $\prod_n (1+a_n)$ convergeert. Volgens (19.5) is er dan een N_1 zodat voor $n > N_1$ en willekeurige natuurlijke p geldt $\left| \prod_{k=n+1}^{n+p} (1+a_k)-1 \right| < \frac{1}{2}$, speciaal (voor p=1) dus $|a_{n+1}| < \frac{1}{2}$. Kies $m=N_1+2$, dan is $|a_n| < \frac{1}{2}$ voor $n \geqq m$. Kies een $\varepsilon > 0$, dan is er een N_2 zodat voor $n > N_2$ en willekeurige natuurlijke p geldt

$\left| \prod_{k=n+1}^{n+p} (1+a_k)-1 \right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Noem $N=\max(m,N_2)$; we zullen bewijzen dat voor $n > N$ en willekeurige natuurlijke p geldt $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Log}(1+a_k) \right| < \varepsilon$ en < 1.

Hiertoe merken we eerst op dat voor $|z| \leqq \frac{1}{2}$ geldt $|\operatorname{Log}(1+z)| =$

$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|}{1-|z|} \leqq 2\,|z|$. Voor $n > N$ geldt

dus $\left| \operatorname{Log} \prod_{k=n+1}^{n+p} (1+a_k) \right| < \varepsilon$ en < 1.

We bewijzen de gevraagde ongelijkheden nu met volledige inductie naar p. Voor p=1 zijn ze al bewezen. Stel nu dat voor een of andere waarde van p geldt $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Log}(1+a_k) \right| < \varepsilon$ en < 1. Uit opgave 45 volgt dat er een geheel getal q bestaat zodat $\operatorname{Log} \prod_{k=n+1}^{n+p+1} (1+a_k) = \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \operatorname{Log}(1+a_k) + 2\pi q i$. Nu is $1 > \left| \operatorname{Log} \prod_{k=n+1}^{n+p+1} (1+a_k) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \operatorname{Log}(1+a_k) + 2\pi q i \right| \geqq 2\pi |q| -$

$- \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Log}(1+a_k) \right| - \left| \operatorname{Log}(1+a_{n+p+1}) \right| > 2\pi|q| - 2$, dus $|q| < \frac{3}{2\pi} < 1$. Omdat q geheel is volgt hieruit dat q=0. Dus $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \operatorname{Log}(1+a_k) \right| =$

$= \left| \operatorname{Log} \prod_{k=n+1}^{n+p+1} (1+a_k) \right| < \varepsilon$ en < 1. Hiermee zijn de ongelijkheden door volledige inductie bewezen. We hebben dus een N gevonden zodat voor $n > N$ en willekeurige natuurlijke p geldt $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Log}(1+a_k) \right| < \varepsilon$, dus

$\sum_{n=m}^{\infty} \operatorname{Log}(1+a_n)$ convergeert. Er rest nog de bewering over absolute convergentie te bewijzen. Stel eerst dat $\prod_n (1+a_n)$ absoluut convergeert, dan convergeert $\sum_n |a_n|$ op grond van (19.7). Verder is er een N_3 zodat voor $n > N_3$ geldt $|a_n| < \frac{1}{2}$. Op grond van een hierboven bewezen ongelijkheid geldt voor $n > N_3$ dan $|\operatorname{Log}(1+a_n)| \leqq 2\,|a_n|$. Op grond van het majorantcriterium is dus $\sum_n |\operatorname{Log}(1+a_n)|$ convergent. Veronderstel nu omgekeerd, dat $\sum_n |\operatorname{Log}(1+a_n)|$ convergeert, dan convergeert in ieder geval $\prod_n (1+a_n)$, dus geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Er is dus een N_4 zodat voor $n > N_4$ geldt $|a_n| < \frac{1}{2}$. Voor $|z| \leqq \frac{1}{2}$ geldt echter $|\operatorname{Log}(1+z)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \right| \geqq |z| -$

$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} \geqq |z| - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |z|^k = |z| - \frac{|z|^2}{2(1-|z|)} \geqq |z| - \frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2}|z|$, dus voor $n > N_4$ is $|a_n| \leqq 2\,|\mathrm{Log}(1+a_n)|$. Dus convergeert $\sum_n |a_n|$, dus ook $\prod_n (1+|a_n|)$. Hiermee is het bewijs van (19.8) voltooid.

Opgave 86. Als $a_1, a_2, \ldots$ een rij reële getallen $\geqq 0$ is, dan is $\prod_n (1-a_n)$ dan en slechts dan convergent als $\sum_n a_n$ convergent is. Bewijs dit.

Het criterium (19.8) brengt de convergentie van een oneindig product terug op die van een oneindige reeks. Door de optredende logarithmen is dit criterium echter in de practijk vaak niet erg bruikbaar. Het zou veel prettiger zijn als de convergentie van $\prod_n (1+a_n)$ in verband gebracht kon worden met die van $\sum_n a_n$, zoals dat voor reële $a_n \geqq 0$ het geval is. Dit kan echter in het algemeen niet. Hiervan geven we enige voorbeelden. We merken eerst op dat uit de restschattingsstelling van Lagrange (9.2) volgt dat voor reële $x > -1$ geldt $\mathrm{Log}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3(1+\vartheta x)^3}$, waarin ϑ een van x afhankelijk reëel getal is met $0 < \vartheta < 1$. Voor reële $a_n > -1$ is dus $\mathrm{Log}(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{a_n^3}{3(1+\vartheta_n a_n)^3}$ met ϑ_n reëel en $0 < \vartheta_n < 1$.

Neem nu eerst $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, dan is $a_n^2 = \frac{1}{n}$ en $|a_n^3| = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Verder geldt voor $n \geqq 4$ dat $|1+\vartheta_n a_n| \geqq 1 - \vartheta_n |a_n| \geqq \frac{1}{2}$, dus $\left| \frac{a_n^3}{3(1+\vartheta_n a_n)^3} \right| \leqq \frac{8}{3n\sqrt{n}}$, dus $\sum_n \frac{a_n^3}{3(1+\vartheta_n a_n)^3}$ convergent. Stel nu dat

$\prod_n \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ convergeert, dan is er volgens (19.8) een m zodat

$\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ convergeert. Hieruit volgt dat $\sum_n \frac{1}{n} = 2\sum_n \left(-\mathrm{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{a_n^3}{3(1+\vartheta_n a_n)^3}\right)$ convergent is (immers $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergeert volgens het criterium van Leibniz), hetgeen niet het geval is. Dus

$\prod_n \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ is divergent. Dit is dus een voorbeeld, dat $\sum_n a_n$ convergeert en $\prod_n (1+a_n)$ divergeert. Neem nu $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$, dan is

$a_n^2 = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{4n^2}$ en wegens $n > \sqrt{n}$ is $|a_n| \leqq \frac{3}{2\sqrt{n}}$. Voor $n \geqq 4$ geldt $|1+\vartheta_n a_n| \geqq 1 - \vartheta_n |a_n| \geqq \frac{1}{4}$, dus $\left| \frac{a_n^3}{3(1+\vartheta_n a_n)^3} \right| \leqq \frac{72}{n\sqrt{n}}$, dus

$\sum_n \frac{a_n^3}{3(1+\vartheta_n a_n)^3}$ convergeert. Verder is $\mathrm{Log}(1+a_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^2} + \frac{a_n^3}{3(1+\vartheta_n a_n)^3}$, dus $\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{Log}(1+a_n)$ convergeert, dus volgens (19.8) convergeert $\prod_n(1+a_n)$. Dit is dus een voorbeeld, dat $\sum_n a_n$ divergeert en $\prod_n(1+a_n)$ convergeert.

Als echter $\sum_n a_n^2$ absoluut convergeert, stemmen convergentie van $\prod_n(1+a_n)$ en $\sum_n a_n$ wel met elkaar overeen. Dit volgt uit de volgende stelling.

(19.9) Als $\sum_n a_n^2$ absoluut convergeert, als m een natuurlijk getal is zodat $a_n \neq -1$ voor alle $n \geqq m$, als $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a_{m+k})$ en als $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_{m+k}$, dan convergeert $\frac{P_n}{e^{A_n}}$ naar een limiet, die $\neq 0$ is.

Bewijs: We definiëren b_n voor $n \geqq m$ door $b_n = \frac{\mathrm{Log}(1+a_n)-a_n}{a_n^2}$ als $a_n \neq 0$ en $b_n = 0$ als $a_n = 0$. Omdat $\sum_n a_n^2$ convergeert is er een N zodat voor $n > N$ geldt $|a_n| < \frac{1}{2}$. Voor $|z| \leqq \frac{1}{2}$ geldt $|\mathrm{Log}(1+z)-z| =$

$$=\left|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}\right| \leqq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|z|^k}{k} \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|z|^k = \tfrac{1}{2}\frac{|z|^2}{1-|z|} \leqq |z|^2.$$

Voor $n > \max(N,m)$ geldt dus $|b_n| \leqq 1$. Omdat $\sum_n a_n^2$ absoluut convergeert, is dus $\sum_n b_n a_n^2$ convergent. Verder geldt $\mathrm{Log}(1+a_n)-a_n = b_n a_n^2$ voor alle $n \geqq m$ (ook als $a_n = 0$). Dus $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Log}(1+a_{m+k}) - \sum_{k=0}^{n} a_{m+k} = \sum_{k=0}^{n} b_{m+k}\, a_{m+k}^2$, dus $\frac{P_n}{e^{A_n}} =$

$$= e^{\sum_{k=m}^{m+n} b_k a_k^2}, \text{ dus } \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{e^{A_n}} = e^{\sum_{k=m}^{\infty} b_k a_k^2} \neq 0.$$

Uit (19.9) volgt nu onmiddellijk:

(19.10) Als $\sum_n a_n^2$ absoluut convergeert, dan is $\prod_n(1+a_n)$ dan en slechts dan convergent als $\sum_n a_n$ convergeert.

Uiteraard kan, als alle a_n reëel zijn, het woord "absoluut" uit de formuleringen van (19.9) en (19.10) worden weggelaten.

Opgave 87. Bereken $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ en $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Opgave 88. Convergeert $\prod_n\left(1+\frac{(-1)^n}{\mathrm{Log}\ n}\right)$?

Opgave 89. Als $\sum_n a_n^2$ absoluut convergeert, convergeert $\prod_n \cos a_n$. Bewijs dit.

Opgave 90. Bewijs met behulp van een oneindig product opnieuw, dat $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$ bestaat (zie blz. 24).

Opgave 91. Voor welke complexe waarden van z convergeren $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ en $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)$?

We kunnen nu ook oneindige producten van functies beschouwen, dat wil zeggen producten $\prod_n (1+f_n(z))$, waarin $f_1(z)$, $f_2(z)$,... complexe functies zijn, die alle op eenzelfde verzameling S gedefinieerd zijn. Gewone convergentie wordt op de gebruikelijke wijze gedefinieerd. Bij het begrip uniforme convergentie treedt echter een moeilijkheid op, die toe te schrijven is aan de volgende omstandigheid: als $g_1(z)$, $g_2(z)$,... een rij functies is die uniform convergent is en $h(z)$ is een functie, dan behoeft de rij $h(z)g_1(z)$, $h(z)g_2(z)$,... niet uniform te convergeren. Neem b.v. $g_n(x)=(x+\frac{1}{2})^n$ dan is $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ uniform voor $0<x<\frac{1}{4}$, maar $\lim_{n\to\infty} \frac{(x+\frac{1}{2})^n}{x}$ convergeert niet uniform voor $0<x<\frac{1}{4}$ (ga dat na).

We definiëren nu dat het product $\prod_n (1+f_n(z))$ uniform convergeert voor $z\in S$ als er een natuurlijk getal M en een reëel getal $\delta>0$ bestaat zodat $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+f_{M+k}(z))$ uniform convergeert voor $z\in S$ en zodat $\left|\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+f_{M+k}(z))\right|>\delta$ voor alle $z\in S$.

Er gelden nu de volgende twee stellingen.

(19.11) Een oneindig product $\prod_n (1+f_n(z))$ is dan en slechts dan uniform convergent voor $z\in S$, als bij iedere reële $\varepsilon>0$ een N bestaat zodat voor alle $n>N$, alle $z\in S$ en willekeurige natuurlijke p geldt

$$\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+f_k(z))-1\right|<\varepsilon .$$

(19.12) Het product $\prod_n(1+f_n(z))$ convergeert dan en slechts dan uniform voor $z\in S$, als er een natuurlijk getal m bestaat, zodat $\sum_{n=m}^{\infty}$ Log$(1+f_n(z))$ uniform convergeert voor $z\in S$.

De bewijzen van (19.11) en (19.12) zijn analoog met die van (19.5) en (19.8) (ga dat na).

(19.13) Als $\prod_n (1+f_n(z))$ uniform convergeert en als $f_1(z)$, $f_2(z)$,... continu zijn, dan is $\prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z))$ continu.

<u>Bewijs</u>: Op grond van (19.11) is er een N_1 zodat voor $n>N_1$ geldt $|f_n(z)|<1$, dus zeker $1+f_n(z)$ niet reëel en ≤ 0. Als m overeenkomstig (19.12) gekozen is nemen we $N=\max(m,N_1+1)$, dan geldt voor $n\geq N$ dat Log $(1+f_n(z))$ continu is en verder dat $\sum_{n=N}^{\infty}$ Log $(1+f_n(z))$ uniform convergeert. Uit (8.4) volgt dan dat $g(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=N}^{\infty}$ Log$(1+f_n(z))$ continu is. Uit $\prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z))=e^{g(z)}\prod_{j=1}^{N-1}(1+f_j(z))$ volgt dat $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ continu is.

(19.14) Als $f_1(z)$, $f_2(z)$,... gedefinieerd en differentieerbaar zijn op een convexe verzameling S, als er een $a\in S$ bestaat zodat $\prod_n(1+f_n(a))$ convergeert, als er een natuurlijk getal m bestaat zodat voor alle $n\geq m$ en alle $z\in S$ geldt dat $1+f_n(z)$ niet reëel ≤ 0 is en als

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$ uniform convergeert voor $z \in S$, dan convergeert $\prod_n (1+f_n(z))$ voor alle $z \in S$ en $F(z)= \prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z))$ is differentieerbaar; bovendien geldt $\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$ voor alle z waarvoor $1+f_1(z)\neq 0,\ldots,1+f_{m-1}(z)\neq 0$.

<u>Bewijs:</u> Op grond van (19.8) is $\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{Log}(1+f_n(a))$ convergent. Verder geldt voor $n \geqslant m$ dat $\mathrm{Log}(1+f_n(z))$ differentieerbaar is met afgeleide $\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$. Uit (8.5) volgt nu dat $\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{Log}(1+f_n(z))=g(z)$ convergeert voor alle $z \in S$ en dat $g(z)$ differentieerbaar is met afgeleide $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$. Uit (19.8) volgt nu dat $\prod_n (1+f_n(z))$ convergeert voor alle $z \in S$ en dat $\prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z))=e^{g(z)} \prod_{j=1}^{m-1} (1+f_j(z))$. Hieruit volgt dat $F(z)$ differentieerbaar is en dat $\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{f_j'(z)}{1+f_j(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$.

Als voorbeeld behandelen we het product $\prod_n (1-\frac{z^2}{n^2})$; dit is in ieder geval convergent voor $z=0$ (zie ook opgave 91). Kies een reëel getal $R>0$. We beperken ons voorlopig tot $|z| \leqslant R$; de verzameling van deze z is convex. Kies nu $m>R$; voor $n \geqslant m$ is het reële deel van n^2-z^2 gelijk aan $n^2-x^2+y^2>0$; dus voor $n \geqslant m$ en $|z| \leqslant R$ is $1-\frac{z^2}{n^2}$ niet reëel $\leqslant 0$. Voor deze zelfde z en n geldt dan $\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right| \leqslant \frac{2R}{n^2-R^2}$; de reeks $\sum_n \frac{2R}{n^2-R^2}$ is convergent. Volgens (8.3) is dan $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$ uniform convergent voor $|z| \leqslant R$ en dus $F_m(z)= \prod_{n=m}^{\infty} (1-\frac{z^2}{n^2})$ convergent voor $|z| \leqslant R$ en differentieerbaar. Er geldt $\frac{F_m'(z)}{F_m(z)} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$. Daar $F(z)= \prod_{j=1}^{m-1} (1-\frac{z^2}{j^2})F_m(z)$, is ook $F(z)$ differentieerbaar voor $|z| \leqslant R$; voor $z \neq \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(m-1)$ geldt $\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$. Daar R willekeurig gekozen was, is $F(z)$ differentieerbaar voor alle complexe z; er geldt als z niet een geheel getal $\neq 0$ is $\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$. We delen zonder bewijs mee, dat voor $z \neq 0$ geldt dat $F(z)= \frac{\sin \pi z}{\pi z}$, dus $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{z^2}{n^2})$.

We beschouwen nu het product $\prod_n (1+\frac{z}{n})$. Daar $\sum_n \frac{z^2}{n^2}$ voor iedere complexe z absoluut convergeert, kunnen we (19.9) toepassen. We vinden dan dat voor $z \neq -1,-2,\ldots$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (1+\frac{z}{k})}{e^{z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}}$$

bestaat en $\neq 0$ is. We noemen deze limiet $h(z)$. We weten (zie blz.24) dat $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \mathrm{Log}\, n$ convergeert naar een reëel getal $\gamma > 0$, dat constante van Euler heet. Verder is $\prod_{k=1}^{n} (1+\frac{z}{k})=$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n}(z+k)}{n!}.$$ Dus is $z e^{\gamma z} h(z) = z \lim_{n\to\infty} e^{z\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \operatorname{Log} n\right)} . \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(z+k)}{n!\,e^{z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}{n!\,n^z},$$ waarbij n^z met de reële hoofdwaarde Log n gedefinieerd is. Noemen we nu

$$K(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}{n!\,n^z},$$ dan is $K(z)$ gedefinieerd voor alle complexe z, $0=K(0)=K(-1)=K(-2)=\ldots$, $K(z)\neq 0$ voor $z\neq 0,-1,-2,\ldots$. We definiëren nu de gammafunctie $\Gamma(z)$ door

$$\Gamma(z) = \frac{1}{K(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)},$$ dan is $\Gamma(z)$ gedefinieerd en $\neq 0$ voor $z\neq 0,-1,-2,\ldots$.

De gammafunctie is zeer belangrijk in de analyse. We zullen haar theorie hier niet ontwikkelen. We stippen slechts een enkel punt aan. Neem voor z eens een natuurlijk getal m, dan is $\frac{n!\,n^m}{\prod_{k=0}^{n}(m+k)} = \frac{n!\,n^m(m-1)!}{(m+n)!} =$

$\frac{(m-1)!\,n^m}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} = (m-1)!\,\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$. Hieruit volgt $\Gamma(m)=(m-1)!$ voor natuurlijke m. Verder willen we $\Gamma(z+1)$ in verband brengen met $\Gamma(z)$. Nu is

$$\frac{n!\,n^{z+1}}{\prod_{k=0}^{n}(Z+1+k)} = \frac{n!\,n^{z+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}(z+k)} = \frac{n!\,n^z}{\prod_{k=0}^{n}(z+k)} \cdot \frac{n\,z}{n+z+1},$$ dus $\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$. Uit deze betrekking en uit de door directe berekening te verifiëren formule $\Gamma(1)=1$ volgt met volledige inductie opnieuw dat $\Gamma(m)=(m-1)!$ voor natuurlijke m. We delen zonder bewijs mee dat voor reële $z=x>0$ geldt

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt.$$

Opgave 92. Bewijs met behulp van de hierboven gegeven formule voor $\sin\pi z$ dat, als z geen geheel getal is, geldt $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$.

Opgave 93. Bepaal de complexe waarden van z, waarvoor $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}z\right)$ convergeert en druk het product uit met behulp van de gammafunctie.

§ 20. De formule van Stirling.

(20.1) Voor alle natuurlijke n geldt

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} < n! \leq \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{12n}}$$ (Formule van Stirling).

Bewijs: Noem $a_n = \dfrac{n!}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}$, dan is $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$, dus $\log a_n - \log a_{n+1} = \frac{1}{2}(2n+1)\log\dfrac{n+1}{n} - 1$. Uit (12.2) volgt dat voor reële x met $0 < x < 1$ geldt $\log\dfrac{1+x}{1-x} = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$. Substitueren we hierin $\dfrac{1}{2n+1}$ voor x dan vinden we $\log\dfrac{n+1}{n} = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$, dus $\frac{1}{2}(2n+1)\log\dfrac{n+1}{n} - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}$. Omdat alle termen van deze reeks positief zijn geldt $\log a_n - \log a_{n+1} > 0$, dus $a_n > a_{n+1}$. De rij $a_1, a_2, \ldots$ is dus monotoon dalend en heeft positieve elementen; de rij is dus convergent met limiet $\alpha \geqslant 0$. Verder geldt $a_n > \alpha$ voor alle n.

We bewijzen nu dat $\alpha > 0$ is. Er geldt $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} < \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^{2k}} =$

$$= \frac{1}{3(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$ Door optelling vinden we $\log a_n - \log a_{n+k} < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$. De veronderstelling $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ leidt nu tot een tegenspraak, omdat bij $k \to \infty$ het linkerlid $\to +\infty$ en het rechterlid $\to \frac{1}{12n}$. Dus $\alpha > 0$. Door $k \to \infty$ vinden we $\log a_n - \log\alpha \leq \leq \frac{1}{12n}$, dus $\alpha < a_n \leq \alpha\, e^{\frac{1}{12n}}$. Als we nu nog aantonen dat $\alpha = \sqrt{2\pi}$, is de formule van Stirling bewezen. Er geldt $\int(\sin x)^n\,dx = -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int(\sin x)^{n-2}(\cos x)^2 dx = -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int(\sin x)^{n-2}dx + -(n-1)\int(\sin x)^n\,dx$, dus $\int(\sin x)^n\,dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}\int(\sin x)^{n-2}\,dx$. Voor $n \geqslant 2$ geldt dus $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^n\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{n-2}dx$.

Noemen we nu $B_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^n\,dx$, dan geldt $B_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}B_n$. Door volledige inductie vinden we nu gemakkelijk $B_{2n} = \frac{1}{2}\pi\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$ en $B_{2n+1} = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$ (ga dat na). Verder volgt uit de definitie van B_n en uit het feit dat $0 < \sin x < 1$ voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ direct $B_n > B_{n+1} > B_{n+2}$, dus $\frac{n+2}{n+1} =$

$$= \frac{B_n}{B_{n+2}} > \frac{B_{n+1}}{B_{n+2}} > 1.$$ Hieruit volgt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{B_{2n}}{B_{2n+1}} = 1$, dus

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\pi.$$ Nu is $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} =$

$$= \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} = \frac{2^{4n}(a_n\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}})^4}{(a_{2n}\, e^{-2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}})^2(2n+1)} = \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{a_n^{\,4}}{a_{2n}^{\,2}}, \text{ dus}$$

$\frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{2}\pi$, dus $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Hiermee is (20.1) bewezen.

Uit (20.1) volgt onmiddellijk:

$$(20.2) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} = 1.$$

Als nevenresultaat hebben we bovendien bij het bewijs van (20.1) gevonden:

$$(20.3) \quad \tfrac{1}{2}\pi = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$ (Product van Wallis).

In de practijk gebruikt men op grond van de formule van Stirling $\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$ voor grote waarden van n als een "benadering" in de plaats van n! Dit is echter geen benadering in de zin zoals wij dit woord tot nu toe gebruikt hebben: het verschil nadert niet tot nul als $n \to \infty$. Nu is het zo dat n! bij toenemende n zeer sterk groeit evenals trouwens $\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$. In dat geval is het voor het verkrijgen van een bruikbare benadering voldoende dat de relatieve fout, dat is hier $\frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} - n!}{n!}$ naar nul gaat als $n \to \infty$. Dit is op grond van (20.2) inderdaad het geval; (20.1) leert bovendien dat de relatieve fout in absolute waarde $\leqslant 1 - e^{-\frac{1}{12n}}$ is.

Als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, zegt men ook wel dat a_n en b_n asymptotisch gelijk zijn; men schrijft dit ook wel $a_n \sim b_n$. Uit (20.2) volgt dus dat n! en $\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$ asymptotisch gelijk zijn. Bij limietovergangen mag men een factor vervangen door een die er asymptotisch aan gelijk is: als $a_n \sim b_n$ en als $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = d$, dan is $\lim_{n\to\infty} b_n c_n = d$, immers $b_n c_n = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n c_n$.

Opgave 94. Bewijs dat $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Opgave 95. Bewijs dat voor $2z \neq 0, -1, -2, \ldots$ geldt

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(z+\frac{1}{2})\,2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}.$$ Leid hieruit de waarde van $\Gamma(\frac{1}{2})$ af.

Opgave 96. Bewijs dat voor iedere z, die geen geheel getal is, geldt

$$\Gamma(z+n+1) \sim n!\, n^z.$$

§21. Verscherpingen van het quotiëntcriterium.

Voor reeksen met positieve reële termen behandelen we nu enkele verscherpingen van het criterium van d'Alembert (5.2). Deze leiden we af uit het volgende criterium.

(21.1) (Convergentiecriterium van Kummer) Als $a_1, a_2, \dots$ en $b_1, b_2, \dots$ rijen positieve reële getallen zijn, als $\sum_n b_n$ divergent is, als $c_n = \frac{1}{b_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{b_n}$, dan is als $\limsup_{n\to\infty} c_n < 0$, $\sum_n a_n$ convergent en als $\liminf_{n\to\infty} c_n > 0$, $\sum_n a_n$ divergent.

Bewijs: Stel $\limsup_{n\to\infty} c_n < 0$, dan is er een $\alpha > 0$ en een N zodat voor $n > N$ geldt $c_n < -\alpha$, dus $a_n < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$. Voor $n > N$ geldt dus

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=N+1}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) <$$

$$< \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{1}{\alpha} \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}.$$ De partiële sommen van $\sum_n a_n$ zijn dus begrensd, dus $\sum_n a_n$ is convergent. Stel nu dat $\liminf_{n\to\infty} c_n > 0$, dan is er een M zodat voor $n > M$ geldt $c_n > 0$, dus $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$, dus voor $n > M+2$ geldt

$$\frac{a_n}{a_{M+1}} = \prod_{k=M+1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} > \prod_{k=M+1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_{M+1}},$$ dus $a_n > \frac{a_{M+1}}{b_{M+1}} b_n$. Als $\sum_n a_n$ convergent zou zijn, zou $\sum_n b_n$ ook convergent zijn, hetgeen niet zo is. Dus $\sum_n a_n$ is divergent.

Neemt men $b_n = 1$ voor alle n, dan krijgt men het criterium van d'Alembert terug althans voor reeksen met reële positieve termen.

Neem nu $b_n = \frac{1}{n-1}$ voor $n \geqslant 2$, dan is $c_n = n \frac{a_{n+1}}{a_n} - n + 1$. Dit leidt tot de volgende stelling.

(21.2) (Convergentiecriterium van Raabe) Als $\sum_n a_n$ een reeks met positieve reële termen is, dan is als $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < -1$, $\sum_n a_n$ convergent en als $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) > -1$, $\sum_n a_n$ divergent.

Een belangrijk speciaal geval ontstaat als $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ bestaat. Als deze limiet $\neq -1$ is geeft het criterium van Raabe uitsluitsel over convergentie of divergentie. Als de limiet gelijk is aan -1 geeft het volgende criterium soms uitsluitsel.

(21.3) (Convergentiecriterium van Gauss) Als $\sum_n a_n$ een reeks met positieve reële termen is, als σ een reëel getal is en als δ een positief reëel getal is dusdanig dat $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{\sigma}{n}\right) n^{1+\delta}$ begrensd is, dan is

$\sum_n a_n$ convergent als $\sigma > 1$ en divergent als $\sigma \leq 1$.

Bewijs: Laat K een positief reëel getal zijn dusdanig dat $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{\sigma}{n}\right| n^{1+\delta} < K$ is, dan is $\left|n(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1) + \sigma\right| < K n^{-\delta}$, dus $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1) = -\sigma$. Als $\sigma \neq 1$ volgt de stelling direct uit (21.2). We behoeven dus alleen nog het geval $\sigma = 1$ te behandelen. Omdat dan $(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{1}{n})n^{1+\delta}$ begrensd is, geldt $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{1}{n})\, n \log n =$

$= \lim_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{1}{n})\, n^{1+\delta} \frac{\log n}{n^{\delta}} = 0$. Nu is $n \log n\,(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{1}{n}) =$

$= n \log n \frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-1)\log(n-1) + (n-1)\log(1 - \frac{1}{n})$. Nu is

$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - 1)\log(1-x) = \lim_{x\to 0}(1-x)\frac{\log(1-x)}{x} = -1$, dus $\lim_{n\to\infty}(n-1)\log(1-\frac{1}{n}) =$

$= -1$, dus $\lim_{n\to\infty}(n \log n \frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-1)\log(n-1)) = 1$. Daar $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ divergent is (zie opgave 19), kunnen we (21.1) toepassen met

$b_n = \frac{1}{(n-1)\log(n-1)}$ voor $n \geq 3$. Hieruit volgt dat $\sum_n a_n$ divergent is.

Een belangrijk geval, waarin bovenstaande criteria kunnen worden toegepast, is als er een reële functie $f(x)$ bestaat, die voor $0 \leq x \leq 1$ gedefinieerd is en die in 0 zekere differentieerbaarheidseigenschappen bezit, dusdanig dat $f(\frac{1}{n}) = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Steeds is hierbij a_n reëel en $a_n > 0$ verondersteld. Stel eerst dat $f(x)$ continu in 0 is. Dan is $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} =$ $= \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$. Volgens d'Alembert is dan $\sum_n a_n$ convergent of divergent naargelang $f(0) < 1$ of $f(0) > 1$ is. Er rest ons nog $f(0)=1$ te beschouwen. Stel nu dat $f(x)$ ook differentieerbaar is in 0, dan is $f(x) = 1 + xf'(0) + x\varepsilon(x)$, waarin $\varepsilon(0)=0$ een $\varepsilon(x)$ continu in 0. Nu is

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n}f'(0) + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})$, dus $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1) = f'(0)$. Volgens Raabe is dan $\sum_n a_n$ convergent of divergent naargelang $f'(0) < -1$ of $f'(0) > -1$ is. Er rest ons nog $f'(0) = -1$ te beschouwen. Als nu $f(x)$ voor $0 \leq x \leq 1$ differentieerbaar en in 0 tweemaal differentieerbaar is, is $f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + x^2\varepsilon_1(x)$, waarin $\varepsilon_1(0)=0$ en $\varepsilon_1(x)$ continu in 0. Nu is $\lim_{n\to\infty} n^2(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{1}{n}) = f''(0)$. Volgens Gauss is dan $\sum_n a_n$ divergent.

Het procédé komt dus hierop neer, dat er constanten a en b worden bepaald, zodat $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a + \frac{b}{n} + \frac{c_n}{n^2}$ met begrensde c_n. Nu geeft $a < 1$ convergentie, $a > 1$ divergentie, $a=1$ en $b < -1$ convergentie, $a=1$ en $b \geq -1$ divergentie.

Een reeds bekend voorbeeld is de reeks $\sum_n n^\alpha$ voor reële α. Substitueer in $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ nu $n=\frac{1}{x}$, dan komt er $f(x)=(1+x)^\alpha$, dus $f(0)=1$ en $f'(0)=\alpha$; verder is $f(x)$ tweemaal differentieerbaar. We vinden dus dat $\sum_n n^\alpha$ convergeert voor $\alpha<-1$ en divergeert voor $\alpha \geq -1$. We kunnen dit ook als volgt inzien: $(1+\frac{1}{n})^\alpha = 1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2}(1+\frac{\vartheta_n}{n})^{\alpha-2}$ met $0<\vartheta_n<1$, dus $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=1+\frac{\alpha}{n}+\frac{c_n}{n^2}$ met $c_n=\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)(1+\frac{\vartheta_n}{n})^{\alpha-2}$ begrensd.

In overeenstemming met de op blz. 22 gemaakte opmerking kunnen de hierboven behandelde convergentiecriteria ook worden gebruikt voor reeksen $\sum_n a_n$ met complexe $a_n \neq 0$, door ze toe te passen op $\sum_n |a_n|$. Als convergentie gevonden wordt, kan worden geconcludeerd tot absolute convergentie van $\sum_n a_n$. Als echter divergentie wordt gevonden, kan alleen worden geconcludeerd dat $\sum_n a_n$ niet absoluut convergeert, maar niet dat $\sum_n a_n$ divergeert. In dat opzicht ligt de zaak minder eenvoudig dan bij het criterium van d'Alembert. Uit $\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ volgt n.l. dat $\sum_n a_n$ divergeert. Nemen we echter $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, dan is $\sum_n |a_n|$ divergent, zoals b.v. met het criterium van Raabe in te zien is, maar $\sum_n a_n$ is voorwaardelijk convergent.

Als $\sum_n a_n$ een reeks met complexe termen $a_n \neq 0$ is, dusdanig dat er twee constanten u en v bestaan zodat $\frac{a_{n+1}}{a_n}=u+\frac{v}{n}+\frac{w_n}{n^2}$ met begrensde w_n, dan kan uit de grootte van u en v de convergentie of divergentie van $\sum_n a_n$ afgeleid worden (criterium van Weierstrass). We gaan er niet op in.

Opgave 97. Onderzoek de reeks $\sum_n n^\alpha$ voor complexe α.

Opgave 98. Onderzoek de convergentie van de binomiaalreeks $\sum_n \binom{\mu}{n} z^n$ voor $z=-1$. Let voor reële μ ook op het teken van de termen!

Opgave 99. Onderzoek voor welke reële waarden van α de reeksen

$$\sum_n \frac{1}{(\log n)^\alpha} \quad \text{en} \quad \sum_n \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^\alpha \quad \text{convergeren.}$$

Opgave 100. Als α, β en γ complexe getallen zijn $\neq 0,-1,-2,\ldots$ dan heet de machtreeks $1+\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ met $a_n=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{\gamma+k}$ een hypergeometrische reeks. Bewijs dat deze reeks convergentiestraal 1 heeft en onderzoek voor reële α, β en γ de convergentie voor $z=1$.

§ 22. Reeksen van Fourier.

We zullen ons nu bezig houden met reeksen van het type $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, waarin x een reële veranderlijke en

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ en $b_1, b_2, \ldots$ constante reële getallen zijn. Een dergelijke reeks heet een trigonometrische reeks. Bij zo'n reeks kunnen we ons afvragen voor welke waarden van x hij convergeert en als hij convergeert welke eigenschappen de door de reeks voorgestelde functie van x heeft. Ook kunnen we de vraag stellen in hoeverre een gegeven functie f(x) door een trigonometrische reeks kan worden voorgesteld. We merken eerst op dat voor een geheel getal m geldt $\cos n(x+2m\pi) = \cos nx$ en $\sin n(x+2m\pi) = \sin nx$, waaruit direct volgt dat een door een trigonometrische reeks voorgestelde functie f(x) in ieder geval periodiek is met periode 2π, d.w.z. er geldt $f(x+2\pi)=f(x)$ voor alle x. We kunnen ons dus beperken tot $0 \leq x < 2\pi$.

Ter oriëntering bestuderen we eerst een speciale trigonometrische reeks en wel die met $a_n=0$ en $b_n=\frac{1}{n}$ voor alle n, d.w.z. de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. We weten al dat deze reeks convergeert voor alle reële x (zie opgave 75). We zullen nu de functie $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ bepalen. Uiteraard is $f(0)=0$. We beperken ons verder tot $0<x<2\pi$ en beschouwen de reeks $\sum_{n} \frac{e^{inx}}{n}$. Op blz. 84 hebben we bewezen dat $\sum_{n} \frac{1}{n} z^n$ convergent is voor alle z met $|z|=1$, behalve voor $z=1$; op blz. 98 is aangetoond dat voor deze waarden van z geldt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -\operatorname{Log}(1-z)$. Voor $0<x<2\pi$ geldt $|e^{ix}|=1$ en $e^{ix}\neq 1$, dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{ix})^n = -\operatorname{Log}(1-e^{ix}) = -\operatorname{Log}|1-e^{ix}| - i\arg(1-e^{ix}),$$

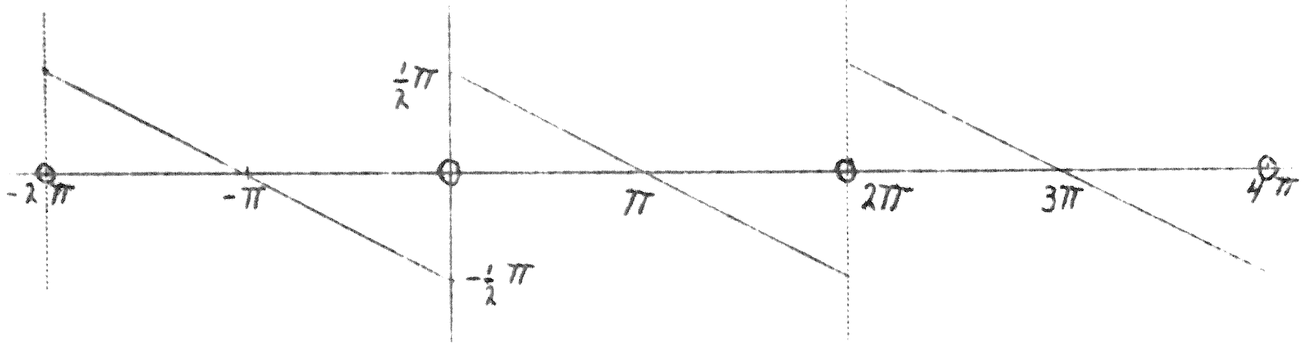
waarin $-\pi < \arg(1-e^{ix}) \leq \pi$. Verder is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$. Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx = -\operatorname{Log}|1-e^{ix}|$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx = -\arg(1-e^{ix})$. Nu is $1-e^{ix}=1-\cos x - i\sin x$, dus $|1-e^{ix}|^2=(1-\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 4(\sin\frac{1}{2}x)^2$. Voor $0<x<2\pi$ is $\sin\frac{1}{2}x>0$, dus $|1-e^{ix}| = 2\sin\frac{1}{2}x$. Verder is $2(\sin\frac{1}{2}x)^2 = 1-\cos x$ en $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x$, dus $1-e^{ix}=2\sin\frac{1}{2}x(\sin\frac{1}{2}x - i\cos\frac{1}{2}x) = |1-e^{ix}|(\cos(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\pi) + i\sin(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\pi))$. Voor $0<x<2\pi$ geldt $-\pi<-\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{2}\pi<\pi$, dus $\arg(1-e^{ix})=\frac{1}{2}(x-\pi)$. Hiermee hebben we dus gevonden:

(22.1) Voor $0<x<2\pi$ geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\operatorname{Log}(2\sin\tfrac{1}{2}x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \tfrac{1}{2}(\pi - x).$$

De grafiek van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ziet er dus uit als hieronder getekend.



Door bepaalde waarden voor x te substitueren kunnen we de sommen van allerlei reeksen vinden. Zo geeft $x=\frac{1}{2}\pi$ in de sinusreeks de reeks van Leibniz $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{4}\pi$ terug.

Opgave 101. Schets de grafiek van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

Opgave 102. Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Opgave 103. Bewijs met gebruikmaking van het resultaat van de berekening op blz. an I 186-188 van $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\,dx$, dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2$ en hieruit dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$.

Opgave 104. Bereken op een analoge wijze als hierboven is geschied $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$.

We hebben dus gevonden dat de door $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ voorgestelde functie f(x) niet overal continu is. Zo geldt $\lim_{x \to 0}^{+} f(x)=\frac{1}{2}\pi$ en $\lim_{x \to 0}^{-} f(x)=-\frac{1}{2}\pi$, terwijl $f(0)=0$. Verder is f(x) opgebouwd uit oneindig veel stukjes van lineaire functies. We zien zo, dat onder de functies die door een trigonometrische reeks kunnen worden voorgesteld functies voorkomen van een totaal ander type dan onder de functies die door een machtreeks kunnen worden voorgesteld.

Voor het verdere onderzoek beginnen we met een speciaal geval, n.l. dat de trigonometrische reeks uniform convergeert voor $0 \leq x < 2\pi$, dus wegens de periodiciteit voor alle reële x. De functie $f(x)=\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ is dan in ieder geval continu (8.4). Voor een geheel getal $m \geq 0$ zijn sin mx en cos mx begrensd en dus $\sum_{n=1}^{\infty} \sin mx(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \cos mx(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$ ook

uniform convergent. Op grond van de **stelling** op **blz.** an I 178 mogen deze **reeksen** dus termsgewijs over het segment $(0,2\pi)$ worden geïntegreerd.
Dit levert $\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi}\sin mx\,dx +$
$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx + b_n\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx\right)$ en
$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx +$
$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx + b_n\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx\right)$. De in de rechterleden van deze gelijkheden voorkomende integralen kunnen we echter alle uitrekenen. Er geldt:

(22.2) Voor gehele m en n, beide ≥ 0 geldt

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx \begin{cases} = 0 & \text{als } m\neq n \\ = \pi & \text{als } m=n\neq 0 \\ = 2\pi & \text{als } m=n=0\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx \begin{cases} = 0 & \text{als } m\neq n \text{ en als } m=n=0 \\ = \pi & \text{als } m=n\neq 0\end{cases}$$

Bewijs: $\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)$. Als $m\neq n$, geldt $m+n\neq 0$ en $m-n\neq 0$ en dus $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$. Als $m=n\neq 0$, geldt $m+n\neq 0$ en $\cos(m-n)x=1$ en dus $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + x\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$. Als $m=n=0$, geldt $\cos mx\cos nx=1$, dus $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx = 2\pi$. De andere integralen worden op analoge wijze behandeld.

Met behulp van (22.2) vinden we nu voor $m\geq 1$ dat $\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx=$
$=\pi b_m$ en $\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx=\pi a_m$. Verder geldt $\int_0^{2\pi} f(x)dx=$
$=\int_0^{2\pi} f(x)\cos 0x\,dx= \pi a_0$. We hebben dus de volgende stelling gevonden.

(22.3) Als de reeks $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ uniform convergeert voor $0\leq x<2\pi$ met som $f(x)$ dan geldt

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \text{ voor } n=0,1,2,\ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \text{ voor } n=1,2,3,\ldots .$$

De hierboven gegeven formules voor a_n en b_n heten formules van Euler. We zien nu ook waarom we de constante term in een trigonometrische reeks $\frac{1}{2}a_0$ genoemd hebben in plaats van a_0.

Als $f(x)$ een reële functie is, die gedefinieerd is voor $0 \leq x < 2\pi$ en eigenlijk integreerbaar is, dan heten de constanten a_n en b_n gedefinieerd door de formules van Euler de Fourier-coëfficiënten van $f(x)$ en de met deze constanten a_n en b_n gevormde reeks $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ de Fourier-reeks behorende bij $f(x)$. Let wel dat we momenteel nog geen antwoord hebben op de vraag of deze Fourier-reeks convergeert en of hij, als hij convergeert, gelijk is aan $f(x)$. Het enige wat we tot nu toe in (22.3) gevonden hebben is, dat een uniform convergente trigonometrische reeks de Fourier-reeks is van de door de trigonometrische reeks voorgestelde functie. Dit betekent niet, dat als de Fourier-reeks van een gegeven functie uniform convergeert, de reeks de functie voorstelt.

De volgende twee vragen liggen nu voor de hand.

1°. In hoeverre convergeert de Fourier-reeks van een functie en stelt hij de functie voor?

2°. Kan een functie voorgesteld worden door een trigonometrische reeks, die niet zijn Fourier-reeks is?

Met vraag 2° zullen we ons niet bezig houden, maar onze aandacht richten op vraag 1°.

We gaan dus uit van een eigenlijk integreerbare functie $f(x)$, gedefinieerd voor $0 \leq x < 2\pi$ en definiëren de Fourier-coëfficiënten a_n en b_n met de formules van Euler. Verder spreken we af dat we $f(x)$ periodiek voortzetten voor alle reële x, d.w.z. voor $2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi$ (k geheel) definiëren we $f(x)$ door $f(x)=f(x-2k\pi)$. Dan is $f(x)$ gedefinieerd voor alle reële x, periodiek met periode 2π en eigenlijk integreerbaar over elk eindig segment. We merken op dat als de oorspronkelijke functie continu is, de periodiek voortgezette functie discontinu kan zijn in de punten $2m\pi$ (m geheel).

We bewijzen de volgende hulpstelling.

(22.4) Als $g(x)$ een reële functie is, periodiek met periode 2π en eigenlijk integreerbaar over $(0,2\pi)$, en als a een reëel getal is dan is
$$\int_0^{2\pi} g(x+a)\,dx = \int_0^{2\pi} g(x)\,dx.$$

Bewijs: Laat het gehele getal k bepaald zijn door $2(k-1)\pi \leq a < 2k\pi$. Dan is $0 < 2k\pi - a \leq 2\pi$. Door toepassing van de substitutie $x = t + 2(k-1)\pi - a$

vinden we $\int_0^{2k\pi-a} g(x+a)dx = \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} g(t+2(k-1)\pi)dt = \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} g(t)dt.$

Door toepassing van de substitutie $x=t+2k\pi-a$ vinden we

$\int_{2k\pi-a}^{2\pi} g(x+a)dx = \int_0^{a-2(k-1)\pi} g(t+2k\pi)dt = \int_0^{a-2(k-1)\pi} g(t)dt.$ Door optelling vinden we de gevraagde gelijkheid.

<u>Opmerking</u>. In plaats van $\int_0^{2\pi} g(x+a)dx$ hadden we ook mogen schrijven $\int_a^{a+2\pi} g(x)dx$ (substitutie $x=t-a$).

We geven de partiële sommen van de Fourier-reeks van $f(x)$ aan met $s_n(x)$, dus als a_n en b_n de Fourier-coëfficiënten van $f(x)$ zijn bepalen we $s_n(x)$ door $s_0(x)=\frac{1}{2}a_0$ en $s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ voor $n\geq 1$. Gebruik makend van de formules van Euler en van (22.2) vinden we nu direct voor $k=1,\ldots,n$:

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}a_0\, f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}a_0\, s_n(t)\, dt$$

$$a_k^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} a_k\, f(t) \cos k\, t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} a_k\, s_n(t) \cos k\, t\, dt$$

$$b_k^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} b_k\, f(t) \sin k\, t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} b_k\, s_n(t) \sin k\, t\, dt.$$

Door optelling vinden we hieruit

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, s_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (s_n(t))^2\, dt.$$

Gebruik makend van deze betrekkingen vinden we

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t)-s_n(t))^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)s_n(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (s_n(t))^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt - \tfrac{1}{2}a_0^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$ Dus:

(22.5) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t)-s_n(t))^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt - \tfrac{1}{2}a_0^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

Hieruit volgt $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$ en dit impliceert dat $\sum_n (a_n^2+b_n^2)$ convergeert. Dit geeft de volgende stelling.

(22.6) $\sum_n (a_n^2+b_n^2)$ is convergent en er geldt

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t))^2\, dt$$ (ongelijkheid van Bessel).

Uit de convergentie van $\sum_n (a_n^2+b_n^2)$ volgt $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$, dus $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n=0$. Dit geeft de volgende stelling.

(22.7) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(t) \cos n\, t\, dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(t) \sin n\, t\, dt=0.$

In werkelijkheid geldt een nog algemenere stelling. Als a en b reële getallen zijn met $a<b$, als $g(t)$ een functie is die eigenlijk integreerbaar is over het segment (a,b) en als x een veranderlijke is die alle reële getallen doorloopt, dan is $\lim_{x\to\infty}\int_a^b g(t) \cos x\, t\, dt=$ $=\lim_{x\to\infty}\int_a^b g(t) \sin x\, t\, dt=0$. Deze algemenere stelling zullen we niet bewijzen, slechts bewijzen we dat speciale geval ervan dat we in het vervolg nodig zullen hebben:

(22.8) Als α en β reële getallen zijn met $0\leq\alpha\leq\beta\leq 2\pi$ en als $g(t)$ een functie is die eigenlijk integreerbaar is over (α,β) en als n de natuurlijke getallen doorloopt, dan geldt $\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta g(t) \sin (n+\tfrac{1}{2})t\, dt=0$.

Bewijs: Voer een hulpfunctie $h(t)$ in, gedefinieerd door $h(t)=0$ voor $0\leq t<\alpha$ en voor $\beta<t\leq 2\pi$ en $h(t)=g(t)$ voor $\alpha\leq t\leq\beta$. Dan zijn $h(t)$ en dus ook $h(t) \cos \tfrac{1}{2}t$ en $h(t) \sin \tfrac{1}{2}t$ eigenlijk integreerbaar over $(0,2\pi)$. Verder is $\sin (n+\tfrac{1}{2})t = \cos \tfrac{1}{2}t \sin n\, t + \sin \tfrac{1}{2}t \cos n\, t$. Dus

$$\int_\alpha^\beta g(t) \sin (n+\tfrac{1}{2})t\, dt=\int_0^{2\pi} h(t) \sin (n+\tfrac{1}{2})t\, dt=\int_0^{2\pi} h(t) \cos \tfrac{1}{2}\, t \sin n\, t\, dt+$$
$$+\int_0^{2\pi} h(t) \sin \tfrac{1}{2}\, t \cos n\, t\, dt.$$

De stelling volgt nu direct uit (22.7).

(22.9) $\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\, x = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$ voor $x\neq 2m\pi$ (m geheel).

Bewijs: Uit $2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos kx = \sin (k+\tfrac{1}{2})x - \sin(k-\tfrac{1}{2})x$ volgt door optelling direct $2 \sin \tfrac{1}{2}x(\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} \cos kx)=\sin(n+\tfrac{1}{2})x$. Voor $x\neq 2m\pi$ mag dit door $2 \sin \tfrac{1}{2}x$ gedeeld worden.

Door integratie volgt direct uit (22.9):

(22.10) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}\, dx = \pi.$

We kiezen nu een reëel getal c en gaan de convergentie van de Fourierreeks in het punt c onderzoeken. Daartoe gaan we $s_n(c)$ omvormen:

$$s_n(c)=\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kc + b_k \sin k c)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos k t \cos k c + \sin k t \sin k c))\, dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} \cos k(t-c))dt.$$

Daar de integrand van deze integraal klaarblijkelijk periodiek is met periode 2π vinden we door toepassing van (22.4) dat dit gelijk is aan

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t+c)(\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} \cos k t)dt.$$

Door toepassing van (22.9) vinden we dat dit gelijk is aan

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(c + t)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, dt.$$

Deze integraal splitsen we in $\int_0^{\pi}$ en $\int_{\pi}^{2\pi}$. De laatste transformeren we door $t=2\pi-u$ te stellen. Dit levert

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(c+t)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(c+2\pi-u)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{1}{2} u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(c-t)\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}\, dt.$$ Alles tezamen nemend vinden we dus

(22.11) $$s_n(c)= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(c+t)+f(c-t))\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, dt.$$

Kies nu een reëel getal δ met $0<\delta\leq\pi$, dan is de functie $\frac{f(c+t)+f(c-t)}{2 \sin \frac{1}{2} t}$ eigenlijk integreerbaar over (δ,π) (omdat $\delta>0$, is de functie begrensd!) Door toepassing van (22.8) vinden we dat $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}(f(c+t)+f(c-t))\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, dt = 0$. Hieruit volgt dat $\lim_{n\to\infty} s_n(c)$ dan en slechts dan bestaat als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(c+t)+f(c-t))\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, dt$$ bestaat en dat als beide bestaan ze aan elkaar gelijk zijn. In de laatste uitdrukking echter komen alleen waarden van $f(x)$ voor met $c-\delta\leq x\leq c+\delta$, d.w.z. met $|x-c|\leq\delta$. Dit levert de volgende stelling.

(22.12) (<u>Stelling van Riemann</u>) Als c een reëel getal is en δ een positief reëel getal, dan hangt de convergentie en de eventuele som van de Fourier-reeks van $f(x)$ in het punt c alleen af van de waarden van $f(x)$ voor $|x-c|\leq\delta$.

<u>Bewijs</u>: Voor $\delta \leq \pi$ volgt de stelling uit het voorafgaande, voor $\delta > \pi$ is f(x) op grond van zijn periodiciteit geheel vastgelegd door zijn waarden voor $|x-c| \leq \delta$.

De stelling van Riemann levert het merkwaardige resultaat, dat hoewel voor de bepaling van de Fourier-coëfficiënten van f(x) de waarde van f(x) op een interval ter lengte 2π bekend moet zijn (en dus f(x) op grond van zijn periodiciteit geheel bekend moet zijn) het convergentiegedrag van de Fourier-reeks in een punt c alleen afhangt van de waarden van f(x) in een, willekeurig klein te kiezen, omgeving van c. Anders uitgedrukt: als men f(x) buiten een δ-omgeving van c wijzigt, maar binnen de δ-omgeving van c intact laat, dan zullen de Fourier-coëfficiënten van de gewijzigde functie in het algemeen geheel anders zijn dan die van de oorspronkelijke functie: toch is het convergentiegedrag in het punt c hetzelfde voor beide reeksen.

Om de convergentie van de Fourier-reeks in c te verkrijgen moeten we nu nog iets meer van f(x) gaan eisen. Voor deze extra voorwaarde voor f(x) zijn er verschillende mogelijkheden. We kiezen de volgende.

Stel dat er een reëel getal $\varphi(c)$ en een positief reëel getal δ bestaat, zodat $\psi(c,t)=\dfrac{f(c+t)+f(c-t)-2\varphi(c)}{t}$ begrensd is voor $0<t\leq\delta$. Uit deze voorwaarde volgt $\lim\limits_{t\to 0}{}^{+}(f(c+t)+f(c-t))=2\varphi(c)$. Omdat $f(c+t)+f(c-t)$ in zich zelf overgaat als we t door -t vervangen, geldt zelfs $\lim\limits_{t\to 0}(f(c+t)+f(c-t))=2\varphi(c)$. Noem $\delta_1=\min(\delta,\pi)$, dan is $\psi(c,t)$ ook begrensd voor $0<t\leq\delta_1$. Noem $h(t)=\dfrac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}$ voor $0<t\leq\delta_1$; omdat $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}=1$ is h(t) begrensd.

Nu is $\dfrac{f(c+t)+f(c-t)-2\varphi(c)}{2\sin\frac{1}{2}t}=\psi(c,t)h(t)$ begrensd voor $0<t\leq\delta_1$ en eigenlijk integreerbaar over (α,δ_1) voor iedere α met $0<\alpha\leq\delta_1$. Uit de stelling op blz. an I 97 volgt dan dat $\psi(c,t)h(t)$ eigenlijk integreerbaar is over $(0,\delta_1)$. Uit (22.8) volgt dan dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_1}\psi(c,t)h(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt=0.$$ Maar $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_1}\psi(c,t)h(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_1}(f(c+t)+f(c-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt-2\varphi(c)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt+$$

$$+2\varphi(c)\frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$ Uit (22.8) volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{\delta_1}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt=0$; maken we verder nog gebruik van (22.10), dan vinden we dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_1}(f(c+t)+f(c-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt=\varphi(c)$$ en dus dat

$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(c)=\varphi(c)$. Hiermee is de volgende hoofdstelling gevonden, waarin we alle gemaakte veronderstellingen nog eens opsommen.

(22.13) (<u>Hoofdstelling</u>) Als $f(x)$ een op $(-\infty,\infty)$ gedefinieerde reële functie is, die periodiek is met periode 2π en eigenlijk integreerbaar over $(0,2\pi)$, als a_n en b_n de Fourier-coëfficiënten van $f(x)$ zijn, als c een reëel getal is en als er een reëel getal $\varphi(c)$ en een positief reëel getal δ bestaan zodat $\frac{f(c+t)+f(c-t)-2\varphi(c)}{t}$ begrensd is voor $0<t\leq\delta$, dan convergeert de Fourier-reeks van $f(x)$ in het punt c en er geldt

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nc+b_n\sin nc)=\varphi(c)=\lim_{t\to 0}\frac{f(c+t)+f(c-t)}{2}\ .$$

We maken nog enige opmerkingen over deze stelling.

Als $f(x)$ aan de voorwaarden van (22.13) voldoet en bovendien continu in c is dan is klaarblijkelijk $\varphi(c)=f(c)$, zodat in dat geval de Fourier-reeks de functie in het punt c voorstelt.

We noemen de laatste voorwaarde van (22.13) de extra-voorwaarde.

Continuïteit alleen van $f(x)$ in c kan de extra-voorwaarde niet vervangen. Zelfs als $f(x)$ overal continu is hoeft de Fourier-reeks van $f(x)$ niet overal te convergeren.

Als $\lim^+_{x\to c} f(x)=f(c+0)$ en $\lim^-_{x\to c} f(x)=f(c-0)$ bestaan en eindig zijn en als er een $\delta>0$ bestaat zodat $\frac{f(x)-f(c+0)}{x-c}$ begrensd is voor $c<x\leq c+\delta$ en $\frac{f(x)-f(c-0)}{x-c}$ begrensd is voor $c-\delta\leq x<c$, dan is klaarblijkelijk de extra-voorwaarde vervuld. We hebben hier de voorwaarde gesplitst in een die het gedrag van $f(x)$ rechts van c en een die het gedrag van $f(x)$ links van c beschrijft. In dit geval convergeert de Fourier-reeks in het punt c naar $\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$. Als dus $f(c)=\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$ dan stelt de Fourier-reeks de functie voor in het punt c. Men vergelijke het gedrag van de functie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ in het punt 0; we weten nog niet dat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ de Fourier-reeks van deze functie is, hetgeen we echter spoedig zullen zien. Overigens is de extra-voorwaarde zwakker dan de in deze alinea genoemde voorwaarde. Om dit in te zien nemen we als voorbeeld de functie $f(x)$ gedefinieerd door $f(x)=\sqrt{x}$ voor $0<x\leq\pi$, $f(x)=-\sqrt{-x}$ voor $-\pi<x<0$ en $f(0)=0$; verder nemen we $c=0$. Nu is $f(c+0)=f(c-0)=0$, maar $\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ voor $0<x\leq\pi$, dus $\frac{f(x)}{x}$ is niet begrensd voor $0<x\leq\delta$, hoe klein we de positieve δ ook nemen. Met $\varphi(0)=0$ is de extra-voorwaarde wel vervuld want $f(t)+f(-t)=0$ voor alle t met $0<t<\pi$.

Als $f(x)$ differentieerbaar is in c, dan is de voorwaarde van de vorige alinea klaarblijkelijk vervuld en convergeert de Fourier-reeks van $f(x)$ dus naar $f(c)$.

In plaats van de extra-voorwaarde kan men andere voorwaarden stellen. We noemen er twee zonder bewijs. De eerste is zwakker dan onze extra-voorwaarde, de tweede heeft een heel ander karakter.

1° (Stelling van Dini) Als in (22.13) de extra voorwaarde door de volgende voorwaarde wordt vervangen: "$\lim_{t \to 0} {}^{+}(f(c+t)+f(c-t))=2\varphi(c)$ bestaat en is eindig en er is een $\delta > 0$ zodat de (in 0 eventueel oneigenlijke) integraal $\int_0^{\delta} \frac{|f(c+t)+f(c-t)-2\varphi(c)|}{t}\,dt$ bestaat", dan convergeert de Fourier-reeks van $f(x)$ in c naar $\varphi(c)$.

2° (Stelling van Dirichlet) Als in (22.13) de extra voorwaarde door de volgende voorwaarde wordt vervangen: "er bestaat een $\delta > 0$ zodat $f(c+t)+f(c-t)$ voor $0 < t \leq \delta$ de som is van een begrensde monotoon niet-stijgende en een begrensde monotoon niet-dalende functie", dan bestaat $\lim_{t \to 0} (f(c+t)+f(c-t))=2\varphi(c)$ en is eindig en dan convergeert de Fourier-reeks van $f(x)$ in c naar $\varphi(c)$.

Wat 1° betreft merken we op dat de hierin genoemde voorwaarde zeker vervuld is als er een reëel getal $\varphi(c)$ en twee positieve reële getallen α en δ bestaan zodat $\frac{f(c+t)+f(c-t)-2\varphi(c)}{t^{\alpha}}$ begrensd is voor $0 < t \leq \delta$. Door hierin $\alpha = 1$ te nemen ontstaat onze extra-voorwaarde.

Wat 2° betreft merken we op dat een functie die de som is van een monotoon niet-stijgende en een monotoon niet-dalende functie van begrensde variatie heet. Verder mag een van beide in de voorwaarde genoemde functies identiek nul zijn, zodat de voorwaarde ook vervuld is als $f(c+t)+f(c-t)$ begrensd en monotoon is voor $0 < t \leq \delta$. De voorwaarde is ook vervuld als $f(x)$ begrensd en monotoon is voor $c < x \leq c+\delta$ en begrensd en monotoon voor $c-\delta \leq x < c$; in deze twee intervallen mag de monotonie van dezelfde of van verschillende soort zijn (dus b.v. in beide intervallen monotoon niet-stijgend of in het ene interval monotoon niet-stijgend en in het andere interval monotoon niet-dalend).

We merken nog op, dat we nu ook kunnen aantonen dat er trigonometrische reeksen bestaan, die voor alle reële x convergeren en die niet de Fourier-reeks van een functie zijn. Neem als voorbeeld de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$. Dat deze reeks voor $x \neq 2m\pi$ (m geheel) convergeert, kan men met partiële sommatie bewijzen (ga dat na); voor $x=2m\pi$ zijn alle termen 0, dus dan convergeert de reeks ook. Als de reeks de Fourier-reeks van een functie zou zijn, zou op grond van (22.6) $\sum_n \frac{1}{(\log n)^2}$ moeten convergeren, hetgeen niet het geval is.

We zullen nu enige voorbeelden van Fourier-reeksen behandelen. In al deze voorbeelden is de verificatie van de voorwaarden van (22.13) zo eenvoudig, dat we deze niet apart vermelden. In punt c waar de functie discontinu is kiezen we als waarde $\lim_{t \to 0} \frac{1}{2}(f(c+t)+f(c-t))$ om te verkrijgen dat de Fourier-reeks ook in die punten de functie voorstelt. Hierop moet speciaal ook gelet worden bij de eindpunten van het interval ter lengte 2π waar de functie gedefinieerd wordt, in verband met de periodiekevoortzetting. Als b.v. $f(x)$ op het interval $(0,2\pi)$ wordt gedefinieerd moet de waarde in 0 ook in overeenstemming worden gebracht met die in de buurt van 2π.

Als een functie $f(x)$ voldoet aan $f(-x)=f(x)$ voor alle x dan heet de functie <u>even</u>. In ons geval van periodieke functies kunnen we dit ook schrijven $f(2\pi-x)=f(x)$. Van een dergelijke functie zijn alle $b_n=0$, omdat dan $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\int_0^{\pi} f(2\pi-x)\sin nx\,dx = -\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.
In de Fourier-reeks van een even functie ontbreken de sinustermen. Verder ziet men op analoge wijze in dat voor een even functie geldt
$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$.

Als een functie $f(x)$ voldoet aan $f(-x)=-f(x)$ voor alle x dan heet de functie <u>oneven</u>. Voor onze periodieke functies is dit ook te schrijven als $f(2\pi-x)=-f(x)$. In dit geval is $a_n=0$, zodat in de Fourier-reeks van een oneven functie de cosinustermen en de constante term ontbreken. Verder geldt voor een oneven functie $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

Neem b.v. $f(x)=1$ voor $0<x<\pi$, $f(x)=-1$ voor $\pi<x<2\pi$, $f(0)=f(\pi)=0$. Deze functie is oneven; $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\left.\frac{2\cos nx}{\pi n}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}-\frac{2(-1)^n}{\pi n}$, dus $b_{2n}=0$, $b_{2n+1}=\frac{4}{\pi(2n+1)}$. Er geldt dus
$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{n+1}$. Dus

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{voor } 0<x<\pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{voor } \pi<x<2\pi \\ 0 & \text{voor } x=0 \text{ en } x=\pi. \end{cases}$$

<u>Opgave 105</u>. Bepaal de Fourier-reeksen van de volgende functies

a) $f(x)=x$ voor $0<x<2\pi$, $f(0)=\pi$.

b) $f(x)=x$ voor $0\le x\le\pi$, $f(x)=2\pi-x$ voor $\pi<x<2\pi$.

c) $f(x)=x$ voor $-\pi<x<\pi$, $f(\pi)=0$.

d) $f(x)=e^{ax}$ voor $0<x<2\pi$, $f(0)=\frac{1}{2}(1+e^{2\pi a})$ (a constant $\neq 0$).

Bewijs dat de Fourier-reeksen de functies overal voorstellen.

We merken nog op, dat uit geval a) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ opnieuw kan worden bepaald. De functie van geval b) is continu; de Fourier-reeks is uniform convergent. Het resultaat van d) zullen we nog nader bekijken; daarom schrijven we dat hieronder op:

$$\frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a^2+n^2}\cos nx+\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx\right)\right) \begin{cases} =e^{ax} & \text{voor } 0<x<2\pi \\ =\frac{1}{2}(1+e^{2\pi a}) & \text{voor } x=0. \end{cases}$$

Voor $x = 0$ geeft dit

$$\tfrac{1}{2}(1 + e^{2\pi a}) = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}\right).$$

Daar $\operatorname{cth} \pi a = \dfrac{e^{2\pi a} + 1}{e^{2\pi a} - 1}$ geeft dit (zie ook an I 185)

$$\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cth} \pi a = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

Uiteraard geldt dit alles alleen voor $a \neq 0$.

Wij beschouwen nu de functie $f(x) = \cos \alpha x$ voor $-\pi < x \leq \pi$, waarin α niet geheel is. Daar deze functie even is, ontbreken de sinustermen. Verder geldt $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx = \dfrac{2\alpha(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$ (ga dat na).

De Fourier-reeks wordt dus

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx\right) \text{ voor } -\pi < x \leq \pi.$$

Door hierin $x = 0$ en $x = \pi$ te substitueren vinden wij, als wij in het resultaat α door x vervangen:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2} \quad \text{voor } x \text{ niet geheel,}$$

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \quad \text{voor } x \text{ niet geheel.}$$

Het laatste resultaat kunnen wij nog in verband brengen met iets dat wij vroeger behandeld hebben. Op blz. 107 hebben wij gevonden dat $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{n^2}\right)$ voor alle complexe z differentieerbaar is en dat voor niet-gehele z geldt $\dfrac{F'(z)}{F(z)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2 - n^2}$. Wij beperken ons nu tot reële waarden van z en vervangen z door x; dan geldt dus in verband met wat wij nu gevonden hebben $\dfrac{F'(x)}{F(x)} = \pi \operatorname{cotg} \pi x - \dfrac{1}{x}$ voor niet-gehele x. Definiëren wij nu $g(x) = \dfrac{x\, F(x)}{\sin \pi x}$ voor x niet geheel, dan vinden wij $g'(x) = 0$ (ga dat na). Als k een geheel getal is, geldt dus voor $k < x < k+1$ dat $g(x) = c_k$ met constande c_k. Dus $F(x) = \dfrac{c_k \sin \pi x}{x}$ voor $k < x < k+1$. Nu is $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ uniform convergent. Om dit aan te tonen, is het op grond van (19.12) voldoende om aan te tonen, dat $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ voor $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ uniform convergeert. Uit de logarithmische reeks leidt men gemakkelijk af, dat voor $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ geldt

$\left| \text{Log}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{3n^2}$ (ga dat na), waaruit de uniforme convergen

onmiddellijk volgt. Uit (19.13) volgt dan $1 = F(0) = \lim_{x \to 0}^{+} F(x) =$

$\lim_{x \to 0}^{+} \frac{c_0 \sin \pi x}{x} = c_0 \pi$, dus $c_0 = \frac{1}{\pi}$. Hieruit volgt $F(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, d

$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$ voor $0 < x < 1$. Voor $x = 0$ en $x = 1$ geldt d

laatste natuurlijk ook; vervolgens blijkt door x door -x te vervang

dat het ook voor $-1 \leq x \leq 0$ geldt, zodat het voor $-1 \leq x \leq 1$ geldt. Het

nu mogelijk te bewijzen, dat $\pi x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$ periodiek is met period

(zie opgave 106), zodat wij het volgende resultaat gevonden hebben.

(22.14) Voor alle reële x geldt $\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$.

Hiermee is het op blz. 107 zonder bewijs medegedeelde sinusproduc althans voor reële waarden van de veranderlijke aangetoond.

<u>Opgave 106</u>. Bewijs dat $x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$ periodiek is met periode 2. Bedenk hierbij, dat $1 - \frac{x^2}{n^2} = (1 - \frac{x}{n})(1 + \frac{x}{n})$.

<u>Opgave 107</u>. Bepaal de Fourier-reeks van de functie f(x) die bepaald door $f(x) = \cos \alpha x$ voor $0 < x < \pi$, $f(x) = -\cos \alpha(2\pi - x)$ voor $\pi < x < 2\pi$, $f(0) = f(\pi) = 0$. Onderscheid de gevallen dat α geheel is en niet ge

Wij merken nog op, dat de op blz. 114 gevonden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ niet o onze theorie valt, omdat de functie niet begrensd is. Het is mogelijk theorie tot onbegrensde functies uit te breiden; wij gaan daar niet o n.

Wij gaan nu nog een andere kwestie bespreken. Daarvoor veronderstellen wij van f(x) voorlopig alleen, dat f(x) een reële functie is, die periodiek is met periode 2π en eigenlijk integreerbaar over $(0, 2\pi)$. Wij definiëren a_n, b_n en $s_n(x)$ als boven. Wij gaan nu de rij van de rekenkundige gemiddelden van $s_n(x)$ beschouwen, die wij $\sigma_n(x)$ noemen. Dus

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_n(x).$$

(22.15) $\sum_{k=0}^{n} \sin (k + \frac{1}{2})x = \frac{(\sin \frac{1}{2}(n+1)x)^2}{\sin \frac{1}{2}x}$ voor $x \neq 2m\pi$ (m geheel).

<u>Bewijs</u>: Uit $2 \sin \frac{1}{2}x \sin (k + \frac{1}{2})x = \cos kx - \cos (k+1)x$ volgt door optelling direct $\sin \frac{1}{2}x \sum_{k=0}^{n} \sin (k + \frac{1}{2})x = \frac{1}{2}(1 - \cos(n + 1)x) =$
$= (\sin \frac{1}{2}(n + 1)x)^2$. Voor $x \neq 2m\pi$ mag dit door $\sin \frac{1}{2}x$ gedeeld worden.

Door integratie vinden wij uit (22.15) en (22.10)

$$(22.16) \int_0^{\pi} \frac{(\sin \frac{1}{2}(n + 1)x)^2}{(\sin \frac{1}{2}x)^2} = (n + 1)\pi.$$

Uit (22.11) en (22.15) volgt nu direct

(22.17) $$\sigma_n(x) = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \frac{(\sin \frac{1}{2}(n+1)t)^2}{2(\sin \frac{1}{2}t)^2} dt.$$

Uit (22.17) en (22.16) volgt

(22.18) $$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) . \frac{(\sin \frac{1}{2}(n+1)t)^2}{2(\sin \frac{1}{2}t)^2} dt.$$

Het voordeel van $\sigma_n(x)$ boven $s_n(x)$ is dat in de integraal voor $\sigma_n(x)$ de sinussen gekwadrateerd voorkomen; deze kwadraten zijn uiteraard ≥ 0. Omdat dit zo is, volgt uit (22.16) en (22.17) direct dat als K een reëel getal is, zodat $|f(x)| \leq K$ voor alle x, dan ook $|\sigma_n(x)| \leq K$ voor alle x en n.

Wij gaan nu de convergentie van $\sigma_n(x)$ naar f(x) onderzoeken daar waar f(x) continu is en wel bewijzen wij hierover de volgende stelling.

(22.19) Als a, b, α en β reële getallen zijn met $a < \alpha \leq \beta < b$, zodat f(x) continu is voor alle x met $a < x < b$, dan geldt $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ uniform voor $\alpha \leq x \leq \beta$.

Opmerking. Daar wij α willekeurig dicht bij a en β willekeurig dicht bij b kunnen kiezen, geldt $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ voor alle x met $a < x < b$; deze convergentie behoeft echter niet uniform te zijn. Verder merken wij op, dat de stelling niets zegt over losse punten waar f(x) continu is; pas als er een interval is waar f(x) continu is, kan iets geconcludeerd worden.

Bewijs: Laat $c = \frac{1}{2}(a+\alpha)$ en $d = \frac{1}{2}(b+\beta)$ zijn, dan is $a < c < \alpha \leq \beta < d < b$. Noem $\delta_1 = \min(\alpha - c, d - \beta)$. Voor $c \leq x \leq d$ is f(x) uniform continu. Kies een reële $\varepsilon > 0$; er is dan een reële $\delta_2 > 0$, zodat voor alle x en y met $c \leq x \leq d$, $c \leq y \leq d$ en $|x - y| < \delta_2$ geldt $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Noem $\delta = \min(\delta_1, \frac{1}{2}\delta_2)$. Als nu x en t voldoen aan $\alpha \leq x \leq \beta$ en $|t| \leq \delta$ dan is $c \leq \alpha - \delta_1 \leq \alpha - \delta \leq x + t \leq \beta + \delta \leq \beta + \delta_1 \leq d$, $c \leq x \leq d$ en $|x + t - x| = |t| \leq \delta < \delta_2$. Dus $|f(x+t) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, dus $|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| < \varepsilon$

Nu is op grond van (22.18)

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \frac{(\sin \frac{1}{2}(n+1)t)^2}{2(\sin \frac{1}{2}t)^2} dt.$$

Omdat f(x) eigenlijk integreerbaar is, is f(x) begrensd; er bestaat dus een reële $K > 0$ zodat $|f(x)| \leq K$ voor alle x. Wij veronderstellen $\alpha \leq x \leq \beta$ en splitsen de integraal in $\int_0^{\delta}$ en $\int_{\delta}^{\pi}$. Voor de eerste integraal gebruiken wij de hierboven voor $|t| \leq \delta$ gevonden schatting. Dit levert met behulp van (22.16)

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi(n+1)}\int_0^{\pi} \frac{(\sin \frac{1}{2}(n+1)t)^2}{(\sin \frac{1}{2}t)^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Voor de tweede integraal gebruiken wij de schatting $|f(x)| \leq K$. Dit levert

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{\delta}^{\pi} \leq \frac{4K}{(n+1)\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{(\sin \frac{1}{2}(n+1)t)^2}{2(\sin \frac{1}{2}t)^2}\, dt \leq \frac{4K}{(n+1)\pi}\frac{(\pi-\delta)}{2(\sin \frac{1}{2}\delta)^2} <$$

$$< \frac{2K}{(n+1)(\sin \frac{1}{2}\delta)^2} .$$

Samen geeft dit $|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \dfrac{2K}{(n+1)(\sin \frac{1}{2}\delta)^2}$. Neem nu een natuurlijk getal $N \geq \dfrac{4K}{\varepsilon(\sin \frac{1}{2}\delta)^2}$, voor $n > N$ is dan $n+1 > \dfrac{4K}{\varepsilon(\sin \frac{1}{2}\delta)^2}$ en $\dfrac{2K}{(n+1)(\sin \frac{1}{2}\delta)^2} < \frac{1}{2}\varepsilon$, dus $|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Hiermee is de stelling bewezen.

Als $A_0, A_1, \ldots, A_n$ en $B_1, \ldots, B_n$ constanten zijn, heet $\frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{n}(A_m \cos mx + B_n \sin mx)$ een trigonometrisch polynoom van de graad n.

(22.20) Als $t_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{n}(A_m \cos mx + B_m \sin mx)$ een trigonometrisch polynoom van de graad n is dan geldt $\frac{1}{2}a_0A_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_kA_k + b_kB_k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)t_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_n(x)t_n(x)dx$.

<u>Bewijs</u>: Uit $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_n(x) \cos kx\, dx = a_k$ voor $k = 0,\ldots,n$ en $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s_n(x) \sin kx\, dx = b_k$ voor $k = 1,\ldots,n$ volgt door vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}A_0, A_1, \ldots, A_n$ en $B_1, \ldots, B_n$ en optelling direct de gevraagde gelijkheid.

Door $t_n(x) = s_n(x)$ te nemen, vinden wij de formule van blz. 11[illegible] midden terug. Het bewijs is trouwens ook analoog.

Als $t_n(x)$ een trigonometrisch polynoom is van de graad n, vinden wij door (22.20) toe te passen op $s_n(x) - t_n(x)$ direct dat $\int_0^{2\pi}(f(x) - s_n(x))(s_n(x) - t_n(x)) = 0$. Nu is $\int_0^{2\pi}(f(x) - t_n(x))^2dx = \int_0^{2\pi}(f(x) - s_n(x))^2dx + 2\int_0^{2\pi}(f(x) - s_n(x))(s_n(x) - t_n(x))dx + \int_0^{2\pi}(s_n(x) - t_n(x))^2dx$. Dit geeft de volgende stelling.

(22.21) Als $t_n(x)$ een trigonometrisch polynoom van de graad n is, geldt

$$\int_0^{2\pi}(f(x) - t_n(x))^2dx = \int_0^{2\pi}(f(x) - s_n(x))^2dx + \int_0^{2\pi}(s_n(x) - t_n(x))^2dx.$$

Hieruit volgt direct:

(22.22) Als $t_n(x)$ een trigonometrisch polynoom van de graad n is, geldt

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2dx \leq \int_0^{2\pi}(f(x) - t_n(x))^2dx.$$

Wij gaan nu verdere voorwaarden aan $f(x)$ opleggen en wel eisen wij dat $f(x)$ continu is op $(0,2\pi)$ op eindig veel punten na. Dan bewijzen wij de volgende stelling.

(22.23) Als $f(x)$ begrensd is en periodiek met periode 2π en op het interval $(0,2\pi)$ continu in alle punten met uitzondering van een eindig aantal, dat ook nul kan zijn, dan bestaat bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een N zodat voor $n > N$ geldt $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x) - \sigma_n(x))^2dx < \varepsilon$ (d.w.z. er geldt $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}(f(x) - \sigma_n(x))^2dx = 0$).

<u>Bewijs</u>: Het bewijs wordt geleverd door de discontinuïteitspunten in kleine intervallen in te sluiten. De integralen over deze intervallen worden klein omdat de integrand begrensd en de intervallengte klein is; de integralen over de resterende intervallen worden klein, omdat de intervallengte begrensd is en op grond van (22.19) de integrand klein voor voldoende grote n. Dit voeren wij nu uit. Stel dat er op het open interval $(0,2\pi)$ m punten zijn, waar $f(x)$ discontinu is. Stel $m \geq 1$ en laat de discontinuïteitspunten $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ zo gerangschikt zijn, dat $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < 2\pi$. Stel verder dat K een reëel getal > 0 is zodat $|f(x)| \leq K$ voor alle x; wij weten dat dan ook $|\sigma_n(x)| \leq K$ voor alle n en x. Noem $\delta_1 = \min(\frac{1}{2}\alpha_1, \frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1),\ldots,\frac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_{m-1}),\frac{1}{2}(2\pi-\alpha_m))$; kies een reële $\varepsilon > 0$ en noem $\delta = \min(\delta_1, \frac{\varepsilon\pi}{8K^2(m+3)})$.

Nu geldt $0 < \delta \leq \alpha_1-\delta < \alpha_1+\delta \leq \alpha_2-\delta < \ldots \leq \alpha_m-\delta < \alpha_m+\delta \leq 2\pi-\delta < 2\pi$.

Wij splitsen de integraal van de stelling in de $2m + 3$ integralen

$$\int_0^{\delta}, \quad \int_{\delta}^{\alpha_1-\delta}, \quad \int_{\alpha_1-\delta}^{\alpha_1+\delta}, \quad \int_{\alpha_1+\delta}^{\alpha_2-\delta}, \ldots, \quad \int_{\alpha_m-\delta}^{\alpha_m+\delta}, \quad \int_{\alpha_m+\delta}^{2\pi-\delta}, \quad \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}.$$

Op de open intervallen $(0,\alpha_1),(\alpha_1,\alpha_2),\ldots,(\alpha_m,2\pi)$ is $f(x)$ continu. Op grond van (22.19) bestaat bij elk der segmenten $J_1 = (\delta,\alpha_1-\delta)$, $J_2 = (\alpha_1+\delta,\alpha_2-\delta),\ldots,J_{m+1} = (\alpha_m+\delta, 2\pi-\delta)$ een $N_j (j = 1,\ldots,m+1)$, zodat voor $n > N_j$ geldt $|f(x) - \sigma_n(x)| < (\frac{\varepsilon}{2(m+3)})^{\frac{1}{2}}$ voor $x \in J_j$. Noem $N = \max(N_1,\ldots,N_{m+1})$, voor $n > N$ geldt dan

$\left|f(x) - \sigma_n(x)\right| < \left(\frac{\varepsilon}{2(m+3)}\right)^{\frac{1}{2}}$ voor x in elk der segmenten $J_1, \ldots, J_{m+1}$.
Omdat de som van de lengten van deze segmenten $< 2\pi$ is, geldt

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{\delta}^{\alpha_1-\delta} + \int_{\alpha_1+\delta}^{\alpha_2-\delta} + \ldots + \int_{\alpha_m+\delta}^{2\pi-\delta}\right) < \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{2(m+3)}\,2\pi = \frac{\varepsilon}{m+3}\,.$$

Voor elk van de overgebleven integralen geldt dat de intervallengte $\leq 2\delta \leq \frac{\varepsilon\pi}{4K^2(m+3)}$ is, verder is $(f(x) - \sigma_n(x))^2 \leq 4K^2$, dus

$\frac{1}{\pi}\int \leq \frac{1}{\pi}\,4K^2\,\frac{\varepsilon\pi}{4K^2(m+3)} = \frac{\varepsilon}{m+3}$. Het aantal van deze overgebleven integralen is m + 2. Alles tezamen nemende vinden wij dat

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x) - \sigma_n(x))^2dx < \varepsilon$ voor $n > N$. Daarmee is het bewijs voor $m \geq 1$ geleverd. Als m = 0 gaat het bewijs analoog, doch eenvoudiger (ga dat na).

Door combinatie van (22.23) en (22.22) toegepast met $t_n(x) = \sigma_n(x)$ vinden wij dat $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x) - s_n(x))^2 < \varepsilon$ voor $n > N$. Gebruiken wij nu (22.5), dan vinden wij direct de volgende stelling.

(22.24) (Stelling van Parseval) Als f(x) begrensd is en periodiek met periode 2π en op het interval $(0,2\pi)$ continu in alle punten met uitzondering van een eindig aantal, dat ook nul kan zijn, dan geldt voor de Fourier-coëfficiënten a_n en b_n van f(x), dat

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2dx.$$

Wij merken op dat de voorwaarden die voor de geldigheid van de stelling van Parseval aan f(x) zijn opgelegd van geheel andere aard zijn, dan die welke wij voor de convergentie van de Fourier-reeks in (22.13) hebben opgelegd. Voor de geldigheid van de stelling van Parseval behoeft de Fourier-reeks dus niet te convergeren! Overigens geldt de stelling van Parseval onder veel zwakkere voorwaarden; zo is eigenlijke integreerbaarheid over $(0,2\pi)$ en periodiciteit met periode 2π al ruim voldoende. Wij gaan daar niet op in.

Opgave 108. Pas de stelling van Parseval toe op de in deze paragraaf behandelde voorbeelden van Fourier-reeksen. Dit leidt o.a. tot uitdrukkingen voor $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ en $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Tot slot nog een toepassing van de stelling van Parseval, die een bijdrage levert tot de vraag, in hoeverre twee verschillende functies dezelfde Fourier-reeks kunnen hebben.

(22.25) Als $f_1(x)$ en $f_2(x)$, die beide aan de voorwaarden van (22.24) voldoen, dezelfde Fourier-coëfficiënten hebben, dan geldt $f_1(x) = f_2(x)$ voor alle x, waar beide functies continu zijn.

<u>Bewijs</u>: De functie $f_1(x) - f_2(x)$ voldoet ook aan de voorwaarden van (22.24); bovendien zijn de Fourier-coëfficiënten van deze functies allemaal nul. Uit (22.24) volgt dat $\int_0^{2\pi} (f_1(x) - f_2(x))^2 dx = 0$. De integrand van deze integraal is ≥ 0. Als er nu een a is, waar $f_1(x)$ en $f_2(x)$ en dus ook $f_1(x) - f_2(x)$ continu zijn en $f_1(a) - f_2(a) = b \neq 0$, dan is er een omgeving van a, waar $|f_1(x) - f_2(x)| > \frac{1}{2}|b|$, dus $(f_1(x) - f_2(x))^2 > \frac{1}{4} b^2$; de bijdrage van deze omgeving tot de integrand is > 0 en de hele integraal is dus ook > 0. Dit geeft een tegenstrijdigheid, waarmee de stelling bewezen is.

<u>Einde van de cursus analyse II.</u>