STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 28e

Avondcursus wiskunde 1954-1956;

Algebra.

H.J.A.Duparc.

1955

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoudsopgave

Avondcursus 1954-1955

Algebra

door

Dr.H.J.A.Duparc

TELEF. 51660-56643

Avondcursus 1954-1955.

Algebra

door

Dr H.J.A.Duparc.

§1. Permutaties en combinaties.

Onder een permutatie van een aantal elementen $a_1,\dots,a_n$ wordt verstaan de in een of andere volgorde genomen verzameling dezer elementen.

Zo bezitten de elementen a_1,a_2 de volgende twee permutaties: a_1a_2 en a_2a_1. Het valt niet moeilijk na te gaan hoeveel permutaties een verzameling van n elementen bezit, welk aantal wij met P^n zullen aangeven. Gaan wij de n elementen rangschikken, dan kan op de eerste plaats elk der n elementen staan en is eenmaal een keuze voor het element op de eerste plaats gedaan, dan kunnen de overige n-1 elementen nog over alle vorige n-1 plaatsen worden gepermuteerd. Bijgevolg is $P^n = nP^{n-1}$, waaruit wegens $P^1 = 1$ onmiddellijk volgt $P^n = n!$, waarbij met n! wordt bedoeld het getal 1.2...n. Voor n=2 hadden wij dit resultaat hierboven al gevonden.

Op allerlei plaatsen in de wiskunde , de kansrekening en de statistiek en ook in de practijk speelt het begrip permutatie een belangrijke rol. Dit geldt trouwens ook voor de hierna te bespreken begrippen combinatie en variatie.

Wij geven enkele voorbeelden. Zij gevraagd de som van alle getallen van 5 cijfers, waarin elk der cijfers 1,3,5,7 en 9 precies één keer voorkomt. Onder deze getallen zijn er P^4 stuks waarbij het cijfer 1 op de voorste plaats staat, even zovele waarbij dit cijfer op de volgende plaats staat, enz. dus de bijdrage van het cijfer 1 in de som der getallen is $P^4 \times 11111 = 24 \times 11111$. Op analoge wijze vindt men voor de bijdrage van het cijfer 3 in de gezochte som de waarde $P^4 \times 33333$ enz. De waarde der gezochte som is dus

$$24 \times 11111 \times (1+3+5+7+9) = 6666600.$$

Opg.1. Een gezelschap van 9 volwassen personen spreekt af iedere dag te dineren aan een ronde tafel en daarbij steeds weer op een andere wijze (dat is op een wijze waarbij niet ieder dezelfde twee buren heeft als bij een vorige maaltijd) aan te zitten. Hoe oud is de jongste van het gezelschap op de dag van de laatst mogelijke maaltijd ten minste?

Thans bespreken wij het begrip variatie. Een variatie van k uit elementen is een keuze van k elementen uit de groep van n elementen.

Het aantal mogelijke dergelijke variaties geeft men aan met V_k^n. Wij leiden een formule af voor V_k^n.

Voor het eerste element der variatie van k uit de n elementen zijn n mogelijkheden, terwijl bij een eenmaal gedane keuze voor de overige k-1 elementen nog alle variaties van k-1 uit n-1 elementen kunnen worden genomen. Bijgevolg is

$$V_k^n = nV_{k-1}^{n-1} ,$$

waaruit wegens $V_1^h = h$ door volledige inductie volgt

$$V_k^n = n(n-1)\dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

Voor k=n vinden wij het vorige resultaat $P^n = V_n^n = n!$ terug.

Opg.2. Hoeveel getallen van 4 ongelijke cijfers zijn er? Bepaal ook hun som.

Opg.3. Hoeveel getallen onder de 10.000 bestaan er waarin geen zelfde cijfer tweemaal of vaker optreedt?

Onder een combinatie van k uit n elementen verstaat men een groep van k elementen genomen uit de n elementen waarbij het van geen belang is in welke volgorde die k elementen genomen worden. Het aantal combinaties van k uit n elementen geeft men aan met C_k^n. Wenst men wel op de volgorde te letten, dan dient men nog achteraf alle permutaties van iedere combinatie van k te beschouwen (welk aantal $P^k = k!$ is), waarna men weer alle variaties vindt. Bijgevolg is

$$P^k C_k^n = V_k^n , \text{ dus } k!\, C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} ,$$

dus

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} .$$

Opg. 4. Hoeveel diagonalen bezit een vlakke n-hoek?

Opg. 5. Hoeveel verschillende bridge spelen zijn er?

Opg. 6. Bewijs $C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n$.

Opg. 7. Bewijs $C_k^n = C_{n-k}^n$

De getallen $C_k^n = \binom{n}{k}$ noemt men ook wel binomiaalcoëfficiënten, dit in verband met het feit dat de volgende formule (binomiaalformule van Newton) geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k} .$$

Wij geven van deze formule twee bewijzen. Het eerste maakt gebruik van het hierboven ingevoerde begrip "combinatie" en van de elementaire eigenschappen van vermenigvuldiging.

De laatste leren ons direct dat $(a+b)^n$ een som is van termen a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2,\ldots,b^n$, waarvan echter de coëfficiënten nog nader moeten worden bepaald. Men verkrijgt een term a^kb^{n-k} door bij k der n factoren a+b die in $(a+b)^n$ optreden de termen a te vermenigvuldigen en bij de overige n-k de termen b te kiezen. Zoals wij boven zagen kan dit op C_k^n wijzen geschieden, waarmee de formule bewezen is.

Men kan het gevonden resultaat ook door volledige inductie bewijzen. Wegens $C_o^o = 1$ is zij juist voor n = o. Onderstellen wij haar reeds bewezen voor zekere gehele $n \geqq o$, dan vindt men voor n+1

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}a^hb^{n-h}$$

$$=\sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}a^{h+1}b^{n-h} + \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}a^hb^{n+1-h}$$

$$=\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^hb^{n+1-h} + \sum_{h=o}^{n}\binom{n}{h}a^hb^{n+1-h}$$

$$=\sum_{h=o}^{n+1}\left\{\binom{n}{h-1}+\binom{n}{h}\right\}a^hb^{n+1-h} = \sum_{h=o}^{n+1}\binom{n+1}{h}a^hb^{n+1-h},$$

waarmede de formule voor n+1 is gevonden.

<u>Opg. 8</u>. Bewijs dat $(a+b)^7-a^7-b^7$ voor gehele a en b deelbaar is door 7.

Wij kunnen nu ook een formule afleiden voor $(a+b+c)^n$. Men heeft

$$(a+b+c)^n = \left\{a+(b+c)\right\}^n =$$

$$= \sum_{h=o}^{n}\frac{n!}{h!(n-h)!}a^h(b+c)^{n-h}$$

$$= \sum_{h=o}^{n}\frac{n!}{h!(n-h)!}a^h\sum_{k=o}^{n-h}\frac{(n-h)!}{k!}b^kc^{n-h-k}$$

$$= \sum_{h=o}^{n}\sum_{k=o}^{n-h}\frac{n!}{h!k!(n-h-k)!}a^hb^kc^{n-h-k}$$

$$= \sum_{\substack{h,k,m=o\\h+k+m=n}}^{n}\frac{n!}{h!k!m!}a^hb^kc^m.$$

Zo vindt men b.v.

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc.$$

Hier heeft men voor (h,k,m) slechts mogelijk de getallencombinaties (0,0,3), (0,3,0), (3,0,0,), (2,1,0), (1,2,0), (2,0,1), (2,1,0), (0,2,1), (0,1,2), (1,1,1). Bij elk dier combinaties moet de betreffende coëfficiënt $\frac{3!}{h!k!m!}$ afzonderlijk worden berekend. Er zijn echter termen die analoog gebouwd zijn, n.l. de eerste 3 en ook de daarop volgende 6.

Hier zijn de diverse waarden van h,k,m door permutatie uit elkaar te vinden. Men schrijft wel eens kortweg

$$(a+b+c)^3 = \sum a^3+3 \sum a^2b+6abc,$$

waarbij de $\sum$-tekens nu betrekking hebben op een aantal analoog gebouwde termen.

Opg. 9. Schrijf de ontwikkeling neer van $(a+b+c+d)^n$.

Opg. 10. Bewijs

$$(a_1+\dots+a_p)^n = \sum_{\substack{h_1,h_2,\dots,h_p=0 \\ h_1+h_2+\dots+h_p=n}}^{n} \frac{n!}{h_1!h_2!\dots h_p!} a_1^{h_1} a_2^{h_2}\dots a_p^{h_p}.$$

Opg. 11. Bepaal de coëfficiënt van x^4 in de ontwikkeling van $(1+x+x^2)^3$

Opg. 12. Bewijs $\sum\limits_{h=0}^{n} \binom{n}{h} = 2^n$; $\sum\limits_{h=0}^{n} (-)^n\binom{n}{h} = 0$.

Wij geven nog een toepassing. Berekent men $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b$ op twee wijzen dan vindt men, allereerst

$$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{a+b} \binom{a+b}{n} x^n$$

en verder

$$(1+x)^a(1+x)^b = \sum_{h=0}^{a} \binom{a}{h} x^a . \sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^b$$

$$= \sum_{h=0}^{a} \sum_{k=0}^{b} \binom{a}{h}\binom{b}{k} x^{a+b}.$$

Om nu de coëfficiënt van x^n in het laatste lid te vinden moet men a en b zo kiezen, dat a+b= n is. Dan vindt men (mits zowel a als b niet groter is dan n) voor die coëfficiënt de waarde

$$\sum_{\substack{h,k \\ h+k=n}} \binom{a}{h}\binom{b}{k} = \sum_{h=0}^{n} \binom{a}{h}\binom{b}{n-h}$$

en wij krijgen voor $n \geqq a$ en $n \geqq b$ de formule

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{h=0}^{n} \binom{a}{h}\binom{b}{n-h}$$

Opg. 13. Bewijs $\sum\limits_{h=0}^{n} \binom{n}{h}^2 = \binom{2n}{n}$.

Opg. 14. Uitgaande van $(1-x)^a(1+x)^a = (1-x^2)^a$ bewijze men

$$\sum_{\substack{h,k \geqq 0 \\ h+k=2n}} (-)^h \binom{a}{h}\binom{a}{k} = (-)^n\binom{a}{n}$$

en leide daaruit af

$$\sum_{h=0}^{2n} (-)^h \binom{2n}{h}^2 = (-)^n \binom{2n}{n}.$$

Opg. 15. Bewijs $\sum_{h=o}^{2n+1} (-)^h \binom{2n+1}{h}^2 = o.$

Opg. 16. Bewijs met volledige inductie voor $n > a$

$$\sum_{h=o}^{n-1} \binom{h}{a} = \binom{n}{a+1} .$$

Opg. 17. Bewijs $\sum_{h=1}^{n} h\binom{n}{h} = n.2^{n-1}$.

Opg. 18. Bewijs

$$\sum_{h=k}^{n} \binom{h}{k}\binom{n}{h} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

Tenslotte beschouwen wij het begrip permutatie nog wat nader. Wij permuteren een aantal elementen $a_1, \ldots, a_n$ en letten er bij een permutatie $a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}$ dezer elementen op hoe vaak twee elementen uit die permutatie een inversie vormen d.w.z. hoe vaak een element met een hogere index voorafgaat aan een met een lagere index. Zo bevat de permutatie $a_1a_3a_5a_2a_4$ juist drie inversies.

Men noemt een permutatie even als zij een even aantal inversies bevat, oneven als zij er een oneven aantal bevat. De bovengenoemde permutatie is dus oneven.

Thans bewijzen wij de

Stelling. Als men in een permutatie twee elementen verwisselt, verandert haar pariteit (dat is het even of oneven zijn).

Beschouw voor het bewijs een permutatie $a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}$, waarin de twee elementen a_{k_i} en a_{k_j} worden verwisseld. Om te onderzoeken hoe hierdoor het aantal inversies zich heeft gewijzigd is het voldoende de elementen $a_{k_i} a_{k_{i+1}} \ldots a_{k_{j-1}} a_{k_j}$ te beschouwen want ten aanzien van de overige elementen is de positie van a_{k_i} en a_{k_j} niet veranderd.

Stel nu dat a_{k_i} met s der tussen a_{k_i} en a_{k_j} gelegen elementen een inversie vormde en met de overige j-i-1-s elementen geen. Dan vormt na de ruiling a_{k_i} juist met j-i-1-s van die tussenliggende elementen een inversie en met de overige s geen. Het aantal inversies dat a_{k_i} met die tussenliggende elementen maakt, is dus gewijzigd met een bedrag j-i-1-s-s- = j-i-1-2s. Laat evenzo eerst t der elementen tussen a_{k_i} en a_{k_j} een inversie met a_{k_j} hebben gevormd en j-i-1-t dus geen. Na de ruiling zijn deze aantallen dan resp. j-i-1-t en t, zodat de toename van het aantal inversies j-i-1-2t bedraagt. Bedenken wij dat door de ruiling het aantal inversies tussen a_{k_i} en a_{k_j} zelf van 0 of 1 op 1 of 0 is gegaan, dan bedraagt de totale wijziging van het aantal inversies door het ruilen van a_{k_i} en a_{k_j} dus j-i-1-2s+j-i-1-2t$\pm$1 =

$= 2(j-i-1-s-t)\pm 1$, en dit is een oneven bedrag, waarmede de stelling bewezen is.

Deze stelling geeft soms een gemakkelijk middel om de pariteit van een permutatie te bepalen. Beschouw b.v. de permutatie $a_1a_3a_5a_2a_4$. Ruilt men eerst a_2 met a_3, dan a_3 met a_5 en dan a_4 met a_5, dan krijgt men na deze drie ruilingen de even permutatie $a_1a_2a_3a_4a_5$, zodat de oorspronkelijke permutatie oneven was.

Opg. 19. De permutatie $a_{k_1}\dots a_{k_n}$ is even als het product $\prod_{j>i}(k_j-k_i)$ positief is en oneven als dat product negatief is.

Opg. 20. Er zijn evenveel even als oneven permutaties van n elementen, indien $n \geqq 2$ is.

Blijkens opgave 17 zijn er dus $\frac{1}{2}n!$ even en $\frac{1}{2}n!$ oneven permutaties.

§ 2. Determinanten. (Grondeigenschappen)

Wenst men de vergelijkingen

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$$

op te lossen, dan vindt men door de gebruikelijke methode van optellen en aftrekken

$$x = \frac{\beta c - b\gamma}{\beta a - b\alpha}\ ;\ y = \frac{\gamma a - c\alpha}{\beta a - b\alpha},$$

mits $\beta a - b\alpha \neq 0$ is. De uitdrukking $\beta a - b\alpha$ speelt blijkbaar een belangrijke rol bij het stelsel (1).

Wenst men het stelsel

$$(2) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ Ax + By + Cz = D \end{cases}$$

op te lossen, dan kan men weer zijn toevlucht nemen tot de methode van optellen en aftrekken en vindt o.a.

$$(3) \qquad x = \frac{d\beta C - dB\gamma + \delta Bc - \delta bC + Db\gamma - D\beta c}{a\beta C - aB\gamma + \alpha Bc - \alpha bC + Ab\gamma - A\beta c}.$$

De noemer van deze breuk is voor het stelsel (2) van dezelfde betekenis als de vorm $\beta a - b\alpha$ voor het stelsel (1). Tevens merken we op, dat zowel bij de oplossing x van stelsel (1) als bij die van stelsel (2) de teller een analoge structuur heeft als de noemer. Voor uitdrukkingen als deze gaan wij nu een andere schrijfwijze invoeren.

Beperken wij ons eerst tot het stelsel (1), dan schrijven we de gevonden waarden van x en y eenvoudiger door het symbool $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ in te voeren. Dit noemen wij een determinant van de tweede orde.

We kennen er de waarde ps - qr aan toe, zodat de oplossingen van stelsel (1) luiden

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} \; ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}} \; .$$

Voor de voor (1) belangrijke uitdrukking $a\beta - b\alpha$ hebben we dus nu de schrijfwijze $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ ingevoerd.

Op analoge wijze voeren wij in het symbool $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix}$, waarvan de betekenis is de uitdrukking, die in noemer van (3) staat. Bijgevolg is de oplossing x van het stelsel (2) te schrijven in de gedaante

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ \delta & \beta & \gamma \\ D & B & C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{vmatrix} .$$

De nieuw ingevoerde symbolen noemen wij determinanten. Wij geven thans algemeen de definitie van determinant van de n^e orde. Hieronder verstaan wij het symbool

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

, kortweg geschreven $|a_{rs}|$,

bestaande uit n rijen en n kolommen van getallen, die men de n^2 elementen van de determinant noemt. Aan dit symbool zullen wij een bepaalde waarde toekennen, zodanig dat die voor n = 2 en voor n = 3 overeenstemt met de hierboven gegevene. Die waarde is

$$\sum \pm a_{1i_1} \, a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} ,$$

waarbij de som wordt uitgestrekt over alle permutaties $i_1 \, i_2 \ldots i_n$ der getallen 1,2,...,n. Bij de even permutaties moet het + teken en bij de oneven permutaties het - teken worden genomen. Daar er n! permutaties der getallen 1,2,...,n zijn, bestaat onze som uit n! termen.

Men kan de definitie van determinant ook anders formuleren. Een determinant van de n^e orde heeft een waarde die de som is van n! termen. Elke term is eventueel afgezien van het teken, dat als zoëven wordt bepaald, gelijk aan het product van n elementen der determinant, waarvan er geen twee in dezelfde rij en ook geen twee in dezelfde kolom staan.

<u>Voorbeeld.</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1} \, a_{2i_2} \, .$$

Er zijn 2! = 2 termen, resp. behorende bij de even permutatie 12 en de oneven permutatie 21 van de getallen 1 en 2. Dus de beschouwde determinant is gelijk aan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ analoog aan het hierboven gewenste resultaat. Dit geldt ook voor determinanten van de 3^e orde (ga dit na; vergelijk opg. 1).

Opg. 1. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Sarrus gaf een regel aan om direct een determinant van de 3^e orde te berekenen. Hij schreef n.l. het volgende getallenschema op

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

en vormde er de 6 door lijnen aangegeven producten uit. De drie producten in de richting $a_{11}a_{22}a_{33}$ krijgen elk het + teken, de andere drie het - teken. De som der 6 zo gevonden producten is juist de waarde van de determinant (Regel van Sarrus).

Opg. 2. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Opg. 3. Bereken

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

Opg. 4. Bereken

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} \qquad (-360).$$

Beschouwt men een willekeurige term $a_{r_1s_1}a_{r_2s_2}\cdots a_{r_ns_n}$ uit de ontwikkeling van de determinant van de n^e orde $|a_{rs}|$, dan is het om het teken van deze term te bepalen, niet nodig de factoren zo te rangschikken, dat de eerste indices resp. 1, 2,...,n worden. Wij bewijzen n.l. dat het teken in deze term gelijk is aan de som van het aantal inversies van de indices r en het aantal inversies van de indices s. Hiertoe verwisselen wij eens in het beschouwde product twee factoren $a_{r_\nu s_\nu}$ en $a_{r_\mu s_\mu}$. Hierdoor verandert het aantal inversies in de indices r en ook in de indices s met een oneven bedrag (verg. de stelling van § 1, blz.5) hun som dus met een even bedrag. Door nu net zo lang factoren te verwisselen totdat de volgorde der eerste indices gelijk geworden is aan 1,2,...,n, is de som der aantallen inversies van de indices r en van de indices s met een even bedrag veranderd. Daar in het nieuw opgeschreven product de indices r geen inversies bezitten, is dus het aantal inversies in de indices s (afgezien van een even getal) gelijk aan de som der aantallen inversies in de indices r en de indices s in het oorspronkelijk product, zodat deze som het teken bepaalt van dit product in de berekening van de waarde der determinant.

Voorbeeld: De term $a_{21}\ a_{44}\ a_{32}\ a_{13}$ heeft in de eerste indices de inversies (2,1), (4,3), (4,1), (3,1) en in de tweede indices de inversies (4,2), (4,3), het totale aantal is dus 6. Zou men de factoren rangschikken naar de eerste index dan vindt men $a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{44}$, waarin de tweede indices de inversies (3,1), (3,2) bezitten, dus een even aantal minder dan 6.

In een willekeurige term der uitgewerkte determinant van de n^e orde is het teken dus $(-)^{R+S}$, waarin R en S resp. de aantallen inversies in de indices $r_1,\ldots,r_n$ en $s_1,\ldots s_n$ voorstellen. Het is duidelijk dat hieruit volgt, dat een determinant niet van waarde verandert, als men haar om de hoofddiagonaal (dit is de verbindingsrechte van de elementen $a_{11}\ a_{22}\ldots a_{nn}$) laat wentelen (d.w.z. elk tweetal elementen a_{rs} en a_{sr} verwisselt). Immers hierna ontstaat een determinant die alle termen van de oorspronkelijke bevat en wel met een teken $(-)^{S+R}$, dus met hetzelfde teken als de oorspronkelijke determinant. Zo is dus $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. Bij wenteling om de hoofddiagonaal blijven de elementen daarvan natuurlijk op hun plaats.

Definitie: Een determinant heet symmetrisch als zij door wenteling om de hoofddiagonaal in zichzelf overgaat, dus als $a_{rs} = a_{sr}$ voor alle combinaties (r,s) met r = 1,2,...,n en s = 1,2,...,n. Zo is dus $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ symmetrisch, maar $\begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ niet.

Een determinant heet scheef symmetrisch als voor elk paar (r,s) geldt $a_{rs} = -a_{sr}$.

<u>Opg. 5</u>. Laat zien dat de determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ in het algemeen niet scheef-symmetrisch is.

<u>Opg. 6</u>. Bereken de waarde van de scheef-symmetrische determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 9 \\ -3 & -9 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & e & d \\ -b & -e & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Stelling. Een scheef-symmetrische determinant van oneven orde is nul.
Bewijs: Daar de determinant bij wentelen om de hoofddiagonaal haar waarde behoudt, heeft men voor haar waarde D

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1,n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots -a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & & 0 \end{vmatrix}$$

In de laatste determinant heeft elk element een teken dat tegengesteld is aan dat van het overeenkomstige element in de oorspronkelijke determinant; elk der optredende termen in de laatste determinant is dan gelijk aan de overeekomstige in de oorspronkelijke, afgezien van n factoren -1, dus de nieuwe determinant is gelijk aan $(-)^n D$. We weten echter dat zij gelijk is aan D, dus $D=(-)^n D$. Daar n oneven ondersteld was, heeft men $D=-D$, dus $2D=0$, dus $D=0$.

In het voorgaande hebben wij gebruik gemaakt van het feit, dat als men alle elementen van een determinant met -1 vermenigvuldigt, de waarde der determinant met $(-)^n$ wordt vermenigvuldigd. Geheel analoog geldt: Vermenigvuldigt men elk element van een determinant met c, dan wordt de waarde ervan met c^n vermenigvuldigd (bewijs dit).

Opg. 7. Hoe verandert de waarde van een determinant, als men elk element van één bepaalde rij met c vermenigvuldigt?
Opg. 8. Bereken

$$\begin{vmatrix} 0 & 6a & 3b \\ -a & 0 & c \\ -b & -2c & 0 \end{vmatrix}$$

Wij gaan thans na hoe de waarde van een determinant verandert, als men twee rijen verwisselt . Beschouw dus de determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Het is dus duidelijk dat een willekeurige term $a_{1s_1} \dots a_{ps_p} \dots a_{qs_q} \dots a_{ns_n}$ van D_1 ook in D_2 optreedt en omgekeerd. Het teken dezer term in D_1 is $(-)^S$ waarin S het aantal inversies in de indices $s_1 \dots s_p \dots s_q \dots s_n$ aangeeft. De beschouwde term treedt ook in D_2 op. Wij geven tijdelijk $a_{q1}, \dots, a_{qn}$ aan resp. door $b_{p1}, \dots, b_{pn}$ en $a_{p1}, \dots, a_{pn}$ door $b_{q1}, \dots, b_{qn}$. Onze term treedt dan in D_2 op als $a_{1s_1} \dots b_{qs_p} \dots b_{ps_q} \dots a_{ns_n}$. Het aantal inversies hierin is de som der aantallen inversies in de 1^e en 2^e indices. De 1^e indices zijn $1,2,\dots,p-1,\ q,\ p+1,\dots,q-1,\ p,\ q+1,\dots,n$, dus na 1 ruiling $1,2,\dots,p-1,\ p,\ p+1,\dots,q-1,\ q,\ q+1,\dots,n$. De 2^e indices zijn $s_1,\dots,s_{p-1}\ s_p, s_{p+1},\dots,s_{q-1},\ s_q,\ s_{q+1},\dots,s_n$ en bevatten dus S inversies. De beschouwde term in D_2 wordt dus voorzien van het teken $(-)^{S+1}$. Iedere term in D_2 is derhalve tegengesteld aan de corresponderende term in D_1, dus $D_1 = -D_2$.

We vinden dus de zeer belangrijke

Stelling: Verwisselt men twee rijen van een determinant dan verandert deze van teken en natuurlijk ook: verwisselt men twee kolommen van een determinant, dan verandert deze van teken.

Toepassing. Heeft een determinant twee gelijke rijen, dan verandert die determinant (dus ook de waarde D ervan) niet, als men deze verwisselt. Anderzijds gaat volgens de zojuist gevonden stelling bij die verwisseling de waarde D over in $-D$, dus men heeft $D = -D$, waaruit volgt $2D = 0$, dus $D = 0$. Dit levert de

Stelling: Een determinant met twee gelijke rijen (of met twee gelijke kolommen) is gelijk aan nul.

Zijn de elementen van een rij een vast veelvoud a van die van een andere rij van een determinant, dan vindt men dat de oorspronkelijke determinant een a keer zo grote waarde krijgt, als in die andere rij alle elementen met a worden vermenigvuldigd. Dan ontstaat echter een determinant met twee gelijke rijen, die volgens het bovenstaande nul is. De oorspronkelijke determinant is dus ook nul. (Geldt het resultaat ook als $a = 0$ is?).

Dit resultaat is nog iets anders te formuleren:

Stelling. Heeft een determinant twee evenredige rijen (of twee evenredige kolommen), dan is haar waarde nul.

Toepassing.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Elk element van een determinant treedt in de eerste graad op in de uitdrukking, die de waarde van de determinant aangeeft. Van deze opmerking zullen we verscheidene keren gebruik maken. Allereerst blijkt hieruit dat geldt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}+b_{r1} & \cdots & a_{rn}+b_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Gevolg: Telt men bij een rij van een determinant een veelvoud van een andere rij op, dan blijft de waarde ongewijzigd. Immers men heeft

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}+ta_{s1} & \cdots & a_{rn}+ta_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ta_{s1} & \cdots & ta_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

In de laatste determinant luidt de r^e rij $ta_{s1} \ldots ta_{sn}$, welke evenredig is met de elementen van de s^e rij $a_{s1} \ldots a_{sn}$, dus de laatste determinant is nul, waaruit de bewering volgt.

Toepassing. Verifieer elk der volgende gelijktekens bij de berekening van de determinant

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Men heeft

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6\frac{1}{2} & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6\frac{1}{2} & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= -(-6\tfrac{1}{2}).2.(-15) = -195.$$

Zo kan men bv. de determinant

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

als volgt herleiden

$$D = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & a-b & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2-c^2 & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} a-c & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c).$$

Op analoge wijze vindt men

$$\begin{vmatrix} a^4 a^3 a^2 a & 1 \\ b^4 b^3 b^2 b & 1 \\ c^4 c^3 c^2 c & 1 \\ d^4 d^3 d^2 d & 1 \\ e^4 e^3 e^2 e & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e).$$

(Van der Monde).

Opg. 9. Bewijs

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Opg. 10. Bereken

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

(-11)

Opg. 11. Bereken

$$\begin{vmatrix} a^3 & a & 1 \\ b^3 & b & 1 \\ c^3 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

$(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$.

Opg. 12. Bereken

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Opg. 13. Bereken de determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Opg. 14. Los x op uit de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c & d \\ a & b+x & c & d \\ a & b & c+x & d \\ a & b & c & d+x \end{vmatrix} = 0.$$

Opg. 15. Los x op uit

$$\begin{vmatrix} p & p & x \\ q & x & q \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Zoals wij reeds eerder opmerkten, treedt in de waarde der determinant $\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \quad a_{nn} \end{vmatrix}$ het element a_{11} lineair op. Alle termen, die a_{11} bevatten zijn van de gedaante

$$(-)^R \, a_{11} \, a_{2r_2} \cdots a_{nr_n} \, ,$$

waarin R het aantal inversies is dat optreedt in de rij $1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ dus in de rij $r_2, r_3, \ldots, r_n$. Merken wij op dat de som van de termen $(-)^R \, a_{2r_2} \, a_{3r_3} \cdots a_{nr_n}$ juist gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

dan zien wij dat de factor van a_{11} juist die determinant is, die men krijgt door in de oorspronkelijke determinant de eerste rij en de eerste kolom te schrappen.

Schrapt men in een determinant $|a_{rs}|$ van de n^e orde de p^e rij en q^e kolom, dan ontstaat een nieuwe determinant van de $(n-1)^e$ orde, die men de onderdeterminant noemt van het element a_{pq}. Wij schrijven hiervoor m_{pq}. Wij vonden dus boven dat de factor van het element a_{11} in de ontwikkeling van de determinant $|a_{rs}|$ juist gelijk is aan m_{11}.

Wenst men de factor te vinden, waarmee een willekeurig element a_{pq} in de ontwikkeling van $|a_{rs}|$ optreedt, dan gaan wij eerst de p^e rij achtereenvolgens met de $(p-1)^e$, $(p-2)^e, \ldots, 2^e, 1^e$ rij verwisselen en daarna de q^e kolom achtereenvolgens met de $(q-1)^e$, $(q-2)^e, \ldots, 2^e$, 1^e kolom. Er ontstaat dan een determinant, die $(-)^{p+q}$ maal zo groot is als de oorspronkelijke determinant. De nieuwe determinant heeft de gedaante

$$\begin{vmatrix} a_{pq} & a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{p-1,q} & a_{p+1,q} & \cdots & a_{nq} \\ a_{p1} & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p-1,1} & a_{p+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,q-1} & a_{1,q-1} & a_{2,q-1} & \cdots & a_{p-1,q-1} & a_{p+1,q-1} & \cdots & a_{n,q-1} \\ a_{p,q+1} & a_{1,q+1} & a_{2,q+1} & \cdots & a_{p-1,q+1} & a_{p+1,q+1} & \cdots & a_{n,q+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{pn} & a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{p-1,n} & a_{p+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

dus hierin is op grond van het reeds afgeleide resultaat de factor van a_{pq} juist gelijk aan de onderdeterminant m_{pq} van het element a_{pq} in de oorspronkelijke determinant ; in de oorspronkelijke determinant zelve is de coefficient van a_{pq} dus gelijk aan $(-)^{p+q} \, m_{pq}$. We zullen de factor $(-)^{p+q} m_{pq}$ voortaan aanduiden met A_{pq}. Het getal A_{pq} noemt men de minor van het element a_{pq}.

Wenst men de determinant $|a_{rs}|$ te berekenen, dan merke men op dat in elke term precies één element van de p^e rij optreedt. Dus men heeft

$$|a_{rs}| = a_{p1}f_1 + a_{p2}f_2 + \dots + a_{pn}f_n,$$

terwijl wij nu weten dat $f_1 = A_{p1}$, $f_2 = A_{p2}$, . . . ,$f_n = A_{pn}$, dus

$$|a_{rs}| = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \dots + a_{pn}A_{pn} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{p\nu}A_{p\nu}.$$

Men noemt dit laatste resultaat de ontwikkeling van de determinant $|a_{rs}|$ naar de elementen van de p^e rij.

Toepassing.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{3\nu}A_{3\nu} = 1.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 8.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 - 88 = -90.$$

$$\underset{-3\times \qquad +2\times}{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -11 & 5 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1.\underset{3\times \quad 6\times}{\begin{vmatrix} -11 & 6 & 17 \\ -1 & 3 & 6 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -11 & -27 & -49 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} -27 & -49 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 297 - 245 = 52.$$

Opg. 15. Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Wij vonden hierboven dat voor de waarde A van de determinant $|a_{rs}|$ geldt

$$A = \sum_{m=1}^{n} a_{rm}A_{rm}.$$

Wij kunnen nu ook direct de waarde bepalen van de som die men krijgt als men de elementen van een rij met de minoren van een andere rij vermenigvuldigt en die producten optelt.

Immers men vindt dan $\sum_{m=1}^{n} a_{tm}A_{rm}$ en deze som is gelijk aan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1,1} & \vdots\ \vdots & a_{r-1,n} \\ a_{t,1} & \dots & a_{t,n} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

In de laatste determinant zijn de r^e en t^e rij gelijk, dus deze is nul. Men heeft dus

$$\sum_{m=1}^{n} a_{tm} A_{rm} = \begin{cases} A, \text{ als } & t = r \\ 0, \text{ als } & t \neq r \end{cases} .$$

Van dit resultaat zullen we later nog vaak gebruik maken.

Soms is een determinant van bepaalde orde gemakkelijk te berekenen door deze over te voeren in een determinant van hogere orde, b.v.

$$D = \begin{vmatrix} a+x & b+2x & c+3x \\ a+y & b+2y & c+3y \\ a+z & b+2z & c+3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & a+x & b+2x & c+3x \\ 0 & a+y & b+2y & c+3y \\ 0 & a+z & b+2z & c+3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ -1 & x & 2x & 3x \\ -1 & y & 2y & 3y \\ -1 & z & 2z & 3z \end{vmatrix}$$

en de laatste determinant blijkt bij ontwikkeling naar de elementen van de eerste rij de waarde nul te bezitten. Men noemt het verhogen van de orde van een determinant door toevoegen van nieuwe rijen en kolommen het randen van een determinant.

Opg. 16. Bewijs

$$\begin{vmatrix} ac-b^2 & bd-e^2 \\ bd-c^2 & ce-d^2 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} .$$

Opg. 17. Beschouw een determinant $|a_{rs}|$ van de **3^e^ orde.**

Bereken de waarde van $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$.

Opg. 18. Bereken de waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \end{vmatrix} .$$

Opg. 19. Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a+b+c & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}a & a+\frac{1}{2}b+c & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & a+b+\frac{1}{2}c \end{vmatrix} .$$

Opg. 20. Bereken

$$\begin{vmatrix} a^4 & 4a^3 & b^4 & 4b^3 & 12b^2 \\ a^3 & 3a^2 & b^3 & 3b^2 & 6b \\ a^2 & 2a & b^2 & 2b & 2 \\ a & 1 & b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Opg.21. Bereken

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & -1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & -1 \end{vmatrix}, \text{ als } \alpha+\beta+\gamma=\pi .$$

Opg. 22. Bereken

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & cda & dab & abc \end{vmatrix} .$$

Tenslotte definieren wij nog het begrip matrix. Een matrix is een rechthoekig schema van m bij n getallen

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}, \text{ kortweg } \|a_{rs}\| ,$$

waaraan geen getalwaarde is toegekend. Het enige hier van belang zijnde begrip is de rang van een matrix. Hieronder verstaat men de orde van de "grootste" determinant (dit is de determinant van de hoogste orde), die in de matrix bevat is (dwz. eruit ontstaat door uit de matrix een aantal rijen en kolommen weg te laten - dit aantal kan soms nul zijn -) en die een van nul verschillende waarde bezit.

Zo bezit de matrix

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \text{ de rang 2, de matrix } \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ daarentegen de rang 3}$$

Opg. 23. Bepaal de rang der matrices

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & 8 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{Vmatrix} .$$

Wij geven ter oefening nog een aantal opgaven over determinanten.

Opg.24. Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} .$$

Opg.25. Bereken de n x n determinant welke in de hoofddiagonaal a bevat en elders overal b.

Opg.26. Bereken de determinant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Een dergelijke determinant wordt circulaire determinant genoemd. Hierbij is $a_{ij} = a_{kl}$ als $i+j = k+l$ of $|(i+j)-(k+l)| = 3$. Een analoge definitie is te geven voor een circulaire determinant van hoger orde.

Opg.27. Bereken de waarde van een circulaire determinant van de vierde orde, waarin elementen de waarden a, b, c resp. d bezitten.

Opg.28. Los x op uit de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a+x & b \\ c & d+x \end{vmatrix} = 0$$

Opg.29. Los x op uit

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = 0.$$

Opg.30. Bereken

$$\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 \\ b & b+c & c & 0 \\ 0 & c & c+d & d \\ 0 & 0 & d & d+e \end{vmatrix} .$$

Opg.31. Bereken

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4-1 & b^4-1 & c^4-1 \end{vmatrix} .$$

Opg.32. Bereken

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & bc & ca \\ bc & c^2+a^2 & ab \\ ca & ab & b^2+c^2 \end{vmatrix} .$$

§ 3. Stelsels lineaire vergelijkingen.

Wij gaan thans de in de vorige paragraaf behandelde eigenschappen van determinanten en matrices toepassen bij het oplossen van stelsels vergelijkingen.

Beschouw het stelsel

$$
(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}
$$

Wij kunnen hiervan onmiddellijk de oplossing vinden in het geval dat de determinant $a = |a_{rs}| \neq 0$ is. In dat geval vermenigvuldige men n.l. de 1[e] verg. met A_{11}, de 2[e] met $A_{21},\dots$, de n[e] met A_{n1} (waarin wederom A_{rs} de minor van het element a_{rs} in de determinant $|a_{rs}|$ voorstelt), waarna men vindt:

$$
ax_1 = b_1A_{n1} + b_2A_{n2} + \dots + b_nA_{nn} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

Noemen wij de determinant, die uit $|a_{rs}|$ ontstaat door daarin de s[e] kolom te vervangen door $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$, voortaan a_s, dan vindt men

$x_1 = \dfrac{a_1}{a}$ en op gelijke wijze $x_r = \dfrac{a_r}{a}$ $(r = 2,\dots,n)$ (regel van Cramer).

Hiermede zijn de formules teruggevonden die in de gevallen $n = 2$ en $n = 3$ het uitgangspunt voor de theorie der determinanten waren.

Het is duidelijk dat in het geval, dat $a = 0$ is, op deze wijze geen oplossing wordt gevonden.

De gevonden waarden van $x_1,\dots x_n$ voldoen aan het gegeven stelsel vergelijkingen en deze zijn daarvan bovendien de enige oplossing. In het geval $a \neq 0$ heeft het gegeven stelsel dus één ondubbelzinnig bepaalde oplossing, gegeven door de regel van Cramer.

Opg. 1. Los op het stelsel

$$
\begin{cases} 24x + 11y - 10z = 5 \\ 2x + 2y + 2z = 10 \\ 13x - 2y - 7z = -10 \end{cases}
$$

Opg. 2. Los op het stelsel

$$
\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 \end{cases} \qquad (a \neq b;\ b \neq c;\ c \neq a).
$$

Opg.3. Los op het stelsel

$$\begin{cases} -x+y+z+u=1 \\ x-y+z+u=2 \\ x+y-z+u=3 \\ x+y+z-u=4. \end{cases}$$

Thans gaan we beschouwen het algemenere geval van p lineaire vergelijking in q onbekenden.

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Beschouw de matrix $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{matrix} \right\|$. Onderstel dat deze de rang k bezit en laten de onbekenden en vergelijkingen zo genummerd zijn, dat één der in A bevatte van nul verschillende determinanten van de orde k, juist de determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ is.

Allereerst beschouwen we het geval k = p. Door de vergelijkingen te schrijven in de gedaante

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1q}x_q \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pk}x_k = b_p - a_{p,k+1}x_{k+1} - \dots - a_{pq}x_q , \end{cases}$$

blijkt uit het voorafgaande dat hieruit (met behulp van de regel van Cramer) de onbekenden $x_1, \dots, x_k$ zijn op te lossen, d.w.z. uit te drukken in de grootheden a_{rs}, b_s en de willekeurig te kiezen grootheden $x_{k+1}, \dots, x_q$. Op grond van het laatste zegt men wel dat het beschouwde stelsel ∞^{q-p} stellen oplossingen bezit.

Vervolgens beschouwen wij het geval, dat $k < p$ is. Hieronder valt dus tevens het in het begin van deze paragraaf niet behandelde geval $a = 0$; $p = q = n$.

Wij kunnen de determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ wederom van nul verschillend onderstellen.

Het stelsel $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kq}x_q = b_k \end{cases}$

is dan op grond van het bovenstaande oplosbaar en bezit zelfs ∞^{q-k} stellen oplossingen.

Het is de vraag of zo'n gevonden oplossing ook vôldoet aan elk der overige $p - k$ vergelijkingen.

Beschouw daartoe de determinant $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1\ell} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k\ell} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & a_{m\ell} \end{vmatrix}$,

waarin m één der getallen $k + 1, \ldots, p$ en ℓ één der getallen $k+1, \ldots q$ is. Daar elk dezer determinanten de orde $k+1$ bezit en de matrix $\|a_{rs}\|$ de rang k bezit, is elk dezer determinanten nul. Duidt men de minoren der elementen $a_{1\ell}, \ldots, a_{m\ell}$ in deze determinant weer aan door $A_{1\ell}, \ldots, A_{m\ell}$, dan heeft men

$$\sum_r a_{rs} A_{r\ell} = \begin{cases} 0 \text{ voor } s \neq \ell \\ D = 0 \text{ voor } s = \ell \end{cases}$$

zodat het linkerlid van de vergelijking

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mq}x_q = b_m$$

wegens $A_{m\ell} \neq 0$ een lineair compositum is van de linkerleden der eerste k vergelijkingen.

Hieruit volgt dat een gevonden oplossing der eerste k vergelijkingen dan en slechts dan ook aan de $m^e (m = k + 1, \ldots, p)$ vergelijking voldoet, als het rechterlid b_m dier vergelijking eenzelfde lineair compositum is van de rechterleden $b_1, \ldots, b_k$ dier eerste k vergelijkingen, dus als

$$\sum b_r A_{r\ell} = 0, \text{ dus } R_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & b_k \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & b_m \end{vmatrix} = 0$$

Wij zien dus dat het gegeven stelsel ∞^{q-k} oplossingen bezit, als elk der determinanten $R_{k+1}, \ldots, R_p$ gelijk is aan nul en geen oplossing bezit, zodra één dier determinanten van nul verschilt. In het eerste geval noemt men de beschouwde vergelijkingen afhankelijk, in het tweede geval strijdig. Wij vatten de gevonden resultaten samen.

Bij het stelsel (II) van p lineaire vergelijkingen in q onbekenden, waarin de rang der coëfficiënten matrix gelijk is aan k, heeft men de volgende gevallen.

1° $k = p$; $q = k$. Er is één stel oplossingen.

2° $k = p$; $q > k$. Er zijn ∞^{q-k} stellen oplossingen.

3° $k < p$; $q = k$; $R_{k+1} = \ldots = R_p = 0$. Er is één stel oplossingen.

4° $k < p$; $q > k$; $R_{k+1} = \ldots = R_p = 0$. Er zijn ∞^{q-k} stellen oplossingen.

5° $k < p$; $q \geq k$; tenminste één der uitdrukkingen $R_{k+1}, \ldots, R_p$ verschilt van nul. Er zijn geen oplossingen.

Wij kunnen de gevonden resultaten nog iets anders formuleren door naast de coëfficiënten matrix A ook te beschouwen de

$$\text{matrix } B = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & b_p \end{matrix} \right\| .$$

In geval 1^o is de rang van A en B elk gelijk aan k.
In geval 2^o is dat eveneens het geval.
In geval 5^o is de rang van A gelijk aan k en die van B gelijk aan k+1.
Wij laten zien, dat in de gevallen 3^o en 4^o de rangen van A en B gelijk zijn. Was dit n.l. niet zo, dan was de rang van B gelijk aan k+1, dus er bestond een determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & \cdots & a_{r_1 s_k} & b_{r_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_{k+1} s_1} & \cdots & a_{r_{k+1} s_k} & b_{r_{k+1}} \end{vmatrix}$$

van de orde k+1, die van nul verschilde, d.w.z. op grond van een ontwikkeling naar de elementen der laatste kolom, waren niet alle onderdeterminanten hiervan, waarin de eerste k kolommen optreden, gelijk aan nul. Laat nu de onbekenden en vergelijkingen zo genummerd zijn, dat de onderdeterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ is.}$$

Daar $D \neq 0$ is, verkeert dan ons stelsel in geval 5^o en heeft dus geen oplossing, in strijd met de onderstelling, dat wij met geval 3^o en 4^o te maken hebben, en het stelsel wel een oplossing bezit.

Wij zien dus, dat het stelsel (II) dan en slechts dan tenminste één oplossing bezit, als de rangen der matrices A en B gelijk zijn. Dit resultaat is afkomstig van de mathematicus Capelli.

Hecht men voorts aan het symbool 00^{q-k} voor het geval $q = k$ de waarde 1, dan kunnen de gevallen 1^o en 2^o en eveneens de gevallen 3^o en 4^o samen worden genomen.

<u>Opg.4.</u> Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ \quad\;\; y + 2az = 3a^2 \end{cases}$$

<u>Opg.5.</u> Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z - u = 1 \\ x + y - z + u = 2 \\ x - y + z + u = 3 \\ ax + y + z + u = a^2 - a \end{cases}$$

Opg.6. Als aan de vergelijking

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_qx_q = b$$

voldoen de beide stellen oplossingen $x_1 = c_1, \dots x_q = c_q$; $x_1 = d_1, \dots , x_q = d_q$, dan voldoet hieraan ook iedere lineaire combinatie van de gedaante

$$x_1 = \frac{\lambda c_1 + \mu d_1}{\lambda + \mu}, \dots\dots, x_q = \frac{\lambda c_q + \mu d_q}{\lambda + \mu} .$$

Naast het homogene stelsel gaan wij thans het homogene stelsel vergelijkingen

$$\text{(III)} \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

beschouwen. Hierbij zijn de rangen der matrices A en B gelijk, zodat er steeds een oplossing bestaat. Men is echter gewoon slechts dan een stel $(x_1, \dots ,x_q)$ een oplossing van het homogene stelsel III te noemen, als niet alle $x_1, \dots , x_q$ gelijk zijn aan nul. Het is nl. direct duidelijk dat aan (III) onder alle omstandigheden het stel oplossingen $x_1 = \dots = x_q = 0$ voldoet. Verder merken we op, dat als aan (III) een oplossing $(x_1, \dots , x_q)$ voldoet, aan (III) eveneens de oplossing $(\lambda x_1, \dots , \lambda x_q)$ voldoet. Men is echter gewoon de oplossingen $(\lambda x_1, \dots , \lambda x_q)$ voor verschillende waarden van λ $(\neq 0)$ als dezelfde te rekenen. Zo zijn dus de stellen $x=2$; $y=3$ en $x=4$; $y=6$ eenzelfde oplossing van de vergelijking $3x-2y = 0$. Wij verstaan dus onder een oplossing van het stelsel (III) een stel getallen $(x_1, \dots, x_q)$ niet alle gelijk aan nul, of alle daarmede evenredige stellen. Bij homogene stelsels vergelijkingen komt het dus slechts op de verhoudingen der onbekenden aan.

Evenals bij het stelsel (II) voeren we weer de rang k van de coëfficiëntenmatrix in.

Beschouw eerst het geval $p > k$; $q > k$.

Dan is, als wij de nummering der onbekenden en vergelijkingen zo kiezen, dat

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

is, de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k\ell} \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & a_{m\ell} \end{vmatrix} \qquad (m = k+1, \dots , p;\ \ell = k+1, \dots ,q),$$

die van de orde k+1 is, gelijk aan nul dus als wij de minoren hierin weer op de gebruikelijke wijze aangeven

$$\sum a_{rs} A_{r\ell} = 0, \text{ zowel voor } s = \ell \text{ als voor } s \neq \ell \ .$$

Dit houdt in wegens $A_{m\ell} \neq 0$, dat de m^e vergelijking van het stelsel (III) een lineair compositum is van de eerste k, zodat ieder stel oplossingen van de eerste k vergelijkingen tevens voldoet aan de m^e vergelijking ($m = k+1, \ldots , p$). Hiermede is het geval $p > k$; $q > k$ teruggebracht tot het geval $p = k$; $q > k$.
Het is verder duidelijk dat men bij het oplossen der eerste k vergelijkingen de getallen $x_{k+1}, \ldots , x_q$ willekeurig kan kiezen (echter niet allen gelijk aan nul) en dan, zoals in het voorafgaande is aangegeven, uit die vergelijkingen de onbekenden $x_1, \ldots , x_k$ kan oplossen, d.w.z. lineair uitdrukken in de grootheden $x_{k+1}, \ldots , x_q$. Men vindt dan niet ∞^{q-k}, maar slechts ∞^{q-k-1} stellen oplossingen daar elk stel evenredig met een vast stel, tot eenzelfde oplossing aanleiding geeft.

Is $q = k+1$ dan vindt men juist één oplossing, die bepaald wordt door

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k = - a_{1,k+1}x_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k = - a_{k,k+1}x_{k+1} \ . \end{cases}$$

$$\text{dus } x_1 = - x_{k+1} \begin{vmatrix} a_{1,k+1} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,k+1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \ , \text{ enz.}$$

Stelt men:

$$x_{k+1} = (-)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

(dit mag want wij mogen alle oplossingen $x_1, \ldots , x_q$ tegelijkertijd met een constante, die van nul verschilt, vermenigvuldigen),

dan vindt men:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k2} & \ldots & a_{k,k+1} \end{vmatrix} \ ; \quad x_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \ldots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k3} & \ldots & a_{k,k+1} \end{vmatrix} \ ; \ \ldots \ ;$$

$$x_{k+1} = (-)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

De onbekenden zijn dus gelijk aan of evenredig met determinanten van de orde k, die men uit de matrix

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k+1} \end{Vmatrix}$$

verkrijgt, door daarin achtereenvolgens een kolom weg te laten en de zo verkregen determinanten op de juiste wijze van een + of - teken te voorzien. Men schrijft in dit geval wel kortweg

$$x_1 : x_2 ; x_3 : \ldots : x_{k+1} \quad \propto \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k+1} \end{Vmatrix}$$

(Het teken $\propto$ uit te spreken als "evenredig met de minoren van"),

Bvb. het stelsel $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$ heeft de oplossing

$$x:y:z \quad \propto \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4:8:-4 = +1: -2:1.$$

Het geval $p \geqq k$; $q = k$ kan direct worden behandeld. Immers na geschikte nummering der onbekenden en vergelijkingen

heeft men $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pk}x_k = 0. \end{cases}$

Beschouw het stelsel der eerste k vergelijkingen van dit stelsel. Dit is een stelsel van k vergelijkingen met k onbekenden en rang der matrix = k, welk stelsel één en slechts één oplossing bezit, die men vindt met behulp van de regel van Cramer. Men ziet direct in, dat wegens het nul zijn van alle rechterleden, elk der onbekenden nul is, zodat de gevonden oplossing niet als oplossing van het homogene stelsel wordt aangemerkt.

Samenvattend zien wij dus dat p homogene lineaire vergelijkingen in q onbekenden, waarbij de rang der coëfficiëntenmatrix gelijk is aan k, geen oplossing bezit als k = q,

één oplossing bezit als k = q - 1.

∞^{q-k-1} oplossingen bezit als k < q - 1.

<u>Opg.7.</u> Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z - u = 0. \\ x + y - z + u = 0. \\ x - y + z + u = 0. \end{cases}$$

<u>Opg.8.</u> Los op het stelsel

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$$

Opg.9. Los op het stelsel

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ &x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \dots + 2^{n-1}x_n = 0 \\ &x_1 + 3x_3 + 9x_3 + \dots + 3^{n-1}x_n = 0. \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_1 + (n-1)x_2 + (n-1)^2x_3 + (n-1)^{n-1}x_n = 0. \end{aligned}$$

Wij zien uit het voorafgaande dat als het stelsel

$$(IV) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

een oplossing bezit, de rang der matrix $\|a_{rs}\|$ kleiner is dan n, dus is de determinant $|a_{rs}| = 0$, zodat het stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

waarin niet alle b_r nul zijn, dan geen oplossing bezit.

Beschouw verder het geval dat een quadratische matrix $\|a_{rs}\|$ van de n^e orde de rang n-1 heeft. Dus de determinant $|a_{rs}| = 0$.
Het stelsel (IV) heeft dan juist één oplossing:

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = A_{11} : A_{12} \dots : A_{1n} .$$

Deze oplossing vindt men ook door de minoren van een andere rij te nemen; dan vindt men:

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = A_{r1} : A_{r2} : \dots : A_{rn}.$$

Hieruit volgt dat als een determinant $|a_{rs}| = 0$ is, elk viertal minoren A_{rs}, A_{rt}, A_{ps}, A_{pt} een evenredigheid vormt

$A_{rs} : A_{rt} = A_{ps} : A_{pt}$.

§ 4. Veeltermen.

In deze paragraaf worden enige eigenschappen van veeltermen beschouwd, welke behalve voor de algebra ook van groot belang zijn voor de meetkunde en voor andere delen van de wiskunde.

Wij beginnen deze beschouwingen met de behandeling der Reststelling. Laat f(z) een veelterm voorstellen. Dan is de rest bij deling van f(z) door z-a gelijk aan f(a).

Bewijs: Men heeft

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n ,$$

dus $\quad f(a) = a_0a^n+a_1a^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, a+a_n$,

waaruit na aftrekking volgt

$$f(z)-f(a) = a_0(z^n-a^n) + a_1(z^{n-1}-a^{n-1}) + \dots\, a_{n-1}(z-a).$$

In het laatste lid is, zoals bekend, z^m-a^m te ontbinden in de n gedaante $(z-a)\, q_m(z)$ voor $m = 1, z, \dots, n$, waarbij $q_m(z)$ een veelterm in z voorstelt.

Opg.1. Bewijs dit.

Derhalve bezit $f(z)-f(a)$ de gedaante $(z-a)q(z)$, waarbij ook $q(z)$ een veelterm in z voorstelt. Dus

$$f(z) = (z-a)q(z) + f(a),$$

waarmede de bewering bewezen is.

Opg.2. Bepaal de rest bij deling van

$$z^n - 7z^2 + 3z + 1$$

door $z + 1$.

Opg.3. Bepaal de rest bij deling van $z^{30} - 4z^{18} + 11z^6 - 7z - 3$ door $z^5- 1$. Wil men de rest bij deling van $f(z)$ door $(z-a)(z-b)$ bepalen, waarbij $a \neq b$ is, dan merken wij op dat wij zoëven reeds vonden dat

(1) $\quad f(z) = (z-a)q(z) + f(a)$.

Verder is evenzo

$$q(z) = (z-b)p(z) + q(b),$$

dus

(2) $\quad f(z) = (z-a)(z-b)p(z)+(z-a)q(b)+f(a)$.

Uit (1) volgt

$$f(b) = (b-a)q(b)+f(a),$$

dus

$$q(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

hetgeen, ingevuld in (2), oplevert

$$f(z) = (z-a)(z-b)p(z)+(z-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+f(a).$$

De rest bij deling van $f(z)$ door $(z-a)(z-b)$ is dus

$$(z-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}z + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

Opg.4. Bepaal de rest bij deling van z^n-1 door z^2-1.

Opg.5. Bepaal de rest bij deling van een veelterm $f(z)$ door $(z-a)(z-b)(z-c)$, waarin $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

Wil men de rest bij deling van $f(z)$ door $(z-a)^2$ bepalen, dan kan men als boven te werk gaan en uit (1) en (2) concluderen dat

$$f(z) = (z-a)^2p(z)+(z-a)q(a)+f(a).$$

Terwijl wij zoëven $q(b)$ vonden door in (1) in te vullen $z = b$, gelukt het nu niet om op soortgelijke wijze $q(a)$ te bepalen. Wij moeten hi kennelijk anders te werk gaan. Nu vonden wij hierboven dat

$$f(z)-f(a) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\ (z^m-a^m)$$

$$= (z-a) \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\ (z^{m-1}+z^{m-2}a+\dots +a^{m-1}),$$

dus

$$q(z) = \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\ (z^{m-1}+z^{m-2}a+\dots+a^{m-1}),$$

waaruit volgt

(3) $$q(a) = \sum_{m=1}^{n} ma_{n-m}a^{m-1} .$$

De rest bij deling van f(z) door $(z-a)^2$ is blijkens (2) dus $Az + B$, waarin

$$A = q(a) = \sum_{m=0}^{n} ma_{n-m}\ a^{m-1}$$

en

$$B = f(a) -aq(a) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\ a^m- \sum_{m=1}^{n} ma_{n-m}\ a^m$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (1-m)\ a_{n-m}a^m .$$

Opmerking. De uitdrukkingen in het rechterlid van (3) wordt wel genoemd de afgeleide functie van de functie f(z) genomen voor z = a.

Het begrip afgeleide (functie) wordt nader in de differentiaalrekening behandeld. Wij gebruiken hier de volgende twee eigenschappen van afgeleide functies:

I. De afgeleide van de functie $f(z)= \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$

is de functie $$f'(z) = \sum_{m=1}^{n} ma_m z^{m-1} .$$

II. De afgeleide van het product f(z)g(z) van twee veeltermen f(z) en g(z) is gelijk aan

$$f'(z)g(z) + f(z)g'(z) .$$

Opg. 6. Bewijs dat de afgeleide van een som van twee veeltermen gelijk is aan de som der afgeleiden der veeltermen.

Opg. 7. Bewijs dat de afgeleide van $(z-a)^m$ gelijk is aan $m(z-a)^{m-1}$.

Wij definiëren thans het belangrijke begrip nulpunt van een veelterm f(z) of wortel van een vergelijking f(z) = 0. Hieronder wordt verstaan een getal w met de eigenschap f(w) = 0.

Met behulp van de reststelling ziet men direct in dat een getal w dan en slechts dan nulpunt is van een veelterm f(z) als f(z) te schrijven is in de gedaante

$$f(z) = (z- w)q(z),$$

waarbij ook q(z) een veelterm is.

Tot nu toe hebben wij ons er niet over uitgelaten tot wat voor getalverzameling de coëfficiënten van onze veeltermen behoren. Bekijkt men vergelijkingen met gehele coëfficiënten dan is het duideli dat de wortels niet geheel behoeven te zijn (men neme b.v. de verg. $2z+1 = 0$); evenmin behoeven de wortels dan rationaal te zijn (men lette op $z^2 - 2 = 0$), ja zelfs is het mogelijk dat de wortels niet reëel zijn (men beschouwe $z^2 + 1 = 0$). In de cursus analyse wordt be wezen dat iedere veelterm ten minste een al of niet reëel nulpunt be zit. Dit nulpunt kan zoals uit het bovenstaande bleek, niet reëel zi Wij gebruiken dit resultaat (van d'Alembert) hier en bewijzen:

Stelling. Een veelterm van de n^e graad is te schrijven als een produ van n eerstegraads veeltermen.

Bewijs. Uit de stelling van d'Alembert weten wij dat een veelterm f(van de n^e graad te schrijven is in de gedaante

$$f(z) = (z-w_1)f_1(z),$$

waarbij w_1 een nulpunt van $f(z)$ is en $f_1(z)$ eveneens een veelterm, welke kennelijk de graad $n-1$ heeft. Past men de stelling van d'Alembert toe op de veelterm $f_1(z)$ dan vindt men evenzo

$$f_1(z) = (z-w_2)f_2(z),$$

waarin $f_2(z)$ een veelterm van de graad $n-2$ is, enz.

Zo voortgaande vindt men tenslotte

$$f(z) = f_n.(z-w_1)(z-w_2) \ldots (z-w_n),$$

waarbij f_n een veelterm van de nulde graad, dus een constante is. Omdat twee veeltermen dan en slechts dan identiek zijn als al hun coefficiënten overeenstemmen, ziet men, lettende op de coëfficiënt van z^n, dat f_n gelijk is aan de coëfficiënt van z^n in $f(z)$.

Wij vinden dus

$$(4) \qquad a_0z^n+a_1z^{n-1}+ \ldots +a_{n-1}z+a_n = a_0(z-w_1)(z-w_2) \ldots (z-w_n).$$

Nu kunnen uit de identiteit van deze veeltermen nog meer conclus worden getrokken. Let men op de coëfficiënten van z^{n-1} in beide led dan vindt men

$$a_1 = -a_0\sum_{k=1}^{n} w_k, \text{ dus } \sum_{k=1}^{n} w_k = -\frac{a_1}{a_0} .$$

Evenzo vindt men

$$\sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{n} w_hw_k = -\frac{a_2}{a_0},$$

enz. De hier beschouwde uitdrukkingen $\sum w_k$, $\sum w_hw_k, \ldots$ noem de elementair symmetrische functies der wortels $w_1,\ldots,w_n$.

Opg.8. Schrijf de ~~elementair~~ symmetrische functies neer van de nul punten van een veelterm van de vierde graad.

Opg.9. Druk het product van alle nulpunten van een veelterm uit in de coëfficiënten der veelterm.

Opg. 10. Toon aan dat iedere gehele wortel van de vergelijking

$$z^4 - 33z^2 + 20z + 12 = 0.$$

een deler is van 12. Los daarna de vergelijking op.

Indien in het rechterlid van (4) onder de getallen $w_1, \dots, w_n$ gelijke voorkomen, zegt men dat de veelterm dubbele (of meervoudige) nulpunten bezit: komt een factor $z-w_j$ precies m keer voor dan zegt men dat de veelterm een m- voudig nulpunt w_j bezit; het nulpunt bezit de multipliciteit m.

Bezit de veelterm f(z) een nulpunt w met multipliciteit m, dan heeft men dus

$$f(z) = (z-w)^m g(z),$$

waarin g(z) een veelterm is, die niet door z-w deelbaar is. Past men de regel II en opgave 7 van differentiëren toe, dan vindt men

$$\begin{aligned} f'(z) &= m(z-w)^{m-1}g(z)+(z-w)^m g'(z) \\ &= (z-w)^{m-1}\left\{ mg(z)+(z-w)g'(z)\right\} . \end{aligned}$$

Daar de laatste factor niet door z-w deelbaar is (want g(z) is het niet), bezit f'(z) dus het nulpunt w met multipliciteit m-1. Zo doorgaande ziet men dat de afgeleide van f'(z) aan te geven met f''(z) het nulpunt w bezit met multipliciteit m-2 (mits natuurlijk $m \geq 2$ is), enz.

Wij hebben ook de stelling: Bezitten f(z) en f'(z) een gemeenschappelijk nulpunt w, dan is w een (ten minste) dubbel nulpunt van f(z). Immers stel f(z) = (z-w)g(z). Wij hebben te bewijzen dat z-w deelbaar is op g(z). Inderdaad vindt men uit

$$f'(z) = g(z)+(z-w)g'(z),$$

welke vorm blijkens het onderstelde door z-w deelbaar moet zijn, zodat g(z) deelbaar is door z-w .

Opg. 11. Zij w een k-voudig nulpunt van f(z). Ga na of w dan een nulpunt kan zijn van de $(k+1)^e$ afgeleide van f(z).

Opg. 12. Toon aan dat als z^2+pz+q een dubbel nulpunt bezit, geldt

$$\tfrac{1}{4}p^2 - q = 0.$$

Opg. 13. Bepaal de meervoudige wortels der vergelijking

$$z^4-z^3-5z^2+12 = 0.$$

Eventuele meervoudige wortels van een vergelijking f(z) = 0 zijn te vinden als gemeenschappelijke nulpunten van f(z) en f'(z), dus als nulpunten van de G.G.D. g(z) dezer veeltermen welke met de welbekende rekenwijze van Euclides kan worden bepaald. Ieder nulpunt van g(z) is een meervoudige wortel van f(z). Blijkt g(z) een constante te zijn, dan bezit g(z) geen meervoudige wortels.

Opg. 14. De vergelijking

$$z^4-4z+a = 0.$$

bezit een meervoudige wortel. Bepaal a en los daarna de vergelijking op.

Heeft de vergelijking $f(z) = 0$ de wortels $w_1,\ldots,w_n$ dan is het gemakkelijk aan te tonen dat de vergelijking

$$f(z-a) = 0$$

de wortels $w_1+a,\ w_2+a,\ldots,w_n+a$ bezit.

Opg.15. Bewijs dit.

Opg.16. Toon aan dat de vergelijking $f(\frac{z}{a}) = 0$ de wortels $aw_1,\ldots,aw_n$ bezit.

Opg.17. Bepaal de vergelijking met wortels $\frac{1}{w_1},\ldots,\frac{1}{w_n}$.

Opg.18. Bewijs voor de veelterm $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ met nulpunten $w_1,\ldots w_n$ de relatie

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\ldots+\frac{1}{w_n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Opg.19. Bewijs dat de rest $r(z)$ bij deling van een veelterm $f(z)$ door $(z-a)^2$ voldoet aan

$$\begin{vmatrix} z^2 & 1 & r(z) \\ a & 1 & f(a) \\ 1 & 0 & f(a) \end{vmatrix} = 0$$

Opg.20. Bepaal a en b zodanig dat de veelterm

$$z^{2n} + az + b$$

deelbaar is door $(z-1)^2$.

Opg.21. Van de veelterm $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ zijn de nulpunten ... w_3. Bepaal de veelterm met nulpunten w_1^2, w_2^2 en w_3^2.

Opg.22. Bepaal de rest bij deling van

$$z^6 + 3z^4 + 2z^3 + z^2 + 2 \text{ door } z^2 + 1.$$

Opg.23. De lengten der zijden van een driehoek zijn de wortels van de vergelijking

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Druk het oppervlak van de driehoek uit in p, q en r.

Een getal heet algebraïsch als het nulpunt is van een veelterm met gehele coëfficiënten. Is er geen zo'n veelterm te vinden waarvan het getal nulpunt is, dan heet het transcendent.

Opg.24. Bewijs dat alle rationale getallen algebraïsch zijn. Bewijs dat $\sqrt[m]{n}$ voor gehele m en n algebraïsch is.- Door Lindemann is in 1882 met behulp van niet algebraïsche hulpmiddelen bewezen dat het getal π transcendent is. Hiermede is tevens het aloude probleem de cirkelquadratuur definitief opgelost (in negatieve zin).