

Serie voordrachten over:

Distributies

door

Prof. Dr A.C. Zaanen

(Eerste voordracht op 1 November 1956)

Literatuur

1. L. Schwartz, Théorie des distributions, Act. Sci. et Ind., Tome 1 (1950), Tome 2 (1951), Hermann et Cie (Paris).

2. I. Halperin, Introduction to the theory of distributions, Univ. of Toronto Press (1952).

1. Inleiding

Laat $f(x)$ een functie van één reële veranderlijke x zijn, integreerbaar (in de zin van Riemann of Lebesgue) over elk begrens interval. Dan bestaat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ voor elke functie $\varphi(x)$, die continu is en "in de verte" nul is (d.w.z. er bestaat een interval $a \leq x \leq b$, waarbuiten $\varphi(x) = 0$). Noem de uitkomst van de integraal $F(\varphi)$. Alvorens een nadere keus voor $f(x)$ te doen, onderstellen wij eerst verder dat $\varphi(x)$ een, eveneens continue, afgeleide $\varphi'(x)$ heeft (dan is vanzelf $\varphi'(x) = 0$ buiten $a \leq x \leq b$), en dat ook $f(x)$ een afgeleide $f'(x)$ heeft, die integreerbaar is over elk eindig interval. Met behulp van partiële integratie volgt dan direct, dat def $F'(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -F(\varphi')$.

Onderstel nu dat $f(x) = 0$ buiten $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$, $f(x) \geq 0$ in $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$, en $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx = 1$. Als ε "klein" is, dan is dus, wegens de continuïteit van $\varphi(x)$ en $\varphi'(x)$, $F(\varphi)$ "ongeveer" gelijk aan $\varphi(0)$, en $F'(\varphi)$ "ongeveer" gelijk aan $-\varphi'(0)$. De volgende redenering wordt nu wel toegepast. Laat $\varepsilon_n \downarrow 0$, neem bij elke ε_n een $f_n(x)$, die aan de bovengenoemde eisen voldoet, en pas een limietovergang toe. Dan "nadert" $f_n(x)$ tot een "functie" $\delta(x)$, de δ -functie van Dirac, die dus de eigenschappen heeft dat $\delta(x) = 0$ voor $x \neq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$, en $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ voor continue φ , terwijl de "afgeleide" $\delta'(x)$ de eigenschap heeft dat $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\varphi(x)dx = -\varphi'(0)$. Het zal duidelijk zijn, dat de wiskundige strengheid hier zoek is; een dergelijke functie $\delta(x)$ bestaat niet, laat staan haar afgeleide $\delta'(x)$. Toch werden in de

z.g. operatorenrekening van Heaviside met behulp van dergelijke redeneringen (men voerde zelfs nog hogere afgeleiden van $\delta(x)$ in) juiste resultaten verkregen. De theorie der distributies is nu een gezonde basis gebleken om van daaruit tot deze, en nog andere, resultaten te komen.

2. De lineaire ruimte (C)

De k -dimensionale numerieke ruimte der punten $x = (x_1, \dots, x_k)$, alle x_i reëel, met afstand $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, noemen wij R_k . Met behulp van deze afstandsdefinitie definiëren wij op bekende wijze wat open verzamelingen, gesloten verzamelingen, begrensde verzamelingen, ophopingspunten, enz. zijn.

Als $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_k)$ gedefiniëerd en continu is in elk punt $x \in R_k$, dan is dus de verzameling E der punten x , waar $\varphi(x) \neq 0$, open. De kleinste gesloten verzameling, die E omvat (de z.g. afsluiting van E) heet de drager van $\varphi(x)$.

Definitie

(a) De collectie van alle continue $\varphi(x)$ met begrensde drager in R_k heet (C).

(b) Als $\varphi_n(x)$ en $\varphi(x)$ tot (C) behoren, dan zegt men dat " $\lim \varphi_n(x) = \varphi(x)$ in (C)" indien (1^e): De dragers der $\varphi_n(x)$ zijn allemaal deelverzamelingen van een vaste begrensde verzameling B , (2^e): $\lim \varphi_n(x) = \varphi(x)$ gelijkmatig op B (en dus gelijkmatig op R_k).

Merk op dat (C) een lineaire ruimte is, d.w.z. als $\varphi_1(x) \in (C)$, $\varphi_2(x) \in (C)$ en a_1, a_2 zijn reële getallen, dan is $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) \in (C)$.

Laat nu aan elke $\varphi(x) \in (C)$ een reëel getal $F(\varphi)$ toegevoegd zijn. Men zegt dan dat $F(\varphi)$ een functionaal is, gedefiniëerd op (C). De functionaal $F(\varphi)$ heet lineair als $F(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1F(\varphi_1) + a_2F(\varphi_2)$ voor alle reële a_1, a_2 . De functionaal $F(\varphi)$ heet continu, als uit $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ in (C) volgt dat $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$, waarbij de laatste pijl gewone convergentie van een rij getallen voorstelt.

Een voorbeeld van een continue lineaire functionaal op (C) is

$$(I) \quad F(\varphi) = \int_{R_k} f(x)\varphi(x)dx ,$$

waarbij $f(x)$ integreerbaar ondersteld is over elk begrensd interval van R_k . Een algemener voorbeeld krijgt men door een massaverdeling μ in R_k te beschouwen, zó dat $\int_B |d\mu|$ voor elk begrensd interval B eindig is. Officiëel gezegd: $\mu(E)$ is een (reële) σ -additieve

verzamelingsfunctie, gedefinieerd voor alle E van een σ -ring, die de open verzamelingen van R_k bevat, zó dat de totale variatie $\int_B |d\mu|$ eindig is voor elke begrensde verzameling B uit die σ -ring. Dan is

$$(II) \quad F(\varphi) = \int_{R_k} \varphi(x) d\mu$$

een continue lineaire functionaal op (C) . Dat (I) een bijzonder geval van (II) is, volgt door op te merken dat

$$\int_{R_k} f(x) \varphi(x) dx = \int_{R_k} \varphi(x) d\mu$$

voor $\mu(E) = \int_E f(x) dx$. In dit geval heeft de massaverdeling μ de dichtheid $f(x)$. Niet elke massaverdeling heeft echter een dichtheid; als wij de massaverdeling μ beschouwen, bestaande uit uitsluitend de puntmassa $+1$ in het punt y van R_k , en als wij de corresponderende $F(\varphi) = \int \varphi(x) d\mu$ de speciale naam $\delta_y(\varphi)$ geven, dan is dus $\delta_y(\varphi) = \varphi(y)$. Wij kunnen dus, enigszins vreemd, het volgende zeggen: Als deze massaverdeling een dichtheid $\delta_y(x)$ zou hebben, dus als $\delta_y(\varphi) = \int \delta_y(x) \varphi(x) dx$ zou gelden, dan was $\delta_y(x)$ een δ -functie van Dirac, met oneindig hoge piek in het punt y .

Het is een beroemde stelling van F. Riesz, dat elke continue lineaire functionaal op (C) van de vorm (II) is; daarbij is μ door $F(\varphi)$ eenduidig bepaald. Op het bewijs zullen wij hier niet ingaan.

3. De lineaire ruimte (D)

Definitie. Bij definitie is (D) de collectie van alle continue $\varphi(x)$ met begrensde drager in R_k , waarvoor bovendien alle partiële afgeleiden van elke orde bestaan en continu zijn.

Merk op dat de drager van elke partiële afgeleide bevat is in de drager van φ zelf. Als dus $\varphi(x) \in (D)$, dan behoort ook elke partiële afgeleide van $\varphi(x)$ tot (D) . Voor $k = 1$ is (D) de collectie der "oneindig vaak differentieerbare" functies met begrensde drager. Klaarblijkelijk is (D) een echte deelcollectie van (C) , en verder is (D) een lineaire ruimte.

De eerste vraag is of (D) , behalve de nulfunctie (die identiek nul is), wel functies bevat. Het antwoord is bevestigend; uitgaande van de bekende eigenschap dat van de functie $\varphi(x)$, die nul is voor $x \leq 0$, en gelijk aan $\exp(-\frac{1}{x})$ voor $x > 0$, alle afgeleiden in $x = 0$ gelijk aan nul zijn, is het niet moeilijk in te zien dat de functie

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x-a} - \frac{1}{b-x}) & \text{voor } a < x < b, \\ 0 & \text{voor alle andere } x, \end{cases}$$

tot (D) behoort, als $k = 1$. Voor n geheel en positief is dan ook $\{\varphi_{a,b}(x)\}^{1/n} \in (D)$. Voor $k > 1$ geldt iets dergelijks; als $r^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2$, dan is de functie, die nul is voor $r \geq \varepsilon$, en gelijk aan $\exp(-\frac{1}{\varepsilon^2 - r^2})$ voor $r < \varepsilon$, een functie van (D).

Definitie. Als $\varphi_n(x)$ en $\varphi(x)$ tot (D) behoren, dan zegt men dat " $\lim \varphi_n(x) = \varphi(x)$ in (D)" indien (1^e): De dragers der $\varphi_n(x)$ zijn allemaal deelverzamelingen van een vaste begrensde verzameling B, (2^e): $\lim \varphi_n(x) = \varphi(x)$ gelijkmatig op B, $\lim \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ gelijkmatig op B ($i = 1, \dots, k$), $\lim \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_j}$ gelijkmatig op B ($i, j = 1, \dots, k$) enz. Er is dus gelijkmatige convergentie voor elke partiële afgeleide; de gelijkmatigheid behoeft niet in alle partiële afgeleiden tezamen te gelden.

Definitie. De lineaire functionaal $F(\varphi)$, gedefinieerd op (D), heet continu op (D) als uit $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ in (D) volgt dat $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$. Een continue lineaire functionaal op (D) heet een distributie.

4. Voorbeelden van distributies

Wij merken eerst het volgende op: Als $\varphi_n(x) \in (D)$ en $\varphi(x) \in (D)$, en als $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ in (D), dan is zeker $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ in (C). Als dus $F(\varphi)$ een continue lineaire functionaal op (C) is, dan is de restrictie van $F(\varphi)$ tot (D) zeker een continue lineaire functionaal op (D), dus een distributie. Als eerste voorbeelden van distributies hebben wij dus die van het type

$$(I) \quad F(\varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

$$(II) \quad F(\varphi) = \int \varphi(x) d\mu.$$

Distributies van type (I) zijn belangrijk, en daarom is het van belang even te bewijzen, dat onderling verschillende functies $f(x)$ ook verschillende distributies $F(\varphi)$ opleveren. Equivalent daarmee is het bewijs, dat uit $F(\varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx = 0$ voor alle $\varphi(x) \in (D)$ volgt dat $f(x) \equiv 0$ (eventueel op een verzameling van de maat nul na). Het bewijs voor $k = 1$ is als volgt: Uit $\int f(x) \varphi(x) dx = 0$ voor alle $\varphi \in (D)$ volgt speciaal dat

$$\int f(x) \{\varphi_{a,b}(x)\}^{1/n} dx = 0$$

voor alle $a < b$ en alle gehele positieve n . Dan is

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \{\varphi_{a,b}(x)\}^{1/n} dx = 0$$

voor alle a, b ($a < b$), waaruit $f(x) \equiv 0$ volgt.

Zoals gezegd, is elke continue lineaire functionaal op (C) van het type (II). Op (D) bestaan echter continue lineaire functionalen, die niet van dit type zijn. Wij krijgen een voorbeeld door een massaverdeling (of ladingsverdeling) te beschouwen, bestaande uit een massa (of lading) $-\frac{1}{\varepsilon}$ in $y = (y_1, \dots, y_k)$ en $+\frac{1}{\varepsilon}$ in $(y_1 + \varepsilon, y_2, \dots, y_k)$. Hiermee correspondeert de lineaire functionaal

$$F_\varepsilon(\varphi) = \frac{\varphi(y_1 + \varepsilon, y_2, \dots, y_k) - \varphi(y_1, \dots, y_k)}{\varepsilon},$$

die dus van het type (II) is. Door limietovergang volgt dus dat met een dipool in het punt y met moment $+1$ in de x_1 -richting correspondeert de functionaal

$$(III) \quad F(\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{x=y}.$$

Deze functionaal is lineair en continu op (D), dus een distributie. Was er een μ , zó dat bijv. $F(\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\mu$, dan zou speciaal voor alle $\varphi(x)$, die nul zijn buiten $-1 \leq x \leq 1$, en waarvoor $|\varphi(x)| \leq 1$, gelden dat $|F(\varphi)| \leq \int |d\mu| = A$. Maar onder deze $\varphi(x)$ zijn er zeker waarvoor $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} > A$.

Een uitbreiding van deze dipoordistributie krijgen wij door een (voldoend glad) stuk oppervlak S te beschouwen, waarop een dubbellaag met oppervlakedichtheid α aanwezig is. Dan is

$$(IV) \quad F(\varphi) = \int_S \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

(n is de normaal op S) de daarmee corresponderende distributie.

Ook

$$(V) \quad (\Delta \varphi)_{x=y} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} \right)_{x=y}$$

is een distributie.

Het volgende voorbeeld houdt verband met wat men wel eens het eindige deel van een divergente integraal noemt (een begrip, door Hadamard ingevoerd).

Als $g(x)$ integreerbaar is over $[a+\varepsilon, b]$ voor elke ε , die voldoet aan $0 < \varepsilon < b-a$, maar misschien niet voor $\varepsilon = 0$, dan kan het voorkomen, dat men $I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b g(x) dx$ kan schrijven in de vorm

$$I(\varepsilon) = \sum_{i=1}^p A_i \varepsilon^{\lambda_i} + A_0 \log \varepsilon + E(\varepsilon),$$

waarbij $A_0, A_1, \dots, A_p$ constanten zijn, en de exponenten λ_i

negatief zijn (of, als $g(x)$ complex is, $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$), en waarbij $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E(\varepsilon) = E(0)$ bestaat en eindig is. Het is niet moeilijk te bewijzen dat deze schrijfwijze eenduidig bepaald is, zodat dus de definitie:

$$(ED) \int_a^b g(x) dx = E(0)$$

zinnig is. Men noemt $E(0)$ het eindige deel van de integraal. Als $\int_a^b g(x) dx$ bestaat, dan is $E(0)$ die integraal zelf.

Als nu m een complex getal is ($m \neq -1, -2, \dots$), en $g(x) = 0$ voor $x \leq 0$, $g(x) = x^m$ voor $x > 0$, terwijl $\varphi(x) \in (D)$, dan bestaat niet voor elke waarde van m de integraal $\int_0^\infty g(x) \varphi(x) dx = \int_0^\infty x^m \varphi(x) dx$. Wij gaan bewijzen, dat $(ED) \int_0^\infty x^m \varphi(x) dx$ een distributie is.

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty x^m \varphi(x) dx &= -\frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1} \varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\infty \frac{x^{m+1}}{m+1} \varphi'(x) dx = \\ &= -\frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1} \varphi(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \varphi'(\varepsilon) - \dots + (-1)^p \frac{\varepsilon^{m+p}}{(m+1) \dots (m+p)} \varphi^{(p-1)}(\varepsilon) + \\ &+ (-1)^p \int_\varepsilon^\infty \frac{x^{m+p}}{(m+1) \dots (m+p)} \varphi^{(p)}(x) dx. \end{aligned}$$

waarbij p zó is, dat $\operatorname{Re}(m+p) > -1$. Substitueert men nu

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \frac{\varepsilon}{1!} \varphi'(0) + \dots + \frac{\varepsilon^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(0) + \frac{\varepsilon^p}{p!} \varphi^{(p)}(\varepsilon'),$$

$0 < \varepsilon' < \varepsilon$,

en dergelijke uitdrukkingen voor $\varphi'(\varepsilon)$ t/m $\varphi^{(p-1)}(\varepsilon)$, steeds met een restterm die $\varphi^{(p)}$ bevat, dan blijkt dat

$$(VI) \quad (ED) \int_0^\infty x^m \varphi(x) dx = (-1)^p \int_0^\infty \frac{x^{m+p}}{(m+1) \dots (m+p)} \varphi^{(p)}(x) dx$$

voor alle p waarvoor $\operatorname{Re}(m+p) > -1$. Dit is klaarblijkelijk een distributie, die met $*x^m(\varphi)$ aangeduid wordt.

Als m een geheel negatief getal is: $m = -p$ ($p = 1, 2, \dots$), dan vindt men op een dergelijke manier dat

$$\begin{aligned} (VII) \quad (ED) \int_0^\infty x^{-p} \varphi(x) dx &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}\right) \frac{\varphi^{(p-1)}(0)}{(p-1)!} \\ &\quad - \frac{1}{(p-1)!} \int_0^\infty \log x \varphi^{(p)}(x) dx, \end{aligned}$$

en dit is ook een distributie.

De formule (VI) is te schrijven als

$$\frac{1}{\Gamma(m)} *x^{m-1}(\varphi) = \frac{(-1)^p}{\Gamma(m+p)} \int_0^\infty x^{m+p-1} \varphi^{(p)}(x) dx$$

voor $m \neq 0, -1, -2, \dots$ en $\operatorname{Re}(m+p) > 0$. Het rechterlid is echter voor $m = 0, -1, -2, \dots$ ook gedefinieerd; voor $m = -q$ ($q = 0, 1, 2, \dots$) levert de keus $p = q + 1$ voor het rechterlid $(-1)^q \varphi^{(q)}(0)$. Wij krijgen dus voor elke m een distributie $Y_m(\varphi)$:

$$(VIII) \quad \begin{cases} Y_m(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(m)} *x^{m-1}(\varphi) & \text{voor } m \neq 0, -1, -2, \dots, \\ Y_{-q}(\varphi) = (-1)^q \varphi^{(q)}(0) & \text{voor } q = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Merk op dat voor elke waarde van m geldt dat $Y_m(\varphi') = -Y_{m-1}(\varphi)$.

5. Afgeleiden van distributies

In de inleiding is al opgemerkt, dat als (in het geval $k = 1$) $f(x)$ een afgeleide $f'(x)$ heeft, die over elk begrensde interval integreerbaar is, en $F(\varphi)$ en $F'(\varphi)$ zijn de distributies, gedefinieerd door

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad F'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx,$$

dan is $F'(\varphi) = -F(\varphi')$. Iets dergelijks geldt voor $k > 1$; als $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ bestaat en integreerbaar is over elk begrensde x_1 -interval, dan is

$$F'_1(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi dx = \int dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi dx_1,$$

waarbij $dx = dx_1 \dots dx_k = dy dx_1$; de binnenste integraal is

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1, \text{ dus}$$

$$F'_1(\varphi) = - \int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = -F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right).$$

Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie:

Definitie. Als $F(\varphi)$ een willekeurige distributie is, dan verstaat men onder de distributieafgeleide $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, toegepast op φ , het getal $-F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$. Dus

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\varphi) = -F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right).$$

Het is direct duidelijk dat $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ weer een distributie is. Op overeenkomstige wijze definiëren wij hogere afgeleiden van F ; elke distributie F bezit dus partiële afgeleiden van alle orden, en de volgorde van differentiatie in gemengde partiële afgeleiden is willekeurig, omdat de volgorde bij gewone partiële differentiatie van functies $\varphi \in (D)$ willekeurig is.

Belangrijk voor later is de volgende opmerking: Als a_1 en a_2 reëel zijn, en F_1 en F_2 zijn distributies, dan definiëren wij de distributie $a_1 F_1 + a_2 F_2$ door

$$(a_1 F_1 + a_2 F_2)(\varphi) = a_1 F_1(\varphi) + a_2 F_2(\varphi).$$

Hierdoor wordt de collectie (D') van alle distributies een lineaire ruimte. In deze lineaire ruimte is differentiatie een lineaire operatie, d.w.z. bijv.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_1 F_1 + a_2 F_2) = a_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + a_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_i},$$

want beide leden, toegepast op φ , geven

$$= a_1 F_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + a_2 F_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right).$$

6. Voorbeelden van distributiefafgeleiden.

(1) De functie $Y(x)$ van Heaviside (ook wel "unit step function" genoemd) is gedefinieerd door $Y(x)=0$ voor $x < 0$, $Y(x)=1$ voor $x > 0$. Met deze functie correspondeert de distributie

$$F_Y(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Voor de afgeleide distributie $F'_Y = \frac{dF_Y}{dx}$ geldt

$$F'_Y(\varphi) = -F_Y(\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi);$$

deze afgeleide distributie correspondeert dus met een puntmassa +1 in de oorsprong. In de taal van de operatorenrekening: "de functie van Heaviside $Y(x)$ heeft als afgeleide de δ -functie van Dirac met piek in de oorsprong". Verder is

$$F''_Y(\varphi) = \delta'_0(\varphi) = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0),$$

$$F^{(n+1)}_Y(\varphi) = \delta^{(n)}_0(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

(2) Laat op de rechte lijn R_1 een verdeling $\dots x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ aangebracht zijn, waarbij $x_{-n} \rightarrow -\infty$ en $x_n \rightarrow \infty$

als $n \rightarrow \infty$, en laat $f(x)$ differentieerbaar zijn voor $x \neq x_\nu$, terwijl de afgeleide $f'(x)$ integreerbaar is over elk interval $(x_{\nu-1}, x_\nu)$. De sprong $f(x_\nu+) - f(x_\nu-)$ noemen we f_ν ; verder gebruiken we de notaties

$$[F](\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad [F'](\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx.$$

Het is nu in 't algemeen niet meer waar dat de distributieafgeleide $\frac{d[F]}{dx}$ gelijk is aan $[F']$, want

$$\begin{aligned} \frac{d[F]}{dx}(\varphi) &= -[F](\varphi') = -\sum_{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_{\nu}} f \varphi' dx = \\ &= -\sum f(x_{\nu-}) \varphi(x_{\nu}) + \sum f(x_{\nu-1}+) \varphi(x_{\nu-1}) + \int f' \varphi dx = \\ &= \sum_{\nu} f_{\nu} \varphi(x_{\nu}) + \int f' \varphi dx, \end{aligned}$$

dus

$$\frac{d[F]}{dx} = [F'] + \sum_{\nu} f_{\nu} \delta_{x_{\nu}}.$$

(3) Laat $Y_m(\varphi)$ de distributie zijn van voorbeeld (VIII) in par. 4. We hebben al gezien dat $Y_m(\varphi') = -Y_{m-1}(\varphi)$ voor alle m . Dan is dus

$$Y_m'(\varphi) = -Y_m(\varphi') = Y_{m-1}(\varphi);$$

algemeen dus $Y_m^{(p)} = Y_{m-p}$ voor alle m en alle positieve gehele p .

(4) Als F een distributie is, dan voldoet de distributie $\Delta F = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ dus aan

$$(\Delta F)(\varphi) = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\varphi) = \sum F\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\right) = F(\Delta \varphi).$$

Laat nu in R_3 de distributie, die correspondeert met $\frac{1}{r}$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, voorgesteld worden door $\left[\frac{1}{r}\right]$. We gaan de distributieafgeleide $\Delta \left[\frac{1}{r}\right]$ berekenen:

$$(\Delta \left[\frac{1}{r}\right])(\varphi) = \left[\frac{1}{r}\right](\Delta \varphi) = \int_{R_3} \frac{1}{r} \Delta \varphi dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r \geq \varepsilon} \frac{1}{r} \Delta \varphi dV,$$

en volgens de stelling van Green is

$$\int_{r \geq \varepsilon} \left(\frac{1}{r} \Delta \varphi - (\Delta \frac{1}{r}) \varphi \right) dV = \int_{r=\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \varphi d\omega - \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\omega.$$

Nu is $\Delta \frac{1}{r} = 0$ voor $r \geq \varepsilon$, en $d\omega = \varepsilon^2 d\omega$ (ω is de ruimtehoek, dus

$$(\Delta \left[\frac{1}{r}\right])(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{r=\varepsilon} \varphi d\omega - \varepsilon \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\omega \right] = -4\pi \varphi(0),$$

d.w.z.

$$\Delta \left[\frac{1}{r} \right] = -4\pi \delta_0$$

($\frac{1}{r}$ is de potentiaal van een puntlading +1 in de oorsprong).

7. Primitieve distributies van een gegeven distributie.

Definitie. Op R_1 heet de distributie F een primitieve distributie van de distributie G als $F' = \frac{dF}{dx} = G$.

Teneinde te bewijzen dat een gegeven distributie G altijd een primitieve distributie F bezit, beantwoorden we eerst de vraag wanneer een functie $\psi(x) \in (D)$ de afgeleide is van een functie $\varphi(x) \in (D)$. Als $\varphi(x) \in (D)$, en $\psi(x) = \varphi'(x)$, dan is zeker $\psi(x) \in (D)$, en bovendien is $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Omgekeerd, als $\psi(x) \in (D)$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$, dan is $\psi(x)$ de afgeleide van een functie $\varphi(x) \in (D)$, nl. van $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$. Door de eis dat $\varphi(x)$ een begrensde drager moet hebben, is $\varphi(x)$ door $\psi(x)$ zelfs eenduidig bepaald.

De collectie van deze afgeleiden $\psi(x)$ is een lineaire deelruimte (H) van (D) . Kies nu één functie $\varphi_0(x) \in (D)$, zó dat $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1$. Elke $\varphi(x) \in (D)$ is dan te schrijven in de vorm

$$(\alpha) \quad \varphi(x) = \lambda \varphi_0(x) + \psi(x), \quad \lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \psi(x) \in (H).$$

Men behoeft nl. slechts op te merken dat voor deze waarde van λ geldt dat $\int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x) - \lambda \varphi_0(x)\} dx = 0$, dus $\varphi(x) - \lambda \varphi_0(x) \in (H)$. Op grond van (α) heet (H) een hypervlak in (D) . Merk ook op dat de splitsing (α) eenduidig bepaald is.

Als $k(x)$ constant is, dus $k(x) = k$ voor alle $x \in R_1$, dan heet de daarmee corresponderende distributie $[k]$, dus $[k](\varphi) = k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$, een constante distributie. De distributieafgeleide $[k]'$ is dan de nulfunctionaal, want

$$[k]'(\varphi) = -[k](\varphi') = -k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) dx = 0.$$

Stelling. Elke distributie G heeft oneindig veel primitieve distributies F . Twee zulke primitieve distributies verschillen een constante distributie.

Bewijs. Stel, dat er een distributie is, waarvoor $F' = G$. Als dan $\psi \in (D)$ de afgeleide is van $\varphi_1(x) \in (D)$, dan is $F(\psi) = F(\varphi_1') = -F'(\varphi_1) = -G(\varphi_1)$, m.a.w. als G gegeven is, dan is F daardoor op het hypervlak (H) volkomen bepaald. Een willekeurige $\varphi \in (D)$ is volgens (α) eenduidig te schrijven in de vorm $\varphi(x) = \lambda \varphi_0(x) + \psi(x)$,

waarbij $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ en $\psi = \varphi_1'$, dus

$$(\beta) \quad F(\varphi) = \lambda F(\varphi_0) - G(\varphi_1).$$

Omgekeerd, als we $\varphi_0(x)$ gekozen hebben (waardoor dus de splitsing (α) voor elke $\varphi \in (D)$ vaststaat), en we kiezen het getal $F(\varphi_0)$ willekeurig, dan stelt (β) een distributie voor, die voldoet aan $F'=G$. Laat, om dit te bewijzen, $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in (D) . Als dan $\varphi_n = \lambda_n \varphi_0 + \psi_n$, en $\varphi = \lambda \varphi_0 + \psi$, dan is $\lambda_n \rightarrow \lambda$, dus $\psi_n \rightarrow \psi$ in (D) , dus ook $\varphi_{1n} = \int_{-\infty}^x \psi_n(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^x \psi(t) dt = \varphi_1$ in (D) . Daar G een distributie is, is dan $G(\varphi_{1n}) \rightarrow G(\varphi_1)$; daar ook $\lambda_n F(\varphi_0) \rightarrow \lambda F(\varphi_0)$, is dus $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$. Hieruit volgt dat in (β) een distributie F staat. Voor $\psi(x) = \varphi'(x)$ luidt de kanonieke splitsing (α) nu $\varphi'(x) = \psi(x)$, dus $F(\varphi') = -G(\varphi)$ volgens (β) ; voor een willekeurige $\varphi \in (D)$ is dus $F'(\varphi) = -F(\varphi') = G(\varphi)$, waarmee bewezen is dat $F'=G$.

Conclusie: $F'=G$ heeft bij gegeven G oneindig veel oplossingen F , die zich van elkaar onderscheiden door verschillende keuze van $F(\varphi_0)$. Voor $F_1(\varphi_0) = C_1$ en $F_2(\varphi_0) = C_2$ is dus $F_1(\varphi) - F_2(\varphi) = (C_1 - C_2) \lambda = (C_1 - C_2) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$, d.w.z. F_1 en F_2 verschillen een constante distributie.

Merk nog op dat, als de gegeven distributie G van de vorm $G(\varphi) = \int g \varphi dx$ is, waarbij $g(x)$ integreerbaar is over elk begrensde interval, dan elke oplossing van $F'=G$ correspondeert met een onbepaalde integraal van $g(x)$, d.w.z. $F(\varphi) = \int f \varphi dx$ met $f(x) = \int_0^x g(t) dt + C$.

Laat nu $k > 1$. We geven (D) dan even de index k , dus $(D)_k$; als het wenselijk is, schrijven we zelfs $(D)_{x_1, \dots, x_k}$. Als $\psi \in (D)_k$, dan is nodig en voldoende, opdat $\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ voor een $\varphi \in (D)_k$, dat $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 = 0$ voor alle $x_2, \dots, x_k$, en voor een gegeven ψ , die aan deze voorwaarde voldoet, is φ weer eenduidig bepaald. We onderzoeken eerst of er distributies F bestaan, waarvoor $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ de nulfunctionaal is. Als F zo'n distributie is, dan moet $F(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) = 0$ voor alle φ , d.w.z. $F(\psi) = 0$ voor alle ψ , die voldoen aan $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, \dots, x_k) dx_1 = 0$. Hieruit volgt dat aan alle φ , waarvoor $\lambda(x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_k) dx_1$ dezelfde uitkomst levert, dezelfde $F(\varphi)$ toegevoegd is, m.a.w. $F(\varphi)$ is een lineaire functionaal op de lineaire ruimte der $\lambda(x_2, \dots, x_k)$. Klaarblijkelijk behoren alle $\lambda(x_2, \dots, x_k)$ tot $(D)_{x_2, \dots, x_k}$. Omgekeerd is elke $\lambda(x_2, \dots, x_k) \in (D)_{x_2, \dots, x_k}$ van de vorm $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_k) dx_1$; neem nl. $\varphi(x_1, \dots, x_k) = \lambda(x_2, \dots, x_k) \varphi_0(x_1)$,

waarbij $\varphi_0(x_1) \in (D)_{x_1}$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1$. Verder is

$$\lambda_n(x_2, \dots, x_k) \varphi_0(x_1) \rightarrow \lambda(x_2, \dots, x_k) \varphi_0(x_1) \text{ in } (D)_k$$

dan en alleen dan als $\lambda_n \rightarrow \lambda$ in $(D)_{x_2, \dots, x_k}$. Conclusie: $F(\varphi)$ is niet alleen een lineaire functionaal op $(D)_{x_2, \dots, x_k}$, maar zelfs een distributie. Dus: Als er een distributie F is, waarvoor $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$, dan is er een distributie Φ op $(D)_{x_2, \dots, x_k}$, zó dat

$$(\gamma) \quad F(\varphi) = \Phi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_k) dx_1 \right).$$

Omgekeerd, als Φ een willekeurige distributie op $(D)_{x_2, \dots, x_k}$ is, dan is door (γ) een distributie F op $(D)_k$ gedefinieerd, en

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\varphi) = -F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = -\Phi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \right) = 0.$$

Om bij een gegeven distributie G op $(D)_k$ alle oplossingen van $\frac{\partial F}{\partial x_1} = G$ te vinden, is het nu dus voldoende één bijzondere oplossing te bepalen. Voor die functies ψ , die van de vorm $\psi =$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \text{ zijn, staat } F(\psi) \text{ vast, want } F(\psi) = F\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right) = -\frac{\partial F}{\partial x_1}(\varphi_1) = -G(\varphi_1).$$

Met dezelfde notaties als hierboven geldt voor een willekeurige $\varphi \in (D)_k$ dat $\varphi - \lambda(x_2, \dots, x_k) \varphi_0(x_1) = \psi(x)$ een afgeleide is (want $\int_{-\infty}^{\infty} \psi dx_1 = 0$), en ψ is door φ eenduidig bepaald. Als dus weer $\psi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$, dan is $F(\varphi) = -G(\varphi_1)$ een bijzondere oplossing van $\frac{\partial F}{\partial x_1} = G$.

In het bijzondere geval dat $k=2$, bewijzen we nog de volgende stelling:

Als G_1 en G_2 distributies op R_2 zijn, dan bestaat er een distributie F zó dat $\frac{\partial F}{\partial x_1} = G_1$ en $\frac{\partial F}{\partial x_2} = G_2$ dan en alleen dan als

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_2} = \frac{\partial G_2}{\partial x_1}.$$

Bewijs. Als er zo'n F bestaat, dan is $\frac{\partial G_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial G_2}{\partial x_1}$. Laat omgekeerd $\frac{\partial G_1}{\partial x_2} = \frac{\partial G_2}{\partial x_1}$, en laat F_1 een bijzondere oplossing zijn van $\frac{\partial F}{\partial x_1} = G_1$. De algemene oplossing van $\frac{\partial F}{\partial x_1} = G_1$ is dan

$$F(\varphi) = F_1(\varphi) + \Phi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) dx_1 \right).$$

We proberen nu F zó te bepalen, dat ook aan $\frac{\partial F}{\partial x_2} = G_2$ voldaan is. Dan moet dus

$$G_2(\varphi) = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\varphi) + \frac{d\Phi}{dx_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) dx_1 \right),$$

$$(G_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x_2})(\varphi) = \frac{d\Phi}{dx_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) dx_1 \right).$$

$$\text{Maar } \frac{\partial}{\partial x_1} (G_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}) = \frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial G_1}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} (G_1 - \frac{\partial F_1}{\partial x_1}) = 0,$$

d.w.z. $(G_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x_2})(\varphi) = \Psi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) dx_1 \right)$. We behoeven dus slechts in $(D)_{x_2}$ de distributievergelijking $\frac{d\Phi}{dx_2} = \Psi$ op te lossen. Zoals reeds bewezen, heeft deze vergelijking oneindig veel oplossingen voor Φ , die onderling een constante distributie verschillen, d.w.z. zo'n verschil is van de vorm

$$C \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = C \int_{R_2} \varphi(x) dx.$$

Dus: Als $\frac{\partial G_1}{\partial x_2} = \frac{\partial G_2}{\partial x_1}$, dan zijn er oneindig veel distributies F , waarvoor $\frac{\partial F}{\partial x_1} = G_1$ en $\frac{\partial F}{\partial x_2} = G_2$, en elk tweetal verschilt een constante distributie.

8. Convergentie in de lineaire ruimte der distributies.

We hebben al gezien dat de collectie der distributies een lineaire ruimte (D') is. We zullen in (D') een convergentiebegrip invoeren.

Definitie. De deelverzameling $V \subset (D)$ heet begrensd, als

(a) De dragers van alle $\varphi \in V$ zijn allemaal bevat in een begrensd interval van R_k .

(b) De verzameling der $\varphi \in V$ is gelijkmatig begrensd (d.w.z. er is een constante $A > 0$, zó dat $|\varphi(x)| \leq A$ voor alle $\varphi \in V$ en alle $x \in R_k$); de verzameling der $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ is ook gelijkmatig begrensd; de verzameling der $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ eveneens, enz.

De gelijkmatigheid behoeft niet in alle partiële afgeleiden tegelijk aanwezig te zijn.

Definitie. Als $F(\varphi)$ een functionaal op (D) is, dan heet $F(\varphi)$ een begrensd functionaal, als voor iedere begrensd verzameling $V \subset (D)$ geldt dat de verzameling der getallen $F(\varphi)$ voor $\varphi \in V$ ook begrensd is (d.w.z. bij elke begrensd $V \subset (D)$ behoort een $A_V > 0$ zó dat $|F(\varphi)| \leq A_V$ voor alle $\varphi \in V$).

Stelling 1. De lineaire functionaal $F(\varphi)$ op (D) is een distributie dan en alleen dan als $F(\varphi)$ begrensd is.

Bewijs. Stel dat F een distributie is, maar niet begrensd. Dan is er een begrensd $V \subset (D)$, waarop $F(\varphi)$ niet begrensd is, d.w.z. er is een rij $\varphi_n \in V$ zó dat $|F(\varphi_n)| > n$. Dan is $\psi_n = \varphi_n/n \rightarrow 0$

in (D), maar $|F(\varphi_n)| > 1$, terwijl anderzijds $F(\varphi_n) \rightarrow 0$ omdat F een distributie is. Conclusie: F is begrensd.

Om het omgekeerde te bewijzen, bewijzen we eerst: Als $\varphi_n \rightarrow 0$ in (D), dan is er een rij getallen $\lambda_n \rightarrow \infty$, zó dat ook nog $\lambda_n \varphi_n \rightarrow 0$ in (D). Bepaal nl. de indices $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ zó dat

$$\begin{aligned} |2 \varphi_n| &< \frac{1}{2} \text{ voor } n > n_1, \\ |3 \varphi_n| &< \frac{1}{3}, \quad \left| 3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \right| < \frac{1}{3} \text{ voor } n > n_2, \\ |4 \varphi_n| &< \frac{1}{4}, \quad \left| 4 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \right| < \frac{1}{4}, \quad \left| 4 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1 \partial x_j} \right| < \frac{1}{4} \text{ voor } n > n_3, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

Als nu $\lambda_n = 1$ ($n \leq n_1$), $\lambda_n = 2$ ($n_1 < n \leq n_2$), $\lambda_n = 3$ ($n_2 < n \leq n_3$), ..., dan is $\lambda_n \varphi_n \rightarrow 0$ in (D).

Laat nu dus F begrensd zijn, en laat $\varphi_n \rightarrow 0$ in (D). Dan is ook $\lambda_n \varphi_n \rightarrow 0$ in (D), dus de rij $\lambda_n \varphi_n$ is een begrensde verzameling in (D). Dan is er een getal $A > 0$, zó dat $|F(\lambda_n \varphi_n)| \leq A$, dus $|F(\varphi_n)| \leq A/\lambda_n \rightarrow 0$, d.w.z. F is een distributie (als nl. uit $\varphi_n \rightarrow 0$ in (D) volgt dat $F(\varphi_n) \rightarrow 0$, dan volgt uit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in (D) dat $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$).

We definiëren nu in de ruimte (D') der distributies een convergentiebegrip.

Definitie. Als $F_n \in (D')$ en $F \in (D')$, dan zegt men dat F_n naar F convergeert (notatie $F_n \rightarrow F$), als

(a) $F_n(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$ voor elke $\varphi \in (D)$,

(b) $F_n(\varphi)$ convergeert gelijkmatig naar $F(\varphi)$ op elke begrensde verzameling $V \subset (D)$, d.w.z. bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $N(\varepsilon, V)$ zó dat $|F_n(\varphi) - F(\varphi)| < \varepsilon$ voor $n \geq N$ en alle $\varphi \in V$.

Als alleen aan (a) voldaan is, dan zegt men dat F_n zwak convergeert naar F.

Alvorens verdere stellingen te bewijzen, merken we op dat de lineaire ruimte (D) volledig is, d.w.z. als $\varphi_n(x) \in (D)$, en $\varphi_m(x) - \varphi_n(x) \rightarrow 0$ in (D) voor $m, n \rightarrow \infty$, dan is er een $\varphi(x) \in (D)$ zó dat $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ in (D). Uit $\varphi_m - \varphi_n \rightarrow 0$ gelijkmatig volgt nl. dat $\varphi_n(x)$ gelijkmatig naar een functie $\varphi(x)$ convergeert; uit $\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \rightarrow 0$ gelijkmatig volgt dan dat de gelijkmatige limietfunctie van $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}$ juist $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ is, enz.

Stelling 2. De lineaire ruimte (D') is ook volledig; d.w.z. als $F_m - F_n \rightarrow 0$, dan is er een $F \in (D')$ zó dat $F_n \rightarrow F$.

Bewijs. Uit $F_m - F_n \rightarrow 0$ volgt dat $F_m(\varphi) - F_n(\varphi) \rightarrow 0$ voor elke $\varphi \in (D)$. Noem de limiet van $F_n(\varphi)$ nu $F(\varphi)$. Dan is $F(\varphi)$ een lineaire functionaal op (D) . Laat nu $V \subset (D)$ begrensd zijn. Uit $|F_m(\varphi) - F_n(\varphi)| < \varepsilon$ voor $m, n \geq N(\varepsilon, V)$ volgt $|F_N(\varphi) - F(\varphi)| \leq \varepsilon$ voor alle $\varphi \in V$; omdat de verzameling der getallen $F_N(\varphi)$ voor $\varphi \in V$ begrensd is, geldt dus hetzelfde voor de verzameling der getallen $F(\varphi)$. Dan is F een begrensde lineaire functionaal, d.w.z. een distributie. Verder convergeert $F_n(\varphi)$ gelijkmatig naar $F(\varphi)$ op V , dus $F_n \rightarrow F$.

We beschouwen nu het bijzondere geval, dat alle F_n van het type $F_n(\varphi) = \int f_n(x) \varphi(x) dx$ zijn.

Stelling 3. Als alle f_n en f integreerbaar zijn over elk begrensde interval B in R_k , en als $\int_B |f_n - f| dx \rightarrow 0$ voor elke B , dan convergeert de distributie $F_n(\varphi) = \int f_n \varphi dx$ naar de distributie $F(\varphi) = \int f \varphi dx$. Speciaal: als alle f_n continu zijn, en $f_n \rightarrow f$ gelijkmatig op elk begrensde interval B in R_k , dan is $F_n \rightarrow F$.

Bewijs. Laat $V \subset (D)$ begrensd zijn, laat de dragers van alle $\varphi \in V$ bevat zijn in het begrensde interval B , en laat $|\varphi(x)| \leq M$ voor alle $\varphi \in V$ en alle x . Dan is

$$\sup_{\varphi \in V} |F_n(\varphi) - F(\varphi)| = \sup \left| \int (f_n - f) \varphi dx \right| \leq M \int_B |f_n - f| dx \rightarrow 0.$$

Stelling 4. Differentiatie is een continue lineaire operatie, d.w.z. als $F_n \rightarrow F$, dan is ook $\frac{\partial F_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}$ (en dus ook $\frac{\partial^2 F_n}{\partial x_i \partial x_j} \rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, enz.)

Bewijs. Als $\varphi \in (D)$, dan is ook $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in (D)$; uit $F_n \rightarrow F$ volgt dus dat $F_n(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) \rightarrow F(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$, d.w.z. $\frac{\partial F_n}{\partial x_i}(\varphi) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi)$ voor elke $\varphi \in (D)$. Dat de convergentie gelijkmatig is op elke begrensde $V \subset (D)$, volgt door op te merken dat de verzameling der $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ voor $\varphi \in V$ zelf weer een begrensde deelverzameling van (D) is.¹

Gevolg. Als $D = \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_k}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_k^{p_k}}$, en D^* is een eindige som

$\sum a_p D_p$ (met getalcoëfficiënten a_p), dan volgt uit $F_n \rightarrow F$ dat $D^* F_n \rightarrow D^* F$.

Naast het begrip van een convergente rij distributies kunnen we nu op bekende wijze ook convergente reeksen van distributies invoeren: $\sum_1^\infty F_n = F$ betekent dat $\sum_1^n F_i = S_n \rightarrow F$. Als toepassing het volgende voorbeeld:

Als $f(x)$ een over $[0, 2\pi]$ integreerbare functie met periode 2π is, en $f(x)$ heeft de Fourierreeks $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, dan kunnen we de distributies beschouwen, die met $f(x)$ en met elke term van de reeks corresponderen. Laat dit F en $P_0 + \sum_1^\infty (P_n + Q_n)$

zijn. We bewijzen dat $F = P_0 + \sum_1^\infty (P_n + Q_n)$.

Bewijs. Daar er een constante A bestaat, zó dat $|a_n| \leq A$ en $|b_n| \leq A$, is de reeks $\frac{1}{4}a_0x^2 - \sum_1^\infty (\frac{a_n}{2} \cos nx + \frac{b_n}{2} \sin nx)$ gelijkmatig convergent (in $[0, 2\pi]$). Bovendien is, voor geschikte constanten c_1 en c_2 , deze reeks de Fourierreeks van $g(x) = c_1 + c_2x + \int_0^x dt \int_{t_1}^t f(u)du$; $g(x)$ is dus de som van de reeks. Beschouw nu de corresponderende distributies (zowel van $g(x)$ als van de termen van de reeks; $g(x) - \frac{1}{4}a_0x^2$ periodiek voortgezet); uit de gelijkmatige convergentie in gewone zin volgt wegens St.3 zeker convergentie van de reeks der distributies naar de met $g(x)$ corresponderende distributie G . Differentieer nu deze reeks tweemaal term voor term; we krijgen dan $P_0 + \sum_1^\infty (P_n + Q_n)$, en volgens St.4 convergeert deze reeks dus naar de tweede afgeleide van G , en dat is F .

Met gewone functies geschreven, wil de bewezen eigenschap dus zeggen, dat

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int \varphi(x) dx + \sum_1^\infty \int (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \varphi(x) dx$$
 voor elke $\varphi \in (D)$, en wel gelijkmatig op elke begrensde $V \subset (D)$.

Langs "gewone" weg is dit ook gemakkelijk bewijsbaar, zelfs een sterker resultaat; daarom is het interessant om op te merken dat als de goniometrische reeks $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ gegeven is, zó dat $|a_n| \leq An^k$, $|b_n| \leq An^k$ voor zekere $A > 0$ en $k > 0$, we op dezelfde manier kunnen bewijzen dat de corresponderende reeks van distributies ook nu nog convergent is. De somdistributie correspondeert nu in 't algemeen niet meer met een functie.

We kunnen nu ook een meer traditionele formule voor de afgeleide van een distributie bewijzen. We beperken ons tot R_1 . Als $f(x)$ over elk begrensd interval integreerbaar is, en we definiëren de translatieoperator τ_h door $\tau_h f(x) = f(x-h)$, dan is
$$\int (\tau_h f(x)) \varphi(x) dx = \int f(x-h) \varphi(x) dx = \int f(x) \varphi(x+h) dx,$$
 dus in de taal der distributies $(\tau_h F)(\varphi) = F(\tau_{-h} \varphi)$. We gebruiken deze formule voor een willekeurige distributie F als definitie van $\tau_h F$. Klaarblijkelijk is $\tau_h F$ dan weer een distributie. In het geval dat $f(x)$ een afgeleide heeft, is $\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_{-h} f(x) - f(x)}{h}$ voor $h \rightarrow 0$. Deze formule blijkt nu voor distributies algemeen te gelden.

Stelling 5. Voor elke distributie (in R_1) is

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_{-h} F - F}{h}$$

Bewijs. We moeten bewijzen dat $S_h = \frac{dF}{dx} - \frac{\tau_{-h} F - F}{h} \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$. Nu is

$$S_h(\varphi) = F\left(-\frac{d\varphi}{dx}\right) - \frac{F(\tau_h \varphi) - F(\varphi)}{h} = F(\psi_h),$$

waarbij

$$\psi_h = -\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\tau_h \varphi - \varphi}{-h}.$$

Voor $h \rightarrow 0$ convergeert $\psi_h(x)$ gelijkmatig naar nul, evenals alle afgeleiden van $\psi_h(x)$, dus $\psi_h(x) \rightarrow 0$ in (D) , dus $F(\psi_h) \rightarrow 0$, d.w.z. $S_h(\varphi) \rightarrow 0$ voor elke $\varphi \in (D)$. Het is ook niet moeilijk om in te zien dat op elke begrensde verzameling $V_c(D)$ de convergentie gelijkmatig is, dus $S_h \rightarrow 0$. We zullen verderop trouwens bewijzen, dat dit onderzoek naar gelijkmatigheid achterwege kan blijven.

9. Convergentie van distributies (vervolg)

We beperken ons hier tot R_1 , hoewel de volgende stellingen ook in R_k gelden.

Stelling 1. Als F een distributie is, en B is een begrensd interval in R_1 , dan bestaat er een niet-negatief geheel getal r zó dat voor elke rij $\varphi_n \in (D)$, waarvoor de dragers der φ_n bevat zijn in B , uit de voorwaarde dat $\varphi_n^{(r)}(x) \rightarrow 0$ gelijkmatig op B reeds volgt dat $F(\varphi_n) \rightarrow 0$.

Bewijs. Als er zo'n r niet is, dan bestaat er bij elke $k=0,1,2,\dots$ een rij $\varphi_{kn}(x)$ met dragers in B , zó dat

$$\varphi_{kn}^{(k)}(x) \rightarrow 0 \text{ voor } n \rightarrow \infty, \text{ gelijkmatig op } B,$$

$$\limsup |F(\varphi_{kn})| = \alpha_k > 0.$$

Door over te gaan op een geschikte deelrij van $\frac{2}{\alpha_k} \varphi_{kn}(x)$, krijgen we een rij $\psi_{kn}(x)$, zó dat

$$\psi_{kn}^{(k)}(x) \rightarrow 0 \text{ voor } n \rightarrow \infty, \text{ gelijkmatig op } B,$$

$$|F(\psi_{kn})| > 1.$$

Verder volgt uit $\psi_{kn}^{(k)}(x) \rightarrow 0$, gelijkmatig op B , dat ook $\psi_{kn}^{(l)}(x) \rightarrow 0$, gelijkmatig op B , voor $l=0,1,\dots,k$. Kies nu

$$\chi_0(x) = \psi_{0n_0} \text{ zó dat } |\psi_{0n_0}(x)| \leq 1,$$

$$\chi_1(x) = \psi_{1n_1} \text{ zó dat } |\psi_{1n_1}(x)| \leq 1 \text{ en } |\psi_{1n_1}^{(1)}(x)| \leq 1,$$

algemeen

$$\chi_k(x) = \psi_{kn_k} \text{ zó dat } |\psi_{kn_k}^{(l)}(x)| \leq \frac{1}{k} \text{ voor } l=0,1,\dots,k.$$

Dan is $\chi_k \rightarrow 0$ in (D) , dus $F(\chi_k) \rightarrow 0$, in tegenspraak met $|F(\chi_k)| > 1$ voor alle k .

Gevolg. Er is nu een constante $A > 0$, zó dat voor elke φ met drager in B geldt dat $|F(\varphi)| \leq A |\varphi^{(r)}|$; hierbij is

$$|\varphi^{(r)}| = \max\{|\varphi^{(r)}(x)| \text{ op } B.$$

Bewijs. Als er zo'n A niet was, dan was er een rij φ_n (dragers in B) zó dat $F(\varphi_n) > n |\varphi_n^{(r)}|$. Voor $\psi_n = \varphi_n / n |\varphi_n^{(r)}|$ zou dan gelden dat $|\psi_n^{(r)}| = n^{-1} \rightarrow 0$, dus volgens St.1 zou $F(\psi_n) \rightarrow 0$, in tegenspraak met $F(\psi_n) > 1$.

Stelling 2. Laat F_α (α doorloopt een indexverzameling) een collectie van distributies zijn, en laat voor elke φ met drager in het begrensde interval B de verzameling der getallen $F_\alpha(\varphi)$ begrensd zijn: $|F_\alpha(\varphi)| \leq M_\varphi$ voor alle α . Dan bestaan er een constante $K > 0$ en een index r , zó dat

$$|F_\alpha(\varphi)| \leq K |\varphi^{(r)}|$$

voor alle α en alle φ met drager in B.

Bewijs. Stel, dat de stelling onjuist is. Verder hebben alle functies $\varphi(x)$, die wij opschrijven, hun dragers in B. Er bestaan nu een $\varphi_0(x)$ en een F_{α_0} zó dat

$$(1) \quad |\varphi_0| < 1,$$

$$(2) \quad F_{\alpha_0}(\varphi_0) > 1.$$

Algemeen bestaan bij elke $p=0,1,2,\dots$ een $\varphi_p(x)$ en een F_{α_p} zó dat

$$(1) \quad |\varphi_p^{(n)}| < 2^{-p} \text{ voor } n=0,1,\dots,p,$$

$$(2) \quad F_{\alpha_p}(\varphi_p) > p + 1 + \sum_{m=1}^{p-1} M_{\varphi_m},$$

$$(3) \quad |F_{\alpha_m}(\varphi_p)| < 2^{-p} \text{ voor } m=0,1,\dots,p-1.$$

Voor $p=0$ klopt dit al (dan vervalt nl. de derde voorwaarde). Stel dat $\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1}$ en $F_{\alpha_0}, \dots, F_{\alpha_{p-1}}$ reeds zo gekozen zijn, dat zij aan de voorwaarden voldoen. Daar $|F_{\alpha_i}(\varphi)| \leq A_i |\varphi^{(r_i)}|$, zal φ_p aan (3) voldoen, als φ_p aan de p voorwaarden

$$|\varphi_p^{(r_i)}| < 2^{-p} A_i^{-1} \quad (i=0,1,\dots,p-1)$$

voldoet. Deze voorwaarden, tezamen met (1), kunnen samengevat worden tot één voorwaarde van de vorm $|\varphi_p^{(r)}| < K_1$, waarbij K_1 een geschikte constante is, en $r = \max(r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, p)$. Omdat, volgens hypothese, ook voor deze r de stelling onjuist is, bestaat er dus een φ_p , die voldoet aan $|\varphi_p^{(r)}| < K_1$ en aan (2). Merk nog op, dat (3) ook geschreven kan worden als $|F_{\alpha_p}(\varphi_n)| < 2^{-n}$ voor alle $n > p$.

Laat nu $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$. Dan convergeert $s_n(x) = \sum_1^n \varphi_i(x)$ naar $\varphi(x)$ in (D) wegens (1). Dus

$$|F_{\alpha_p}(\varphi)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |F_{\alpha_p}(s_n)| > p$$

voor alle p , zodat voor deze φ de verzameling der getallen $F_{\alpha}(\varphi)$ niet begrensd zou zijn. Tegenspraak.

Gevolg 1. Als voor elke $\varphi \in (D)$ de verzameling der getallen $F_{\alpha}(\varphi)$ begrensd is, en V is een begrensde deelverzameling van (D) , dan bestaat er een constante $A > 0$ zó dat $|F_{\alpha}(\varphi)| \leq A$ voor alle α en alle $\varphi \in V$. Dit is het analogon van de stelling van Banach-Steinhaus in Banachse ruimten.

Bewijs. Daar de dragers van alle $\varphi \in V$ in een begrensd interval B bevat zijn, is er een index r zó dat $|F_{\alpha}(\varphi)| \leq K|\varphi^{(r)}|$ voor alle $\varphi \in V$. Omdat $|\varphi^{(r)}| \leq K_1$ voor alle $\varphi \in V$, is dus $|F_{\alpha}(\varphi)| \leq KK_1 = A$ voor alle α en alle $\varphi \in V$.

Gevolg 2. Als weer voor elke $\varphi \in (D)$ de verzameling der getallen $F_{\alpha}(\varphi)$ begrensd is, en $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in (D) , dan geldt dat $F_{\alpha}(\varphi - \varphi_n) \rightarrow 0$ gelijkmatig in α .

Bewijs. Er is een begrensd interval B in R_k , dat de dragers van alle φ_n en φ bevat. Voor een $K > 0$ en een zekere index r is dan $|F_{\alpha}(\varphi - \varphi_n)| \leq K|\varphi^{(r)} - \varphi_n^{(r)}|$ voor alle α .

We komen nu tot de theoretisch belangrijke stelling dat uit de zwakke convergentie van een rij distributies reeds convergentie van die rij volgt. Deze stelling ligt diep, want Gevolg 2 van St. 2 zal worden gebruikt.

Stelling 3. Als $F_n \in (D')$ voor $n=1, 2, \dots$, en de rij $F_n(\varphi)$ convergeert voor elke φ , dan is de limiet $F(\varphi)$ een distributie; bovendien is dan $F_n \rightarrow F$. Speciaal volgt dus uit zwakke convergentie van F_n naar F dat $F_n \rightarrow F$.

Bewijs. In verband met de volledigheid van de ruimte (D') der distributies is het voldoende te bewijzen dat $(F_m - F_n)(\varphi) \rightarrow 0$ gelijkmatig op elke begrensde $V \subset (D)$. Stel dat dit niet zo is. Dan is er een begrensde $V \subset (D)$, een $\varepsilon > 0$, indexrijen m_p en $n_p \rightarrow \infty$, en $\varphi_p \in V$, zó dat

$$(\alpha) \quad |(F_{m_p} - F_{n_p})(\varphi_p)| \geq 3\varepsilon.$$

De functies $\varphi_p \in V$ hebben gelijkmatig begrensde eerste afgeleiden, en zijn dus equicontinu. Daaruit volgt dat φ_p een gelijkmatig convergente deelrij bevat. Om dezelfde reden bevat deze een deelrij, waarvan ook de eerste afgeleiden gelijkmatig convergeren, enz. Via het diagonaalprocédé vinden we dan een deelrij van φ_p , die in (D) convergeert; daar (D) volledig is, geldt voor de limiet $\varphi_0(x)$, dat $\varphi_0 \in (D)$. We mogen (door verandering in de nummering) wel aannemen dat φ_p direct deze deelrij is. Dank zij Gevolg 2

van St.2 is dus, voor voldoende grote p , $|F_n(\varphi_0 - \varphi_p)| < \varepsilon$ voor alle n . Uit (α) volgt dan dat

$$|(F_{m_p} - F_{n_p})(\varphi_0)| \geq \varepsilon$$

voor voldoende grote p , in strijd met de convergentie van de rij getallen $F_n(\varphi_0)$.

Als men van een distributie van het eenvoudige type $F(\varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx$ een primitieve distributie neemt, daarvan weer een primitieve, enz., dan blijven deze nieuwe distributies steeds van dit eenvoudige type. Als men daarentegen steeds opvolgende afgeleiden gaat maken, dan behoeft iets dergelijks niet het geval te zijn. Men kan nu de vraag stellen of elke distributie een afgeleide van zekere orde van zo'n eenvoudige distributie is. De volgende stelling toont, dat dit "locaal" in elk geval zo is.

Stelling 4. Als F een gegeven distributie is, en B is een gegeven begrensde interval, dan bestaat er een index p , en een over elk begrensde interval integreerbare $g(x)$ zó dat als $G(\varphi) = \int g \varphi dx$, dan $F(\varphi) = \frac{d^p G}{dx^p}(\varphi)$ voor elke φ met drager in B .

Bewijs. Volgens St.1 bestaat er een r , zó dat uit $\varphi_n^{(r)} \rightarrow 0$ gelijkmatig op B (dragers der φ_n in B) reeds volgt dat $F(\varphi_n) \rightarrow 0$. Beschouw nu de lineaire ruimte der functies $\psi(x) = \varphi^{(r)}(x)$ (dragers der $\varphi(x) \in (D)$ in B). Merk op dat φ door ψ eenduidig bepaald is, zodat door $L(\psi) = F(\varphi)$ de lineaire functionaal $L(\psi)$ op deze lineaire ruimte ondubbelzinnig bepaald is. Verder volgt dus uit $\psi_n(x) \rightarrow 0$, gelijkmatig op B , dat $L(\psi_n) \rightarrow 0$. Op de lineaire ruimte der $\psi(x)$, die zeker een deelruimte van de ruimte (C) is, is dus $L(\psi)$ continu in de zin van (C) . Dan is, volgens de uitbreidingsstelling van Hahn-Banach, $L(\psi)$ voort te zetten tot een continue lineaire functionaal op geheel (C) , zodat volgens de stelling van Riesz er een maat μ is, zodanig dat $L(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi d\mu$ voor alle $\psi \in (C)$. Voor $\psi = \varphi^{(r)}$, waarbij de drager van $\varphi \in (D)$ in B bevat is, is dus

$$F(\varphi) = L(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(r)}(x) d\mu = - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi^{(r+1)}(x) dx,$$

waarbij $h(x) = \int_0^x d\mu$. Voor elke φ met drager in B geldt dus dat $F(\varphi) = G^{(r+1)}(\varphi)$, waarbij G correspondeert met $g(x) = (-1)^r h(x)$.

Voorbeeld 1. Als x_0 een vast punt in B is, en $F(\varphi) = \varphi^{(r)}(x_0)$, dan is, als μ_0 de maat is, bestaande uit uitsluitend de puntmassa $+1$ in x_0 , nu $F(\varphi) = \int \varphi^{(r)}(x) d\mu_0 = - \int_{-\infty}^{\infty} h_0(x) \varphi^{(r+1)}(x) dx$ met $h_0(x) = \int_0^x d\mu_0$. Uit dit voorbeeld volgt tevens dat de stelling slechts

een lokaal karakter heeft, want de distributie $F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ is niet te schrijven als een afgeleide van zekere orde van een andere distributie G .

Voorbeeld 2. Als $f_t(x) = \int_1^t -u^{-2} \cos ux \, du$, dan is $f_t''(x) = \int_1^t \cos ux \, du$; voor de corresponderende distributies geldt dus dezelfde relatie. Voor $t \rightarrow \infty$ convergeert de eerste distributie F_t naar de met $\int_1^{\infty} -u^{-2} \cos ux \, du$ corresponderende distributie, dus F_t'' convergeert ook. Hieruit volgt dus dat $\int_0^{\infty} \cos 2\pi ux \, du$, als distributie gezien, zin heeft. We berekenen de "waarde" van deze integraal.

Uit

$$g_t(x) = \int_0^t 2 \cos 2\pi ux \, du = \frac{\sin 2\pi tx}{\pi x}$$

volgt

$$G_t(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi tx}{\pi x} \varphi(x) dx,$$

en $\lim_{t \rightarrow \infty} G_t(\varphi) = \varphi(0)$ voor $t \rightarrow \infty$ (Dirichlet), dus $G_t \rightarrow \delta_0$, d.w.z.

$$" \quad 2 \int_0^{\infty} \cos 2\pi ux \, du = \delta_0 \quad "$$

10. Het product van twee distributies.

Men kan functies vermenigvuldigen, maar distributies in het algemeen niet. Zelfs als F_1 en F_2 van het eenvoudige type $\int f \varphi \, dx$ zijn, dan is het niet zonder meer mogelijk van $F_1 F_2$ te spreken, omdat de functie $f_1 f_2$ meestal niet meer integreerbaar is over elk begrensde interval. We beperken ons tot een bijzonder geval waarin het wel gelukt tot productvorming over te gaan. Laat, in R_1 voor de eenvoud, $A(\varphi) = \int \alpha(x) \varphi(x) dx$, waarbij $\alpha(x)$ oneindig vaak differentieerbaar is ($\alpha(x)$ hoeft geen begrensde drager te hebben). Als nu F een willekeurige distributie is, dan wordt het product AF gedefinieerd door

$$(AF)(\varphi) = F(\alpha \varphi).$$

Klaarblijkelijk volgt uit $\varphi_n \rightarrow 0$ in (D) dat $\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ in (D) , dus $(AF)(\varphi_n) \rightarrow 0$, d.w.z. AF is weer een distributie. Als $F(\varphi) = \int f \varphi \, dx$ (f integreerbaar over elk begrensde interval), dan is

$$(AF)(\varphi) = F(\alpha \varphi) = \int f \alpha \varphi \, dx = [\alpha f](\varphi).$$

Als speciaal $f(x)$ ook oneindig vaak differentieerbaar is, dan is dus $AF = FA$. Er is dus geen bezwaar tegen om algemeen $FA = AF$ te definiëren.

Stelling. $(AF)' = A'F + AF'$, waarbij de accenten differentiatie aanduiden.

Bewijs. $(AF)'(\varphi) = -(AF)(\varphi') = -F(\alpha \varphi'),$

$-(A'F)(\varphi) = -F(\alpha' \varphi),$ omdat A' met $\alpha'(x)$ correspondeert. Optelling levert $-F(\alpha \varphi' + \alpha' \varphi) = -F(\alpha \varphi)' = F'(\alpha \varphi) = (AF')(\varphi).$
Dus $(AF)' - A'F = AF'.$

Voorbeelden. $(A\delta_0)(\varphi) = \delta_0(\alpha \varphi) = \alpha(0) \varphi(0) = \alpha(0) \delta_0(\varphi)$ voor alle φ , dus $A\delta_0 = \alpha(0) \delta_0;$

$$(A\delta_0')(\varphi) = \delta_0'(\alpha \varphi) = -(\alpha \varphi)' /_{x=0} = -\alpha(0) \varphi'(0) - \alpha'(0) \varphi(0) =$$

$\alpha(0) \delta_0'(\varphi) - \alpha'(0) \delta_0(\varphi)$ voor alle φ , dus $A\delta_0' = \alpha(0) \delta_0' - \alpha'(0) \delta_0,$ enz.

Met behulp van de functie van Dirac $\delta_0(x)$ schrijft men deze formules wel eens in de vorm

$$\alpha(x) \delta_0(x) = \alpha(0) \delta_0(x),$$

$$\alpha(x) \delta_0'(x) = \alpha(0) \delta_0'(x) - \alpha'(0) \delta_0(x), \quad \text{enz.}$$

Als speciaal $\alpha(x)=x$, dan geldt voor $X(\varphi) = \int x \varphi(x) dx$ dus dat $X\delta_0=0$, $X\delta_0' = -\delta_0.$

11. Het compositieproduct.

We beschouwen (in R_1) twee distributies F en G , waarbij aan G de beperking wordt opgelegd, dat er een begrensde interval B bestaat, zo dat $G(\varphi)=0$ voor elke φ wiens drager geheel buiten B ligt.

Hulpstelling. Als $\varphi \in (D)$, dan is $\psi(y) = G_x \{ \varphi(x+y) \}$ weer een functie in (D) . Met $G_x \{ \varphi(x+y) \}$ wordt bedoeld dat $\varphi(x+y)$ hier als functie van x gezien wordt.

Bewijs. Als $y_n \rightarrow y$, dan is $\varphi(x+y_n) \rightarrow \varphi(x+y)$ in (D) wegens de gelijkmatige continuïteit van φ en al zijn afgeleiden, dus $\psi(y_n) = G_x \{ \varphi(x+y_n) \} \rightarrow G_x \{ \varphi(x+y) \} = \psi(y)$. Hieruit volgt al dat $\psi(y)$ continu is. Verder heeft $\psi(y)$ een begrensde drager, omdat voor $|y|$ voldoende groot de drager van $\varphi(x+y)$ geheel buiten het bij G behorende begrensde interval B ligt. Ook is, voor $h_n \rightarrow 0$,

$$\frac{\psi(y+h_n) - \psi(y)}{h_n} = G_x \left\{ \frac{\varphi(x+y+h_n) - \varphi(x+y)}{h_n} \right\} \rightarrow G_x \{ \varphi'(x+y) \},$$

dus $\psi'(y) = G_x \{ \varphi'(x+y) \}$. Op dezelfde manier vindt men voor de hogere afgeleiden dat $\psi^{(n)}(y) = G_x \{ \varphi^{(n)}(x+y) \}$. Conclusie: $\psi \in (D)$.

Merk nog op dat als $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in (D) , en $\psi_n(y) = G_x \{ \varphi_n(x+y) \}$, $\psi(y) = G_x \{ \varphi(x+y) \}$, dan $\psi_n(y) \rightarrow \psi(y)$ in (D) . Men kan zich voor het bewijs beroepen op het feit dat er een index r is, zó dat $|G_x \{ \varphi_n(x+y) - \varphi(x+y) \}| \leq A \max |\varphi_n^{(r)} - \varphi^{(r)}|$ volgens het Gevolg van St.1 in de vorige paragraaf (we behoeven nl. slechts de y -waarden in een begrensde interval te beschouwen).

Definitie. Als F en G distributies zijn, waarbij aan G de genoemde beperking is opgelegd, dan wordt het compositieproduct $F * G$ gedefinieerd door

$$(F * G)(\varphi) = F_y [G_x \{\varphi(x+y)\}] .$$

Uit wat we reeds bewezen hebben volgt dat als $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in (D) , dan $(F * G)(\varphi_n) \rightarrow (F * G)(\varphi)$, zodat dus $F * G$ weer een distributie is.

Het is direct duidelijk dat uit $F_n \rightarrow F$ volgt dat $F_n * G \rightarrow F * G$. Laat nu $G_n \rightarrow G$, waarbij $G(\varphi) = G_n(\varphi) = 0$ voor alle φ met dragers buiten eenzelfde begrensde interval. Dan is $\psi_n(y) = G_n \{\varphi(x+y)\} \rightarrow G \{\varphi(x+y)\} = \psi(y)$ gelijkmatig, omdat convergentie van G_n naar G gelijkmatige convergentie op elke begrensde deelverzameling $V \subset (D)$ impliceert. Ook $\psi_n'(y) = G_n \{\varphi'(x+y)\} \rightarrow G \{\varphi'(x+y)\} = \psi'(y)$ gelijkmatig, enz., dus $\psi_n(y) \rightarrow \psi(y)$ in (D) , zodat ook $F * G_n \rightarrow F * G$ voor elke F .

Voorbeelden. (1) Laat F en G corresponderen met functies f en g , integreerbaar over elk begrensde interval, terwijl bovendien $g(x)=0$ buiten zeker begrensde interval. Dan is dus

$$\begin{aligned} (F * G)(\varphi) &= F_y \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x+y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x+y) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} g(u-y) \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(u-y) dy, \end{aligned}$$

d.w.z. $H = F * G$ correspondeert met de functie $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$. Aan dit feit dankt $F * G$ de naam van compositieproduct.

$$(2) \quad (F * \delta_0)(\varphi) = F_y [\delta_{0x} \{\varphi(x+y)\}] = F_y [\varphi(y)] = F(\varphi), \text{ dus}$$

$$F * \delta_0 = F$$

$$(F * \delta_0')(\varphi) = F_y [\delta_{0,x}' \{\varphi(x+y)\}] = F_y [-\varphi'(y)] = -F(\varphi') = F'(\varphi), \text{ dus}$$

$$F * \delta_0' = F'.$$

Laat $\alpha(x) \in (D)$; voor elke distributie F is dan $\rho(x) = F_y \{\alpha(x-y)\}$ weer een ^{enkelvoudig waarden aannemende} functie in (D) (bewijs als hierboven). Als nu $\alpha(x)$ correspondeert met de distributie A , dan correspondeert $\rho(x)$ met $F * A$. Bewijs:

$$(F * A)(\varphi) = F_y \int \alpha(x) \varphi(x+y) dx = F_y \int \alpha(x-y) \varphi(x) dx = F_y \psi(y).$$

We approximeren nu

$$\psi(y) = \int \alpha(x-y) \varphi(x) dx \text{ door Riemannse sommen}$$

$$\sum_p \alpha(\xi_p - y) \varphi(\xi_p) \Delta x_p$$

$$\psi'(y) = \int \alpha(x-y) \varphi'(x) dx \text{ door } \sum_p \alpha(\xi_p - y) \varphi'(\xi_p) \Delta x_p,$$

enz.

Deze approximaties zijn gelijkmatig in y , dus de Riemannse sommen convergeren naar $\psi(y)$ in (D) , zodat $F_y[\sum_p] \rightarrow F_y \psi(y) = (F * A)(\varphi)$. Anderzijds is $F_y[\sum_p] = \sum_p T_y \alpha(\xi_p - y) \varphi(\xi_p) \Delta x_p =$
 $= \sum_p \rho(\xi_p) \varphi(\xi_p) \Delta x_p \rightarrow \int \rho(x) \varphi(x) dx$. Conclusie: $(F * A)(\varphi) =$
 $= \int \rho(x) \varphi(x) dx$, m.a.w. $\rho(x)$ correspondeert met $F * A$.

Approximatiestelling. Als F een willekeurige distributie is, dan is er een rij distributies $B_n \rightarrow F$, zó dat $B_n(\varphi) = \int \beta_n(x) \varphi(x) dx$, waarbij $\beta_n(x) \in (D)$. In deze zin gezien, ligt dus (D) dicht in (D') .

Bewijs. Laat $\alpha_n(x) \in (D)$, $\alpha_n(x) \geq 0$, $\int \alpha_n(x) dx = 1$, terwijl de dragers der $\alpha_n(x)$ zich "samentrekken" tot de oorsprong. Dan is $\int \alpha_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$ voor elke $\varphi \in (D)$, m.a.w. voor de corresponderende distributies A_n geldt dat $A_n \rightarrow \delta_0$. Dan is ook $F * A_n \rightarrow F * \delta_0 = F$, en elke $F * A_n = B_n$ is, zoals bewezen, van het type $B_n(\varphi) = \int \beta_n(x) \varphi(x) dx$, waarbij $\beta_n(x) = F_y \{ \alpha_n(x-y) \} \in (D)$.

Deze stelling wijst erop dat het ook mogelijk is de distributies als volgt in te voeren: Men beschouwt eerst alleen distributies van het speciale type $B(\varphi) = \int \beta(x) \varphi(x) dx$, waarbij $\beta(x) \in (D)$, en dan gaat men deze verzameling volledig maken door fundamentealrijen te beschouwen, d.w.z. rijen B_n zó dat $B_n(\varphi)$ convergeert voor elke φ . Iedere fundamentealrij wordt dan ook een distributie genoemd, onderling equivalente fundamentealrijen worden geïdentificeerd, en uit de zojuist bewezen approximatiestelling volgt nu dat elke continue lineaire functionaal op (D) zo'n distributie is.

Als er een begreind interval bestaat zó dat $F(\varphi) = G(\varphi) = 0$ voor elke φ met drager buiten dit interval, dan bestaat zowel $G * F$ als $F * G$.

Stelling. In dit geval is $G * F = F * G$.

Bewijs. In het bijzondere geval dat F en G corresponderen met functies $f(x) \in (D)$ en $g(x) \in (D)$, correspondeert $F * G$ met $\int f(y)g(x-y)dy$ en $G * F$ met $\int g(y)f(x-y)dy$. Deze integralen zijn gelijk, dus $F * G = G * F$. Laat nu F van dit bijzondere type zijn, doch G niet. Er is dan een rij G_n van dit type zó dat $G_n \rightarrow G$, dus $F * G = \lim F * G_n = \lim G_n * F = G * F$. Door nu ook F , indien niet van dit type, door een rij F_n van dit type te benaderen, volgt algemeen dat $F * G = G * F$.

Er is dus geen bezwaar tegen om, als F een willekeurige distributie is, en alleen G beperkt is door de conditie dat $G(\varphi) = 0$ voor alle φ met drager in de verte, $G * F$ te definiëren door $G * F = F * G$.