2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

TELEF. 51660-56643

COLLOQUIUM MATRIXFUNCTIES 1955-1956

o.l.v.

Prof.Dr N.G. de Bruijn

Eerste voordracht

door

Dr W. Peremans

7 October 1955

In de eerste voordracht geven wij een overzicht van probleemstelling en methodiek en een schets van een programma.

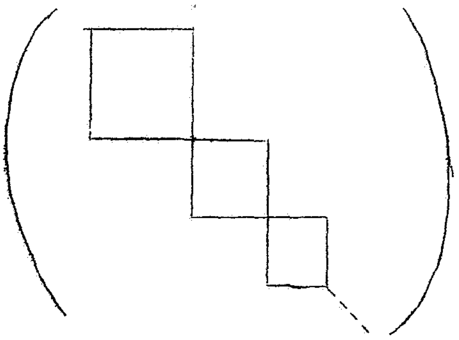
We beschouwen de verzameling MR_n van alle vierkante nxn matrices met complexe elementen. We willen een begrip analytische functie definiëren; bij zo'n functie zijn de waarden van het argument en van de functie beide elementen van MR_n.

Hiertoe is een limietbegrip nodig. Voorlopig voeren we dit op een primitieve wijze in door te definiëren dat een rij matrices convergeert als de j,k^{e} elementen convergeren voor alle j en k. Dus als $A_m=(a_{jk}^{(m)})$, $A=(a_{jk})$ dan geldt $\lim_{m\to\infty} A_m=A$ dan en slechts dan als $\lim_{m\to\infty} a_{jk}^{(m)}=a_{jk}$ voor $j,k=1,\ldots,n$. We komen hier later op terug.

We beginnen eerst met een gewone machtreeks $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ met positieve convergentiestraal. Voor een matrix Z stellen we $F(Z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m Z^m$ als het convergeert; dit blijkt het geval te zijn als alle eigenwaarden van Z binnen de convergentiecirkel liggen.

Als X een niet-singulier element van MR_n is (we duiden de verzameling van de niet-singuliere elementen van MR_n met MR_n^* aan) en $\lim_{m\to\infty} A_m=A$, dan is $\lim_{m\to\infty} X^{-1}A_mX=X^{-1}AX$. Verder geldt voor een polynoom $P(z)=\sum_{m=0}^{N} c_m z^m$, dat $P(X^{-1}AX)=X^{-1}P(A)X$. Dus voor de hierboven gedefinieerde $F(Z)$ geldt ook $F(X^{-1}AX)=X^{-1}F(A)X$. Verder geldt $P(Z)Z=ZP(Z)$, dus $F(Z)Z=ZF(Z)$.

Uit de matrixtheorie is bekend dat bij iedere $A\in MR_n$ een $X\in MR_n^*$ bestaat, zodat $B=X^{-1}AX$ de z.g. normaalvorm van Jordan heeft,

$B =$  .

Hierin bestaat B uit een aantal langs de hoofddiagonaal geregen blokken, met daarbuiten nullen. Elk blok heeft de gedaante

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

De matrix B is, op de volgorde van de blokken na, ondubbelzinnig door A bepaald; X is niet ondubbelzinnig door A bepaald. De diagonaalelementen van B zijn de eigenwaarden van A. Het aantal keren dat λ in de hoofddiagonaal van B voorkomt heet de multipliciteit van λ.

Daar $A=XBX^{-1}$, is $F(A)=XF(B)X^{-1}$. We zullen $F(B)$ nu nader bepalen. Dit kunnen we voor elk blok van B afzonderlijk doen. We nemen een blok van de gedaante (1); laat dit een kxk matrix zijn. Dan is dit blok λI_k+N, waarin I_k de kxk eenheidsmatrix is en

$$N= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nu is

$$N^j= \begin{array}{c} j+1 \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

dus $N^j=0$ voor $j \geq k$. Nu is $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\lambda I_k+N)^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \lambda^{m-j} N^j =$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} N^j \sum_{m=j}^{\infty} c_m\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\lambda^{m-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!} N^j =$$

$$(2) \qquad = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Op grond hiervan definiëren we voor een matrix A en een functie $f(z)$, die eenwaardig analytisch is in alle eigenwaarden van A, de bijbehorende $F(A)$ als volgt: schrijf $A=XBX^{-1}$, waarin B in de normaalvorm van Jordan is met blokken van de vorm (1), dan is $F(A)=XCX^{-1}$, waarin C uit overeenkomstige blokken van de vorm (2) bestaat. We bewijzen, dat de zo gevonden $F(A)$ alleen van f en A en niet van de transformatiematrix X afhangt. Daartoe kiezen we een polynoom $P(z)$, zodat

$$P(\lambda) = f(\lambda)$$
$$\vdots$$
$$P^{(k-1)}(\lambda) = f^{(k-1)}(\lambda)$$

enz. voor alle blokken.

Daar de normaalvorm, op de volgorde van de blokken na, door A is bepaald, kan $P(z)$ onafhankelijk van X worden gekozen. Nu is $P(A)=XP(B)X^{-1}=$ $=XF(B)X^{-1}=F(A)$. Dus hangt $F(A)$ alleen van A en f en niet van X af.

De hierboven gegeven definitie is van Giorgi [3] en is een uitbreiding van de eerder gegeven machtreeksdefinitie.

Uit bovenstaand bewijs volgt dat $F(A)$ als een polynoom in A met scalaire coëfficiënten is te schrijven. Dit betekent niet dat $F(Z)$ een polynoomfunctie is: als we A variëren zullen de coëfficiënten van het polynoom in het algemeen ook variëren. Wel kunnen we voor Z in een omgeving van A schrijven

$$F(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(Z)Z^j .$$

Voor de zo gevonden functies kunnen we nu een integraalvoorstelling vinden analoog met de integraalformule van Cauchy:

$$(3) \qquad F(A)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{zI-A} \qquad \text{(integraal van E. Cartan),}$$

waarin I de eenheidsmatrix voorstelt, en de integratie wordt uitgestrekt over een stel in positieve zin doorlopen gesloten contouren in het complexe vlak, die samen elke eigenwaarde (ongeacht de multipliciteit) van A éénmaal omlopen.

Om (3) te bewijzen bedenken we dat $(zI-A)^{-1}=X(zI-B)^{-1}X^{-1}$ en $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)(zI-A)^{-1}dz= X\, \frac{1}{2\pi i}\int f(z)(zI-B)^{-1}dz\, X^{-1}$. Verder geldt voor $z\neq\lambda$:

$$\begin{pmatrix} z-\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & z-\lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (z-\lambda)^{-1} & (z-\lambda)^{-2} & \cdots & (z-\lambda)^{-k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & (z-\lambda)^{-2} \\ 0 & \cdots & 0 & (z-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt met de integraalformule van Cauchy direct (3).

Het voordeel van (3) is dat de normaalvorm van Jordan hierin geen rol speelt.

Cipolla [4] heeft nog een uitbreiding van bovenstaande definitie gegeven voor meerwaardige functies, door in elk blok een tak van f(z) in de omgeving van λ te kiezen; hierbij hoeft in verschillende blokken met dezelfde λ niet steeds dezelfde tak te worden gekozen! In dat geval kan het resultaat afhangen van de keuze van X en behoeft geen polynoom in A te zijn. Voor F(A) worden dan alle waarden genomen, die bij alle genoemde keuzen behoren, inclusief de keuze van toegelaten X. Over de samenhang van deze waarden was men tot nu toe vaag.

Aan een voorbeeld demonstreren wij de definitie van Cipolla. Neem $n=2$, $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ en $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Dan is X willekeurig niet-singulier. Als resultaat vinden we $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ en alle $X\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}X^{-1}$; dit laatste vormt alle matrices met één eigenwaarde 1 en één eigenwaarde -1. De gevonden matrices zijn juist alle matrices waarvan het kwadraat A is. Voor $\varepsilon\neq0$ heeft $\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\0&1\end{pmatrix}$ geen vierkantswortel in een omgeving van $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

In een vertakkingspunt gaat dit minder goed. Neem weer $n=2$, $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$, maar nu $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. Als resultaat vinden we alleen $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, hetgeen niet alle matrices met kwadraat A zijn, immers b.v. $\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ voor alle complexe t.

Naar aanleiding hiervan vestigen we de aandacht op het volgende verschijnsel. Neem weer $n=2$ en het polynoom Z^2; deze functie is gedefinieerd in de hele MR_2. Het beeld van MR_2 bevat $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, maar geen van de matrices $\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}$ met $t\neq0$. Het beeld van een open verzameling is dus niet steeds open.

We komen nu terug op het limietbegrip. Het hierboven gebruikte krijgt men direct als men als norm van een matrix $A=(a_{jk})$ definieert $\|A\|=\max\limits_{j,k}|a_{jk}|$. Als we dan $\|A-B\|$ als afstand van A en B definiëren, wordt MR_n een complete metrische ruimte. Op grond daarvan beschikken we over een topologie; convergentie in deze topologie komt overeen met de hierboven gedefinieerde convergentie.

De norm voldoet aan de volgende eisen:

1° $\|A\| \geq 0$ en slechts dan $=0$ als $A=0$ (nulmatrix).

2° $\|\lambda A\| = |\lambda| \; \|A\|$ voor scalaire λ .

3° $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Er zijn echter meer eisen die we aan de norm willen stellen.

4° $\|AB\| \leq \|A\| \; \|B\|$.

Hieraan voldoet bovenstaande norm niet; wel echter als men hem met de constante factor n vermenigvuldigt.

Gewenst, maar niet strikt noodzakelijk is de volgende eis:

5° $\|I\| = 1$.

Hieraan voldoet $\|A\| = n \max\limits_{j,k} |a_{jk}|$ niet.

Een andere manier om normen te krijgen is de matrices op te vatten als lineaire transformaties van een n-dimensionale complexe vectorruimte. Stel nu dat men een norm in die vectorruimte heeft, die voldoet aan

$\|x\| \geq 0$ en slechts dan $=0$ als $x=0$ (nulvector).

$\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$ voor scalaire λ .

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Men definieert dan $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Deze voldoet aan alle eisen 1° t/m 5°.

Het meest voor de hand ligt het voor $\|x\|$ de unitaire norm $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ te nemen; dit leidt echter tot een weinig hanteerbare norm voor de matrices (het is de vierkantswortel uit de grootste eigenwaarde van A^*A, waarin A^* de getransponeerde geconjugeerd complexe van A is).

Nemen we $\|x\| = \max\limits_j |x_j|$, dan is $\|Ax\| = \max\limits_j \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \right|$. Voor een vaste j kunnen we argumenten van x_k zo kiezen dat

$\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|\,|x_k|$; dit geeft $\|A\| \geq \max\limits_j \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|$. Daar anderzijds $\|A\| \leq \max\limits_j \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|$ triviaal is, vinden we in dit geval

$$\|A\| = \max_j \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| .$$

Nemen we $\|x\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$, dan vinden we op soortgelijke wijze

$$\|A\| = \max_{k} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| .$$

Welke keuze we voor de norm maken is niet zo belangrijk (mits deze aan de eisen 1° t/m 5° voldoet), aangezien de resulterende metrieken aequivalent zijn (niet alleen de topologieën, maar zelfs de uniforme topologieën zijn aequivalent, hetgeen van belang is omdat we met uniforme convergentie zullen werken). Voor deze aequivalentie zijn trouwens 1° t/m 3° al voldoende.

Het ligt voor de hand te trachten de theorie uit te breiden tot Banach-algebras. Een Banach-algebra is een ring, die tevens lineaire ruimte over de complexe getallen is, en waarin een norm $\|a\|$ gedefinieerd is, die voldoet aan

$\|a\| \geqq 0$ en $=0$ slechts dan als $a=0$.

$\|\lambda a\| = |\lambda| \ \|a\|$ voor een complex getal λ .

$\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$.

$\|ab\| \leqq \|a\| \ \|b\|$.

We zullen steeds veronderstellen, dat de Banach-algebra een eenheidselement e heeft, waarvoor $\|e\| =1$ geldt.

We komen nu terug op de definitie van analytische functie. Evenmin als bij gewone analytische functies kunnen we beginnen met een algemeen analytisch functiebegrip zoals dat van Weierstrasz; eerst moet een beperkter functiebegrip gegeven worden om dan later de singulariteiten te beschrijven en eventueel op te nemen. Sommige gevallen van Cipolla's definitie vallen niet onder de definitie die we nu zullen geven (en waarbij steeds $F(I)$ een scalair veelvoud van I is).

Een definitie met machtreeksen levert moeilijkheden op bij analytische voortzetting wegens de niet-commutativiteit van de matrixvermenigvuldiging. Zo is Z niet te ontwikkelen in de omgeving van een matrix A die geen scalair veelvoud van I is. Immers uit $Z= \sum_{m=0}^{\infty} c_m(Z-A)^m$ zou direct volgen dat Z met $Z-A$ dus met A verwisselbaar zou zijn. We kiezen daarom een definitie, die eist dat een analytische functie locaal een limiet van polynomen met constante scalaire coëfficiënten is.

Een functie $F(Z)$, gedefinieerd in een gebied G in MR_n, heet analytisch als bij iedere $A \in G$ een omgeving O van A en een rij polynomen (met constante scalaire coëfficiënten) $\{P_k(Z)\}$ bestaat, zodat $\lim_{k\to\infty} P_k(Z)=F(Z)$ uniform voor alle $Z \in O$.

Aan een analytische functie $F(Z)$ kunnen we nu een gewone complexe functie $f(z)$ toevoegen, die echter niet analytisch in de klassieke zin hoeft te zijn, doch slechts locaal-analytisch. Een complexe functie $f(z)$, gedefinieerd op een (niet noodzakelijk samenhangende) open verzameling S in het complexe vlak heet locaal-analytisch, als zij in ieder punt van S analytisch is. Een dergelijke functie is dus op iedere component van S analytisch, maar op verschillende componenten hoeft $f(z)$ niet bij dezelfde analytische functie te behoren.

Als nu $F(Z)$ analytisch is in $G \subset MR_n$ en $A \in G$ en als $\{P_k(Z)\}$ een rij polynomen is, die in een omgeving O van A uniform naar $F(Z)$ convergeert, dan zullen we bewijzen dat er een open verzameling S in het complexe vlak bestaat, die alle eigenwaarden van A bevat, en waarop de rij $\{P_k(\lambda)\}$ uniform convergeert naar een, uiteraard locaal-analytische, functie $f(\lambda)$. Verder geldt

$$F(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda I - Z}$$

voor Z in een omgeving van A en voor een integratieweg die uit een aantal gesloten contouren bestaat, die elk met hun binnengebied in S liggen en samen alle eigenwaarden van Z eenmaal in positieve zin omlopen, ongeacht hun multipliciteit. Door $F(Z)$ en bovenstaande integraal is de locaal-analytische functie $f(z)$ ondubbelzinnig bepaald.

Omgekeerd als $A \in MR_n$, als S een open verzameling in het complexe vlak is die alle eigenwaarden van A bevat en als $f(\lambda)$ een locaal-analytische op S is, dan geldt voor een integratieweg, die uit een aantal gesloten contouren bestaat, die elk met hun binnengebied in S liggen en samen alle eigenwaarden van A eenmaal in positieve zin omlopen en voor alle $Z \in MR_n$ die in een dusdanige omgeving van A liggen, dat alle eigenwaarden van Z door de integratieweg eenmaal in positieve zin omlopen worden, dat

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda I - Z}$$

een analytische functie van Z is. De laatste bewering wordt bewezen met behulp van de volgende stelling van <u>Runge</u>:

Als V een open verzameling in het complexe vlak is, waarvan alle componenten enkelvoudig samenhangend zijn en als $f(z)$ een locaal-analytische functie op V is, dan bestaat er een rij polynomen $\{P_k(z)\}$ zodat $\lim_{k\to\infty} P_k(z)=f(z)$ voor alle $z \in V$ en zodat de convergentie uniform is op elk compact deel van V.

Dit gedeelte van de theorie is tot op zekere hoogte voor Banach-algebras te generaliseren. In plaats van de eigenwaarden van een matrix A treedt dan het spectrum $\sigma(a)$ van een element a van de Banach-algebra B.

Dit spectrum (d.i. de verzameling van alle complexe getallen λ waarvoor $\lambda e-a$ geen inverse heeft) is een compacte verzameling in het complexe vlak. Als we een analytische functie als boven definiëren vinden we daarbij als boven een locaal-analytische functie, gedefinieerd in een omgeving van $\sigma(a)$. Ook krijgen we bovenstaande integraalvoorstelling. De weg terug loopt echter mis op de volgende omstandigheid. Een kleine omgeving van $\sigma(a)$ kan componenten bezitten die niet enkelvoudig samenhangend zijn en de hierboven genoemde stelling van Runge geldt niet als de componenten van V niet enkelvoudig samenhangend zijn. Er is echter een algemenere stelling van Runge, waarin de veronderstelling van enkelvoudige samenhang vervallen is en waarbij de polynomen vervangen zijn door rationale functies met polen buiten V. Het verdient daarom aanbeveling in Banach-algebras analytische functies locaal als uniforme limieten van rationale functies te definiëren. Het is mogelijk een voorbeeld van een Banach-algebra te geven, waarin bij definitie van analyticiteit met polynomen de functie z^{-1} niet analytisch is. Deze moeilijkheid treedt bij matrices niet op omdat het spectrum dan uit een eindig aantal punten bestaat.

Van bijzonder belang is de transformatie $X^{-1}AX$, omdat, althans locaal, de $F(X^{-1}AX)$ door $F(A)$ bepaald is door $F(X^{-1}AX)=X^{-1}F(A)X$. Dit brengt ons ertoe verzamelingen $X^{-1}AX$ met vaste A en X variabel in MR_n^* te beschouwen (vezels). Een voorbeeld van de hierbij optredende eigenaardigheden is het volgende. Neem n=2, de vezel van $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ bestaat uit één punt, de vezel van $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ verdicht zich echter bij I, want hij bevat $\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$ voor alle complexe $t\neq 0$.

Een ander begrip, dat misschien een rol zal spelen, is het begrip sterk gebied. Een gebied G in MR_n heet een <u>sterk gebied</u> als bij iedere functie F(Z), die analytisch is in G, een rij polynomen bestaat, die in G naar F(Z) convergeren, en wel uniform in elk compact deel van G. Bij iedere $A\in MR_n$ en iedere omgeving O van A bestaat een sterk gebied G, zodat $A\in G\subset O$.

Op het programma staat verder een definitie van Riemanns oppervlak voor matrices analoog met definitie van een gewoon Riemanns oppervlak. Het is de bedoeling om bij zo'n Riemanns oppervlak een z.g. spectraal oppervlak te definiëren dat een (eventueel niet samenhangend) gewoon Riemanns oppervlak is, dusdanig dat er een correspondentie bestaat tussen de analytische functies op het Riemannse oppervlak en op zijn spectrale oppervlak analoog met de locale correspondentie die hierboven is geschetst tussen een analytische matrixfunctie en een locaal-analytische functie op het spectrum.

De volledige analytische voortzetting van een matrixfunctie wordt nu met behulp van het Riemannse oppervlak gedefinieerd en geeft dan een uitbreiding van Cipolla's definitie. In het geval van de functie $W=\sqrt{Z}$ zullen dan werkelijk alle oplossingen van de vergelijking $W^2=Z$ worden teruggevonden (bij Cipolla ontbrak bijv. de waarde $W=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ bij $Z=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$).

Algemener kunnen we de vraag stellen of alle oplossingen (Z,W) van een algebraische vergelijking $F(Z,W)=0$ met de nevenconditie $ZW=WZ$ uit de algemene analytische functie voortvloeien. Dit blijkt niet steeds het geval te zijn; er zijn oplossingen, samenhangende met meervoudige punten van de algebraische kromme, die niet in onze theorie kunnen worden opgenomen.

Literatuur

Een vergelijkend overzicht over de bestaande definities van matrixfuncties geeft

1 R.F. Rinehart, The equivalence of definitions of a matric function, Amer.Math.Monthly 62 (1955), 395-414.

Een keuze uit de literatuur over matrixfuncties:

2 L. Fantappiè, Le calcul des matrices, C.R. 186 (1928), 619-62 .

3 G. Giorgi, Sulle funzioni delle matrice, Atti Accad. Lincei Rend. (6) 8 (1928), 3-8.

4 M. Cipolla, Sulle matrice espressione analitiche di un'altra, Rend.Circ.Mat.Palermo 56 (1932), 144-154.

5 H. Schwerdtfeger, Les fonctions de matrices I. Les fonctions univalentes, A.S.I. 649 (1938).

Over Banach-ruimten en Banach-algebras:

6 S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

7 E. Hille, Functional analysis and semigroups, Amer. Math.Soc. Coll.Publ.31 (1948).

8 A.C. Zaanen, Linear analysis, Amsterdam-Groningen (1953).

Over analytische functies op Banach-algebras:

9 N. Dunford, Spectral theory, Bull. Amer.Math.Soc.,49 (1943), 637-651.

10 A.E. Taylor, Analysis in complex Banach spaces, Bull. Amer.Math. Soc.49 (1943), 652-669.

11 N. Dunford, Spectral theory I. Convergence to projections, Trans. Amer. Math.Soc.54 (1943), 185-217.

Colloquium matrixfuncties 1955-1956

o.l.v.

Prof. Dr N.G. de Bruijn

Tweede voordracht

door

Dr W. Peremans

21 October 1955

We beschouwen de matrixruimte MR_n met de normdefinitie $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|$ als $A=(a_{jk}) \in MR_n$. Deze norm voldoet aan de eigenschappen 1° t/m 5° van blz.5, zoals blijkt uit de wijze, waarop deze norm daar verkregen is of ook door directe verificatie. Bovendien voldoet deze norm klaarblijkelijk aan de volgende eigenschap:

6° $\max\limits_{j,k} |a_{jk}| \leqq \|A\| \leqq n \max\limits_{j,k} |a_{jk}|$, als $A=(a_{jk})$.

Door de afstand van A en B te definiëren als $\|B-A\|$ wordt MR_n een metrische ruimte. Convergentie en uniforme convergentie in MR_n corresponderen op grond van 6° met convergentie en uniforme convergentie van de matrixelementen: als t in een willekeurige verzameling varieert, $A_m(t)=(a_{jk}^{(m)}(t))$ en $A(t)=(a_{jk}(t))$, dan geldt $\lim\limits_{m\to\infty} A_m(t)=A(t)$ uniform in t dan en slechts dan als $\lim\limits_{m\to\infty} a_{jk}^{(m)}(t)=a_{jk}(t)$ uniform in t voor $j,k=1,\dots,n$.

Verder is λX (λ complex, $X \in MR_n$) een continue functie in λ en X samen; X+Y en XY ($X,Y \in MR_n$) zijn continue functies in X en Y samen. Dit volgt direct uit 6°.

$(a_{jk}) \in MR_n$ heet <u>supertriangulair</u> als $a_{jk}=0$ voor $j \geqq k$, <u>triangulair</u> [1] als $a_{jk}=0$ voor $j>k$ en <u>diagonaal</u> als $a_{jk}=0$ voor $j \neq k$. Voor een diagonale matrix (a_{jk}) gebruiken we het symbool $[a_{11},\dots,a_{nn}]$. Een element van MR_n heet <u>niet-critiek</u> als het n verschillende eigenwaarden heeft, anders <u>critiek</u>. Als A niet-critiek is, is er een $X \in MR_n^*$, zodat $X^{-1}AX= [\lambda_1,\dots \lambda_n]$ waarin $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn.

We schrijven $A^X=X^{-1}AX$ voor $A \in MR_n$, $X \in MR_n^*$. Dan is $(A^X)^Y= A^{XY}$, $(A+B)^X=A^X+B^X$, $(\lambda A)^X= \lambda A^X$, $A^I=A$ (oppassen: Mc Duffee gebruikt A^I in de betekenis van A^{-1}). Uit $A^X=B$ volgt $B^{X^{-1}}=A$, uit $A^X=B^X$ volgt A=B, uit $A^X=A^Y$ volgt niet X=Y. Uit $\lim\limits_{m\to\infty} A_m=A$ volgt $\lim\limits_{m\to\infty} A_m^X=A^X$.

---

1) Wordt ook wel superdiagonaal genoemd.

Als $P(z)=\sum_{j=0}^{N} c_j z^j$ een polynoom met constante complexe coëfficiënten is, heet de functie $P(Z)=\sum_{j=0}^{N} c_j Z^j$ een polynoom. Er geldt $P(A^X)=P(A)^X$.

De metriek in MR_n impliceert een topologie, en dus het begrip open verzameling.

Een samenhangende open verzameling in MR_n heet een gebied (in MR_n). Als $A \in MR_n$, dan heet een open verzameling in MR_n, die A bevat, een omgeving van A.

Een functie $F(Z)$ gedefinieerd op een deelverzameling van MR_n en met functiewaarden in MR_n heet een matrixfunctie.

Als $F(Z)$ een matrixfunctie is en A een punt van de definitieverzameling $\mathcal{S}$ van F, dan heet F analytisch in A, als er een omgeving O van A en een rij polynomen $P_m(Z)$ is, zodat $O \subset \mathcal{S}$ en zodat $\lim_{m\to\infty} P_m(Z)=F(Z)$ uniform voor alle $Z \in O$. Een op een open verzameling G gedefinieerde matrixfunctie $F(Z)$ heet analytisch, als zij analytisch is in elk punt van G.

Als $F(Z)$ een matrixfunctie is gedefinieerd op een gebied G, dan heet F sterk analytisch als er een rij polynomen $\{P_m(Z)\}$ is, zo dat voor alle $Z \in G$ geldt $F(Z)=\lim_{m\to\infty} P_m(Z)$ en zo dat deze convergentie uniform is in elke compacte deelverzameling van G.

Een gebied G heet een sterk gebied, als iedere op G gedefinieerde analytische functie sterk analytisch in G is.

Als $F(z)$ een functie is van een complexe veranderlijke met functiewaarden in MR_n, dan kan $\int_C F(z)dz$ gedefinieerd worden, als C een weg in het complexe vlak is, waarop $F(z)$ gedefinieerd en continu is. Dit kan op twee manieren geschieden, n.l. door de integratie voor elk matrixelement afzonderlijk uit te voeren of ook rechtstreeks door een definitie als limiet in de zin van de matrixmetriek van approximatiesommen. Op grond van het feit dat optelling van matrices en vermenigvuldiging van een matrix en een scalar elementsgewijs geschiedt en op grond van eigenschap 6^o zijn beide definities aequivalent. Verder gelden de volgende elementaire stellingen over integralen: de integraal van de som van twee functies is de som van de integralen van de twee functies, de integraal is additief t.o.v. verknipping van de integratieweg in een eindig aantal stukken, $\int_C \alpha F(z)dz=\alpha\int_C F(z)dz$ voor constante scalaire α, $\int_C AF(z)B\,dz=A(\int_C F(z)dz)B$ voor constante matrices A en B, speciaal $\int_C (F(z))^X dz=(\int_C F(z)dz)^X$. Tenslotte als $\lim_{m\to\infty} F_m(z)=F(z)$ uniform voor $z \in C$, dan geldt $\int_C F(z)dz=\lim_{m\to\infty}\int_C F_m(z)dz$.

<u>Stelling 1.</u> Als $P(Z)$ een polynoom is en $A \in MR_n$, dan geldt

$$P(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_W P(z)(zI-A)^{-1}\, dz,$$

als W een integratieweg is, bestaande uit één of meer gesloten contouren die samen iedere eigenwaarde van A (ongeacht haar multipliciteit) éénmaal in positieve zin omlopen.

<u>Opmerking</u>: De matrixelementen van $P(z)(zI-A)^{-1}$ zijn rationale functies van z, waarvan de noemers in de vorm det $(zI-A)$ kunnen worden gebracht en die dus geen andere polen kunnen hebben dan de eigenwaarden van A.

<u>Bewijs</u>: We schrijven $P(z)-P(w)=Q(z,w)(z-w)$, waarin $Q(z,w)$ een polynoom in twee veranderlijken is. Omdat zI en A verwisselbaar zijn geldt $P(zI)-P(A)=Q(zI,A)(zI-A)$, dus $P(z)(zI-A)^{-1}=P(A)(zI-A)^{-1}+Q(zI,A)$. Verder geldt $\frac{1}{2\pi i}\int_W Q(zI,A)dz=0$, omdat ieder matrixelement van $Q(zI,A)$ een polynoom in z is. Dus $\frac{1}{2\pi i}\int_W P(z)(zI-A)^{-1}dz=P(A)\,\frac{1}{2\pi i}\int_W (zI-A)^{-1}dz$. Het is dus voldoende te bewijzen:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_W (zI-A)^{-1}\, dz .$$

Er is een $X \in MR_n^*$, zodat $A=B^X$ en B in de normaalvorm van Jordan. Verder is $\frac{1}{2\pi i}\int_W (zI-A)^{-1}dz=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_W (zI-B)^{-1}dz\right)^X$. Het is dus voldoende te bewijzen

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_W (zI-B)^{-1}\, dz ,$$

waarin B de normaalvorm van Jordan heeft. Dit is echter duidelijk op grond van de op blz. 4 bepaalde gedaante van $(zI-B)^{-1}$.

In plaats van op de normaalvorm van Jordan kan men zich bij het bewijs van stelling 1 beroepen op de volgende omstandigheden:

1°. Voor niet-critieke matrices is het bewijs gemakkelijk, omdat deze in diagonaalvorm zijn te transformeren.

2°. Iedere matrix is in een triangulaire matrix te transformeren.

3°. Iedere triangulaire matrix is limiet van niet-critieke matrices.

We behandelen nu enige hulpstellingen.

<u>Hulpstelling 1.</u> MR_n^* is een gebied.

<u>Bewijs</u>: Dat MR_n^* open is volgt direct uit het feit dat de determinant van een matrix een continue functie van de matrixelementen is en dat de elementen van MR_n^* de matrices zijn, waarvan de determinant $\neq 0$ is.

Om aan te tonen dat MR_n^* samenhangend is, verbinden we een willekeurige $A \in MR_n^*$ door een continue kromme binnen MR_n^* met I. Laat $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de eigenwaarden van A zijn en laat $\varphi(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ een continue kromme in het complexe vlak zijn met $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ en die niet gaat door de punten $\frac{-\lambda_j}{1-\lambda_j}$ als $\lambda_j \neq 1$ $(j=1,\ldots,s)$. Voor eventuele $\lambda_j=1$ wordt niets geeist. De matrices $A+\varphi(t)(I-A)$ vormen een continue kromme in de matrixruimte, die A met I verbindt. De eigenwaarden van $A+\varphi(t)(I-A)$ zijn $\lambda_j+\varphi(t)(1-\lambda_j) \neq 0$, dus $A+\varphi(t)(I-A) \in MR_n^*$.

<u>Hulpstelling 2</u>. Als $A \in MR_n$ en als T een open verzameling in het complexe vlak is, zodat alle eigenwaarden van A in T liggen, dan is er een omgeving O van A zodat voor iedere $Z \in O$ geldt dat alle eigenwaarden van Z in T liggen.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt uit de continuïteit van de eigenwaarden als wortels van de karakteristieke vergelijking als functies van de matrixelementen.

<u>Stelling 2</u>. Laat $A \in MR_n$ de verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ hebben en laat F(Z) analytisch in A zijn. Stel dat $\{P_m(Z)\}$ een rij polynomen is, die in een omgeving O van A uniform naar F convergeert. Dan is er een open verzameling S in het complexe vlak, die $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ bevat, zodat $\{P_m(z)\}$ voor $z \in S$ uniform convergeert naar een locaal-analytische functie f(z). Voor elk stelsel in S gelegen in positieve zin doorlopen contouren W_j om λ_j $(j=1,\ldots,s)$, waarvan ook de binnengebieden tot S behoren, bestaat een omgeving O^* van A zodat voor $Z \in O^*$ geldt, dat de eigenwaarden van Z binnen de W_j liggen en

$$(1) \qquad F(Z) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_j} f(z)(zI-Z)^{-1}\, dz.$$

Als $Z \in O^*$ en $Z=([\zeta_1,\ldots,\zeta_n]+K)^X$, waarin K supertriangulair is, dan is $F(Z)=([f(\zeta_1),\ldots,f(\zeta_n)]+K_1)^X$, waarin K_1 supertriangulair is. Als $K=0$, dan is $K_1=0$.

Als S_1 een open verzameling is, die $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ bevat, $f_1(z)$ een locaal-analytische functie gedefinieerd op S_1 en W_{1j} $(j=1,\ldots,s)$ een stelsel in S_1 gelegen in positieve zin doorlopen contouren, waarvan ook de binnengebieden tot S_1 behoren en waarvoor geldt λ_j binnen W_{1j} $(j=1,\ldots,s)$, dusdanig dat er een omgeving O_1^* van A bestaat, zodat voor $Z \in O_1^*$ geldt dat de eigenwaarden van Z binnen W_{1j} liggen en

$$(2) \qquad F(Z) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_{1j}} f_1(z)(zI-Z)^{-1}\, dz,$$

dan is er een open verzameling S_2 in het complexe vlak, die $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$

bevat, zodat voor $z \in S_2$ geldt $f(z)=f_1(z)$.

Bewijs: Allereerst merken we op, dat als C een gesloten contour is en g(z) analytisch op en binnen C en Z een matrix waarvan geen der eigenwaarden binnen C ligt, $\int_C g(z)(zI-Z)^{-1}dz=0$, immers ieder matrixelement van de matrix $g(z)(zI-Z)^{-1}$ is op en binnen C analytisch. In de in de stelling genoemde integralen mogen we dus de integratiewegen verschuiven, mits we daarbij geen eigenwaarden van Z passeren.

Voor complexe t is A+tI een continue functie van t; er is dus een reële $\rho>0$ zodat voor $|t|<\rho$ geldt $A+tI \in O$. Voor S nemen we de open verzameling van die complexe z, waar een λ_j bij bestaat zodat $|z-\lambda_j|<\rho$. Laat $X \in MR_n^*$ zo gekozen zijn dat $A=B^X$, en B triangulair is. (B behoeft niet in O te liggen). Dan is $P_m(A+tI)=(P_m(B+tI))^X$. Verder convergeert $\{P_m(A+tI)\}$ uniform in t naar F(A+tI), dus convergeert $\{P_m(B+tI)\}$ ook uniform. Voor j=1,...,m komt $P_m(\lambda_j+t)$ ergens als element van de hoofddiagonaal van $P_m(B+tI)$ voor; dus convergeert $\{P_m(\lambda_j+t)\}$ uniform in t. Dus $\{P_m(z)\}$ convergeert uniform in S naar een locaal-analytische functie f(z).

Hieruit volgt nu ook direct dat als $Z \in O^*$ en als $Z=([\zeta_1,\dots,\zeta_n]+K)^X$, dan $F(Z)=([f(\zeta_1),\dots,f(\zeta_n)+K_1)^X$, waarin K_1 supertriangulair is. Als K=0, dan is $K_1=0$.

Laat nu T_j het binnengebied van de contour W_j zijn en $T=\bigcup_{j=1}^{n} T_j$, dan is T open, $T \subset S$ en $\lambda_1 \in T$ voor j=1,...,s. Op grond van hulpstelling 2 is er een omgeving O_2 van A, zodat voor iedere $Z \in O_2$ geldt dat alle eigenwaarden van Z in T liggen. Noem $O^*=O \cap O_2$. Kies een $Z \in O^*$, dan is $\|(zI-Z)^{-1}\|$ voor $z \in W_j$ een continue functie op een compacte verzameling en dus begrensd. Omdat verder W_j in S ligt is $\{P_m(z)(zI-Z)^{-1}\}$ uniform convergent voor $z \in W_j$ met limiet $f(z)(zI-Z)^{-1}$. Op grond van stelling 1 geldt nu, bij vaste $Z \in O^*$,

$$F(Z)=\lim_{m\to\infty} P_m(Z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_j} P_m(z)(zI-Z)^{-1}dz =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_j} f(z)(zI-Z)^{-1}\, dz.$$

We kiezen nu contouren W_{2j} om λ_j die geheel binnen W_j en W_{1j} liggen. Als O_3 een omgeving van A is zodat voor $Z \in O_3$ geldt dat alle eigenwaarden van Z binnen de W_{2j} liggen, dan geldt voor $Z \in O_4=O^* \cap O_1^* \cap O_3$ zowel (1) als (2), dus

$$0 = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_{2j}} (f(z)-f_1(z))(zI-Z)^{-1}\, dz \qquad (Z \in O_4).$$

We kiezen nu als boven een reëel getal $\varrho_1 > 0$ zodat voor $|t| < \varrho_1$ geldt $A+tI \in O_4$, dan is

$$0=\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_{2j}} (f(z)-f_1(z))(zI-(B+tI))^{-1}\,dz \qquad (|t|<\varrho_1),$$

dus voor een λ_k: door van de matrices in beide leden slechts één diagonaalelement te bekijken, zien we dat

$$0=\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_{2j}} \frac{f(z)-f_1(z)}{z-(\lambda_k+t)}\,dz=f(\lambda_k+t)-f_1(\lambda_k+t) \qquad (k=1,\ldots,s).$$

Voor de open verzameling S_2 bestaande uit de complexe getallen z, waar een k bij bestaat zodat $|z-\lambda_k| < \varrho_1$, geldt $f(z)=f_1(z)$. Hiermee is het bewijs van stelling 2 voltooid.

Hulpstelling 3 (Runge-Montel) Als S een open verzameling in het complexe vlak is, waarvan alle componenten enkelvoudig samenhangend zijn en f(z) een op S gedefinieerde locaal-analytische functie, dan is er een rij polynomen $\{P_m(z)\}$ zodat $\lim_{m\to\infty} P_m(z)=f(z)$ voor $z \in S$ en zodat de convergentie uniform is in elk compact deel van S (zie P. Montel, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Paris 1910).

Het bewijs van deze hulpstelling slaan we voorlopig over.

Stelling 3. Laat S een open verzameling in het complexe vlak zijn met s componenten $G_1,\ldots,G_s$ en laat $s \leqq n$ zijn. Laat f(z) een locaal-analytische functie op S zijn. Laat $\nu_1,\ldots,\nu_s$ natuurlijke getallen zijn met $\nu_1+\ldots+\nu_s=n$. Noem $H(G_1^{\nu_1}\ldots G_s^{\nu_s})$(afgekort H) de collectie van alle elementen van MR_n met ν_j eigenwaarden in G_j ($j=1,\ldots,s$); hierbij wordt elke eigenwaarde met haar algebraïsche multipliciteit geteld. Dan is H een gebied. Als $Z \in H$ en W_j voor $j=1,\ldots,s$ een contour in G_j waarvan het binnengebied tot G_j behoort en die de in G_j gelegen eigenwaarden van Z (ongeacht hun multipliciteit) eenmaal in positieve zin omloopt, dan is

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_j} f(z)(zI-Z)^{-1}\,dz$$

bij gegeven Z onafhankelijk van de keuze der contouren W_j. De op grond hiervan door f(z) ondubbelzinnig bepaalde matrixfunctie F(Z), gedefinieerd door

$$F(Z)=\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_j} f(z)(zI-Z)^{-1}\,dz,$$

is analytisch in H.

Als $A \in H$, $N \in MR_n$, $X \in MR_n^*$, $A=([\alpha_1,\ldots,\alpha_n]+N)^X$, N nilpotent en verwisselbaar met $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$, dan is

$$F(A)=\left(\sum_{h=0}^{n-1}\frac{1}{h!}N^h\left[f^{(h)}(\alpha_1),\ldots,f^{(h)}(\alpha_n)\right]\right)^X.$$

Bewijs: De onafhankelijkheid van de keuze van W_j is al in het bewijs van de vorige stelling aangetoond. Neem nu een $A \in H$ en contouren W_j (behorend bij A) als in de stelling vermeld. Neem verder een stel cirkelomgevingen van de eigenwaarden van A_1 die met hun rand geheel binnen de W_j vallen; noem de zo ontstane open verzameling T. Op grond van hulpstelling 2 is er een omgeving O_1 van A zodat voor $Z \in O_1$ geldt dat alle eigenwaarden van Z in T liggen en dus een kleinere omgeving O van A zodat voor $Z \in \bar{O}$ alle eigenwaarden van z in T liggen. De functie $\|(zI-Z)^{-1}\|$ voor $z \in W_j$ en $Z \in \bar{O}$ is een continue functie van z en Z samen, op een compacte verzameling gedefinieerd, en dus begrensd. Verder geldt voor $Z \in O$

$$F(Z)=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_j} f(z)(zI-Z)^{-1}\,dz.$$

Op grond van de stelling van Runge-Montel is er een rij polynomen $\{P_m(z)\}$ zodat $\lim_{m\to\infty} P_m(z)=f(z)$ voor $z \in T$ en zodat de convergentie uniform is in ieder compact deel van T. Er geldt dus ook dat $\lim_{m\to\infty} P_m(z)(zI-Z)^{-1}=f(z)(zI-Z)^{-1}$ uniform voor $z \in W_j$ en $Z \in O$. Dus op grond van stelling 1:

$$F(Z)=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_j} P_m(z)(zI-Z)^{-1}\,dz=\lim_{m\to\infty} P_m(Z),\ \text{uniform in } Z$$

voor $Z \in O$. Dus is F(Z) analytisch in A.

Er moet verder bewezen worden dat H een gebied is. Dat H open is volgt uit het feit dat de eigenwaarden van een matrix continu afhangen van de matrixelementen. Om de samenhang van H te bewijzen, moeten twee punten A en B van H door een kromme worden verbonden. Daartoe transformeren we eerst A en B in supertriangulaire vorm (hetgeen door continue overgang mogelijk is omdat MR_n^* samenhangend is (hulpstelling 1)) en vervolgens door continue overgang de twee supertriangulaire in elkaar.

Als N nilpotent is (dus zeker $N^n=0$), B verwisselbaar met N en $B \in MR_n^*$, dan geldt $B-N \in MR_n^*$ en $(B-N)^{-1}=\sum_{h=0}^{n-1} N^h B^{-(h+1)}$, immers

$$(B-N)\sum_{h=0}^{n-1} N^h B^{-(h+1)}=\sum_{h=0}^{n-1} N^h B^{-h}-\sum_{h=0}^{n-1} N^{h+1} B^{-(h+1)}=I-N^nB^{-n}=I.$$

Nu geldt

$$F(A)=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_j} f(z)(zI-([\alpha_1,\ldots,\alpha_n]+N)^{X})^{-1}\,dz =$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_j} f(z)\,([z-\alpha_1,\ldots,z-\alpha_n]-N)^{-1}\,dz\Big)^{X} =$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_j} f(z)\sum_{h=0}^{n-1} N^{h}\,\big[(z-\alpha_1)^{-(h+1)},\ldots,(z-\alpha_n)^{-(h+1)}\big]\,dz\Big)^{X}$$

$$=\Big(\sum_{h=0}^{n-1} N^{h}\Big[\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_j}\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha_1)^{h+1}},\ldots,\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_j}\frac{f(z)\,dz}{(z-\alpha_n)^{h+1}}\Big]\Big)^{X}$$

$$=\Big(\sum_{h=0}^{n-1}\frac{1}{h!}N^{h}\big[f^{(h)}(\alpha_1),\ldots,f^{(h)}(\alpha_n)\big]\Big)^{X}.$$

Hiermee is het bewijs van stelling 3 voltooid.

Colloquium Matrixfuncties 1955-1956

o.l.v.

Prof. Dr N.G. de Bruijn

Derde voordracht

door

Prof. Dr N.G. de Bruijn

4 November 1955

De bedoeling van deze voordracht is om aan de hand van bijzondere gevallen te laten zien hoe men met de integraalformule van Cartan kan opereren. We beschouwen in het bijzonder de logarithme van een matrix.

De functie e^X is voor alle $X \in MR_n$ gedefinieerd door de convergente machtreeks

$$e^X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots \quad ;$$

we stellen nu de vraag naar matrixoplossingen van de vergelijking $e^X=A$. Daar men gemakkelijk constateert dat $e^X . e^{-X}=I$ is, is het duidelijk dat $e^X=A$ onoplosbaar is als A singulier is. Dit sluiten we dus verder uit.

We zullen ons nu niet bezighouden met de vraag of de methode van Cipolla alle oplossingen levert. We bekijken slechts die functiewaarden die nog met de integraal van Cartan kunnen worden beschreven, nl. de functiewaarden die (zie blz. M4) ontstaan door in blokken van A die bij eenzelfde eigenwaarde λ behoren steeds dezelfde tak van log z te kiezen. We vragen ons nu af of de integraal van Cartan werkelijk oplossingen van de vergelijking levert.

Laat in het complexe vlak W een positief georiënteerde gesloten contour zonder dubbelpunten zijn, die de oorsprong niet insluit, en D het gebied binnen W. Binnen en op W kunnen we een tak van log z kiezen. Laat H(D) de verzameling van alle matrices in MR_n zijn waarvan alle eigenwaarden in D vallen. Dan definiëren we

$$(1) \qquad L = \frac{1}{2\pi i} \int_W \log z(zI-A)^{-1}\, dz \qquad (A \in H(D)).$$

We kunnen nu op verschillende wijzen argumenteren dat $A=e^L$ is.

Eerste bewijs. (Dit heeft het bezwaar dat het niet tot Banach-algebra's te generaliseren is).

Op grond van de op blz. M12 aangegeven argumenten kan men zich tot niet-critieke A beperken, en dus, na transformatie, tot diagonale A. Daarvoor is $L=e^A$ triviaal, want op elke diagonaalplaats komt de logarithme van het getal op de corresponderende diagonaalplaats van A te staan.

Tweede bewijs. Het bewijs dat het meest in de lijn van onze analyticiteitsdefinitie ligt, berust op de omstandigheid, dat een samengestelde functie $f(g(z))$, waarin f en g limieten van polynomen zijn, zelf ook limiet van polynomen is, terwijl anderzijds (ruw gesproken) $P_n(z) \to z$ impliceert dat $P_n(Z) \to Z$. We zullen deze procedure nog nauwkeurig bestuderen in het algemene geval, en daarom hier niet uitwerken.

Derde bewijs. We passen de stelling van Runge toe, en approximeren log z met een rij polynomen $P_n(z)$ uniform in D+W. Derhalve is $P_n(A) \to L$. Verder convergeert bij vaste k (k=1,2,3,...) $P_n(z)^k$ uniform naar $\log^k z$, en $P_n(A)^k$ naar L^k, zodat wegens

$$P_n(A)^k = \frac{1}{2\pi i} \int_W P_n(z)^k (zI-A)^{-1}\, dz \qquad \text{(St.1 blz.M12)}$$

gevonden wordt

$$\text{(2)} \qquad L^k = \frac{1}{2\pi i} \int_W \log^k z\, (zI-A)^{-1}\, dz \qquad (k=1,2,...).$$

We berekenen nu e^L door toepassing van de machtreeksdefinitie en verwisseling van sommatie en integratie:

$$e^L = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int \log^k z\, (zI-A)^{-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\log z} (zI-A)^{-1} dz$$

Weer door toepassing van st.1 zien we nu dat $e^L = A$ is.

Dit derde bewijs heeft het nadeel dat het gebruik maakt van de overal geldige machtreeksontwikkeling van e^z, en dus niet in alle soortgelijke situaties van toepassing is.

Vierde bewijs. Dit maakt geen gebruik van de stelling van Runge, en opereert slechts met Cartan-integralen. We achten e^L gegeven door de formule

$$\text{(3)} \qquad e^L = \frac{1}{2\pi i} \int_{W'} e^\lambda (\lambda I-L)^{-1}\, d\lambda \, ;$$

de equivalentie met de machtreeksdefinitie blijkt gemakkelijk door reeksontwikkeling van e^λ (vgl. ook st.2 blz. M13). W' is bv. een positief georienteerde cirkel die alle eigenwaarden van L insluit.

We bewijzen nu een integraalformule voor $(\lambda I-L)^{-1}$. Is $|\lambda|$ voldoend groot, dan geldt $(\lambda I-L)^{-1} = \lambda^{-1} + \lambda^{-2}L + \lambda^{-3}L^2 + ...$, zodat volgens (2) geldt

$$(\lambda I-L)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_W (\lambda^{-1} + \lambda^{-2}\log z + ...)(zI-A)^{-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{1}{\lambda - \log z} (zI-A)^{-1}\, dz.$$

(Door analytische voortzetting kan nu de restrictie "$|\lambda|$ voldoend groot" worden vervangen door "λ buiten het beeld van W bij de functie log z", doch daar e^z overal analytisch is, is dit hier niet nodig).
Substitutie in (3) levert

$$e^L = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{W'} e^\lambda \, d\lambda \int_W \frac{(zI-A)^{-1}}{\lambda - \log z} \, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_W (zI-A)^{-1} \, dz \int_{W'} \frac{e^\lambda}{\lambda - \log z} \, d\lambda .$$

De achterste integraal levert volgens de formule van Cauchy (W' is zo groot dat log z ($z \in W$) er binnen ligt) $2\pi i \; e^{\log z} = 2\pi i \; z$ op. Door toepassing van stelling 1 vinden we dus weer $e^L = A$.

Het gebruik van de stelling van Runge (voor het bewijs van (2)) laat zich vermijden door toepassing van de formule

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_W f(z)(zI-A)^{-1} \, dz \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_W g(z)(zI-A)^{-1} \, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_W f(z) \, g(z)(zI-A)^{-1} \, dz$$

(die ook geldt als er eigenwaarden van A buiten, doch niet òp W liggen). We zullen deze formule thans echter niet bespreken (zij volgt natuurlijk direct uit de stelling van Runge-Montel, maar dat is de bedoeling niet).

Is een matrix A gegeven, dan kunnen er verschillende contouren W worden gekozen die alle eigenwaarden van A één keer positief omlopen, en 0 niet omlopen; d.w.z. er zijn verschillende mogelijkheden voor W die voldoen aan $A \in H(D)$. Daarbij kunnen verschillende waarden van L behoren.

We kunnen al deze waarden het eenvoudigst beschrijven door slechts over residuen te spreken. De functie log z is, na een in één punt gemaakte afspraak, als eenwaardige functie binnen W volledig bepaald, zodat ook de waarden voor $\log \lambda_j$ vastliggen ($\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ stellen de verschillende eigenwaarden van A voor).

Laat omgekeerd $\mu_1, \ldots, \mu_k$ willekeurige oplossingen van $e^{\mu_1} = \lambda_1, \ldots, e^{\mu_k} = \lambda_k$ zijn. Dan kunnen we de contour W en daarbinnen de tak van log z zó kiezen dat log z in de λ_j's juist de corresponderende μ_j's als waarden heeft. Dit laat zich bijvoorbeeld bewijzen door uit te gaan van een situatie waarin de λ's alle in het rechterhalfvlak liggen, en log z de hoofdwaarde heeft. Vervolgens schuiven we de λ's stuk voor stuk weg: zolang we λ schuiven langs een kromme waarop geen andere λ's liggen, kunnen we de contour W zo voor ons uitduwen, dat W nooit een λ overschrijdt. (Met andere woorden kan het resultaat als volgt worden uitgedrukt: Wordt (1) geinterpreteerd met een W die uit verschillende buiten elkaar gelegen contouren bestaat, dan kan dat stelsel door één enkele contour worden vervangen. Dit is in Banach-algebra's niet meer algemeen waar; daar is dus de definitie van L met meerdere contouren wezenlijk algemener).

Volgens de residustelling is

$$L = \sum_{j=1}^{k} (\text{Residu in } \lambda_j \text{ van } \log z \,.\, (zI-A)^{-1}),$$

waarbij bij λ_j de tak van log z is gekozen die in λ_j de waarde μ_j heeft.

We bestuderen nu even het verschil van twee L's bij verschillende keuzen van de μ's. We kiezen $\mu_1^* = \mu_1 + 2\pi i$, $\mu_2^* = \mu_2, \ldots, \mu_k^* = \mu_k$. Dan is $L^* - L = 2\pi i$. Residu in λ_j van $(zI-A)^{-1}$.

Laatstgenoemd residu is een z.g. projector I_1. Deze projectoren hebben de eigenschappen

a) $I = I_1 + \ldots + I_k$, b) $I_i I_j = I_j I_i = 0$ $(i \neq j)$, c) $I_j I_j = I_j$, d) $I_i A = A I_i$.

Formule a) volgt door st.1 (blz.M 12) toe te passen op het polynoom 1.

Formule b) bv. als volgt

$$I_1 I_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{(\lambda_1)} dz \int_{(\lambda_2)} dw \; \frac{1}{(zI-A)(wI-A)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{(\lambda_1)} \int_{(\lambda_2)} dz.dw \, \frac{1}{w-z} \left(\frac{1}{zI-A} - \frac{1}{wI-A} \right) .$$

De integratiewegen liggen geheel buiten elkaar. Bij de eerste term uit de laatste uitdrukking levert de integraal over w nul op. Voor de tweede term verwisselen we de integratievolgorde, en dan blijkt de integraal over z nul te zijn. Een ander bewijs voor b) volgt uit de opmerking dat (4) ook geldt als W een stelsel buiten elkaar gelegen contouren is.

Formule c) is een bijzonder geval van (4) $(f(z)=g(z)=1)$.

Formule d) is een bijzonder geval van de stelling dat elke Cartan-integraal $\int f(z)(zI-A)^{-1}\,dz$ een polynoom in A is (met van A afhankelijke coefficienten), maar kan overigens ook uit (4) volgen.

Uit laatstgenoemde stelling volgt bovendien dat twee L's die bij verschillende stelsels μ_j behoren, verwisselbaar zijn. Zijn dus L_1 en L_2 zulke waarden, dan is $e^{L_1 - L_2} = e^{L_1}(e^{L_2})^{-1} = AA^{-1} = I$. Dit verifieert men overigens ook met de projectorenformules a),b),c). Beschouw daartoe

$$\exp\left\{2\pi i(m_1 I_1+\ldots+m_k I_k)\right\}\ , \text{ met gehele getallen } m_1,\ldots,m_k .$$

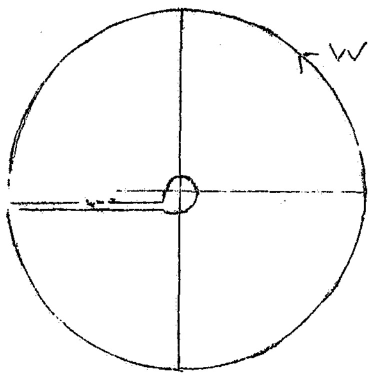
Dit berekenen we volgens de machtreeksdefinitie van e^z, en alle machten werken we uit:

$$(m_1 I_1+\ldots+m_k I_k)^s = m_1{}^s I_1+\ldots+m_k{}^s I_k .$$

Derhalve is

$$\exp\left\{2\pi i\,(m_1 I_1+\ldots+m_k I_k)\right\} = I+(e^{2\pi i\, m_1}-1)I_1+(e^{2\pi i\, m_2}-1)I_2+\ldots=I.$$

We gaan tenslotte eens na hoe L zich gedraagt t.o.v. de matrixoperaties inverteren, transponeren en complex conjugeren, die we hier resp. met I,T,C aangeven. Deze operaties zijn involutorisch en onderling verwisselbaar ($(A^T)^T=A$, $A^{TI}=A^{IT}$, etc.). We leggen nu de contour W vast door de afspraak dat aan het argument van alle λ's de hoofdwaarde wordt gegeven; met dien verstande dat λ's op de negatief reële as het argument $+\pi$ krijgen. De waarde van L die zo onstaat noemen we de hoofdwaarde Log A. Door in de formule voor Log A overal te transponeren, vinden we



$\mathrm{Log}\, A^T=(\mathrm{Log}\, A)^T$. We zullen verder met W^I, W^C resp. de wegen bedoelen die z^{-1} resp. $\bar z$ beschrijven als z de weg W beschrijft. Met -W bedoelen we W met omgekeerde orientatie. Ook gebruiken we de algemene formule

$$\overline{\int_W f(z)\, dz} = \int_{W^C} \overline{f(\bar z)}\, dz ,$$

die bv. door parametervoorstelling van de integratieweg blijkt.

We vinden nu

$$(5)\quad \mathrm{Log}(A^C)= \frac{1}{+2\pi i}\int_W \log z\,.(zI-A^C)^{-1}\,dz= \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{-W^C} \log z(zI-A)^{-1}\,dz} .$$

$-W^C$ omsluit weer alle eigenwaarden, en kan door deformatie in W worden overgevoerd als A geen negatieve eigenwaarden heeft. In dat geval is dus $\mathrm{Log}(A^C)=(\mathrm{Log}\, A)^C$.

Vervangen we in (5) A door A^I, dan blijkt

$$\overline{\mathrm{Log}(A^{CI})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-W^C} \log z\ .\ \frac{zA}{zA-I}\,\frac{dz}{z} .$$

Trekken we hiervan $I\int \log z.z^{-1}dz=0$ af, dan komt er

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-W^C} \log z\ .\ \frac{I}{zA-I}\ \frac{dz}{z} ,$$

hetgeen na substitutie $z = \zeta^{-1}$ overgaat in

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-W^{CI}} \log \zeta \cdot \frac{1}{A-\zeta I}\, d\zeta .$$

Gemakkelijk is na te gaan dat W steeds in W^{CI} kan worden getransformeerd zonder over eigenwaarden heen te trekken. Derhalve

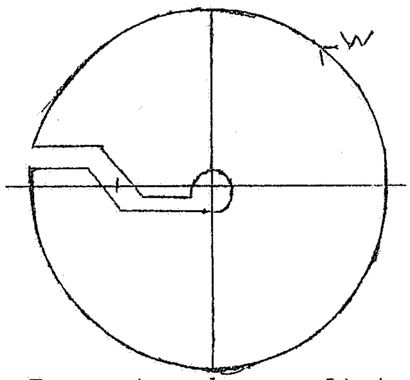
$$\operatorname{Log}(A^{CI}) = -(\operatorname{Log} A)^{C}.$$

Onder de restrictie dat A geen negatief reële eigenwaarden heeft, vinden we uit $\operatorname{Log}(A^{C}) = (\operatorname{Log} A)^{C}$ nog dat $\operatorname{Log} A^{I} = -\operatorname{Log} A$. Dit volgt ook direct uit de formule

$$\operatorname{Log} A^{I} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-W^{I}} \log z (zI-A)^{-1}\, dz,$$

die men op soortgelijke wijze als de bovenstaanden bewijst.

We kunnen een kleine variatie aanbrengen, door aan de λ's tussen 0 en -1 het argument π, en die tussen -1 en $-\infty$ het argument $-\pi$ toe te kennen. Daarbij sluiten we het geval dat -1 een eigenwaarde van A is, uit. We kunnen nu W zo kiezen dat $W = -W^{I}$. Noemen we L in dit geval LOG A, dan geldt



$\operatorname{LOG} A^{I} = -\operatorname{LOG} A$ (A en A+I regulier).

Bovenstaande resultaten kunnen worden gebruikt om stellingen over exponentiële representatie van matrices te bewijzen. Bijvoorbeeld:

$$AA^{C} = I \quad \leftrightarrows \quad A = e^{iR} \qquad (R \text{ reëel}),$$

want $\operatorname{Log} A = \operatorname{Log} A^{IC} = -(\operatorname{Log} A)^{C}$, dus i Log A reëel.

Ook dit: Is A orthogonaal, A+I regulier, dan $A = e^{S}$, waarin S scheefsymmetrisch is ($S = -S^{T}$). Want $\operatorname{LOG} A = \operatorname{LOG} A^{IT} = (\operatorname{LOG} A^{I})^{T} = -(\operatorname{LOG} A)^{T}$. Is A bovendien reëel, dan zijn er in het geheel geen negatieve eigenwaarden, zodat LOG A=Log A, en dus

$$(\operatorname{LOG} A)^{C} = (\operatorname{Log} A)^{C} = -(\operatorname{Log} A^{CI}) = -\operatorname{Log} A^{I} = -\operatorname{LOG} A^{I} = \operatorname{LOG} A.$$

Derhalve is dan S reëel.

Literatuur:

N.G. de Bruijn en G. Szekeres, Nieuw Archief v.Wisk. (3) 3,20-32 (1955).

Colloquium Matrixfuncties 1955-1956

o.l.v.

Prof.Dr N.G. de Bruijn

Vierde voordracht

door

Dr C.G. Lekkerkerker

18 November 1955

Reeds eerder is opgemerkt, dat de nxn matrices (n een natuurlijk getal), bij geschikte normdefinitie, een Banach-algebra vormen. In deze voordracht zullen we een beknopte behandeling geven van de theorie der Banach-algebra's. We beginnen met nog eens de definitie van het begrip Banach-ruimte op te schrijven. Met λ, μ zullen we steeds complexe getallen bedoelen.

Een Banach-ruimte B is een lineaire ruimte over de complexe getallen, waarin een norm $\|a\|$ gedefinieerd is, die voldoet aan

1. $\|a\| \geqq 0$, $\|a\| = 0$ slechts dan als $a=0$
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| . \|a\|$
3. $\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$
4. B is volledig t.a.v. de metriek d(a,b), die we in B krijgen door te stellen $d(a,b) = \|a-b\|$.

Laten eens B en C twee Banach-ruimten zijn. Onder een transformatie van B in C zullen we steeds verstaan een eenduidige afbeelding T van B in C. Is in het bijzonder C het complexe vlak, dan heet zulk een transformatie een functioneel op B. De transformatie T heet lineair als geldt

(1) $T(a+b) = Ta + Tb, \quad T(\lambda a) = \lambda(Ta)$

en beperkt als er een constante $k \geqq 0$ is, zodanig dat

(2) $\|Ta\| \leqq k . \|a\| \qquad$ voor $a \in B$

(de eerste norm in C genomen, de tweede in B). De kleinste k, waarvoor (2) geldt, heet de norm van T en wordt geschreven $\|T\|$.

We beschouwen nu de verzameling A der beperkte, lineaire transformaties van een Banach-ruimte B in zichzelf. Voor $T \in A$ en $S \in A$ definiëren we transformaties T+S en λT d.m.v. de relaties

$$(T+S)a = Ta + Sa, \text{ resp. } T(\lambda a) = \lambda(Ta);$$

dan behoren T+S en λT ook tot A en is A een lineaire ruimte over de complexe getallen. Verder definiëren we $\|T\|$, voor $T \in A$, op de hierboven genoemde wijze. Men ziet gemakkelijk in, dat dan aan de eisen 1,2,3 voldaan is. We laten zien, dat A ook volledig is, en dus een Banach-ruimte.

Zij $T_n \in A(n=1,2,\ldots)$ en $\|T_n-T_m\| \to 0$ als $n,m \to \infty$. We hebben $\|T_na-T_ma\| \leqq \|T_n-T_m\| \cdot \|a\|$ $(a \in B)$, dus bestaat er bij elke $\varepsilon > 0$ een rangnummer n_o, zó dat voor elk element a van B geldt:

(3) $\|T_na - T_ma\| < \varepsilon \|a\|$ als $n,m > n_o$.

Dus bestaat $\lim_{n \to \infty} T_na$, voor $a \in B$. We stellen die limiet voor door Ta. Daardoor wordt een zekere transformatie T van B in B gedefinieerd. Uit $\lim_{n \to \infty} T_na=Ta$, voor $a \in B$, en de lineariteit der T_n leidt men gemakkelijk af dat T lineair is. Uit (3) volgt verder:

$\|T_na - Ta\| \leqq \varepsilon \|a\|$ als $n > n_o$, voor elke $a \in B$, dus $\|T_n-T\| \leqq \varepsilon$ als $n > n_o$. Dus is $\lim_{n \to \infty} T_n=T$. Tevens is T beperkt. Hiermee is aangetoond dat A volledig is.

Maar er is meer. Twee transformaties T en S uit A kunnen, behalve opgeteld, ook worden vermenigvuldigd. We definiëren TS d.m.v. de relatie

$$(TS)a = T(Sa) \qquad (a \in B).$$

Het is duidelijk, dat dan de transformaties uit A een (niet noodzakelijk commutatieve) ring vormen. De identieke transformatie I is eenheidselement in deze ring. Daarbij is $\|I\|=1$. Verder is $(\lambda T)(\mu S)=(\lambda\mu)TS$. Tenslotte is

$$\|T(Sa)\| \leqq \|T\| \cdot \|Sa\| \leqq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|a\|, \text{ voor alle } a,$$

dus $\|TS\| \leqq \|T\| \cdot \|S\|$.

We geven nu een definitie van het begrip Banach-algebra.

Een <u>Banach-algebra</u> is een Banach-ruimte, die tevens een ring is, met eenheidselement e, waarvoor geldt:

(4) $(\lambda a)(\mu b) = (\lambda\mu)\, ab$,

terwijl de norm, behalve aan 1-4, ook voldoet aan de ongelijkheid

5. $\|ab\| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$.

Doorgaans eisen we ook

6. $\|e\|=1$.

Uit de voorgaande beschouwingen volgt dat de beperkte, lineaire transformaties van een willekeurige Banach-ruimte B in zichzelf een Banach-algebra A vormen, als we norm en product op de aangegeven wijze definiëren. Dit geeft direct voorbeelden van Banach-algebra's. Zo krijgen we, uitgaande van de n-dimensionale complexe vectorruimte, de matrixruimte MR_n, die bij geschikte normdefinitie een Banach-algebra is. Op p.5, onderaan, werd in MR_n een norm ingevoerd juist volgens het voorschrift dat hierboven in het algemene geval gegeven is.

Eisen we niet speciaal dat 6 geldt, dan is in elk geval wel $\|e\| \geqq 1$, tenminste als de algebra meer dan alleen de nul bevat. Want is $a \neq 0$, dan is $\|a\| = \|ae\| \leqq \|a\| \cdot \|e\|$, dus $\|e\| \geqq 1$. We tonen nu aan dat we in een gegeven Banach-algebra A altijd een nieuwe norm $\|a\|'$ kunnen definiëren, zó dat de eigenschappen 1-6 gelden, met vervanging van $\| \ \|$ door $\| \ \|'$, en er bovendien twee positieve constanten c_1 en c_2 zijn met

(5) $\qquad c_1 \|a\| \leqq \|a\|' \leqq c_2 \|a\| \qquad$ voor $a \in A$.

Laat eens T_a de transformatie zijn, vastgelegd door $T_a x = ax$ ($x \in A$, $a \in A$). We definiëren nu $\|a\|' = \|T_a\|$. Uit $\|T_a x\| \leqq \|a\| \cdot \|x\|$, $\|T_a e\| = \|a\|$ volgt $\|a\|' \leqq \|a\|$, resp. $\|a\|' \geqq \frac{1}{\|e\|} \cdot \|a\|$. Dus geldt (5) met $c_1 = \frac{1}{\|e\|}$, $c_2 = 1$. Tevens is $\|a\|' > 0$ als $a \neq 0$. Verder geldt $\|\lambda a\|' = |\lambda| \cdot \|a\|'$, $\|a+b\|' \leqq \|a\|' + \|b\|'$, $\|ab\|' \leqq \|a\|' \cdot \|b\|'$ (vgl. de analoge eigenschappen van de Banach-algebra over A). Voorts is $\|e\|' = \|T_e\| = 1$. Zij tenslotte $\{a_n\}$ een rij met $\|a_n - a_m\|' \to 0$ voor $n,m \to \infty$. Krachtens de reeds bewezen relatie (5) is dan $\|a_n - a_m\| \to 0$ voor $n,m \to \infty$, dus is er in A een element a met $\|a_n - a\| \to 0$ voor $n \to \infty$, dus $\|a_n - a\|' \to 0$ voor $n \to \infty$. Daarmee is de bewering aangetoond.

<u>Het spectrum</u>. Is T een beperkte, lineaire transformatie van een Banach-ruimte B in zichzelf, en I de identieke transformatie, dan kan men vragen naar de complexe getallen λ, waarvoor $\lambda I - T$ geen inverse heeft of een inverse die niet weer een (eenduidige) beperkte, lineaire transformatie van B in zichzelf is. Zulke λ worden gezegd het spectrum van T te vormen. Men kan dit begrip ook opstellen voor een willekeurige Banach-algebra.

Zij A een Banach-algebra, e het eenheidselement. Een element $a \in A$ heet

<u>regulier</u>, als a zowel een links - als een rechtsinverse (dus een inverse) heeft;

<u>singulier</u>, als a geen inverse heeft.

Is $a \in A$, dan noemen we de verzameling der λ, waarvoor $\lambda e - a$ singulier is, het <u>spectrum</u> van a, voorgesteld door $\sigma(a)$. De verzameling der λ, waarvoor $\lambda e - a$ regulier is, stellen we voor door $\rho(a)$ (resolvent set). Voor een matrix is het spectrum de verzameling der eigenwaarden.

<u>Stelling I</u>. Voor het product van twee elementen a en b geldt:

1. is a regulier, dan ook a^{-1}
2. zijn a en b regulier, dan is ook ab regulier
3. is ab regulier en zijn a en b verwisselbaar, dan zijn a en b beide regulier

4. is a singulier en b regulier, of omgekeerd, dan is ab singulier.

Bewijs. Ad 1. We hebben $a.a^{-1}=a^{-1}a=e$, dus is a^{-1} regulier.

Ad 2. We hebben $(ab)\ b^{-1}a^{-1}=b^{-1}a^{-1}(ab)=e$.

Ad 3. Stellen we $(ab)^{-1}=c$. Dan is $abc=e$ en $cba=cab=e$. Dus is a regulier. Evenzo b.

Ad 4. Stel eens dat b en ab regulier zijn. Dan is b^{-1} regulier, wegens 1, evenzo $a=(ab)b^{-1}$, wegens 2. Tegenspraak. Evenzo het andere geval.

Stelling II. Zij $a \in A$ en $p(x)$ een polynoom in een onbepaalde x met complexe coëfficiënten. Dan is $\sigma(p(a))$ de verzameling der punten $p(\lambda)$ met $\lambda \in \sigma(a)$.

We merken op dat, als $\mu \in \sigma(p(a))$, niet noodzakelijk voor alle λ met $p(\lambda)=\mu$ geldt $\lambda \in \sigma(a)$.

Bewijs. Zij $\lambda_1 \in \sigma(a)$, $\mu_1=p(\lambda_1)$. Onderstellen we eens dat $\mu_1 e-p(a)$ regulier is, dus dat er een element z is met $(\mu_1 e-p(a))z=z(\mu_1 e-p(a))=e$. Laten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ de wortels van $\mu_1-p(\lambda)=0$ zijn, zodat, met zekere α, $\mu_1-p(\lambda) \equiv \alpha(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_m-\lambda)$. Daar de elementen a en $\lambda_i e$ onderling verwisselbaar zijn, is ook $\mu_1 e-p(a)=\alpha(\lambda_1 e-a)(\lambda_2 e-a)\dots(\lambda_m e-a)$. Dus

$$(\lambda_1 e-a).\alpha \prod_{i=2}^{m}(\lambda_1 e-a)z=e;\quad z\,\alpha \prod_{i=2}^{m}(\lambda_i e-a).(\lambda_1 e-a)=e.$$

Dus $\lambda_1 e-a$ is regulier. Tegenspraak. Dus $\mu_1 \in \sigma(p(a))$.

Zij nu omgekeerd $\mu_1 \in \sigma(p(a))$. Er zijn weer α ; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ met $\mu_1 e-p(a)=\alpha(\lambda_1 e-a)(\lambda_2 e-a)\dots(\lambda_m e-a)$. Waren nu alle elementen $\lambda_i e-a$ regulier, dan was wegens stelling I ook het product, en dus $\mu_1 e-p(a)$ regulier. Dus is $\lambda_i e-a$ singulier voor minstens één index i, d.i. $\lambda_i \in \sigma(a)$ voor minstens één wortel van $p(\lambda)=\mu_1$.

Stelling III. Zij a regulier. Dan geldt: $\lambda \in \sigma(a) \leftrightarrows \lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1})$.

Bewijs. Zij $\lambda \neq 0$ en $\lambda \in \rho(a)$. Er is een element z met $(\lambda e-a)z=z(\lambda e-a)=e$. Dan hebben we ook

$$\lambda^{-1}a^{-1}(\lambda e-a)z\lambda a=(a^{-1}-\lambda^{-1}e).\lambda za=e,$$

$$\lambda az(\lambda e-a)\lambda^{-1}a^{-1}=\lambda az(a^{-1}-\lambda^{-1}e)=e.$$

Dus $a^{-1}-\lambda^{-1}e$ is regulier, dus $\lambda^{-1} \in \rho(a^{-1})$. Hieruit volgt de stelling.

We willen nu enige eigenschappen afleiden van het spectrum van een willekeurig element. Van fundamenteel belang is daarbij de volgende

Stelling IV. Is $\|a\| < 1$, dan is e-a regulier en er geldt

(6) $\quad (e-a)^{-1}=e + a + a^2 + a^3 + \dots$

Bewijs. De reeks in het rechterlid van (6) convergeert in norm en geeft bij vermenigvuldiging met e-a juist e.

Uit stelling IV volgt onmiddellijk

Stelling V. Is $\|e-x\| < 1$, dan is x regulier.

Uit stelling IV kunnen we ook afleiden de iets algemenere

Stelling VI. Bestaat b^{-1} en is $\|a\| < \|b^{-1}\|^{-1}$, dan bestaat ook $(b-a)^{-1}$ en er geldt

(7) $\quad (b-a)^{-1} = b^{-1} + b^{-1}(ab^{-1}) + b^{-1}(ab^{-1})^2 + b^{-1}(ab^{-1})^3 + \dots$.

Bewijs. We hebben $\|ab^{-1}\| < \|a\| \cdot \|b^{-1}\| < 1$. Wegens stelling IV bestaat dus $(e-ab^{-1})^{-1}$, en dus ook $b^{-1}(e-ab^{-1})^{-1} = \{(e-ab^{-1})b\}^{-1} = (b-a)^{-1}$. Tevens geldt (7).

Is x_o regulier en $\|x_o - x\| < \|x_o^{-1}\|^{-1}$, dan mogen we stelling VI toepassen met $b = x_o$, $a = x_o - x$. Dat geeft

Stelling VII. Is x_o regulier en $\|x_o - x\| < \|x_o^{-1}\|^{-1}$, dan is ook x regulier en er geldt: (8)

Uit de laatste stelling volgt dat de verzameling der reguliere elementen open is. Uit (8) kunnen we afleiden dat op die verzameling x^{-1} een continue functie van x is. Immers is x_o regulier en beperken we x tot de omgeving $\|x - x_o\| < \frac{1}{2}\|x_o^{-1}\|^{-1}$ (het rechterlid in deze ongelijkheid is zeker positief), dan hebben we krachtens (8):

$$\|x^{-1} - x_o^{-1}\| = \|x_o^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \{(x_o - x)x_o^{-1}\}^n\| \leq \|x_o^{-1}\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_o - x\| . \|x_o^{-1}\|)^n$$

$$\leq \|x_o^{-1}\| \cdot \|x_o - x\| \cdot \|x_o^{-1}\| \cdot (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots) = 2\,\|x_o - x\| . \|x_o^{-1}\|^2.$$

Dus $x^{-1} \to x_o^{-1}$ als $x \to x_o$.

Uit de stellingen V en VII kan men afleiden

Stelling VIII. Het spectrum van een element a is begrensd en gesloten.

Bewijs. Voor $|\lambda| > \|a\|$ is $\|e - (e - a/\lambda)\| < 1$, wegens stelling V dus $e - a/\lambda$ regulier, dus $\lambda e - a$ regulier. Dus is $\sigma(a)$ begrensd, en wel bevat in de cirkel $|\lambda| \leq \|a\|$. Is verder $\lambda_o e - a$ regulier, dan wegens stelling VII ook $\lambda e - a$, als $|\lambda - \lambda_o| < \|(\lambda_o e - a)^{-1}\|^{-1}$. Dus is $\rho(a)$ open, dus $\sigma(a)$ gesloten.

Later zullen we zien dat het spectrum nooit leeg is.

Integralen. Zij gegeven een functie $x(\lambda)$, met waarden in een gegeven Banach-algebra A (of ook Banach-ruimte), gedefinieerd en continu op een gegeven Jordankromme C in het complexe vlak, met (eindige) lengte L en met een bepaalde oriëntering. Met continu bedoelen we:

$$\|x(\lambda) - x(\lambda_o)\| \to 0 \text{ als } \lambda \to \lambda_o \quad (\lambda, \lambda_o \in C).$$

Met behulp van de overdekkingsstelling van Heine-Borel toont men

(8) $\quad x^{-1} = \{x_o - (x_o - x)\}^{-1} = x_o^{-1} + x_o^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \{(x_o - x)x_o^{-1}\}^n$

op de gebruikelijke wijze aan, dat $x(\lambda)$ uniform continu is op C:

$$\varepsilon > 0 \rightarrow \delta > 0, \text{ zó dat } \|x(\lambda)-x(\lambda')\| < \varepsilon \text{ als } |\lambda-\lambda'| < \delta.$$

Zij D een willekeurige verdeling van C, met deelpunten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, gerangschikt in de zin van de oriëntering van C en met λ_0 in het beginpunt, λ_m in het eindpunt van C. Zij L_i de lengte van het segment van de kromme C tussen de punten λ_{i-1} en λ_i $(i=1,2,\ldots,m)$. Laten verder $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ punten van de kromme C zijn, zó dat τ_i behoort tot het segment $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$ van C. Dan heet $\max\limits_i L_i$ de <u>wijdte</u> van D en

$$S = \sum_{i=1}^{m} x(\tau_i)(\lambda_i - \lambda_{i-1})$$

een <u>som van Riemann</u> van $x(\lambda)$ t.o.v. de verdeling D.

<u>Bewering</u>. Is $\varepsilon > 0$, dan bestaat $\delta > 0$, zó dat het verschil van twee sommen van Riemann in norm kleiner dan ε is, als de wijdten van de bijbehorende verdelingen van C kleiner dan δ zijn.

<u>Bewijs.</u> Zij δ een positief getal, zó dat $\|x(\lambda)-x(\lambda')\| < \frac{\varepsilon}{2L}$ als $|\lambda-\lambda'| < \delta$ $(\lambda, \lambda' \in C)$. Beschouw twee verdelingen D_1 en D_2 van C met wijdten $< \delta$, en laten S_1 en S_2 twee sommen van Riemann t.o.v. D_1 resp. D_2 zijn. Zij D_3 een verfijning van D_1 en D_2 en zij S_3 een som van Riemann t.o.v. D_3. Dan geldt, als $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de deelpunten van D_3 zijn,

$$\|S_j - S_3\| < \sum_i \frac{\varepsilon}{2L} |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad (j=1,2).$$

Dus

$$\|S_1 - S_2\| < \varepsilon.$$

Rijen S_n, behorende bij verdelingen waarvan de wijdten tot nul naderen, hebben nu een eenduidig bepaalde limiet. Die limiet heet de <u>integraal</u> $\int_C x(\lambda)d\lambda$. Eigenschappen:

1) $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$, als C samengesteld is uit C_1 en C_2

2) $\int_C \mu x(\lambda)d\lambda = \mu\int_C x(\lambda)d\lambda$; $\int_C f(\lambda)a\,d\lambda = \int_C f(\lambda)d\lambda . a$,

als $f(\lambda)$ een complexwaardige, continue functie is en a een element van A. Algemener is

$$\int_C Tx(\lambda)d\lambda = T\int_C x(\lambda)d\lambda,$$

als T een beperkte, lineaire transformatie van een Banach-ruimte B in een Banach-ruimte B' is en de waarden van $x(\lambda)$ in B liggen (immers dezelfde betrekking geldt voor corresponderende sommen van Riemann).

3) $\int_C \left\{x_1(\lambda)+x_2(\lambda)\right\} d\lambda = \int_C x_1(\lambda)d\lambda + \int_C x_2(\lambda)d\lambda$.

4) Ingeval C een segment (a,b) op de reële as is, geldt

$$\left\|\int_a^b x(\lambda)d\lambda\right\| \leqq \int_a^b \|x(\lambda)\| \, d\lambda .$$

In het algemene geval hebben we in elk geval de schatting

$$\left\|\int_C x(\lambda)d\lambda\right\| \leqq L \max_{\lambda\in C} \|x(\lambda)\| .$$

5) $\int_C \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\lambda)d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C x_k(\lambda)d\lambda$,

als de reeks gelijkmatig convergeert.

Zij a een element van A. We tonen nu aan

Stelling IX. Het spectrum van a is niet leeg.

Bewijs. Stel eens dat het spectrum van a leeg is. Dan is $(\lambda e-a)^{-1}$ gedefinieerd voor alle λ. Ook is $(\lambda e-a)^{-1}$, als inverse van een element, $\neq 0$ voor alle λ. Dus $\|(\lambda e-a)^{-1}\|$ is gedefinieerd en > 0 in het hele complexe vlak.

Voor $|\lambda| > 2\|a\|$ is wegens (6)

$$\|(e-a/\lambda)^{-1}\| = \|e+a/\lambda +(a/\lambda)^2+\dots\| < 2.$$

Dus nadert $\|(\lambda e-a)^{-1}\|$ tot nul voor $|\lambda|\to\infty$.

We weten al dat in het algemeen x^{-1} een continue functie is van x. Dan is ook $\|(\lambda e-a)^{-1}\|$ een continue functie van λ. We leiden een ongelijkheid voor deze functie af.

Zij λ_0 willekeurig. Voor $|\lambda-\lambda_0| < \|(\lambda_0 e-a)^{-1}\|^{-1}$ is wegens (8)

$$(9)\quad (\lambda e-a)^{-1}=(\lambda_0 e-a)^{-1} + (\lambda_0-\lambda)(\lambda_0 e-a)^{-2}+(\lambda_0-\lambda)^2(\lambda_0 e-a)^{-3}+\dots$$

Zij nu r een willekeurig getal met $0<r<\|(\lambda_0 e-a)^{-1}\|^{-1}$. We vullen in (9) in $\lambda=\lambda_0+re^{i\varphi}$ $(0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$ en integreren naar φ. Krachtens 5) en 2) mogen we herleiden

$$\int_0^{2\pi} \left\{(\lambda_0+re^{i\varphi})e-a\right\}^{-1} d\varphi$$

$$= 2\pi(\lambda_0 e-a)^{-1}+\int_0^{2\pi} re^{i\varphi}\, d\varphi.(\lambda_0 e-a)^{-2}+\int_0^{2\pi}(re^{i\varphi})^2 d\varphi.(\lambda_0 e-a)^{-3}+\dots$$

$= 2\pi(\lambda_0 e-a)^{-1}$, wegens 4) dus

$$(10)\quad \|(\lambda_0 e-a)^{-1}\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\left\{(\lambda_0+re^{i\varphi})e-a\right\}^{-1}\right\| d\varphi .$$

We nemen nu voor λ_0 een punt in het complexe vlak, waar $\|(\lambda e-a)^{-1}\|$ een absoluut maximum heeft, terwijl er in elke omgeving van λ_0 punten zijn, waar de functie kleiner is. Op grond van het voorgaande is dat mogelijk. Maar dan geeft (10) een tegenspraak. Daarmee is de stelling bewezen.

Gevolg. Is A een (eventueel scheef) lichaam, dan is A isomorf met het lichaam der complexe getallen.

Bewijs. Zij $a \in A$. Er is een λ, waarvoor $\lambda e-a$ singulier is. Maar nu is 0 het enige singuliere element in A. Dus $a=\lambda e$. Hieruit volgt de bewering.

Continuïteit van het spectrum. We willen nu nagaan of er iets valt te zeggen over de verandering van $\sigma(a)$, als a varieert. We zullen een zwakke vorm van continuïteit van $\sigma(a)$, als functie van a, afleiden. Het woord continuïteit behoeft hierbij een nadere precisering. Want het spectrum van een element is een deelverzameling, en wel een niet-lege, compacte deelverzameling, van het complexe vlak. En in de collectie F van zulke verzamelingen kan men op verschillende wijzen een topologie invoeren. Allereerst kunnen we bij elke $\varepsilon > 0$ en elke verzameling D_0 uit de collectie F de deelcollectie van verzamelingen D uit F bekijken die bevat zijn in de ε-omgeving van D_0, waarvoor dus geldt $\max\limits_{\alpha \in D} \text{afst}(\alpha, D_0) < \varepsilon$. Die deelcollecties voldoen aan de gebruikelijke axioma's voor omgevingen in een topologische ruimte. Alleen geldt niet het scheidingsaxioma.

Een veel sterkere topologie, ja zelfs een metrisering van F krijgen we door als afstand van twee verzamelingen D_1 en D_2 in te voeren het maximum van de twee uitdrukkingen

$$\max_{\alpha \in D_1} \text{afst}(\alpha, D_2), \quad \max_{\beta \in D_2} \text{afst}(\beta, D_1).$$

Laten we de afstand van D_1 en D_2 voorstellen door $\rho(D_1,D_2)$. Men gaat gemakkelijk na dat geldt $\rho(D_1,D_2) \geqq 0$, $\rho(D_1,D_2)=\rho(D_2,D_1)$, $\rho(D_1,D_3) \leqq \rho(D_1,D_2)+\rho(D_2,D_3)$. En uit $\rho(D_1,D_2)=0$ volgt afst $(\alpha, D_2)=0$ voor $\alpha \in D_1$, dus $D_1 \subseteqq D_2$, en evenzo $D_2 \subseteqq D_1$, dus $D_1=D_2$.

Continuïteit van het spectrum t.a.v. de eerste topologie wil zeggen, dat het spectrum $\sigma(a)$ er bij variatie van a niet plotseling een nieuw stuk bij krijgt. Continuïteit t.a.v. de tweede topologie zou willen zeggen, dat er ook niet plotseling een stuk verdwijnt. We zullen nu bewijzen

Stelling X. Zij a een element van A en $\varepsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$, zó dat $\sigma(x)$ bevat is in de ε-omgeving van $\sigma(a)$, als $\|x-a\| < \delta$.

Bewijs. Zij $\sigma_\varepsilon(a)$ de ε-omgeving van $\sigma(a)$ en $\sigma_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a)$ de $\frac{1}{2}\varepsilon$-omgeving van $\sigma(a)$. We kunnen de afsluiting van $\sigma_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a)$ overdekken met eindig veel cirkels, alle met straal $\frac{1}{2}\varepsilon$ en middelpunt in $\sigma_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a)$. Zij Ω_ε de vereniging van die cirkels en Ω^*_ε het complement van Ω_ε. Dan is $\sigma_{\frac{1}{2}\varepsilon}(a) \subseteq \Omega_\varepsilon \subseteq \sigma_\varepsilon(a)$. De verzameling Ω^*_ε is gesloten, begrensd door eindig veel cirkels en geheel gelegen in $\rho(a)$. Op deze verzameling is $(\lambda e-a)^{-1}$ begrensd. Zij $\|(\lambda e-a)^{-1}\| \leqq M$ op Ω^*_ε. Wegens stelling VII is $(\lambda e-x)^{-1}$ regulier als $\lambda \in \Omega^*_\varepsilon$ en $\|x-a\| < \|(\lambda e-a)^{-1}\|^{-1}$, dus zeker als $\lambda \notin \sigma_\varepsilon(a)$ en $\|x-a\| <= \frac{1}{M}$. Dus $\sigma(x)$ is bevat in $\sigma_\varepsilon(a)$ als $\|x-a\| < \delta = \frac{1}{M}$.

<u>Analytische functies met complex argument</u>. We beschouwen eenwaardige functies $x(\lambda)$, gedefinieerd op een open verzameling in het complexe vlak, met waarden in een gegeven Banach-algebra (of ook Banach-ruimte) A.

We noemen $x(\lambda)$ <u>differentieerbaar</u> in een punt λ_0 van de definitieverzameling, indien het quotient $\frac{x(\lambda)-x(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}$ een eindige limiet, geschreven $x'(\lambda_0)$, heeft als $\lambda \to \lambda_0$. Een functie $x(\lambda)$, gedefinieerd op een open verzameling D, heet (<u>locaal</u>) <u>analytisch</u> op D, als $x(\lambda)$ differentieerbaar is in elk punt van D.

Allerlei stellingen uit de gewone functietheorie kunnen ook voor de hier beschouwde functies worden bewezen. We beginnen met

<u>Stelling XI</u> (stelling van Cauchy). Zij $x(\lambda)$ analytisch op een enkelvoudig samenhangend gebied G. Zij C een gesloten kromme in G. Dan is $\int_C x(\lambda)d\lambda = 0$.

<u>Bewijs</u>. Zij allereerst C een driehoek Δ, met omtrek s. Trekken we de verbindingslijnen van de middens der zijden, dan krijgen we vier driehoeken $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$. Bij geschikte oriëntering is $\int_\Delta = \int_{\Delta^1} + \int_{\Delta^2} + \int_{\Delta^3} + \int_{\Delta^4}$. Op grond van de eigenschappen van de norm is dan ook

$$\left\|\int_\Delta\right\| \leq \left\|\int_{\Delta^1}\right\| + \left\|\int_{\Delta^2}\right\| + \left\|\int_{\Delta^3}\right\| + \left\|\int_{\Delta^4}\right\|.$$

Er is dus een index i met $1 \leqq i \leqq 4$, $\left\|\int_{\Delta^i}\right\| \geqq \frac{1}{4}\left\|\int_\Delta\right\|$. Door herhaling van dit procédé krijgen we een rij ineengeschakelde driehoeken Δ_n, zó dat de omtrek van Δ_n gelijk is aan $2^{-n}s$ en dat $\left\|\int_{\Delta_n}\right\| \geqq 4^{-n}\left\|\int_\Delta\right\|$. Zij λ_0 het gemeenschappelijke punt van deze driehoeken. Daar $x(\lambda)$ analytisch is, hebben we $x(\lambda)=x(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)x'(\lambda_0)+(\quad-\lambda_0)a(\lambda)$ met $a(\lambda) \to 0$ voor $\lambda \to \lambda_0$. Nu is voor gewone complexe functies $\int_{\Delta_n} d\lambda = \int_{\Delta_n}(\lambda-\lambda_0)d\lambda = 0$. Dus is, op grond van 2),

$$\int_{\Delta_n} x(\lambda)d\lambda = \int_{\Delta_n} d\lambda \,.\, x(\lambda_0) + \int_{\Delta_n}(\lambda-\lambda_0)d\lambda \,.\, x'(\lambda_0) + \int_{\Delta_n}(\lambda-\lambda_0)a(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_{\Delta_n}(\lambda-\lambda_0)a(\lambda)d\lambda,$$

dus $\left\|\int_{\Delta_n} x(\lambda)d\lambda\right\| = \left\|\int_{\Delta_n}(\lambda-\lambda_0)a(\lambda)d\lambda\right\| \leqq (2^{-n}s)^2 \max_{\lambda\in\Delta_n}\|a(\lambda)\|$, waarbij $a(\lambda)$ een functie is die tot 0 nadert voor $\lambda \to \lambda_0$. Bij elke $\varepsilon > 0$ is er dus een rangnummer n, zó dat

$\| \int_{\Delta_n} x(\lambda) d\lambda \| < 4^{-n} \varepsilon$. Dus is $\| \int_{\Delta} \| < \varepsilon$. Dus $\int_{\Delta} = 0$. Daarmee is de stelling bewezen ingeval C een driehoek is.

Is C een polygoon, dan kunnen we C op de gebruikelijke wijze in driehoeken verdelen, waarna de stelling ook voor dit geval volgt.

In het algemene geval gaan we aldus te werk. De functie $x(\lambda)$ is uniform continu in een zekere δ-omgeving van C. Dan kunnen we een verdeling $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m = \lambda_0)$ van C vinden, met wijdte $< \delta$, zodanig dat de som van Riemann $\sum x(\lambda_i)(\lambda_i - \lambda_{i-1})$ minder dan een willekeurig voorgeschreven bedrag ε afwijkt, zowel van $\int_C x(\lambda) d\lambda$, als van $\int_{\pi} x(\lambda) d\lambda$, waar π het polygoon is met hoekpunten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m = \lambda_0$. Hieruit volgt de stelling in het algemene geval.

Zij C een enkelvoudige, gesloten Jordankromme, die een punt λ_0 in positieve zin omsluit. Zij $x(\lambda)$ analytisch binnen en op C. Dan kan men de formule van Cauchy afleiden. Door de stelling van Cauchy en de differentieerbaarheid van $x(\lambda)$ in λ_0 te gebruiken vindt men dat $\int_C \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = 0$. Dus is

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = x(\lambda_0).$$

Uit de formule van Cauchy kan men verschillende andere resultaten afleiden.

a) Het maximumprincipe. Is $x(\lambda)$ analytisch binnen en op de cirkel $|\lambda - \lambda_0| = r$ $(r > 0)$, dan is

$$x(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\lambda_0 + r\, e^{i\varphi}) d\varphi,$$

wegens 4) dus

$$(12) \qquad \|x(\lambda_0)\| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|x(\lambda_0 + r\, e^{i\varphi})\| \, d\varphi,$$

zodat $x(\lambda)$ in de cirkel $|\lambda - \lambda_0| \leqq r$ zijn maximum alleen op de rand aanneemt. Formule (10) is een bijzonder geval van (12) (zie c)).

b) Ook $x'(\lambda), x''(\lambda), \dots$ zijn analytisch en we hebben

$$(13) \qquad x^{(n)}(\lambda_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{x(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda ,$$

als C enkelvoudig, gesloten en λ_0 binnen C.

c) De reeks van Taylor: is $x(\lambda)$ analytisch binnen en op de cirkel $|\lambda - \lambda_0| = r (r > 0)$, dan geldt

$$x(\lambda)=x(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)x'(\lambda_0)+\ldots+\frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{n!}x^{(n)}(\lambda_0)+\ldots,$$

voor $|\lambda-\lambda_0|\leqq r$. Omgekeerd is een functie, voor te stellen door een machtreeks in $\lambda-\lambda_0$, met coëfficiënten in A, analytisch. B.v. de uitdrukking $(\lambda e-a)^{-1}$ is analytisch, waar hij bestaat, krachtens (9).

d) De stelling van Liouville: is $x(\lambda)$ analytisch voor alle λ, en begrensd, dan is $x(\lambda)$ een constante.

Voorbeelden van Banach-algebra's.

I De beperkte, lineaire transformaties van een gegeven Banach-ruimte in zichzelf vormen een Banach-algebra, bij de gebruikelijke definitie van som, scalair veelvoud, product en norm (zie p.25).

II Zij D een compacte ruimte (voldoende is dat Bolzano-Weierstrasz geldt) en A de verzameling van de complexwaardige functies $f=f(x)$, gedefinieerd en continu op D. Som en product van twee elementen $f,g\in A$ leggen we als volgt vast:

$$f+g=h \leftrightarrows f(x)+g(x)=h(x) \qquad (x\in D),$$
$$f\,.\,g=k \leftrightarrows f(x)\,.\,g(x)=k(x) \qquad (x\in D).$$

Evenzo vermenigvuldiging met een scalar. Voor de norm van een element $f\in A$ nemen we

$$\|f\| = \max_{x\in D} |f(x)| .$$

Men bewijst zonder moeite dat bij deze definities van som, veelvoud, product en norm, A een Banach-algebra is. Eenheidselement is de functie, die identiek 1 is. Verder is duidelijk dat een element f een inverse in A heeft, dan en slechts dan als $f(x)\neq 0$ voor alle $x\in D$. Het spectrum van een element f is dus de verzameling van de functiewaarden van f (een gesloten, begrensde verzameling complexe getallen!).

In het bovenstaande is de keuze van de compacte ruimte D geheel willekeurig. Men mag er b.v. voor nemen het gesloten interval $[0,1]$. In zekere zin is het nu behandelde voorbeeld het meest algemene voorbeeld van een commutatieve Banach-algebra: het is bekend dat elke commutatieve Banach-algebra A voorgesteld kan worden als deelalgebra van de algebra van de complexwaardige functies, gedefinieerd en continu op een zekere compacte ruimte (verkregen door een bepaalde, zwakke topologie te definiëren in de verzameling van de z.g. maximale idealen in A).

III De begrensde, complexwaardige functies op een willekeurige verzameling V vormen een Banach-algebra, als som, veelvoud, product gedefinieerd worden als onder II en $\|f\| = \sup |f(x)|$. Het spectrum van een element f is nu de afsluiting van de verzameling van de functiewaarden van f. Elke compacte verzameling in het complexe vlak is spectrum van een geschikt gekozen element f, mits V ten minste aftelbaar is.

IV We beschouwen de verzameling F van de continue, complexwaardige functies f(x), gedefinieerd voor $0 \leqq x \leqq 1$. Optelling en vermenigvuldiging met een scalar definiëren we als onder II. Als product van twee elementen $f,g \in F$ nemen we de functie $(f*g)(x)$, bepaald door

$$(14) \qquad (f*g)(x) = \int_0^1 f(t)\, g(x-t)\, dt,$$

waarbij we de functies periodiek buiten $[0,1]$ voortgezet denken. Het is duidelijk, dat (14) een continue functie van x definieert, die dus weer een element van F is. Verder is de vermenigvuldiging commutatief, wegens

$$(g*f)(x) = \int_0^1 g(t)f(x-t)dt = \int_{x-1}^{x} g(x-t)f(t)dt = \int_0^1 g(x-tf(t)dt = (f*g)(x).$$

Berekenen we de Fourier-coëfficiënten van $(f*g)(x)$. Zij

$$(15) \quad \alpha_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx, \quad \beta_n = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}dx \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Dan is

$$\int_0^1 (f*g)(x)e^{-2\pi inx}dx = \int_0^1 f(t)\left(\int_0^1 g(x-t)e^{-2\pi inx}dx\right)dt$$

$$= \int_0^1 f(t).\beta_n e^{-2\pi int}dt = \alpha_n \beta_n (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

De verzameling F is blijkbaar een (commutatieve) ring. Er is echter geen eenheidselement: was e(x), met Fourier-coëfficiënten β_n, eenheidselement, dan zou wegens het voorgaande gelden $\beta_n = 1$ voor alle n. We voegen nu formeel een eenheidselement e toe en beschouwen de verzameling A der uitdrukkingen

$$f + \lambda e, \quad f \in F.$$

In A definiëren we de optelling op de gewone wijze, en de vermenigvuldiging als volgt:

$$(f + \lambda e)*(g + \mu e) = f*g + \lambda g + \mu f + \lambda\mu e.$$

Dan is A een ring en een lineaire verzameling. Ook geldt (4).

Verder voeren we in A een norm in door te definiëren:

$$\|f\| = \max |f(t)| ,$$
$$\|f + \lambda e\| = \|f\| + |\lambda| .$$

Dan is aan de normeigenschappen voldaan (o.a. volledigheid). I.h.b. is

$$\|(f+\lambda e)*(g+\mu e)\| = \|f*g+\lambda g+\mu g+\lambda\mu e\| = \|f*g+\lambda g+\mu f\| + |\lambda\mu|$$

$$\leq \|f\| . \|g\| + |\lambda| . \|g\| + |\mu| . \|f\| + |\lambda\mu|$$

$$= (\|f\| + |\lambda|).(\|g\| + |\mu|) = \| f+\lambda e\| . \|g+\mu e\| .$$

Dus is A een Banach-algebra.

Sporen we het spectrum van een element $f-\lambda_o e \in A$ op. We bepalen daartoe de verzameling van de complexe getallen λ, zodanig dat $f-\lambda e$ singulier is.

Stel eens dat $f-\lambda e$ regulier is. Dan is er een element $g-\mu e \in A$, zodanig dat $(f-\lambda e)*(g-\mu e)=e$, dus

$$f*g-\lambda g-\mu f = 0, \qquad \lambda\mu=1.$$

Daaruit volgt allereerst $\lambda \neq 0$, $\mu=\lambda^{-1}$. Verder zijn alle Fourier-coëfficiënten van $f*g-\lambda g-\lambda^{-1}f$ nul. Dus, als α_n en β_n de Fourier-coëfficiënten van resp. f(x) en g(x) zijn, zoals gedefinieerd door (15), dan is

$$\alpha_n\beta_n - \lambda\beta_n - \lambda^{-1}\alpha_n = 0 ,$$

dus

$$(16) \quad (\alpha_n-\lambda)(\beta_n-\lambda^{-1})=1 \quad (n=0, \pm1, \pm2,\ldots).$$

Hieruit volgt: $\lambda \neq \alpha_n$ voor alle n.

Zij nu omgekeerd λ een complex getal, waarvoor geldt:

$$\lambda\neq 0, \quad \lambda\neq\alpha_n \quad (n=0, \pm1, \pm2,\ldots).$$

Definiëren we getallen β_n d.m.v. (16). Dan is

$$\beta_n=\lambda^{-1}-(\alpha_n-\lambda)^{-1}=\frac{\alpha_n}{\lambda(\alpha_n-\lambda)}.$$

We schrijven β_n als volgt:

$$\beta_n= -\alpha_n/\lambda^2 + \frac{(\alpha_n/\lambda)^2}{\alpha_n-\lambda} ,$$

Op grond van de stelling van Parseval convergeert $\sum|\alpha_n|^2$. In het bijzonder nadert α_n tot nul voor $|n|\longrightarrow\infty$. Dus convergeert $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\alpha_n^2}{\alpha_n-\lambda}\right|$. Dus convergeert de reeks $\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_n^2}{\alpha_n-\lambda}e^{2\pi inx}$ absoluut en stelt een continue functie h(x) voor. Beschouwen we nu de functie g(x), gedefinieerd door

$$g(x) = \lambda^{-2}(h(x) - f(x)).$$

Het is een continue functie, met als Fourier-coëfficiënten de hierboven gedefinieerde getallen β_n. De Fourier-coëfficiënten van $f*g-\lambda g-\lambda^{-1}f$ zijn dan alle nul. Wegens de stelling van Parseval is deze functie, daar hij continu is, dus identiek nul. Hieruit volgt $(f-\lambda e)*(g-\lambda^{-1}e)=e$. Dus is $f-\lambda e$ regulier.

De conclusie is dat het spectrum van f bestaat uit de Fouriercoëfficiënten van f(x), mèt het getal nul. Het spectrum van $f-\lambda_0 e$ wordt verkregen uit dat van f door te verschuiven over $-\lambda_0$.

V. Beschouwen we de verzameling A van alle complexe vectoren $a=\{\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$, waarvoor $\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_k|$ convergeert. Als norm nemen we $\|a\|=\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_k|$. Optelling en vermenigvuldiging met een scalar geschiede elementsgewijs; de vermenigvuldiging zij gedefinieerd als volgt:

$$\{\alpha_k\}\cdot\{\beta_k\}=\{\gamma_k\}\ ,\ \text{waar}\ \gamma_k=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j\beta_{k-j}\ .$$

Men gaat gemakkelijk na, dat A een commutatieve Banach-algebra is. Eenheidselement is de vector $e=\{\varepsilon_k\}$ met $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_k=0$ als $k\neq 0$. Men kan de beschouwde Banach-algebra ook beschrijven als de verzameling van de (continue) functies f(x), die te ontwikkelen zijn in een absoluut convergente Fourierreeks:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k e^{2\pi ikx}\qquad (0\leqq x\leqq 1), \tag{17}$$

met de gewone definitie van som, veelvoud en product, en met norm $\|f\|=\sum|\alpha_k|$. Het is nu duidelijk dat de beide volgende beweringen aequivalent zijn:

1°. het spectrum van een element $a=\{\alpha_k\}$ bestaat uit de verzameling van de getallen $\sum\alpha_k e^{2\pi ik}$ $(0\leqq\theta\leqq 1)$

2°. is f(x) te ontwikkelen in een absoluut convergente Fourierreeks (17), dan is ook $\frac{1}{f(x)}$ in zo'n reeks te ontwikkelen, als (en slechts als) $f(x)\neq 0$ op $[0,1]$ (stelling van N. Wiener).

De bewering 1° kan men aantonen door de homomorfieën van A op het lichaam der complexe getallen te bestuderen; zo'n homomorfie heeft de gedaante

$$a\longrightarrow\lambda_\theta(a)=\sum\alpha_k\,e^{2\pi ik\theta}\ ,$$

met zekere reële θ, en heeft als kern een maximaal ideaal in A; voorts geven de elementen a van A die in geen enkel maximaal ideaal liggen - waarvoor dus steeds $\lambda_\theta(a)\neq 0$ - juist de reguliere elementen van A.

We merken nog op, dat het spectrum van een element a in A hetzelfde is als in de ruimere Banach-algebra van de op $[0,1]$ continue functies, beschouwd onder II.

VI. Een Banach-algebra vormen ook de complexe vectoren $a=\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$, waarvoor $\sum_0^\infty |\alpha_k| < \infty$, als we optelling en veelvoud op de gewone wijze vastleggen en norm en product definiëren d.m.v. de relaties

$$\|a\| = \sum_0^\infty |\alpha_k| ,$$

$$\{\alpha_k\} \cdot \{\beta_k\} = \{\gamma_k\} \quad \text{met } \gamma_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i} .$$

De algebra is ook te beschrijven als algebra van de oneindige driehoeksmatrices, die in elke diagonaal constant zijn:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots\cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix} ,$$

of als algebra van de machtreeksen $f(z)=\sum_0^\infty \alpha_k z^k$, die absoluut convergeren voor $|z| \leqq 1$.

Het spectrum van een element a is de verzameling getallen $\sum_0^\infty \alpha_k z^k$, $|z| \leqq 1$ (hieruit volgt weer: is $f(z) \neq 0$ in $|z| \leqq 1$, dan is $1/f(z)$ weer een in $|z| \leqq 1$ absoluut convergente machtreeks).

VII Zij G een open deel van de complexe bol, $\overline{G}$ de afsluiting van G. We beschouwen de verzameling van de complexe functies f(z), die locaal-analytisch op G en continu op $\overline{G}$ zijn. Som, veelvoud en product definiëren we op de gewone wijze, terwijl we als norm van f nemen

$$\|f\| = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)| .$$

Dan krijgen we een Banach-algebra. Het spectrum van een element f is de verzameling der getallen f(z), $z \in \overline{G}$.

Nemen we speciaal voor G de cirkel $|z| < 1$. Zij B de bijbehorende Banach-algebra. De onder VI genoemde Banach-algebra A van de op $|z| \leqq 1$ absoluut convergente machtreeksen is een deelalgebra van B: als verzameling is A bevat in B en de algebraïsche operaties (som, veelvoud, product) zijn dezelfde. De normen zijn echter verschillend. We kunnen aantonen dat A niet volledig, en dus geen Banach-algebra is t.a.v. de norm in B. Bovendien kan men in een rij $\{f_n\}$ aangeven waarvoor $\|f_n\|_B \longrightarrow 0$, terwijl $\|f_n\|_A \longrightarrow \infty$.

VIII. Een gesloten deelalgebra A' van een Banach-algebra A is weer een Banach-algebra. Een deelalgebra is hierbij een deelverzameling van A, waarbij men door de vorming van som, scalair veelvoud, product niet buiten de verzameling komt. De verschillende axioma's voor een Banach-algebra blijven uiteraard doorgaan. Alleen is voor het volledig zijn van A' nodig dat A' gesloten is in A.

Het kan voorkomen dat A' een ander eenheidselement heeft dan A.

Hebben A en A' hetzelfde eenheidselement en heeft een element $a \in A'$ geen inverse in A, dan zeker niet in A'. Dus, in begrijpelijke notatie, $\sigma'(a) \supset \sigma(a)$. Het kan gebeuren dat $\sigma'(a)$ en $\sigma(a)$ niet samenvallen.

IX We geven tenslotte enige voorbeelden van eindig-dimensionale Banach-algebra's, als deelalgebra's van de matrixalgebra MR_n.

De triangulaire matrices (${}_0\nabla$) vormen een niet-commutatieve Banach-algebra.

De cyclische matrices,

$$M(a_i) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots\, a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots\, a_{n-1} \\ \hline a_2 & a_3 & a_4 & \dots\, a_1 \end{pmatrix},$$

vormen een commutatieve Banach-algebra, isomorf met $K[x]$ (mod x^n-1), waar K het lichaam der complexe getallen is. We hebben b.v.

$$M(a_i)\, .\, M(b_i) = M(c_i)$$

èn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x^{i-1} \,.\, \sum_{i=1}^{n} b_i\, x^{i-1} \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i\, x^{i-1} \quad (\text{mod } x^n-1),$$

met $c_i = \sum\limits_{j+k \equiv i+1 (n)} a_j\, b_k$.

De matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 \end{pmatrix}$$

vormen een commutatieve Banach-algebra, isomorf met K $[x]$ (mod x^n).

Literatuur. I. Gelfand, Normierte Ringe, Recueil Mathém. N.S. 9 (1941), 3-24.

E. Hille, Functional analysis and semi-groups, Am. Math. Soc.Coll.Publ. XXXI(1948).

L.H. Loomis, Abstract harmonic analysis, New York 1953.

J.D. Newburgh, The variation of spectra, Duke Math.J. 18 (1951), 165-176.

Colloquium Matrixfuncties 1955-1956
o.l.v.
Prof.Dr N.G. de Bruijn

Vijfde voordracht
door
Dr W. Peremans

13 januari 1956

We beginnen met enige aanvullingen op de vorige syllabus.

In de laatste alinea van voorbeeld II op blz. M 34 moet een correctie worden aangebracht. Dat een commutatieve Banach-algebra A voorgesteld kan worden als deelalgebra van de algebra van de complexwaardige functies, gedefinieerd en continu op de verzameling van de maximale idealen van A, geldt slechts onder de restrictie, dat A radicaal nul heeft.

Op blz. M 33 is het maximumprincipe voor analytische Banachfuncties van een complexe veranderlijke besproken. Men kan zich de vraag stellen in hoeverre het verscherpte maximumprincipe ook voor dergelijke functies geldt: kan een niet-constante analytische functie, gedefinieerd in een cirkelgebied, een maximum binnen de cirkel hebben? Uit hetgeen op blz. M 33 is behandeld volgt, dat een dergelijke functie constante norm heeft. De vraag wordt dus: kan een niet-constante analytische functie een constante norm hebben? Deze vraag zullen we met behulp van een voorbeeld bevestigend beantwoorden. Hieruit volgt, dat het verscherpte maximumprincipe niet geldt. (De stelling van Liouville (maximumprincipe voor het gehele complexe vlak (zie M 34.d)) geldt echter wèl).

Beschouw de verzameling van de paren (α,β) complexe getallen. Scalaire vermenigvuldiging, optelling en vermenigvuldiging worden componentsgewijze gedefinieerd; de norm definiëren we door $\|(\alpha,\beta)\| = \max(|\alpha|,|\beta|)$. Dit komt overeen met voorbeeld III op blz. M 34, als men voor V een verzameling met 2 elementen kiest; hieruit volgt dat we een Banach-algebra verkregen hebben. We definiëren nu $x(\lambda)=(1,\lambda)=(1,0)+\lambda(0,1)$. Het is duidelijk, dat dit een analytische functie is. Verder is $\|x(\lambda)\| = \max(1,|\lambda|)$ en dit $=1$ als $|\lambda| \leq 1$. Ten slotte is de functie niet constant.

Aan de lijst van voorbeelden van Banach-algebra's voegen we nog het volgende voorbeeld toe. Neem een willekeurige niet-lege verzameling Ω en laat aan iedere $\alpha \in \Omega$ een Banach-algebra B_α toegevoegd zijn. Beschouw de verzameling A van alle functies $f(\alpha)$ gedefinieerd op Ω, waarvoor geldt $f(\alpha) \in B_\alpha$ voor alle $\alpha \in \Omega$ en verder $\sup_{\alpha \in \Omega} \|f(\alpha)\| < \infty$. Scalaire vermenigvuldiging, optelling en vermenigvuldiging definiëren we als in II blz. M 34. De norm wordt gedefinieerd door $\|f\| = \sup_{\alpha \in \Omega} \|f(\alpha)\|$. Dat A een Banach-algebra is, is makkelijk in te zien. Voorbeeld III van blz. M 34 ontstaat hieruit door voor alle B_α de verzameling der complexe getallen te nemen. Een element f van A is dan en slechts dan regulier als $f(\alpha)$ regulier is voor alle $\alpha \in \Omega$ en bovendien $\sup_{\alpha \in \Omega} \|f(\alpha)^{-1}\| < \infty$. Dus $\lambda \in \rho(f)$ dan en slechts dan als $\lambda \in \rho(f(\alpha))$ voor alle $\alpha \in \Omega$ en bovendien $\sup_{\alpha \in \Omega} \|(\lambda e - f(\alpha))^{-1}\| < \infty$. Hieruit en uit de geslotenheid van het spectrum volgt dat $\overline{\bigcup_{\alpha \in \Omega} \sigma(f(\alpha))} \subset \sigma(f)$.

Dit kan een echte inclusie zijn. Neem n.l. voor Ω de verzameling der natuurlijke getallen en neem $B_n = MR_n$. Neem voor $f(n)$ de nxn matrix (1) van blz. M2 met $\lambda = 1$. Dan is $\|f(n)\| = 2$ en $\|f(n)^{-1}\| = n$; verder bestaat $\sigma(f(n))$ alleen uit het getal 1. Deze $f(n)$ definiëren een element f van A. Uit $\|f(n)^{-1}\| = n$ volgt echter direct dat $0 \in \sigma(f)$. Het is zelfs makkelijk na te gaan, dat $\sigma(f)$ bestaat uit alle λ waarvoor geldt $|\lambda - 1| \leq 1$.

We behandelen nu het begrip analytische functie in een Banach-algebra op analoge wijze als in de tweede voordracht voor matrices is geschied. Hiertoe bespreken we eerst kort een aantal voorbereidingen die hoofdzakelijk betrekking hebben op de topologie van het platte vlak. De volgende hulpstelling is hierbij fundamenteel.

Hulpstelling 1. Als K een compacte verzameling en S een open verzameling in het complexe vlak zijn met $K \subset S$, dan bestaat er een begrensde open verzameling U, zodat $K \subset U$ en $\overline{U} \subset S$, zodat de rand van U bestaat uit een eindig aantal disjuncte, rectificeerbare, gesloten Jordankrommen en zodat de afsluitingen van de componenten van U disjunct zijn. Men kan aan de randkrommen van U op één en slechts één manier een dusdanige oriëntering toekennen, dat door deze randkrommen samen ieder punt van U éénmaal in positieve zin en ieder punt buiten $\overline{U}$ nul maal omlopen wordt.

Het bewijs wordt met een bekend Heine-Borel-argument gevoerd. Hierbij blijkt dat men voor de rand van U zelfs een aantal disjuncte, dubbelpuntvrije gesloten polygonen kan verkrijgen.

We zullen een verzameling U, die aan de eisen van hulpstelling 1 voldoet een (K,S)-verzameling noemen. Als K leeg is, spreken we van een S-verzameling. Het in overeenstemming met de eisen van hulpstelling 1 georiënteerde stelsel randkrommen van U noemen we de georiënteerde rand van U.

De volgende twee hulpstellingen zijn uitbreidingen van de stelling van Cauchy (zie stelling XI, blz. M 32). A zal steeds een Banach-algebra voorstellen.

Hulpstelling 2. Als $x(\lambda)$ een analytische functie in de zin van blz. M 32 is met complex argument en waarden in A, die gedefinieerd is in een open verzameling S en als U een S-verzameling is met georiënteerde rand W, dan geldt $\int_W x(\lambda)d\lambda = 0$.

De verzameling der complexe getallen duiden we aan met C.

Hulpstelling 3. Als $x(\lambda)$ een analytische functie als in hulpstelling 2 is, gedefinieerd op een open verzameling S, als U_1 en U_2 beide C-verzamelingen zijn, waarvan de rand in S ligt, als W_j de georiënteerde rand van U_j en T_j het complement van $\overline{U}_j$ is $(j=1,2)$, als $U_1 \cap T_2 \subset S$ en als $U_2 \cap T_1 \subset S$, dan geldt $\int_{W_1} x(\lambda)d\lambda = \int_{W_2} x(\lambda)d\lambda$.

De bewijzen van deze hulpstelling geven we niet. Hulpstelling 3 is een algemene formulering van het principe van het verschuiven van integratiewegen.

Hulpstelling 4. Als $a \in A$, dan is $(\lambda e-a)^{-1}$ een analytische functie van λ, gedefinieerd voor $\lambda \in \rho(a)$. (Zie blz M 34 bovenaan).

Hulpstelling 5. Als $x(\lambda)$ een analytische functie als in hulpstelling 2 is, gedefinieerd op een open verzameling S, als $a \in A$ en als U_1 en U_2 beide $(\sigma(a),S)$-verzamelingen zijn met georiënteerde randen W_1 en W_2, dan geldt $\int_{W_1} x(\lambda)(\lambda e-a)^{-1}d\lambda = \int_{W_2} x(\lambda)(\lambda e-a)^{-1}d\lambda$.

Bewijs: Dat het product van twee analytische functies analytisch is, bewijst men als in de elementaire analyse. Dus $x(\lambda)(\lambda e-a)^{-1}$ is analytisch op de open verzameling $S \cap \rho(a)$. Als T_j het complement van $\overline{U}_j$ is $(j=1,2)$, dan geldt $U_1 \subset S$ en $T_2 \subset \rho(a)$, dus $U_1 \cap T_2 \subset S \cap \rho(a)$ en analoog $U_2 \cap T_1 \subset S \cap \rho(a)$. Uit hulpstelling 3 volgt nu de gevraagde gelijkheid.

Als $p_m(t) = \beta \prod_{k=0}^{m} (t-\alpha_k)$ een complex polynoom is en $a \in A$, dan is $p(a) = \beta \prod_{k=0}^{m} (a-\alpha_k e)$. Uit stelling II op blz. M 27 volgt dat $p(a)$ dan en slechts dan regulier is als de nulpunten van $p(t)$ in $\rho(a)$ liggen. Als $r(t)$ een rationale functie is, kan men $r(a)$ vormen als alle polen van $r(t)$ in $\rho(a)$ liggen: schrijft men n.l. $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ met polynomen $p(t)$ en $q(t)$, dusdanig dat alle nulpunten van $q(t)$ in $\rho(a)$ liggen, dan definiëren we $r(a) = p(a)\, q(a)^{-1} = q(a)^{-1}\, p(a)$. Dit resultaat is onafhankelijk van de keuze van $p(t)$ en $q(t)$.

Stelling 1. Als $r(t)$ een rationale functie is, als $a \in A$, als alle polen van $r(t)$ in $\rho(a)$ liggen, als S het complement van de verzameling der polen van $r(t)$ is en als U een $(\sigma(a),S)$-verzameling is met georiënteerde rand W, dan geldt

$$r(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_W r(t)(te-a)^{-1}\, dt.$$

Bewijs: We bewijzen eerst het speciale geval, dat $r(t)$ identiek $=1$ is. Dan is $S=C$. Op grond van hulpstelling 5 verandert de integraal niet als we W vervangen door een positief georiënteerde cirkel W_1 met middelpunt in de oorsprong en straal $> 2\|a\|$. Voor $t \in W_1$ geldt dan $\|t^{-1}a\| = |t|^{-1}\|a\| < \frac{1}{2}$, dus $(te-a)^{-1}=t^{-1}(e-t^{-1}a)^{-1}= \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k-1} a^k$; de convergentie van de reeks is uniform in t voor $t \in W_1$. Op grond van eigenschap 5 op blz. M 30 geldt $\frac{1}{2\pi i}\int_W (te-a)^{-1}dt= \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} (te-a)^{-1}dt=$ $= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} t^{-k-1}dt=e.$

In het algemene geval schrijven we $r(t)=\frac{p(t)}{q(t)}$ met polynomen $p(t)$ en $q(t)$ dusdanig dat alle nulpunten van $q(t)$ polen van $r(t)$ zijn. Nu kan men schrijven $p(t)\, q(s) - p(s)\, q(t) = (t-s) \sum_{j=0}^{N-1} p_j(s)t^j$ met polynomen $p_j(s)$. Men mag hierin a voor s substitueren en vindt dan $p(t)q(a)-p(a)q(t)=(te-a) \sum_{j=0}^{N-1} p_j(a)t^j$. Nu is

$r(t)e - r(a) = q(t)^{-1} p(t)e - q(a)^{-1} p(a) =$

$= q(t)^{-1} q(a)^{-1} \{p(t)\, q(a) - q(t)\, p(a)\} =$

$= q(t)^{-1} q(a)^{-1} (te-a) \sum_{j=0}^{N-1} p_j(a)t^j$. Dus er geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_W r(t)(te-a)^{-1}\, dt = r(a)\, \frac{1}{2\pi i}\int_W (te-a)^{-1}\, dt +$$

$+ q(a)^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} p_j(a) \frac{1}{2\pi i}\int_W q(t)^{-1}\, t^j\, dt = r(a)$; het laatste geldt op grond van het reeds bewezen gedeelte der stelling en op grond van het feit dat $q(t)^{-1}$ analytisch is in S (hulpstelling 2).

Een functie $F(z)$ gedefinieerd op een verzameling $V \subset A$ en met functiewaarden in A heet analytisch in a als er een omgeving O van A en een rij rationale functies $\{r_m(t)\}$ bestaat, zó dat $O \subset V$, zó dat alle polen van alle $r_m(t)$ in $\varrho(z)$ liggen voor alle $z \in O$ en zó dat $F(z)=$ $= \lim_{m\to\infty} r_m(z)$ uniform voor alle $z \in O$.

Een functie $F(z)$ gedefinieerd op V heet analytisch in V als zij analytisch is in ieder punt van V. Dit impliceert dat V open is.

Opmerking: F behoeft niet op de gehele V limiet van eenzelfde rij rationale functies te zijn.

Hulpstelling 6 (Runge-Montel). Als S een open verzameling in het complexe vlak en als $f(t)$ een locaal-analytische complexe functie op S is, dan is er een rij rationale functies $\{r_m(t)\}$, zó dat alle polen van alle $r_m(t)$ buiten S liggen en $\lim_{m\to\infty} r_m(t)=f(t)$ voor alle $t \in S$, waarbij de convergentie uniform is in elk compact deel van S.

Opmerking. De ligging van de polen van $r_m(t)$ kan nog verder worden voorgeschreven: als X een (eventueel lege) verzameling in het complexe vlak is, die disjunct is met S en die met elke begrensde component van het complement T van S een niet-lege doorsnede heeft, dan kan worden voorgeschreven, dat alle polen van alle $r_m(t)$ in X liggen. Men kan dus een toegelaten X verkrijgen door in elke begrensde component van T een punt te kiezen. Bij deze formulering is hulpstelling 3 op blz. M 15 een speciaal geval van deze stelling. Als n.l. alle componenten van S enkelvoudig samenhangend zijn, heeft T geen begrensde componenten en kan voor X de lege verzameling worden gekozen; alle $r_m(t)$ zijn dan polynomen.

Stelling 2. Laat S een open verzameling in het complexe vlak zijn en f(t) locaal-analytisch op S. Als $z \in A$, als $\sigma(z) \subset S$ en als U_z een $(\sigma(z),S)$-verzameling is met georiënteerde rand W_z, dan is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{W_z} f(t)(te-z)^{-1}\,dt$$

op grond van hulpstelling 5 onafhankelijk van de keuze van W_z. Deze integraal definieert een analytische functie F(z) op de verzameling H bestaande uit alle $z \in A$ met $\sigma(z) \subset S$. En wel geldt, als $\{r_m(t)\}$ een rij rationale functies is met polen buiten S, zó dat $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(t)=f(t)$ voor $t \in S$ en wel uniform in elk compact deel van S, dat $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(z)=F(z)$ voor alle $z \in H$, terwijl bij iedere $a \in H$ een omgeving bestaat, waar deze convergentie uniform is.

Bewijs: De verzameling H is open op grond van de compactheid van het spectrum en op grond van stelling X op blz. M 31. We bewijzen nu dat F(z) analytisch is in $a \in H$. Laat U_a een $(\sigma(a),S)$-verzameling zijn met georiënteerde rand W_a, dan is er een omgeving O_1 van a zodat voor $z \in O_1$ geldt, dat $\sigma(z) \subset U_a$, dus dat U_a een $(\sigma(z),S)$-verzameling is. Dus

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_a} f(t)(te-z)^{-1}\,dt \text{ voor } z \in O_1.$$

We bewijzen nu dat er een omgeving O_2 van a bestaat zodat $\|(te-z)^{-1}\|$ begrensd is voor $z \in O_2$ en $t \in W_a$. Noem daartoe $\alpha = \max\limits_{t \in W_a} \|(te-a)^{-1}\|$, dan is $\alpha > 0$. Neem voor O_2 de $\frac{1}{2}\alpha^{-1}$-omgeving van a.
Op blz. M 28 is bewezen dat uit $\|x-x_0\| < \frac{1}{2}\|x_0^{-1}\|^{-1}$ volgt dat $\|x^{-1}-x_0^{-1}\| \leq 2\|x_0-x\|\;\|x_0^{-1}\|^2$. Neemt men hierin $x=te-z$ $(t \in W_a,\ z \in O_2)$ en $x_0=te-a$, dan is $x-x_0=a-z$ en $\|a-z\| < \frac{1}{2}\alpha^{-1} \leq \frac{1}{2}\|(te-a)^{-1}\|^{-1}$, dus $\|(te-z)^{-1}-(te-a)^{-1}\| \leq 2\|z-a\|\;\|(te-a)^{-1}\|^2 < \alpha$, dus $\|(te-z)^{-1}\| < 2\alpha$.
Noem $O=O_1 \cap O_2$.

Volgens hulpstelling 6 is er een rij rationale functies $\{r_m(t)\}$ met polen buiten S, zodat $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(t)=f(t)$ voor $t\in S$ en zodat de convergentie uniform is in ieder compact deel van S, in het bijzonder dus op W_a. Dus $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(t)(te-z)^{-1}=f(t)(te-z)^{-1}$ uniform in t en z voor $t\in W_a$ en $z\in O$. Met behulp van stelling 1 vinden we

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{W_a} f(t)(te-z)^{-1}\,dt=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{W_a} r_m(t)(te-z)^{-1}\,dt=$$

$=\lim\limits_{m\to\infty} r_m(z)$ uniform voor $z\in O$. Hiermee is stelling 2 bewezen.

Uit stelling 2 leiden we nog de volgende stelling af.

<u>Stelling 3.</u> Als S een open verzameling in het complexe vlak is, als $f(t)$ en $g(t)$ op S locaal-analytisch zijn, als $a\in A$, als $\sigma(a)\subset S$ en als U een $(\sigma(a),S)$-verzameling is met georiënteerde rand W, dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)\,g(t)(te-a)^{-1}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-a)^{-1}\,dt\;\frac{1}{2\pi i}\int_W g(t)(te-a)^{-1}\,d$$

<u>Bewijs</u>: Laat $\{r_m(t)\}$ en $\{r_m^*(t)\}$ rijen rationale functies zijn met polen buiten S, zodat $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(t)=f(t)$ en $\lim\limits_{m\to\infty} r_m^*(t)=g(t)$ voor $t\in S$ en wel uniform in elk compact deel van S. Dan geldt $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(t)r_m^*(t)=f(t)g(t)$ voor $t\in S$ en wel uniform in elk compact deel van S. Uit stelling 2 volgt

$$\lim_{m\to\infty} r_m(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-a)^{-1}\,dt,$$

$$\lim_{m\to\infty} r_m^*(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_W g(t)(te-a)^{-1}\,dt,$$

$$\lim_{m\to\infty} r_m(a)r_m^*(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)g(t)(te-a)^{-1}\,dt.$$

Uit $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(a)r_m^*(a)=\lim\limits_{m\to\infty} r_m(a).\lim\limits_{m\to\infty} r_m^*(a)$ volgt de gevraagde formule.

<u>Opmerking.</u> Stelling 3 kan ook worden bewezen zonder gebruik te maken van de stelling van Runge-Montel. We laten dit bewijs hier volgen (zie ook blz. M 21 midden).

Kies een $(\bar U,S)$-verzameling U_1 met georiënteerde rand W_1. Natuurlijk is U_1 ook een $(\sigma(a),S)$-verzameling. Voor $t\in W$ geldt nu

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{W_1}\frac{g(s)}{s-t}\,ds,\text{ dus }\frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)g(t)(te-a)^{-1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{W_1}\frac{g(s)}{s-t}\,ds\,(te-a)^{-1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_W\int_{W_1}\frac{f(t)g(s)}{s-t}(te-a)^{-1}\,ds\,dt.$$

Nu is $(te-a)^{-1}-(se-a)^{-1}=(s-t)(te-a)^{-1}(se-a)^{-1}$, dus bovenstaande integraal is gelijk aan

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_W\int_{W_1} \frac{f(t)g(s)}{s-t}(se-a)^{-1}\,ds\,dt +$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_W\int_{W_1} f(t)g(s)(te-a)^{-1}(se-a)^{-1}\,ds\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} g(s)(se-a)^{-1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_W \frac{f(t)}{s-t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-a)^{-1}\,dt\,\frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} g(s)(se-a)^{-1}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-a)^{-1}\,dt\,.\,\frac{1}{2\pi i}\int_W g(t)(te-a)^{-1}\,dt.$$

<u>Stelling 4.</u> Laat $a \in A$ en $F(z)$ analytisch in a zijn. Laat $\{r_m(t)\}$ een rij rationale functies zijn en O een omgeving van a, zó dat de polen van alle $r_m(t)$ in $\rho(z)$ liggen voor alle $z \in O$ en $\lim_{m\to\infty} r_m(z)=F(z)$ uniform voor $z \in O$. Dan is er een open verzameling S in het complexe vlak met $\sigma(a) \subset S$, zó dat alle polen van alle $r_m(t)$ buiten S liggen en $\{r_m(t)\}$ voor $t \in S$ uniform convergeert naar een op S locaal-analytische functie $f(t)$. Bij elke $(\sigma(a),S)$-verzameling U met georiënteerde rand W bestaat een omgeving O^* van a, zó dat voor $z \in O^*$ geldt $\sigma(z) \subset U$ en

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-z)^{-1}\,dt\ .$$

Als S_1 een open verzameling in het complexe vlak is met $\sigma(a) \subset S_1$, als $f_1(t)$ een op S_1 gedefinieerde locaal-analytische complexe functie is, als U_1 een $(\sigma(a),S_1)$-verzameling is met georiënteerde rand W_1 en als O_1^* een omgeving van a is zó dat voor $z \in O_1^*$ geldt $\sigma(z) \subset U_1$ en

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} f_1(t)(te-z)^{-1}\,dt,$$

dan is er een open verzameling S_2 in het complexe vlak met $S_2 \subset S \cap S_1$, $\sigma(a) \subset S_2$ en $f(t) = f_1(t)$ voor $t \in S_2$.

<u>Bewijs:</u> $a + te$ is een continue functie van t. Er is dus een $\rho > 0$, zodat voor $|t| < \rho$ geldt $a+te \in O$. Laat S de ρ-omgeving van $\sigma(a)$ zijn, dan is S open en bij iedere $\lambda \in S$ bestaat een $\mu \in \sigma(a)$, zodat $|\lambda - \mu| < \rho$. De polen van $r_m(t)$ liggen buiten S: neem n.l. $\lambda \in S$ en $\mu \in \sigma(a)$, zó dat $|\lambda - \mu| < \rho$, dan is $a+(\lambda-\mu)e \in O$ en $\lambda = \mu + (\lambda - \mu) \in \sigma(a+(\lambda-\mu)e)$, dus λ geen pool van $r_m(t)$. Kies $\varepsilon > 0$; er is dan een N zó dat voor $m > N$ en $k > N$ geldt $\| r_m(z)-r_k(z)\| < \varepsilon$ voor $z \in O$. Noem $q(t)=r_m(t)-r_k(t)$, dan is $\|q(a+te)\| < \varepsilon$ voor $|t| < \rho$. De polen van $q(t)$ liggen buiten S. Kies een $\lambda \in S$ en daarbij een $\mu \in \sigma(a)$ zodat $|\lambda - \mu| < \rho$. Noem

$q_1(t) = \frac{q(t)-q(\lambda)}{t-\lambda}$, dan liggen de polen van $q_1(t)$ buiten S. Omdat $\sigma(a+(\lambda-\mu)e) \subset S$, mogen we in $(\lambda-t)q_1(t)=q(\lambda)-q(t)$ voor t substitueren $a+(\lambda-\mu)e$. Dit geeft $(\mu e-a)q_1(a+(\lambda-\mu)e)=q(\lambda)e-q(a+(\lambda-\mu)e)$. Omdat $\mu\in\sigma(a)$ is $\mu e-a$ singulier, dus, op grond van stelling I 3 op blz. M26, $(\mu e-a)q_1(a+(\lambda-\mu)e)$ singulier, dus $q(\lambda)\in\sigma(q(a+(\lambda-\mu)e))$, dus, op grond van het bewijs van stelling VIII op blz. M28, $|q(\lambda)| \leqq$ $\leqq \|q(a+(\lambda-\mu)e)\| < \varepsilon$. Daarmee is bewezen dat $\{r_m(t)\}$ uniform convergeert voor $t\in S$. De limiet is dus een locaal-analytische functie $f(t)$ gedefinieerd op S.

Uit stelling X op blz. M31 en uit de compactheid van $\sigma(a)$ volgt, dat er een omgeving O_1 van a bestaat zó dat voor $z\in O_1$ geldt $\sigma(z)\subset U$. Noem $O^* = O\cap O_1$. Omdat verder alle polen van alle $r_m(t)$ buiten S, dus buiten $\overline{U}$ liggen, vinden we uit stelling 1, dat

$r_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_W r_m(t)(te-z)^{-1}\,dt$ voor $z\in O^*$. Voor iedere vaste $z\in O^*$ is $\|(te-z)^{-1}\|$ vo r $t\in W$ een continue functie op een compacte verzameling, die dus begrensd is. Omdat verder $W\subset S$, geldt $\lim_{m\to\infty} r_m(t)(te-z)^{-1} = f(t)(te-z)^{-1}$ uniform voor $t\in W$. Hieruit volgt

$$F(z) = \lim_{m\to\infty} r_m(z) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_W r_m(t)(te-z)^{-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-z)^{-1}\,dt.$$

Noem nu $S_3 = S\cap S_1$, dan is S_3 open, $\sigma(a)\subset S_3$ en $f(t)$ en $f_1(t)$ beide gedefinieerd op S_3. Kies een $(\sigma(a),S_3)$-verzameling U_2 met georiënteerde rand W_2 en een omgeving O_2 van a zodat voor $z\in O_2$ geldt $\sigma(z)\subset U_2$. Noem $O_3 = O^*\cap O_1^*\cap O_2$. Voor $z\in O_3$ geldt dan

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_2} f(t)(te-z)^{-1}\,dt,$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_2} f_1(t)(te-z)^{-1}\,dt.$$

Noemen we $g(t) = f(t) - f_1(t)$, dan geldt voor $z\in O_3$:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_2} g(t)(te-z)^{-1}\,dt.$$

Er is een $\rho_1 > 0$, zodat voor $|t| < \rho_1$ geldt $a + te\in O_3$. Laat S_2 de ρ_1-omgeving van $\sigma(a)$ zijn. Stel dat er een $\lambda\in S_2$ is, waarvoor $g(\lambda)\neq 0$. Er is dan een $\mu\in\sigma(a)$, zodat $|\lambda-\mu| < \rho_1$, dus $a+(\lambda-\mu)e\in O_3$. Noem $h(t) = \frac{g(t)-g(\lambda)}{t-\lambda}$, dan is $h(t)$ analytisch in S_3. Verder is $g(t) = g(\lambda)+(t-\lambda)h(t)$; vult men dit in de gegeven betrekking in en stelt men $z=a+(\lambda-\mu)e$, dan komt er (onder toepassing van stelling 1)

$$0 = g(\lambda)e + \frac{1}{2\pi i} \int_{W_2} (t-\lambda)h(t)(te-a-(\lambda-\mu)e)^{-1}\, dt.$$

Past men hierop stelling 3 en stelling 1 toe, dan vindt men

$$e = (\mu e-a)g(\lambda)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{W_2} h(t)(te-a-(\lambda-\mu)e)^{-1}\, dt.$$

Dus $\mu e-a$ heeft een rechtsinverse die met $\mu e-a$ verwisselbaar is. Hieruit volgt $\mu \in \rho(a)$, hetgeen niet zo is. Dus $g(t) = 0$ voor alle $t \in S_2$. Daarmee is het bewijs van stelling 4 voltooid.

Uit stelling 4 volgt, dat als $F(z)$ analytisch is in αe en als $f(t)$ de volgens stelling 4 bij $F(z)$ behorende complexe functie is, $F(\alpha e)=f(\alpha)e$ geldt. We hebben immers $F(\alpha e)= \lim_{m\to\infty} r_m(\alpha e)= = \lim_{m\to\infty} r_m(\alpha)\, e = f(\alpha)e$.

Als $F(z)$ analytisch in a is, dan is volgens stelling 4 $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-z)^{-1}\, dt$ voor z in een zekere omgeving van a. Volgens stelling 2 is het rechterlid echter gedefinieerd en analytisch voor alle z met $\sigma(z) \subset S$. Op deze wijze vinden we dus direct een analytische voortzetting van de functie voor alle waarden van z waarvan het spectrum in S ligt, dus b.v. voor alle cac^{-1} met reguliere c. We merken echter op, dat deze z-verzameling niet altijd samenhangend is (zelfs niet in MR_2, als S niet samenhangend is).

We maken nog enige gevolgtrekkingen uit de bewezen stellingen. Hiertoe eerst de volgende hulpstelling.

<u>Hulpstelling 7.</u> Als S een open verzameling in het complexe vlak is, als $f(t)$ locaal-analytisch op S is, als $a \in A$, als $\sigma(a) \subset S$ en als U een $(\sigma(a),S)$-verzameling is met georiënteerde rand W, dan is $b = \frac{1}{2\pi i}\int_W f(t)(te-a)^{-1}\, dt$ dan en slechts dan singulier als er een complex getal $\lambda \in \sigma(a)$ is, waarvoor $f(\lambda)=0$.

<u>Bewijs</u>: Stel eerst dat er een $\lambda \in \sigma(a)$ bestaat met $f(\lambda) = 0$. Vorm $g(t) = \frac{f(t)}{t-\lambda}$, dan is $g(t)$ locaal-analytisch op S. Op grond van de stellingen 3 en 1 geldt dan

$$b= \frac{1}{2\pi i}\int_W g(t)(te-a)^{-1}\, dt\ \frac{1}{2\pi i}\int_W (t-\lambda)(te-a)^{-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_W g(t)(te-a)^{-1}\, dt\ (a-\lambda e).$$

Daar $a-\lambda e$ singulier is, is op grond van stelling I op blz.M26 ook b singulier.

Stel nu dat $f(t)\neq 0$ voor alle $t \in \sigma(a)$. Op grond van de continuïteit van $f(t)$ is er een open verzameling $S_1 \subset S$ zodat $\sigma(a) \subset S_1$ en $f(t)\neq 0$

voor alle $t \in S_1$. Neem nu een ($\sigma(a), S_1$)-verzameling U_1 met georiënteerde rand W_1, dan is op grond van hulpstelling 5
$b = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} f(t)(te-a)^{-1} dt$. Verder is $f(t)^{-1}$ locaal-analytisch op S_1, dus op grond van de stellingen 3 en 1 geldt voor $c = \frac{1}{2\pi i} \int_{W_1} f(t)^{-1}(te-a)^{-1} dt$ dat $e=bc=cb$, dus is b regulier.

Stelling 5. ("Spectral Mapping Theorem" van N.Dunford). Als $a \in A$, als $F(z)$ analytisch in a is en als $f(t)$ de op grond van stelling 4 bij $F(z)$ behorende in een omgeving van $\sigma(a)$ gedefinieerde locaal-analytische complexe functie is, dan is $\sigma(F(a))$ de verzameling van de complexe getallen $f(t)$ voor $t \in \sigma(a)$ (kort geformuleerd $\sigma(F(a)) = f(\sigma(a))$).
Bewijs: Hulpstelling 7 zegt, dat $0 \in \sigma(F(a))$ dan en slechts dan als $0 \in f(\sigma(a))$. Pas dit toe op $f-\alpha$, $F-\alpha e$ in plaats van f, F.

Opmerking: Vergelijk stelling 5 met stelling II op blz. M27.

Stelling 6. Als S_1 en S_2 disjuncte open verzamelingen in het complexe vlak zijn, als $a \in A$, als $\sigma(a) \subset S_1 \cup S_2$ en als $S_1 \cap \sigma(a)$ niet leeg is, dan bestaat er een omgeving O van a, zodat voor $z \in O$ geldt, dat $S_1 \cap \sigma(z)$ niet leeg is.

Bewijs: Definieer een locaal-analytische functie $f(t)$ op $S_1 \cup S_2$ door $f(t)=1$ op S_1 en $f(t)=0$ op S_2 en laat $F(z)$ de volgens stelling 2 bij $f(t)$ behorende analytische functie zijn. Omdat $S_1 \cap \sigma(a)$ niet leeg is geldt op grond van stelling 5 $1 \in \sigma(F(a))$. Veronderstel nu dat de stelling onjuist is. Dan bestaat er een rij $\{a_k\}$ zo dat $\lim_{k \to \infty} a_k = a$, $S_1 \cap \sigma(a_k)$ leeg is en $\sigma(a_k) \subset S_1 \cup S_2$ voor alle k. Dan is $F(a_k)=0$ voor alle k en dus, op grond van de continuïteit van $F(z)$, $F(a)=0$ in strijd met $1 \in \sigma(F(a))$.

Als voorbereiding tot de stelling over eenduidigheid der analytische voortzetting bewijzen we de volgende hulpstelling.

Hulpstelling 8. Als $F(z)$ analytisch is in een open verzameling $V \subset A$, dan is de verzameling H bestaande uit die punten van A, die een omgeving bezitten waar $F(z)$ identiek nul is, gesloten in V (dus V-H is open).

Bewijs: Laat b een randpunt van H in V zijn. Op grond van stelling 4 is er een open verzameling S in het complexe vlak met $\sigma(b) \subset S$ en een op S locaal-analytische complexe functie $f(t)$, die met $F(z)$ correspondeert voor z in een omgeving O van b. Neem nu een rij punten $\{a_k\}$ met $a_k \in H \cap O$ en $\lim_{k \to \infty} a_k = b$. Uit stelling 4 en $a_k \in H \cap O$ volgt dat er een omgeving van $\sigma(a_k)$ bestaat waar $f(t)$ identiek nul is; hieruit volgt dat $f(t)$ identiek nul is in iedere component van S die met een der $\sigma(a_k)$ een niet-lege doorsnede heeft.
Op grond van stelling 6 bestaat bij iedere component S_1 van S, die met $\sigma(b)$ een niet-lege doorsnede heeft een k zodat $S_1 \cap \sigma(a_k)$ niet leeg is;

dus is $f(t)$ identiek nul op S_1. Er is een omgeving O_1 van b zodat voor $z \in O_1$ geldt dat $\sigma(z)$ ligt binnen de vereniging van de componenten van S die met $\sigma(b)$ een niet-lege doorsnede hebben. Hieruit volgt direct $F(z)=0$ voor $z \in O_1$, dus $b \in H$, waarmee de stelling bewezen is.

We geven nog een tweede bewijs voor hulpstelling 8 aan. Laat b een randpunt van H zijn, en $b \in V$. Laat $\{a_k\}$ een rij punten van H zijn met $\lim_{k\to\infty} a_k=b$. Bij elke k is er een $\rho_k > 0$ zó dat $F(a_k+\Theta e)=0$ $(|\Theta| < \rho_k)$. Volgens stelling 4 is er een omgeving S van $\sigma(b)$ en daarop een bij $F(z)$ behorende locaal-analytische functie $f(t)$. Zij $F_1(z)$ de volgens stelling 2 met behulp van $f(t)$ als integraal gedefinieerde functie. In een omgeving O van b is dus $F_1(z)=F(z)$. Kies $\delta > 0$ zó dat de δ-omgeving S_δ van $\sigma(b)$ tot S behoort. Voor $k > k_0(\delta)$ is nu $\sigma(a_k) \subset S_{\frac{1}{2}\delta}$. $F_1(a_k+\Theta e)$ is een analytische functie van de complexe variable Θ voor $|\Theta| < \frac{1}{2}\delta$. Kies τ_k zó dat $0 < \tau_k < \rho_k$, terwijl $a_k+\Theta e \in O$ voor alle $|\Theta| < \tau_k$. Voor $|\Theta| < \tau_k$ is nu $F_1(a_k+\Theta e)=F(a_k+\Theta e)=0$. Blijkens de machtreeksontwikkeling bovenaan blz. M34 is $F_1(a_k+\Theta e)=0$ voor $|\Theta| < \frac{1}{2}\delta$. Als $|\Theta| < \frac{1}{2}\delta$ is $\sigma(b+\Theta e) \subset S$, dus $F_1(b+\Theta e)$ gedefinieerd. Verder is $F_1(z)$ continu in $b+\Theta e$, dus, bij vaste Θ $(|\Theta| < \frac{1}{2}\delta)$, is $F_1(a_k+\Theta e) \to F_1(b+\Theta e)$. Derhalve is $F_1(b+\Theta e)=0$ $(|\Theta| < \frac{1}{2}\delta)$, zodat $f(t)=0$ in $S_{\frac{1}{2}\delta}$. Derhalve is er een omgeving O_1 van b $(O_1 \subset O)$, waarin $F(z)=0$.

Stelling 7. (Hoofdstelling der analytische voortzetting). Als $F(z)$ en $G(z)$ analytisch zijn in een gebied $G \subset A$ en als er een $a \in G$ is, die een omgeving bezit, waar $F(z)=G(z)$, dan is $F(z)=G(z)$ voor alle $z \in G$.

Bewijs: Definieer H voor de functie $F(z)-G(z)$ als in hulpstelling 8. Dan geldt $a \in H$, dus H is niet leeg. Verder is H gesloten in G op grond van hulpstelling 8 en verder uiteraard open (in G). Omdat G samenhangend is, geldt dus H=G.

Er valt nog op te merken, dat de in de gewone functietheorie geldige verscherping van stelling 7, die toelaat om uit het feit dat de twee functies in een zich binnen G verdichtende rij punten overeenstemmen te concluderen, dat ze identiek zijn, hier niet geldt. Voorbeeld: $A=MR_2$, de functie z^2 is nul voor alle $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ met willekeurige complexe t.

Stelling 8. Als $F(z)$ analytisch is in A, dan is er een gehele functie $f(t)$ zodat $F(z)$ overal de volgens stelling 2 bij $f(t)$ behorende functie is.

Bewijs: We weten, dat $F(\alpha e)=f(\alpha)e$, waarin $f(t)$ overal analytisch en dus geheel is. Laat $G(z)$ de volgens stelling 2 bij $f(t)$ behorende functie zijn. In een omgeving van 0 corresponderen zowel $F(z)$ als $G(z)$ met $f(t)$ en zijn daar dus identiek. Volgens stelling 7 geldt $F(z)=G(z)$ voor alle $z \in A$.

<u>Stelling 9.</u> (<u>Liouville</u>) Als $F(z)$ begrensd en analytisch is in A, dan is $F(z)$ constant en wel $=\lambda e$ met constante complexe λ.

<u>Bewijs</u>: Uit $F(\alpha e)=f(\alpha)e$, volgt dat $f(t)$ begrensd en dus constant $=\lambda e$ is. Dus $F(z)=\lambda e$ voor alle $z\in A$.

<u>Stelling 10.</u> (<u>Maximumprincipe</u>) Als $F(z)$ analytisch is in V en G is een gebied met $\overline{G}\subset V$ dan is er een a op de rand van G, zodat $\|F(a)\| = \max_{z\in\overline{G}} \|F(z)\|$.

<u>Bewijs</u>: Stel dat er een $b\in G$ bestaat met $\|F(b)\| = \max_{z\in\overline{G}} \|F(z)\| = \alpha$. Beschouw de verzameling van de complexe getallen t waarvoor $b+te\in G$ en hiervan de component S die 0 bevat; dit is een gebied. Nu is $F(b+te)$ op S een analytische functie van t in de zin van blz. M32; uit het maximumprincipe (blz.M33) volgt, dat $\|F(b+te)\| = \alpha$ voor $t\in S$ en dus voor $t\in\overline{S}$. Op $\overline{S}$ ligt een randpunt van G.

Ook hier geldt het versterkte maximumprincipe (zie blz.M41) niet; dit zien we met een analoog voorbeeld in. In dezelfde algebra definiëren we in een omgeving van $(1,0)$ de functie $F(\lambda,\mu)=(1,\mu)$. Deze functie is analytisch; de bijbehorende $f(t)=1$ in een omgeving van 1 en t in een omgeving van 0. Deze functie heeft constante norm $=1$.

Tenslotte nog een toepassing van stelling 7.

<u>Stelling 11.</u> Als G een gebied is in A, dan is $V=\bigcup_{a\in G}\sigma(a)$ een open verzameling met een eindig aantal componenten.

<u>Bewijs</u>: Dat V open is, is duidelijk. Neem een $b\in G$. Uit Heine-Borel volgt dat slechts eindig veel componenten van V een niet-lege doorsnede met $\sigma(b)$ hebben. Stel dat V_1 een component van V is, zodat $V_1\cap\sigma(b)$ leeg is en laat $c\in G$ zo zijn, dat $\sigma(c)\cap V_1$ niet leeg is. Definieer $f(t)=1$ op V_1 en $f(t)=0$ op de rest van V. De op grond van stelling 2 met $f(t)$ corresponderende functie $F(z)$ is 0 in een omgeving van b en $\neq 0$ in c op grond van stelling 5. Dit is in strijd met stelling 7; dergelijke componenten bestaan dus niet.

Colloquium Matrixfuncties 1955-1956

o.l.v.

Prof.Dr N.G.de Bruijn

Zesde voordracht

door

Prof.Dr N.G.de Bruijn

23 maart 1956

Voor een in alle opzichten bevredigende beschouwing van meerwaardige analytische functies en hun singulariteiten is de studie van Riemannse oppervlakken onontbeerlijk. Het is duidelijk dat ditzelfde ook voor matrixfuncties en Banachfuncties geldt.

Eigenlijk zijn er, in het klassieke geval van gewone complexe functies, twee verschillende begrippen die beide de naam Riemanns oppervlak dragen. Ter onderscheiding zullen we het eerste Riemanns dekvlak noemen.

1°. Een Riemanns dekvlak is het boven het z-vlak uitgespreide Riemannse oppervlak van een functie $w=f(z)$. De vertakkingspunten blijven hierbij een speciaal en singulier karakter dragen. Men kan echter de omgevingen ervan topologisch en analytisch beschrijven met uniformizerende parameters, die zèlf meerwaardige functies van z zijn.

2°. Riemanns oppervlak. Door de collectie van alle uniformizerende parameters en hun onderlinge relaties als primaire gegevens te beschouwen, gaat men over tot de conceptie van Klein. In eerste instantie komt dat erop neer, dat men zich losmaakt van het z-vlak, en een oppervlak maakt waarop twee complexe functies worden beschouwd, z en w, die nu analoog worden behandeld. In de tweede plaats maakt men zich los van de gegeven ontstaanswijze uit de functie $f(z)$, door alle op het oppervlak analytische functies gelijke rechten te geven. (Analytisch betekent hier: analytische functie van de uniformizerende parameters, evenals z en w dat zijn).

Men komt zo tot het begrip van een topologische ruimte, die locaal de structuur van het complexe vlak heeft, en waarop een analytische structuur bestaat. Dit laatste wordt zó opgevat, dat er (althans locaal) een klasse K van functies bestaat met de eigenschap dat er bij elk punt P een in een omgeving van P gedefinieerde functie (z.g. uniformizerende parameter) uit K bestaat waarvan alle andere functies uit K analytische functies zijn. Het is a priori niet triviaal dat er op het beschouwde oppervlak overal analytische of meromorfe functies bestaan.

Men kan zich ook nog min of meer van de "topologische ruimte" losmaken door slechts over de in het complexe vlak gelegen beelden van de uniformizerende parameters en hun onderlinge relaties te spreken. Dit is echter geen wezenlijke uitbreiding van het begrip Riemanns oppervlak.

De overgang van 1° naar 2° werd hierboven reeds duidelijk gemaakt. Omgekeerd kan men steeds proberen om uit twee functies z en w op een R.O. een Riemanns dekvlak te maken door punten met gelijke z-waarden boven hetzelfde punt van het z-vlak te leggen. Dit wordt slechts dàn het dekvlak van een functie $w=f(z)$, wanneer het niet voorkomt dat in verschillende punten P en Q uniformizerende parameters t_P en t_Q kunnen worden gekozen zó dat z en w in een omgeving van P dezelfde functies van t_P zijn die zij bij Q van t_Q zijn.

Tegenwoordig duidt men vaak met "Riemanns oppervlak" oppervlakken aan die slechts een conforme structuur bezitten, en waarop men slechts harmonische functies kan beschouwen. Een analytische structuur is een conforme structuur met een gegeven orientatie. Wij zullen ons hier bij de analytische structuur houden. (Niettemin biedt deze generalisatie, die met de automorfie $z \to \bar{z}$ van de algebra der complexe getallen samenhangt, voor de Banach algebra's ongetwijfeld perspectieven, aangezien daar een grotere rijkdom aan automorfieën kan optreden).

De gebruikelijke definitie kan zonder veel moeite worden gegeneraliseerd tot het geval waarin men de algebra der complexe getallen door een willekeurige Banach-algebra A vervangt. Zo komt het begrip tot stand dat we A-variëteit zullen noemen.

Een A-variëteit is een Hausdorff-ruimte waarop een systeeem van uniformizerende parameters is gedefinieerd, waaraan nadere eisen worden opgelegd.

Een Hausdorff-ruimte is een ruimte waarin een collectie van verzamelingen is gedefinieerd die "open verzamelingen" worden genoemd, die voldoen aan de gebruikelijke eisen betreffende doorsnede van eindig vele en vereniging van willekeurig vele, en bovendien aan het scheidingsaxioma van Hausdorff (is $P \neq Q$, dan hebben P en Q disjuncte omgevingen; omgeving van P = open verzameling die P bevat). Samenhang van de ruimte wordt niet gepostuleerd, en evenmin wordt geëist dat er een aftelbare basis voor de open verzamelingen is. Anderzijds leveren de nog te bespreken eisen over de uniformizerende parameters sterke verdere gegevens over de topologie; i.h.b. blijkt de A-variëteit de vereniging te zijn van aftelbaar vele metrizeerbare stukken.

Een uniformizerende parameter (afkorting u.p.) is een topologische afbeelding van een open deel van de A-variëteit (verder met M aan te duiden) op een deel van de algebra A. Topologische afbeelding betekent hier:

1^e^. éénéénduidige afbeelding;

2^e^. correspondeert $P \in M$ met $a \in A$, dan is er bij elke omgeving O_a van a een omgeving Ω_P van P te vinden die binnen O_a wordt afgebeeld;

3^e. Als 2^e, doch met verwisseling van P en a. In plaats van 2^e+3^e kan men zeggen: open verzamelingen gaan wederzijds in open verzamelingen over.

Er wordt nu van de Hausdorff-ruimte geëist dat er een systeem van u.p.'s is, dat is een collectie die aan U1 en U2 voldoet. De u.p.'s uit deze collectie duiden we hier met griekse letters φ, ψ,... aan.

U1. Zijn φ en ψ beide gedefinieerd in P, dan is er een omgeving Ω^* van P, waarop φ en ψ beide gedefinieerd zijn, en een op $\varphi(\Omega^*)$ gedefinieerde analytische Banachfunctie F, zó dat $F(\varphi(Q))=\psi(Q)$ voor alle $Q\in\Omega^*$.

U2. Er is een aftelbare deelverzameling $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ van u.p.'s in de collectie met de eigenschap dat er bij elke $P\in M$ een index n is zó dat φ_n in een omgeving van P is gedefinieerd.

Een analytische functie op een open deel V van M is een afbeelding F van V in A met de eigenschap dat voor elke $P\in V$ en voor elke in P gedefinieerde φ geldt dat $F(\varphi^{-1}(a))$ analytisch is in het punt $a=\varphi(P)$. Wegens U1 is het voldoende dit voor slechts één φ te eisen.

Hebben we in een Hausdorff-ruimte twee systemen van u.p.'s dan zijn daarmee twee A-variëteiten gedefinieerd. We noemen deze equivalent als deze beide systemen samen weer een systeem vormen. Dit betekent wegens U1 dat analytische functies op de ene variëteit ook analytisch zijn op de andere, en er is dus geen reden om de twee variëteiten als wezenlijk verschillend aan te zien.

Is φ_i een u.p., dan geven we zijn definitieverzameling met Ω_i aan, en het beeld daarvan in A met $\varphi_i(\Omega_i)=O_i$. Ω_i is een open deel van M, en O_i is een open deel van A. De index i is gekozen uit een (niet noodzakelijk aftelbare) indexverzameling.

Laat $P\in\Omega_i\cap\Omega_j$ zijn, en $\varphi_i(P)=a$, $\varphi_j(P)=b$, dus $a\in O_i$, $b\in O_j$. We zullen nu het paar (O_i,a) equivalent noemen met het paar (O_j,b).

We kunnen ons nu van de Hausdorff-ruimte losmaken door alleen nog maar over de O_i's en de equivalenties te spreken, waarmee onze beschouwingen dan geheel in A blijven.

Laat gegeven zijn een collectie open verzamelingen O_i in A (i doorloopt een indexverzameling S). In de collectie van alle paren $(O_i,a)(i\in S, a\in O_i)$ zij een equivalentierelatie $\sim$ gegeven die aan de volgende eisen voldoet:

E1. Reflexief, symmetrisch, transitief.

E2. $(O_i,a)\sim(O_i,b)$, slechts als a=b.

E3. $(O_i,a)\sim(O_j,b)$, dan is er een omgeving O^* $(a\in O^*\subset O_i)$ en daarop een analytische functie F met F(a)=b, en

$F(z) \in O_j$, $(O_i,z) \sim (O_j,F(z))$ $(z \in O^{*})$.

E4. is de vertaling van de Hausdorff-conditie. We kunnen die in twee equivalente vormen geven:

E4^a. Zijn (O_i,a) en (O_j,b) niet equivalent, dan zijn er omgevingen O^{*} $(a \in O^{*} \subset O_i)$ en O^{**} $(b \in O^{**} \subset O_j)$ zó dat er geen enkele relatie $(O_i,c) \sim (O_j,d)$ bestaat met $c \in O^{*}$, $d \in O^{**}$.

E4b. Is $(O_i,a_k) \sim (O_j,b_k)$ $(k=1,2,\ldots)$, $a_k \to a \in O_i$, $b_k \to b \in O_j$, dan is $(O_i,a) \sim (O_j,b)$.

De afleiding $4^a \to 4^b$ is triviaal; $4^b \to 4^a$ volgt uit het feit dat A metrisch is, dus dat er rijen $O_k^{*} \to a$ en $O_k^{**} \to b$ bestaan.

E5. Er is een aftelbaar deel $S_o \subset S$, zó dat elke $(O_i,a)(i \in S, a \in O_i)$ equivalent is met een $(O_j,b)(j \in S_o, b \in O_j)$.

E6 (Gevolg van E1 t/m E5).^{F} Zij O_{ij} de verzameling van alle $a \in O_i$ waarbij een $b \in O_j$ bestaat met $(O_i,a) \sim (O_j,b)$. Voor elke $a \in O_{ij}$ is b wegens E2 eenduidig bepaald. Stel de afbeelding die aan elke $a \in O_{ij}$ de bijbehorende $b \in O_{ji}$ toevoegt, door F_{ij} voor. (dus $F_{ij}(O_{ij}) = O_{ji}$, en F_{ji} is de inverse afbeelding van F_{ij}). Dan zijn O_{ij} en O_{ji} open, en F_{ij} is een topologische en analytische afbeelding van O_{ij} op O_{ji}.

<u>Bewijs</u>. Zij $a \in O_{ij}$, $F_{ij}(a) = b$. Wegens de symmetrie is het voldoende te bewijzen dat er bij elke omgeving O'' van $b(O'' \subset O_{ji})$ een omgeving O' van a $(O' \subset O_{ij})$ bestaat die door F_{ij} binnen O'' wordt afgebeeld, en waarop F_{ij} analytisch is. Laat O^{*} en F de in E3 genoemde omgeving en functie voorstellen. Wegens E2 blijkt direct dat $F = F_{ij}$ op $O^{*} \cap O_{ij}$. Daar F analytisch, dus continu is, is er een omgeving O_1^{*} van a $(O_1^{*} \subset O^{*} \cap O_{ij})$ die door F_{ij} binnen O'' wordt afgebeeld. Tevens is F_{ij} op O_1^{*} analytisch.

We zullen een collectie open verzamelingen O_i met equivalentie-relaties die aan E1 t/m E5 voldoen, een <u>concrete A-variëteit</u> noemen.

Gemakkelijk is in te zien dat een A-variëteit, door op de $\varphi_i(\Omega_i) = O_i$ op triviale wijze de equivalenties te definiëren, aanleiding geeft tot een concrete A-variëteit (Hausdorff-conditie voor M impliceert E4^a; E2 volgt uit de ééneénduidigheid van de φ's; E3 volgt uit U1, E5 uit U2).

Hebben we omgekeerd een concrete A-variëteit, dan is die afkomstig van een M met φ's. We definiëren M daartoe als volgt:

Een punt van M is een volledige klasse van onderling equivalente paren (O_i,a); M is de verzameling van al deze klassen. φ_i is gedefinieerd op de collectie van alle klassen waarin een paar $(O_i,a)(a \in O_i)$ voorkomt. Is P de klasse van (O_i,a), dan definiëren we $\varphi_i(P) = a$. Mede wegens E2 is dit een ééneénduidige afbeelding. Een open verzameling op M is gedefinieerd als een vereniging van willekeurig vele verzamelingen

---

F Zij $i \in S$, $j \in S$.

van de vorm $\varphi_i^{-1}(O^*)$ ($O^* \subset O_i$, O^* open).

We bewijzen nu dat M een Hausdorffruimte is. De Hausdorffconditie volgt uit E4[a]. De eis over vereniging van willekeurig vele is natuurlijk vervuld. Wat betreft de doorsnede van eindig vele kunnen we ons beperken tot het beschouwen van de doorsnede van een $\varphi_i^{-1}(O')$ en een $\varphi_j^{-1}(O'')$ ($i \in S$, $j \in S$, $O' \subset O_i$, $O'' \subset O_j$).

We moeten aantonen dat deze doorsnede open is. De doorsnede is

$$(1) \qquad \varphi_i^{-1}\left\{O' \cap F_{ji}(O_{ji} \cap O'')\right\}.$$

De vorm tussen accoladen is een open deel van O_i (blijkens E6), en het beeld daarvan in M is per definitie open.

We moeten nog laten zien dat φ_i een topologische afbeelding is. Triviaal is dat een open deel van O_i in een open deel van $\varphi_i^{-1}(O_i) = \Omega_i$ overgaat. Zij vervolgens Ω een open deel van Ω_i, en $a \in \varphi_i(\Omega)$. Daar Ω open is, is er een $\varphi_j^{-1}(O^{**})$ met

$$O^{**} \subset O_j, \quad \varphi_i^{-1}(a) \in \varphi_j^{-1}(O^{**}) \subset \Omega.$$

$\varphi_j^{-1}(O^{**})$ is de doorsnede van $\varphi_j^{-1}(O^{**})$ met $\varphi_i^{-1}(O_i)$, en is dus, blijkens (1), een $\varphi_i^{-1}(O^*)$, waarin O^* een omgeving van a is in O_i. Derhalve bevat $\varphi_i(\Omega)$ een omgeving van a. Daar dit voor elke $a \in \varphi_i(\Omega)$ geldt, is $\varphi_i(\Omega)$ open.

Het is nagenoeg triviaal dat onze M aan U1 en U2 voldoet. Zelfs geldt, als directe vertaling van E6,

U3. Zijn φ en ψ u.p.'s en is Ω de doorsnede van de definitieverzamelingen van φ en ψ, dan de door $F = \psi . \varphi^{-1}$ gegeven afbeelding van $\varphi(\Omega)$ op $\psi(\Omega)$ in de gehele $\varphi(\Omega)$ analytisch. Ook de inverse is analytisch, en de door F geleverde afbeelding is topologisch.

<u>Voorbeelden</u>. 1^o. Zij O een open verzameling in A. Definieer φ op O als de identieke afbeelding. Dan is deze O met deze éne u.p. een A-variëteit.

2^o. De <u>A-bol</u>. Deze verhoudt zich tot de algebra A (of: de A-variëteit A) als de complexe bol tot het complexe vlak. We definieren de A-bol in de vorm van een concrete A-varieteit.

Beschouw alle matrices $\tau = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, waarin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe getallen zijn met $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. We stellen ze door τ_i voor, waarbij i een indexverzameling S doorloopt.

Is $\tau = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $a \in A$, dan zullen we zeggen dat $\tau(a)$ gedefinieerd is, als $\gamma a + \delta$ niet singulier is, en we nemen dan

$$\tau(a) = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}.$$

We merken op dat $\alpha a+\beta$ en $(\gamma a+\delta)^{-1}$ steeds verwisselbaar zijn. Direct is in te zien dat $\tau(a)$ dan en slechts dan gedefinieerd is, als de pool van de complexe functie $\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ buiten het spectrum van a ligt.

We beschouwen nu alle symbolen $\tau_i(a)(i\in S, a\in A)$(gedefinieerd of niet). Hierin definiëren we equivalentie: $\tau_i(a)\sim\tau_j(b)$ als $(\tau_j^{-1}\tau_i)(a)$ gedefinieerd is en gelijk is aan b. Deze relatie is <u>reflexief</u>, daar $(\tau_i^{-1}\tau_i)(a)$ steeds gedefinieerd is en gelijk is aan a.

De relatie is <u>symmetrisch</u>. Daartoe tonen we aan:

<u>Stelling 1.</u> Is $\tau(a)$ gedefinieerd, en $\tau(a)=b$, dan is $\tau^{-1}(b)$ gedefinieerd en gelijk aan a.

<u>Bewijs.</u> Zonder beperking nemen we aan dat $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, en

$$\tau=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix},\qquad \tau^{-1}=\begin{pmatrix}\delta&-\beta\\ -\gamma&\alpha\end{pmatrix}.$$

Uit $\tau(a)=b$ volgt direct $-\gamma b+\alpha=(\gamma a+\delta)^{-1}$. Dit is de inverse van een niet-singulier element, en is dus niet-singulier. Verder is $\delta b-\beta=a(\gamma a+\delta)^{-1}$, dus inderdaad is $\tau^{-1}(b)=a$.

De relatie is <u>transitief</u>. Laat $\tau_i(a)\sim\tau_j(b)$, $\tau_j(b)\sim\tau_k(c)$. Dan zijn $(\tau_j^{-1}\tau_i)(a)=b$ en $(\tau_k^{-1}\tau_j)(b)=c$ gedefinieerd. We behoeven nu slechts de volgende stelling toe te passen:

<u>Stelling 2.</u> Zijn $\tau_1(a)$ en $\tau_2(\tau_1(a))$ beide gedefinieerd, dan is $(\tau_2,\tau_1)(a)$ het ook, en $\tau_2(\tau_1(a))=(\tau_2\tau_1)(a)$.

<u>Bewijs.</u> $\tau_1=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\ \gamma_1&\delta_1\end{pmatrix}$, $\tau_2=\begin{pmatrix}\alpha_2&\beta_2\\ \gamma_2&\delta_2\end{pmatrix}$.

Daar $\tau_1(a)$ en $\tau_2(\tau_1(a))$ gedefinieerd zijn, zijn

$$\gamma_1 a+\delta_1 \quad\text{en}\quad \gamma_2\,\frac{\alpha_1 a+\beta_1}{\gamma_1 a+\delta_1}+\delta_2$$

niet-singulier. Daar ze verwisselbaar zijn is hun product

$$(\gamma_2\alpha_1+\delta_2\gamma_1)a+(\gamma_2\beta_1+\delta_2\delta_1)$$

niet-singulier. Dit wil zeggen dat $(\tau_2\tau_1)(a)$ gedefinieerd is, en het is direct door berekening in te zien dat dit $=\tau_2(\tau_1(a))$ is.

Uit stelling 2 volgt nog: Is $\tau_1(a)$ gedefinieerd, en zijn $\tau_1(a)$ en $\tau_2(b)$ equivalent, dan zijn beide gedefinieerd en gelijk. (Pas st.1 toe op $\tau_1((\tau_1^{-1}\tau_2)(b))$ en $\tau_1(\tau_1^{-1}\tau_2))(b)$. Omgekeerd: Zijn $\tau_1(a)$ en $\tau_2(b)$ gedefinieerd en gelijk, dan zijn ze equivalent. Is $\tau_2(b)=c$ dan is $\tau_2^{-1}(c)$ gedefinieerd, en $=b$ (zie st.1). Daar ook $\tau_1(a)=c$, is $\tau_2^{-1}(\tau_1(a))$ gedefinieerd en $=b$, dus volgens st.1 is $(\tau_2^{-1}\tau_1)(a)$ gedefinieerd en $=b$. Dit toont de equivalentie aan.

Uit de definitie van equivalentie volgt nog: Is $\tau_i(a)\sim\tau_j(b)$, dan is voor elke τ ook $\tau\tau_i(a)\sim\tau\tau_j(b)$.

We definieren nu een concrete A-variëteit als volgt. Bij elke $i\in S$ kiezen we $O_i=A$ zèlf. We definiëren equivalentie door de afspraak

$$(O_i,a)\sim(O_j,b)\quad\text{als}\quad \tau_i(a)\sim\tau_j(b).$$

Een punt van de A-bol is een equivalentieklasse van (O_i,a)'s, maar we kunnen het even goed als een equivalentieklasse van $\tau_i(a)$'s interpreteren.

We controleren nu E1 t/m E5.

E1 volgt direct uit de eigenschappen van de $\tau(a)$-equivalentie.
E2: Uit $\tau_i(a) \sim \tau_i(b)$ volgt: $(\tau_i^{-1}\tau_i)(a)=b$, dus $a=b$.
E3: Is $(O_i,a)\sim(O_j,b)$, en $\tau_j^{-1}\tau_i=\tau$, dan is $\tau(a)$ gedefinieerd en $=b$. Nu is $\tau(x)$ een rationale functie, en de polen van de complexe functie $\tau(\zeta)$ liggen buiten het spectrum van a. Ditzelfde geldt dus voor alle x in een zekere omgeving O^* van a. Bovendien is daar $\tau(x)$ analytisch. Verder is $\tau_j(\tau(x)) \sim \tau_i(x)$, want $(\tau_i^{-1}\tau_j)(\tau(x))$ is gedefinieerd en gelijk aan x (stelling 1).
E4. We bewijzen dit in de vorm $E4^b$. Laat dus $a_k \to a$, $b_k \to b$, en

$$b_k = \frac{\alpha a_k+\beta}{\gamma a_k+\delta}. \qquad (\gamma a_k+\delta \text{ niet-singulier}).$$

Bewezen moet worden dat $\gamma a+\delta$ niet singulier is, en $b=(\alpha a+\beta)/(\gamma a+\delta)$. Als $\gamma=0$, dan is dit triviaal. Als $\gamma\neq 0$, dan is door verschuiving in de a's te bereiken dat $\delta=0$ wordt. Wegens $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ is nu $\beta\neq 0$. Door verschuiving in de b's is nu te bereiken $\alpha=0$, en we kunnen ons dus tot de transformatie $b_k=a_k^{-1}$ beperken. Door limietovergang blijkt nu inderdaad $ab=ba=e$, waaruit de bewering volgt.
E5. Neem de aftelbare verzameling $S_0 \subset S$, bestaande uit alle i met de eigenschap dat alle coefficienten van τ_i in het lichaam van Gauss liggen. Voor elke $j\in S$ en elke $a\in A$ is er nu een $i\in S_0$ te vinden zó dat $(\tau_i^{-1}\tau_j)(a)=b$ gedefinieerd is, nl. door $\tau_i^{-1}\tau_j$ voldoende dicht bij de eenheidsmatrix te kiezen. (Zijn γ en δ voldoende dicht bij 0 resp. 1, dan is $\gamma a+\delta$ niet-singulier, daar het dicht bij e ligt). Nu is $\tau_j(a)\sim\tau_i(b)$, dus (O_j,a) equivalent met een (O_i,b), met $i\in S_0$.

Eigenlijke punten van de A-bol. Laat τ_1 de eenheidsmatrix voorstellen. De punten van de (abstracte) A-bol, die voortkomen uit paren (O_1,a) heten eigenlijke punten, de overige heten oneigenlijk. Het is duidelijk dat (O_i,a) dan en slechts dan eigenlijk is, als $\tau_i(a)$ gedefinieerd is. Merk op dat $\tau_1(a)$ voor alle a gedefinieerd is.

Als A de algebra der complexe getallen is, dan is er slechts één oneigenlijk punt (het punt $z=\infty$). Is $A=MR_n$, dan zijn er oneindig vele oneigenlijke punten. Bijvoorbeeld (n=2) de formele inversen van de A-elementen $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Ook is er bijv. een punt dat te beschrijven is als "$\begin{pmatrix}\infty&0\\0&0\end{pmatrix}$", en dat niet de formele inverse van een eigenlijk punt is. Wèl is het te beschrijven als $\tau(b)$ met $\tau=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ en $b=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Is $A=MR_n$, dan heeft de verzameling der oneigenlijke punten geen inwendige punten. Bij elke $\tau(a)$ kunnen we nl. in een willekeurige omgeving van a een b vinden waarvoor $\tau(b)$ gedefinieerd is (eenvoudig door $b=a+\lambda e$ te nemen met voldoend kleine λ). En als $\tau(b)=c$ gedefinieerd is, dan is $\tau(b)\sim\tau_1(c)$, en $\tau_1(c)$ behoort bij een eigenlijk punt.

Voor willekeurige A is dit niet meer waar. Het kan nl. voorkomen dat er een open verzameling $V\subset A$ is, zó dat elke $v\in V$ singulier is. Neem nu $\tau=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, dan zijn de punten $\tau(v)(v\in V)$ alle oneigenlijk.

Eindige overdekbaarheid. E5 spreekt uit dat de A-bol met aftelbaar vele Ω_i te overdekken is $(\Omega_i=\varphi_i(O_i))$. Is $A=MR_n$, dan kunnen we de A-bol reeds met n+1 Ω_i's overdekken. Kies nl. $\tau_1,\ldots,\tau_{n+1}$ zó dat de polen van de bij $\tau_1^{-1},\ldots,\tau_{n+1}^{-1}$ behorende functies in het complexe vlak, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$, alle verschillend zijn.

Kies nu een willekeurig punt $\tau(a)$ van de A-bol. We zullen bewijzen dat minstens één der uitdrukkingen $(\tau_i^{-1}\tau)(a)(i=1,\ldots,n+1)$ gedefinieerd is, en dat wil dan zeggen dat het punt $\tau(a)$ hetzelfde is als een punt $\tau_i(b)$, en dus op Ω_i ligt. We kunnen nl. van de matrices $\tau_1^{-1}\tau,\ldots,\tau_{n+1}^{-1}\tau$ ook weer zeggen dat de polen van de bijbehorende rationale complexe functies alle verschillend zijn. Minstens één van deze polen ligt buiten het spectrum van a (dat hoogstens n punten telt). Is dit met de pool van $\tau_i^{-1}\tau$ het geval, dan is $(\tau_i^{-1}\tau)(a)$ gedefinieerd.

Iets algemener kunnen we zeggen: Als A de eigenschap heeft dat er een getal n bestaat zó dat geen $a\in A$ een spectrum heeft met meer dan n punten, dan is de A-bol met n+1 Ω's te overdekken.

Omgekeerd geldt: Is er bij elke n een $a\in A$ te vinden zó dat $\sigma(a)$ meer dan n punten bevat, dan is de A-bol niet met eindig vele Ω's te overdekken (Met Ω's bedoelen we hier de $\varphi_i^{-1}(O_i)$'s waarmee de A-bol gedefinieerd was). Stel nl. dat $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ de A-bol overdekken. Daarbij behoren $\tau_1,\ldots,\tau_n$. Zoek nu τ zó, dat als

$$\tau_i^{-1}\tau=\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ \gamma_i & \delta_i\end{pmatrix},$$

alle γ_i's $(i=1,\ldots,n)\neq 0$ zijn. Laat a een element van A zijn waarvan de n verschillende getallen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ eigenwaarden zijn. Bepaal het polynoom P zó dat $P(\lambda_1)=-\frac{\delta_1}{\gamma_1},\ldots,P(\lambda_n)=-\frac{\delta_n}{\gamma_n}$, en stel $b=P(a)$. Dan zijn $\gamma_1 b+\delta_1,\ldots,\gamma_n b+\delta_n$ alle singulier. Derhalve zijn de $(\tau_i^{-1}\tau)(b)$ geen van alle gedefinieerd, dus $\tau(b)$ is niet equivalent met een $\tau_i(c)$ $(i=1,\ldots,n;\ c\in A)$. Het punt $\tau(b)$ ligt dus niet op één der $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$.

<u>De A-bol is samenhangend.</u> Eerst laten we zien dat elk punt verbonden kan worden met een eigenlijk punt. Trek nl. door een willekeurig punt $(0_i, a)$ de lijn $(0_i, a+\lambda)(0 \leq \lambda < \infty)$. Hierop liggen eigenlijke punten. Want γ_i en δ_i (de elementen van de onderste rij in τ_i) zijn niet beide nul, zodat $\gamma_i(a+\lambda)+\delta_i$ niet voor alle λ singulier kan zijn. Is het ergens regulier, dan is daar $\tau_i(a+\lambda)$ gedefinieerd, zodat het een eigenlijk punt aanwijst.

Het is nu voldoende te laten zien dat de verzameling der eigenlijke punten samenhangend is. Dit is triviaal, daar deze verzameling homeomorf is met A zèlf.

<u>De H-bol</u>. We zullen in het geval dat $A=MR_n$ de MR_n-bol interpreteren als een oppervlak in een euclidische ruimte, evenals men voor n=1 de z-bol in een driedimensionale euclidische ruimte kan leggen.

Beschouw alle matrices (2nxn) $\binom{P}{Q}$ met rang n (P en Q stellen matrices (nxn) voor). In deze collectie definieren we equivalentie door

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} \quad \text{als } P = P_1X, \quad Q=Q_1X, \quad X \text{ regulier.}$$

In elke equivalentieklasse komt een $\binom{B}{D}$ voor die kan worden aangevuld tot een unitaire matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Om dit in te zien kiezen we een $\binom{P}{Q}$ uit de equivalentieklasse, en vormen daarvan de Gram matrix $P^*P + Q^*Q$. (De * geeft getransponeerde van de complex geconjugeerde aan). Daar $\binom{P}{Q}$ de rang n heeft, is de Gram matrix positief definiet, en dus te schrijven als S^*S, waarin S regulier is en (nxn). Neem nu $B=PS^{-1}$, $D=QS^{-1}$, dan is $B^*B + D^*D = I$. Van de matrix $\binom{B}{D}$ zijn nu de kolommen onderling orthogonaal en volgens het proces van Schmidt kunnen we hem tot een unitaire matrix (2n x 2n) aanvullen.

Een klasse heet <u>eigenlijk</u> als er een $\binom{P}{Q}$ in ligt met reguliere Q. Dan hebben alle andere representanten in deze klasse dezelfde eigenschap, en bovendien kunnen we zeggen dat er één en slechts één $\binom{Z}{I}$ (I = (nxn) eenheidsmatrix) in de klasse voorkomt.

Een klasse heet <u>echt</u> als er een $\binom{P}{Q}$ in ligt met de eigenschap dat er complexe getallen λ, μ bestaan zó dat $\lambda P+\mu Q$ regulier is. Dan hebben alle $\binom{P}{Q}$'s uit de klasse deze eigenschap.

Is n=1, dan is elke klasse echt, want uit $\lambda p+\mu q = 0$ voor alle λ, μ zou volgen $p=q=0$ in strijd met de eis over de rang. Voor $n > 1$ bestaan er onechte klassen. Voorbeeld: n=2, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De <u>H-bol</u> is de collectie van alle hermitische (2n x 2n) matrices met n eigenwaarden 1, n eigenwaarden 0. We zullen onze klassencollectie éénéénduidig op de H-bol afbeelden. Dit heeft het voordeel dat we een topologie en zelfs een metriek in de klassencollectie aan kunnen geven.

Aan de klasse waarin $\binom{P}{Q}$ voorkomt, voegen we toe de hermitische matrix

$$(1) \qquad H(\binom{P}{Q}) = \binom{P}{Q} \left\{ \binom{P}{Q}^* \binom{P}{Q} \right\}^{-1} \binom{P}{Q}^* = \binom{P}{Q} (P^*P+Q^*Q)^{-1} \binom{P}{Q}^* .$$

In het midden staat de Gram matrix, die, zoals reeds opgemerkt werd, regulier, dus inverteerbaar is. De definitie is onafhankelijk van de keuze van de representant uit de klasse:

$$H(\binom{PX}{QX}) = H(\binom{P}{Q}) \qquad \text{als } X \text{ regulier.}$$

De eigenwaarden zijn gemakkelijk te bepalen door voor P en Q resp. B en D uit een unitaire (2n x 2n) matrix $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ te nemen, dus we kiezen de representant $\binom{P}{Q} = U\binom{O}{I}$. Ingevuld in (1) levert dit op

$$(2) \qquad U\binom{O}{I} \left\{ \binom{O}{I}^* U^*U \binom{O}{I} \right\}^{-1} \binom{O}{I}^* U^* = U \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} U^* = \begin{pmatrix} BB^* & BD^* \\ DB^* & DD^* \end{pmatrix}.$$

Deze formule bewijst tegelijk dat elk punt van de H-bol als beeld optreedt, want elke hermitische matrix met de genoemde eigenwaarden is, op grond van de stelling over unitaire reductie van hermitische matrices, in de vorm van het rechterlid van (2) te schrijven.

Dat de beschouwde afbeelding éénéénduidig is, blijkt als volgt. Is

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad U \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} U^* = U_1 \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} U_1^*$$

dan is, met $U_1^{-1}U=U_2$, ook $U_2 \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} U_2$, dus $C_2=B_2=0$, D_2 unitair. Derhalve is $B=B_1D_2$, $D=D_1D_2$, zodat $\binom{B}{D}$ en $\binom{B_1}{D_1}$ equivalent zijn.

We zullen verder, inplaats van over equivalentieklassen, zoveel mogelijk over de punten van de H-bol spreken. De begrippen eigenlijk en echt brengen we op de H-bol over. Een $\binom{P}{Q}$ die tot een H van de H-bol aanleiding geeft, zullen we een <u>representant</u> van deze H noemen.

Of een punt H van de H-bol al dan niet eigenlijk is, is direct aan H zèlf te zien. Is nl. $H = \begin{pmatrix} S & T \\ V & W \end{pmatrix}$, en is $\binom{B}{D}$ een uit een unitaire matrix voortkomende representant van H, dan is volgens (2) $W = DD^*$. Bekend is, dat DD^* dan en slechts dan singulier is als D singulier is. Dus nodig en voldoende opdat H eigenlijk is, is dat W regulier is.

Als W regulier is, geldt bovendien, daar $T=BD^*$, $W=DD^*$, dat $\binom{T}{W}$ de rang n heeft, en dat $\binom{T}{W}$ een representant van H is; en ook $\binom{TW^{-1}}{I}$ is een representant. Hieruit volgt dat de éénéénduidige afbeelding

$$Z \leftrightarrow H(\binom{Z}{I})$$

van MR_n op het eigenlijke deel van de H-bol in beide richtingen continu is, want T en W hangen continu van H af, en in een omgeving van een reguliere W hangt TW^{-1} continue van T en W af. Dat H continu van Z afhangt volgt uit (1), waarin $(Z^*Z + I)^{-1}$ voorkomt, die continu van Z afhangt.

De MR_n-bol zullen we éénéénduidig op het echte deel van de H-bol afbeelden. Een punt van de MR_n-bol is een equivalentieklasse van $\tau(Z)$'s; $\tau = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $Z \in MR_n$.

We kiezen een speciale representant $\tau(Z)$ en maken de afbeelding

$$(3) \qquad \tau(Z) \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha Z + \beta I\\ \gamma Z + \delta I\end{pmatrix}.$$

Gaan we links op een met $\tau(Z)$ equivalente $\tau_1(Z_1)$ over, dan ontstaat rechts een nieuwe (2n x n) matrix, die met de oude equivalent is. Stellen we $\tau_1^{-1}\tau = \tau_2$, dan is nl. $\gamma_2 Z + \delta_2 I$ regulier, en $Z_1 = (\alpha_2 Z + \beta_2 I)(\gamma_2 Z + \delta_2 I)^{-1}$. Derhalve

$$(4) \qquad \begin{pmatrix}Z_1\\ I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\alpha_2 Z + \beta_2 I)(\gamma_2 Z + \delta_2 I)^{-1}\\ (\gamma_2 Z + \delta_2 I)(\gamma_2 Z + \delta_2 I)^{-1}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\alpha_2 Z + \beta_2 I\\ \gamma_2 Z + \delta_2 I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2 I & \beta_2 I\\ \gamma_2 I & \delta_2 I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z\\ I\end{pmatrix}.$$

We merken nu op dat, als R een reguliere (2n x 2n) matrix is,

$$\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}P_1\\ Q_1\end{pmatrix} \text{ impliceert } \quad R\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix} \sim R\begin{pmatrix}P_1\\ Q_1\end{pmatrix},$$

want de eerste relatie impliceert

$$\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_1\\ Q_1\end{pmatrix} X$$

met een reguliere (nxn) matrix X, en deze betrekking kunnen we vóórvermenigvuldigen met R. We passen dit toe op (4), met $R = \begin{pmatrix}\alpha_1 I & \beta_1 I\\ \gamma_1 I & \delta_1 I\end{pmatrix}$, en we concluderen dat $\tau(Z)$ en $\tau_1(Z_1)$ beide hetzelfde punt van de H-bol opleveren.

Dat het beeld van $\tau(Z)$ een echt punt van de H-bol is, volgt uit het feit dat $\gamma_3(\alpha Z + \beta I) + \delta_3(\gamma Z + \delta I) = I$ is; hierin stellen α_3 etc. de elementen van $\tau_3 = \tau^{-1}$ voor.

We moeten vervolgens bewijzen dat elk echt punt van de H-bol als beeld optreedt.

Neem daartoe van een echt punt van de H-bol een representant $\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}$, en kies γ en δ zó dat $\gamma P + \delta Q = S$ regulier is. Kies nu α en β zó dat $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ is. Noem $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \tau^{-1}$, $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} = \tau$, $(\alpha P + \beta Q)S^{-1} = Z$. Dan is het beeld van $\tau(Z)$ bij de afbeelding (3):

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 Z + \beta_1 I\\ \gamma_1 Z + \delta_1 I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 I & \beta_1 I\\ \gamma_1 I & \delta_1 I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z\\ I\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\alpha_1 I & \beta_1 I\\ \gamma_1 I & \delta_1 I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha P + \beta Q\\ \gamma P + \delta Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}.$$

Tenslotte bewijzen we dat elk echt punt van de H-bol slechts beeld is van één punt van de MR_n-bol. Neem aan dat $\tau(Z)$ en $\tau_1(Z_1)$ hetzelfde punt van de H-bol opleveren.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 Z_1 + \beta_1 I\\ \gamma_1 Z_1 + \beta_1 I\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\alpha Z + \beta I\\ \gamma Z + \delta I\end{pmatrix}.$$

Noem $\tau_1^{-1}\tau = \tau_2$, dan blijkt door linksvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix}Z_1\\ I\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\alpha_2 Z + \beta_2 I\\ \gamma_2 Z + \delta_2 I\end{pmatrix}.$$

Er is derhalve een reguliere X met $\alpha_2 Z + \beta_2 I = Z_1 X$, $\gamma_2 Z + \delta_2 I = IX$. Dus $\gamma_2 Z + \delta_2 I$ is regulier, en $Z_1 = (\alpha_2 Z + \beta_2 I)(\gamma_2 Z + \delta_2 I)^{-1}$. Dit betekent dat $\tau(Z) \sim \tau_1(Z_1)$.

Bij de afbeelding (3) corresponderen de eigenlijke punten van de MR_n-bol met de eigenlijke punten van de H-bol. Een eigenlijk punt van de MR_n-bol kan worden voorgesteld door $\tau_1(Z)$, met $\tau_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Een eigenlijk punt van de H-bol kan worden gerepresenteerd door een $\begin{pmatrix}Z\\ I\end{pmatrix}$. Volgens (3) corresponderen deze met elkaar.

De triviale afbeelding $Z \longrightarrow \tau_1(Z)$ van de MR_n op het eigenlijke deel van de MR_n-bol brengt een afbeelding met zich mee van MR_n op het eigenlijke deel van de H-bol. Expliciet luidt deze: $Z \longrightarrow H(Z)$, waar

$$(5) \qquad H(Z) = H\left\{\begin{pmatrix}Z\\ I\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} Z(I+Z^*Z)^{-1}Z^* & Z(I+Z^*Z)^{-1}\\ (I+Z^*Z)^{-1}Z^* & (I+Z^*Z)^{-1}\end{pmatrix}.$$

Merk op dat $Z(I+Z^*Z)^{-1} = (I+ZZ^*)^{-1}Z$, zodat de matrix links-boven ook kan worden geschreven als $(I+ZZ^*)^{-1}.ZZ^*$. Het is verder niet moeilijk de voorstelling (2) expliciet aan te geven: $H(Z) = U\,H(0)U^*$, met

$$H(0) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix}(I+ZZ^*)^{-\frac{1}{2}} & Z(I+Z^*Z)^{-\frac{1}{2}}\\ -Z^*(I+ZZ^*)^{-\frac{1}{2}} & (I+Z^*Z)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.$$

De transformaties $Z \longrightarrow (\alpha Z + \beta I)(\gamma Z + \delta I)^{-1}$ kunnen, als $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ unitair is, op de H-bol eenvoudig worden aangegeven. Iets algemener beschouwen we, in plaats van de unitaire (2n x 2n) matrices $\begin{pmatrix}\alpha I & \beta I\\ \gamma I & \delta I\end{pmatrix}$, willekeurige unitaire matrices $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = U$. Is nu CZ+D regulier, dan is

$$(6) \qquad H((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = U\,H(Z)\,U^*.$$

Het linkerlid is nl. het punt van de H-bol dat is toegevoegd aan de klasse

$$\begin{pmatrix} AZ + B \\ CZ + D \end{pmatrix} = U \binom{Z}{I},$$

zodat de bij deze klasse behorende H is

$$U\binom{Z}{I} \left\{ \binom{Z}{I}^* U^* U \binom{Z}{I} \right\}^{-1} \binom{Z}{I}^* U^*,$$

en de U^*U in het midden valt weg.

We kunnen de H-bol beschouwen als een oppervlak in de ruimte $\mathcal{H}$ van alle hermitische matrices (2n x 2n)(een ruimte die $4n^2$ reële dimensies heeft). Dit is een euclidische ruimte, als we als afstand $d(H_1,H_2)$ ($H_1 \in \mathcal{H}$, $H_2 \in \mathcal{H}$) definiëren door $(d(H_1,H_2))^2 = tr((H_1-H_2)^2)$ (tr = spoor). Als cartesische coördinaten kunnen we in deze ruimte bijv. gebruiken $h_{11},\dots,h_{2n,2n}$, Re $h_{ij}\sqrt{2}(1 \leq i < j \leq 2n)$, Im $h_{ij}\sqrt{2}(1 \leq i < j \leq 2n)$.

Is U unitair ((2n x 2n)), dan is $H \to UHU^*$ een lineaire transformatie in $\mathcal{H}$, waarvan we kunnen laten zien dat zij direct orthogonaal is. De orthogonaliteit volgt uit

$$tr((UH_1U^* - UH_2U^*)^2) = tr(U(H_1-H_2)^2U^*) = tr((H_1-H_2)^2).$$

Dat zij direct orthogonaal is, blijkt uit het feit dat de verzameling der unitaire matrices U samenhangend is (bijv. in te zien uit de exponentiële representatie).

De locale structuur van de H-bol is te bestuderen door een punt H van dat oppervlak door $H=U\,H(0)U^*$ naar $H(0)$ te transformeren. In een zekere omgeving van $H(0)$ zijn alle punten van de H-bol eigenlijk en dus als $H(Z)$'s met Z in een omgeving van $Z=0$, te representeren.

De metriek in $\mathcal{H}$ impliceert een lijnelement op de H-bol, gegeven door $ds^2 = tr(dH.dH)$. Dit lijnelement is invariant bij de transformaties $H \to UHU^*$ (U unitair), aangezien dit orthogonale transformaties in $\mathcal{H}$ zijn.

In de eigenlijke punten $H(Z)$ van $\mathcal{H}$ kunnen we het lijnelement in Z en dZ uitdrukken; dan vinden we de Siegel-metriek van de MR_n. Daartoe stellen we $(I+ZZ^*)^{-1}=P$, $(I+Z^*Z)^{-1}=Q$. Dan is

$$Z^*P = QZ^*, \quad ZQ = PZ,$$
$$dP = -P\,d(ZZ^*)P, \quad dQ = -Q\,d(Z^*Z)Q.$$

De berekeningen worden vergemakkelijkt door op te merken dat deze formules in elkaar overgaan door de transformatie $Z \to Z^*$, $P \to Q$.

We hebben $dH = 2\begin{pmatrix} -dP & d(PZ) \\ d(PZ)^* & dQ \end{pmatrix}$, dus

$$\tfrac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(dH.dH) = \mathrm{tr}(dP.dP) + \mathrm{tr}(dQ.dQ) + 2\mathrm{tr}(d(PZ).d(QZ^*)).$$

Gebruikmakende van de formules (rtr betekent Re tr) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, $\mathrm{rtr}\,A^* = \mathrm{rtr}\,A$, $\mathrm{tr}((A+A^*)(A+A^*)) = 2\mathrm{rtr}(AA)+2\mathrm{tr}(AA^*)$, vinden we

$$\mathrm{tr}(dP.dP) = 2\mathrm{rtr}(PP\,dZ.Z^*PP\,dZ.Z^*) + 2\mathrm{rtr}(PP\,dZ.Z^*PPZ\,dZ^*).$$

Verder is
$$d(PZ) = -Pd(ZZ^*)PZ + PdZ = -PZ\,dZ^*.ZQ + PdZ.Q,$$
$$d(QZ^*) = -QZ^*dZ.Z^*P + QdZ^*P.$$

Nu blijkt

$$\mathrm{tr}(d(PZ)\,d(QZ^*)) = \mathrm{rtr}(PZdZ^*.\,ZQQZ^*dZ.Z^*P) -$$
$$-2\mathrm{rtr}\,(PZdZ^*.ZQQdZ^*.P) + \mathrm{rtr}\,(PdZ.QQ\,dZ^*.P).$$
$$\mathrm{tr}(dQ.dQ) = 2\mathrm{rtr}(QQdZ^*.ZQQ\,dZ^*.Z) + 2\mathrm{rtr}\,(QQdZ^*.\,ZQQZ^*dZ).$$

Met behulp van de formules $\mathrm{rtr}(AB) = \mathrm{rtr}(BA)$, $\mathrm{rtr}(A^*)=\mathrm{rtr}(A)$ brengen we alle termen in één der vormen $\mathrm{rtr}(A\,dZ\,B\,dZ)$ en $\mathrm{rtr}(A\,dZ\,B\,dZ^*)$. Maken we dan nog gebruik van de relaties $Z^*PP=QQZ^*$, $PP+ZQQZ^*=P$, $QQ+Z^*PPZ=Q$, dan vinden we $\frac{1}{4}\mathrm{tr}(dH.dH) = 2\mathrm{rtr}(PdZ.QdZ^*)$.

Daar echter $(PdZ.QdZ^*)^* = dZ.Q.dZ^*.P$, is het spoor daarvan reëel. We vinden dus

(7) $$\mathrm{tr}(dH.dH) = 8\,\mathrm{tr}(\,(I+ZZ^*)^{-1}dZ.(I+Z^*Z)^{-1}dZ^*).$$

Het rechterlid is het lijnelement van Siegel, dat invariant is bij de substituties $Z_1=(AZ+B)/(CZ+D)$ met unitaire $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, voorzover $CZ+D$ regulier is.

<u>De MR_n-bol is niet compact als $n > 1$.</u> We kunnen rijen aangeven die geen verdichtingspunt op de MR_n-bol hebben (verdichtingspunt in de zin van de topologie die erop gegeven is doordat het een MR_n-variëteit is). Kies nl. de puntrij der matrices $Z_k=\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(k=1,2,3,\ldots)$, (gemakshalve $n=2$). Zou een deelrij daarvan naar een eigenlijk punt convergeren, dan was er al convergentie in de zin van de MR_n, doch daarin is de deelrij divergent. Was er convergentie naar een oneigenlijk punt, dan zou er een τ te vinden zijn, zó dat op de duur alle $\tau(Z_k)$'s uit de deelrij eigenli k zijn en naar een eigenlijk punt convergeren. Met $\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ vinden we echter

$$\tau(Z_k) = (\alpha Z_k + \beta I)(\gamma Z_k + \delta I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\delta} & k.\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta^2} \\ 0 & \frac{\beta}{\delta} \end{pmatrix}$$

en daar $\delta \neq 0, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, geeft dit een divergente rij.

De H-bol is, met de metriek van $\mathcal{H}$, gesloten en begrensd, dus wèl compact. Verder kan men laten zien dat onze afbeelding van de MR_n-bol op het echte deel van de H-bol topologisch is; we laten het bewijs achterwege.

Ter illustratie berekenen we H(Z) voor de matrix $Z=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}$, gemakshalve met reële a en b (n=2). Met behulp van (1) (met P=Z,Q=I) vinden we

$$H(Z) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2+1 & ab \\ ab & a^2+b^2+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{*} .$$

De determinant van de middelste matrix is $\Delta = a^4+2a^2+b^2+1$, en we vinden

$$H(Z) = \Delta^{-1}. \begin{pmatrix} a^4+a^2+b^2 & ab & a^3+a & b \\ ab & a^4+a^2 & -a^2b & a^3+a \\ a^3+a & -a^2b & a^2+b^2+1 & -ab \\ b & a^3+a & -ab & a^2+1 \end{pmatrix} .$$

We laten nu b naar oneindig gaan, en tegelijkertijd veranderen we a. We beschouwen drie gevallen:

1^o $ab^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow \infty$; 2^o $ab^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow s$ $(0 < s < \infty)$; 3^o $ab^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$. In deze gevallen vinden we resp. de volgende limieten voor H

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{1+s^4} \begin{pmatrix} 1+s^4 & & & \\ & s^4 & -s^2 & \\ & s^2 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

In het bijzonder zien we dat voor vaste eindige a de limiet onafhankelijk is van a. Bovendien ziet men, wegens

$$\tau\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha a+\beta}{\gamma a+\delta} & \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)b}{(\gamma a+\delta)^2} \\ & \frac{\alpha a+\beta}{\gamma a+\delta} \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$$

dat, bij vaste a, en $b \longrightarrow \infty$, de limiet van de rij $H(\tau\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix})$ op de H-bol helemaal niet meer van τ afhangt, zolang $\gamma a+\delta \neq 0$ is.

De gebroken lineaire afbeeldingen $Z \longrightarrow (\alpha Z+\beta)(\gamma Z+\delta)^{-1}$, die op de MR_n soms met een uitzondering zijn gedefinieerd, doch op de MR_n-bol kunnen worden voortgezet tot topologische afbeeldingen van de MR_n-bol op zichzelf, kunnen worden voortgezet tot topologische afbeeldingen van de H-bol op zichzelf. We beschouwen hier willekeurige matrices

$\tau = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$, zonder beperking tot unitaire.

We sluiten aan bij de voorstelling van de H-bol met behulp van equivalentie-klassen van $(2n \times n)$ matrices met rang n. Aan de klasse waar in $\binom{P}{Q}$ voorkomt voegen we toe de klasse waarin $\binom{\alpha P+\beta Q}{\gamma P+\delta Q}$ voorkomt. Deze definitie hangt niet af van de speciale keuze van de representant. Verder is direct in te zien dat de afbeelding éénéénduidig is, en dat het een voortzetting is van de afbeelding $Z \longrightarrow \tau(Z)$ (neem nl. $P=Z$, $Q=I$).

Noem $\alpha P+\beta Q=P_1$, $\gamma P+\delta Q=Q_1$. $\tau^*\tau=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \nu & \rho\end{pmatrix}$ is positief definiet; we kunnen er dus een positief veelvoud pI van de eenheidsmatrix van af trekken, zó dat er iets positief definiets over blijft, en dat restant is weer te schrijven als een product $\tau_1^*\tau_1$. Nu is

$$P_1^* P_1+Q_1^* Q_1=p(P^* P+Q^* Q) + (\alpha_1 P+\beta_1 Q)^* (\alpha_1 P+\beta_1 Q)+(\gamma_1 P+\delta_1 Q)^* (\gamma_1 P+\delta_1 Q).$$

De laatste twee termen vormen samen weer een niet-negatief definiete matrix. De kleinste eigenwaarde van $P_1^* P_1+Q_1^* Q_1$ is dus minstens p keer de kleinste eigenwaarde van P^*P+Q^*Q. Hieruit volgt dat $(P_1^* P_1+Q_1^* Q_1)^{-1}$ continu van P en Q afhangt. Volgens (1) hangt nu ook de bij P_1,Q_1 behorende H continu van P en Q af.

Tenslotte kunnen we laten zien dat in een omgeving van een punt H_0 van de H-bol de P en Q zó uit de equivalentieklassen kunnen worden gekozen, dat het continue functies zijn in die omgeving. Daartoe merken we op dat H_0 kan worden voorgesteld door $U\,H(0)U^*$, U unitair $(2n \times 2n)$, $U=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$. We laten nu U vast, en laten Z een omgeving van 0 doorlopen. Bij $U\,H(Z)U^*$ kunnen we nu kiezen $P=AZ+B$, $Q=CZ+D$, en deze hangen continu van Z af.

Het is nu zeer teleurstellend dat de mogelijkheid om rationale functies in de MR_n voort te zetten tot continue afbeeldingen van de H-bol in zichzelf, beperkt blijft tot gebroken lineaire functies (tenminste als $n > 1$). Als tegenvoorbeeld nemen we $n=2$, met de afbeelding $Z \longrightarrow Z^2$.

We hebben gezien, als $Z = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, $a \to 0$, $b \longrightarrow \infty$, dat H(Z) nadert tot een punt van de H-bol dat niet afhangt van de wijze waarop a en b naar 0 resp. ∞ gaan. We hebben verder $Z^2=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$. Nemen we nu $a=sb^{-1}$, s vast, $b \longrightarrow \infty$, dan nadert $H(Z^2)$ tot $H\left(\begin{pmatrix}0 & 2s\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$, en dit hangt af van s!

Om de zojuist genoemde reden is de H-bol voor het bedrijven van functietheorie veel minder geschikt dan de MR_n-bol.

Opmerkingen. 1. In zekere zin is de afbeelding $Z \longrightarrow H(Z)$ een generalisatie van de stereografische projectie. Neem nl. $n=1$. Richt boven het z-vlak een loodlijn in de oorsprong op, die we de t-as noemen. De punten van de driedimensionale ruimte worden nu aangegeven door paren (t,ζ) (t reëel, ζ complex). Aan $(0,z)$ wordt stereografisch (noordpool in $(1,0)$ toegevoegd het punt $(|z|^2/(1+|z|^2),\ z/(1+|z|^2)$. De coordinaten (t,ζ) van de bol voldoen nu aan $t(t-1)+|\zeta|^2=0$ en dat wil zeggen dat $H=\begin{pmatrix} t & \zeta \\ \bar{\zeta} & 1-t \end{pmatrix}$ hermitisch is, met eigenwaarden 0 en 1. We hebben hier de H-bol dus in een driedimensionale deelruimte van de vierdimensionale ruimte gelegd; deze deelruimte is gekenmerkt door tr $H=1$.

Daar tr H invariant is bij de afbeelding $H \to UHU^*$, blijft deze deelruimte bij deze afbeelding invariant. We hebben dus een representatie van U_2 in O_3^+.

2. Als $n=2$, kunnen we de H-bol éénéénduidig afbeelden op de verzameling der rechte lijnen in de complexe driedimensionale projectieve ruimte. Een rechte in R_3 is nl. door twee lineair onafhankelijke vergelijkingen in x,y,z,w gegeven, waarvan we de coefficienten kunnen aangeven in een 4×2 matrix. Rechtsvermenigvuldiging met een reguliere 2×2 matrix geeft een nieuw stel vergelijkingen voor dezelfde rechte, is op deze wijze te krijgen. De rechten corresponderen dus éénéénduidig met de op blz. 61 beschouwde equivalentieklassen, dus met de punten van de H-bol.

De oneigenlijke punten van de H-bol kunnen worden gerepresenteerd door matrices $\binom{P}{Q}$ waarbij in Q de tweede kolom nul is; zij corresponderen met rechten die de lijn $x=y=0$ snijden. De onechte punten kunnen worden aangegeven door matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

en corresponderen met de rechten van de kwadratische regelschaar $\lambda x+\mu y=0$, $\lambda z+\mu w=0$ (d.i. één der beide scharen van het oppervlak $xw=yz$).

Het feit dat twee rechten elkaar snijden wordt tot uitdrukking gebracht door de voorwaarde

$$\det\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}=0;$$

deze voorwaarde is onafhankelijk van de keuze der representanten $\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ uit hun klassen.

Voor algemene n kunnen we evenzo vaststellen dat de rang van de matrix $\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$ onafhankelijk is van de keuze der representanten. Voor eigenlijke punten Z_1,Z_2 komt dit neer op de rang van $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ I & I \end{pmatrix}$, en dat

---

en elk stel vergelijkingen voor de rechte is n+ de rang van Z_1-Z_2.

3. Men kan ook een H-bol definiëren door uit te gaan van matrices $\binom{P}{Q}$ met rang n, waarin P een $(m\times n)$, en Q een $(n\times n)$ matrix is. De verzameling van alle equivalentieklassen is nu door (1) éénéénduidig afgebeeld op de verzameling van alle hermitische $((m+n)x(m+n))$ matrices met m-voudige eigenwaarde 0 en n-voudige eigenwaarde 1. De onderscheiding echt-onecht vervalt, evenals het verband met een MR_n-bol. De formules (6) en (7) blijven geldig.

In het bijzonder geeft het geval n=1 een (bekende) afbeelding van de complexe m-dimensionale projectieve ruimte in $\mathcal{H}$, en maakt deze projectieve ruimte tot metrische ruimte. Zijn $z_1,\dots,z_{m+1}$ de (homogene) coördinaten, dan wordt het lijnelement ds gevonden uit

$$ds^2 = 8\left(\sum_1^{m+1}|z_i|^2\right)^{-2}\left\{\sum_1^{m+1}|z_i|^2 \cdot \sum_1^{m+1}|dz_i|^2 - \left|\sum_1^{m+1}\bar{z}_i\, dz_i\right|^2\right\} =$$

$$= 8\left(\sum_1^{m+1}|z_i|^2\right)^{-2}\sum_{1\leq i<j\leq m+1}|z_i\, dz_j - z_j dz_i|^2 .$$

Met de beperking $z_{m+1}=1$ volgt dit gemakkelijk uit (7), met $Z=\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_m\end{pmatrix}$. Bovendien is aan het laatste lid van bovenstaande formule te zien dat ds^2 niet verandert als men $z_1,\dots,z_{m+1}$ door $z_1t,\dots,z_{m+1}t$ (met variabele t) vervangt. Dat het geval $z_{m+1}=0$ geen uitzondering vormt, kan worden bewezen door unitaire transformatie (waarvoor we een geschikte permutatie van $z_1,\dots,z_{m+1}$ kunnen kiezen).

De hier gevonden metriek stemt, afgezien van de factor 8, voor de reële projectieve ruimte overeen met de metriek die men op de eenheidsbol in R_{m+1} krijgt door de stralen met de eenheidsbol te snijden. Behalve door berekening volgt dit uit het feit dat (voor reële z) beide metrieken invariant zijn bij orthogonale transformaties in $z_1,\dots,z_{m+1}$.

4. Voor het geval van reële Z is de afbeelding $Z\longrightarrow H(Z)$ in nagenoeg dezelfde vorm door Siegel beschouwd (Annals of Math. 46 (1945) p.710), ook voor niet-kwadratische matrices. Voor symmetrische Z gaf Minakshisundaram een met de stereografische projectie samenhangende afbeelding die ongeveer met onze formule voor H(Z) overeenkomt (verschijnt binnenkort in Journ.Indian Math.Soc.(1956)).

5. De benaming H-bol suggereert ten onrechte dat het een $2n^2$-dimensionale bol in een $(2n^2+1)$-dimensionaal hypervlak is. Men kan echter nagaan dat de H-bol in een $(4n^2-1)$-dimensionaal hypervlak ligt (bepaald door tr H=n) doch in geen enkel hypervlak van lagere dimensie (wanneer we nagaan welke punten van $\mathcal{H}$ een constante afstand tot alle punten van de H-bol hebben, blijken dit slechts de scalaire matrices te zijn). De punten van de H-bol hebben alle de afstand $\sqrt{n}$ tot de oorsprong.

Dat de H-bol geen bol is (als $n > 1$), blijkt ook door op te merken, dat hij met de lineaire n-dimensionale ruimte der diagonale matrices $\binom{2n}{n}$ snijpunten heeft, en voor $n > 1$ is dit aantal eindig doch > 2.

We keren terug naar de A-variëteiten, en geven nog enkele voorbeelden.

Voorbeeld 3. Is M een A-variëteit, dan is elk open deel M_1 van M weer een A-variëteit, wanneer we de analytische structuur van M op M_1 overnemen. Dit wil zeggen dat we elke uniformizerende parameter van M overnemen, voorzover op M_1 gedefiniëerd.

Voorbeeld 4. Is A_0 de algebra der complexe getallen, dan is een A_0-variëteit niets anders dan een Riemanns oppervlak.

Voorbeeld 5. Zij R een open deel van A_0 (algebra der complexe getallen) en A een willekeurige Banach-algebra. De collectie van alle $a \in A$ met $\sigma(a) \subset R$ noemen we M(R). Dit is een open deel van A, en als zodanig een A-variëteit (zie voorbeeld 1, blz. 57). We merken op dat elke op R analytische functie f volgens st 2 (blz. 45) een op M(R) analytische functie F definiëert, met de eigenschap dat $\sigma(F(a)) = f(\sigma(a))$ $(a \in M(R))$ (st 5, blz. 50).

Het omgekeerde is niet zonder meer waar; niet elke op de gehele M(R) analytische functie F komt op deze wijze voort uit een f. Dit blijkt bijvoorbeeld uit het feit dat M(R) niet steeds samenhangend is, ook al is R samenhangend. Is bijvoorbeeld R het gebied $z \neq 0$, en A de algebra uit voorbeeld V (blz. 37), dan valt M(R) uiteen in delen M_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, waarbij M_k bestaat uit alle absoluut convergente Fourierreeksen $f(x)$ die het interval $0 \leq x \leq 1$ afbeelden op een kromme in het z-vlak, die het nulpunt k keer omloopt. Nemen we nu $F(a) = 0$ voor $a \in M_0$, $F(a) = 1$ voor $a \in M(R) - M_0$, dan is dit niet een functie die met een functie f op R_0 correspondeert.

Voorbeeld 6. We zullen de relatie $R \to M(R)$ uitbreiden tot het geval dat R een willekeurig Riemanns oppervlak is. Het bijzondere geval dat R de complexe bol is, zal ons weer de A-bol opleveren.

We zullen dingen die op A_0 resp. R betrekking hebben met dezelfde symbolen noteren als de overeenkomstige dingen bij A resp. M(R), echter voorzien van een extra index 0.

Beschouw alle afbeeldingen φ_i die een open verzameling $\Omega_{0i} \subset R$ (i doorloopt een indexverzameling S) conform afbeelden op een open deel $O_{0i} = \varphi_i(\Omega_{0i})$ van A_0. We hebben dus het maximale systeem van uniformizerende parameters. De Ω_{0i}'s behoeven niet samenhangend te zijn.

Bij O_{0i} definiëren we $O_i = M(O_{0i}) = \{ a \mid a \in A, \sigma(a) \in O_{0i} \}$, zoals in voorbeeld 5. De O_i's zijn open delen van A, en met deze O_i's zullen we een concrete A-variëteit M(R) maken door equivalenties te definiëren in de collectie der paren (O_i, a) $(i \in S,\ a \in O_i)$ (vgl. blz. 55-57)

Zij $i\in S$, $j\in S$. Aansluitende bij de notatie van E6, blz. 56 schrijven we $\Omega_{0ji} = \Omega_{0ij} = \Omega_{0i} \cap \Omega_{0j}$, $O_{0ij} = \varphi_i(\Omega_{0ij})$, $O_{0ji} = \varphi_j(\Omega_{0ji})$,

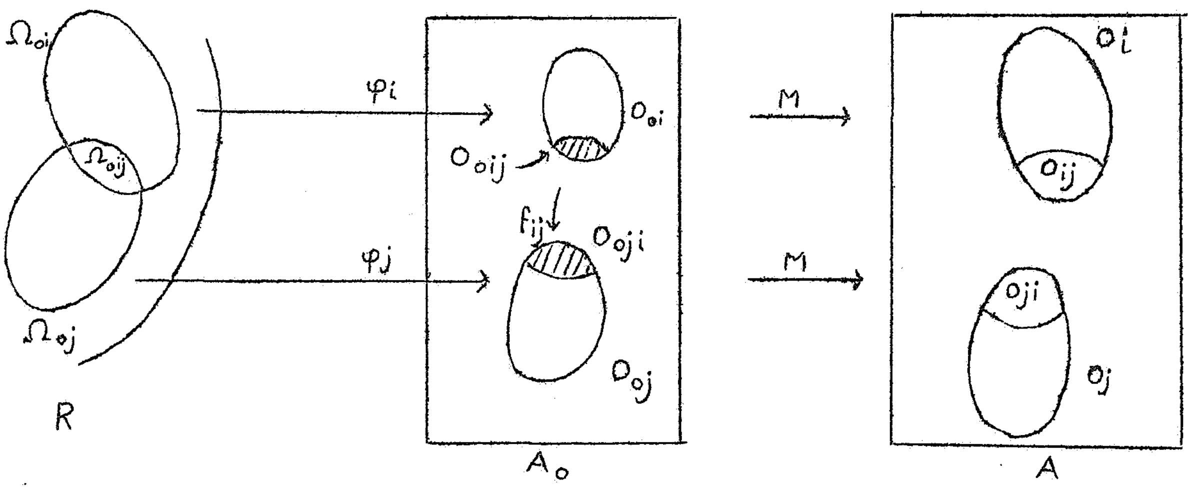
$O_{ij} = M(O_{0ij})$ (dus $O_{ij} \subset O_i$), $O_{ji} = M(O_{0ji})$,

terwijl $f_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$ een conforme afbeelding van O_{0ij} op O_{0ji} oplevert. Zij F_{ij} de door f_{ij} voortgebrachte Banachfunctie, gedefinieërd op O_{ij}; blijkens de spectral mapping theorem is, als $a \in O_{ij}$, (d.w.z. $\sigma(a) \in O_{0ij}$) steeds $\sigma(F_{ij}(a)) = f_{ij}(\sigma(a)) \subset f_{ij}(O_{0ij}) = O_{0ji}$. Derhalve is $F_{ij}(a) \in O_{ji}$.

We definiëren nu de equivalentie door

$$(O_i, a) \sim (O_j, b) \rightleftarrows a \in O_{ij} \text{ en } b = F_{ij}(a).$$

Merk op dat deze equivalentie impliceert dat $\varphi_i^{-1}(\sigma(a)) = \varphi_j^{-1}(\sigma(b))$, en we kunnen deze op R gelegen verzameling het <u>spectrum</u> van de equivalentieklasse (dus van het punt der uit de equivalentieklassen opgebouwde A-variëteit) noemen.



We controleren nu de eisen E 1 t/m E 5 (blz. 55-56).

<u>E 1</u>. a) Reflexiviteit is triviaal (f_{ii} is de identieke afbeelding, dus F_{ii} eveneens).

b) Symmetrie: f_{ij} en f_{ji} zijn elkaars inversen, en beide analytisch. Nu is $f_{ji}(f_{ij})$ de identieke afbeelding. Dat nu ook $F_{ji}(F_{ij})$ de identieke afbeelding is, volgt uit de volgende hulpstelling (had eigenlijk direct nà st 5 blz. 50 besproken moeten worden):

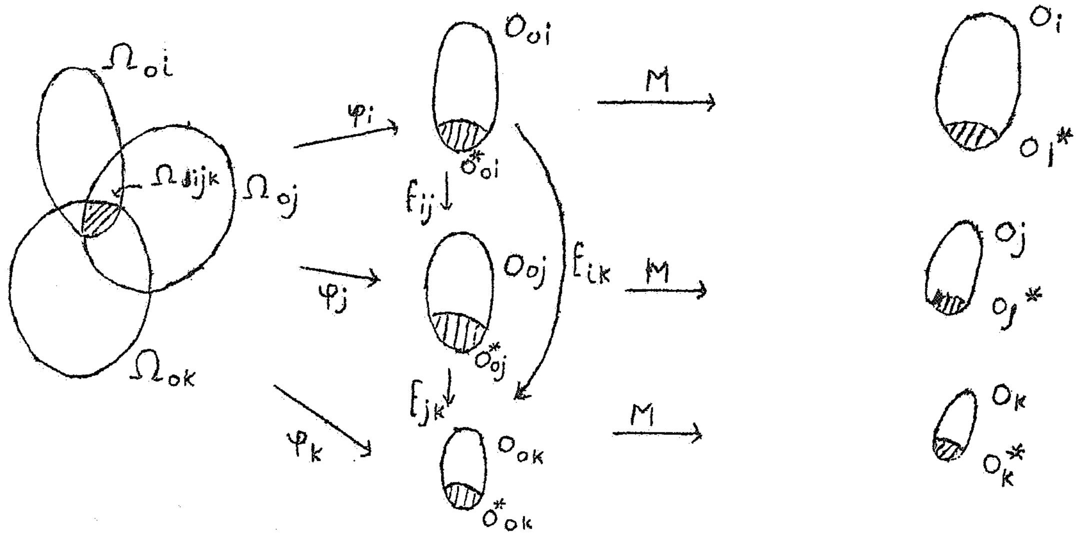
<u>Hulpstelling</u>. Zij f analytisch in $O_0 \subset A_0$, en g analytisch in $f(O_0)$, dus de samengestelde functie $g(f)$ analytisch in O_0. Laat F, G, H de met f, g, g(f) corresponderende Banachfuncties (gedefinieërd in $M(O_0)$, $M(f(O_0))$, $M(O_0)$) zijn. Dan is $H(a) = G(F(a))$ $(a \in M(O_0))$.

c) <u>Transitiviteit</u>. Zij $a \in O_i$, $b \in O_j$, $c \in O_k$, $(O_i, a) \sim (O_j, b)$, $(O_j, b) \sim (O_k, c)$. We moeten aantonen dat $a \in O_{ik}$ en $c = F_{ik}(a)$.

We hebben $\varphi_i^{-1}(\sigma(a)) = \varphi_j^{-1}(\sigma(b)) = \varphi_k^{-1}(\sigma(c))$, en dit ligt dus in de doorsnede Ω_{0ijk} van $\Omega_{0i}, \Omega_{0j}, \Omega_{0k}$. Het beeld van Ω_{0ijk} bij φ_i, φ_j, φ_k

noemen we resp. O^*_{0i}, O^*_{0j}, O^*_{0k}; verder zij $M(O^*_{0i}) = O^*_i$, enz. Daar $\sigma(a) \subset O^*_{0i}$, is $a \in O^*_i$, evenzo $b \in O^*_{0j}$, $c \in O^*_k$. Verder is $\sigma(a) \subset \varphi_i(\Omega_{0ijk}) \subset \varphi_i(\Omega_{0ik}) = O_{0ik}$, dus $a \in O_{ik}$.

We hebben $f_{ij}(O^*_{0i}) = O^*_{0j}$, $f_{jk}(O^*_{0j}) = O^*_{0k}$, $f_{ik}(O^*_{0i}) = O^*_{0k}$, en $f_{ik} = f_{jk}(f_{ij})$ op O^*_{0i}. Derhalve is, blijkens de hulpstelling, op O^*_i ook $F_{ik} = F_{jk}(F_{ij})$. Blijkens de gegeven equivalentierelaties is $F_{ij}(a) = b$, $F_{jk}(b) = c$, dus $F_{ik}(a) = c$, q.e.d.



<u>E 2</u>. Zij $(O_i,a) \sim (O_i,b)$ $(a \in O_i, b \in O_i)$. De functie f_{ii} is de identiteit, dus F_{ii} ook. Derhalve $b = F_{ii}(a) = a$.

<u>E 3</u>. Zij $(O_i,a) \sim (O_j,b)$. Neem nu $O^* = O_{ij}$ (dus $a \in O^* \subset O_i$). De functie F_{ij} beeldt O_{ij} analytisch in O_{ji} af. Voor $z \in O^*$ is $F_{ij}(z) \in O_j$, en dus $(O_i,z) \sim (O_j, F_{ij}(z))$ blijkens de definitie van equivalentie.

<u>E 4</u>. We nemen de vorm E 4^b. Laat $a_1, a_2, \ldots \in O_i$, $a \in O_i$, $a_n \to a$; $b_1, b_2, \ldots \in O_j$, $b \in O_j$, $b_n \to b$; $(O_i,a_n) \sim (O_j,b_n)$ $(n = 1,2,\ldots)$. Te bewijzen $(O_i,a) \sim (O_j,b)$.

Het bewijs zou vrij eenvoudig kunnen verlopen als we mochten veronderstellen dat in A de continuïteit van het spectrum geldt bij de sterke topologie (blz. 31). We moeten echter rekening houden met de mogelijkheid dat $\sigma(a)$ méér is dan $\lim \sigma(a_n)$, $\sigma(b)$ méér dan $\lim \sigma(b_n)$, en dat $\sigma(a)$ niet meer binnen O_{0ij} blijft, $\sigma(b)$ niet meer binnen O_{0ji} (blijkens de gegeven equivalenties geldt wèl $\sigma(a_n) \in O_{0ij}$, $\sigma(b_n) \in O_{0ji}$).

De spectra van a en b zouden dus gedeeltelijk kunnen komen buiten de gebieden waarbij de afbeelding f_{ij} werkt. We hebben dus behoefte aan functies die op $\Omega_{0i} \cup \Omega_{0j}$ analytisch zijn.

We zouden kunnen volstaan met de volgende uitspraak:

(A) Is R_1 een Riemanns oppervlak, en P een punt van R_1, dan is er een functie die buiten P overal analytisch is, en in P een (eventueel meervoudige) pool heeft.

We weten momenteel niet of (A) juist is. Voor gesloten R_1 is (A) juist; we kunnen dan een (p+1)-voudige pool voorschrijven (p = geslacht). Voor open oppervlakken lijkt de bewering nog kansrijker, omdat er dan reeds niet-constante overal op R analytische functies bestaan (vgl. Behnke-Stein, Math. Annalen 120 (1947/49) 430-461).

We kunnen echter met een zwakkere stelling (B) volstaan, waarin de uitspraak (A) wordt gedaan voor een R_1 die geheel in het inwendige van een groter Riemanns oppervlak R ligt (d.w.z. elke rij uit R_1 heeft een verdichtingspunt op R). Bewijs: Een dergelijke R_1 kan nl., na uit R te zijn losgemaakt, worden gecompleteerd tot een gesloten oppervlak, en daarvoor is (A) bewezen.

We hebben $\sigma(a) \subset O_{0i}$, en $\sigma(a)$ is compact. Dus $\sigma(a)$ heeft een positieve afstand d tot de rand van O_{0i}. Kiezen we $\varepsilon = \frac{1}{2}d$, dan ligt de ε-omgeving O^*_{0i} van $\sigma(a)$ geheel in het inwendige van O_{0i}, zodat $\Omega^*_{0i} = \varphi_i^{-1}(O^*_{0i})$ geheel in het inwendige van R ligt. Hetzelfde geldt voor de overeenkomstig gevormde $\Omega^*_{0j} = \varphi_j^{-1}(O^*_{0j})$. We nemen nu $R_1 = \Omega^*_{0i} \cup \Omega^*_{0j}$, dan ligt R_1 geheel in het inwendige van R.

Voor voldoende grote n is $\sigma(a_n) \subset O^*_{0i}$, $\sigma(b_n) \subset O^*_{0j}$ (st X, blz. 31). Gemakshalve veronderstellen we dat dit voor <u>alle</u> n geldt.

Wegens $\sigma(a_n) \subset O^*_{0i} \subset O_{0i}$, $\sigma(b_n) \subset O^*_{0j} \subset O_{0j}$ geldt ook $(O^*_i, a_n) \sim (O^*_j, b_n)$. Daar omgekeerd, als $(O^*_i, a) \sim (O^*_j, b)$ bewezen is, direct volgt $(O_i, a) \sim (O_j, b)$, kunnen we ons tot de beschouwing der O^*'s, Ω^*'s in plaats van de O's, Ω's beperken, en laten de sterretjes dus verder maar weg.

We hebben $\sigma(a_n) \in O_{0i}$, $\sigma(b_n) \in O_{0j}$, en, wegens de equivalentie, zelfs $\sigma(a_n) \in O_{0ij}$, $\sigma(b_n) \in O_{0ji}$. We zullen bewijzen dat ook $\sigma(a) \in O_{0ij}$, $\sigma(b) \in O_{0ji}$. Laat α een punt van O_{0i} zijn, α niet in O_{0ij}. We zullen bewijzen dat α buiten $\sigma(a)$ ligt.

$\varphi_i^{-1}(\alpha)$ is een punt P van $R_1 = \Omega_{0i} \cup \Omega_{0j}$. Zij f een, volgens (B) bestaande functie die in α een pool heeft, en overigens op R_1 analytisch is. In het bijzonder is f op Ω_{0j} analytisch. Derhalve is $f(\varphi_j^{-1})$ analytisch op O_{0j}. Zij G de Banachfunctie die hiermee correspondeert (G is een afbeelding van O_j in A). Daar $b_n \in O_j$, $b \in O_j$, $b_n \to b$, is $G(b_n) \to G(b)$, dus $G(b_n) = O(1)$.

Daar f op Ω_{0j} analytisch is, is ook $f(\varphi_i^{-1})$ analytisch op O_{0ij}, waarin de a_n's hun spectrum hebben. Zij H de met $f(\varphi_i^{-1})$ corresponderende Banachfunctie (gedefinieerd op O_{ij}). Daar $f(\varphi_i^{-1}) = f(\varphi_j^{-1})(\varphi_j(\varphi_i^{-1}))$, is $H = GF_{ij}$ op O_{ij}. Daar $F_{ij}(a_n) = b_n$, vinden we dat $H(a_n) = G(b_n) = O(1)$.

De functie $h = f(\varphi_i^{-1})$ kan op de <u>gehele</u> O_{0i} worden beschouwd; h is op O_{0i} regulier met uitzondering van een pool in α, dus

$$h(z) = c(z-\alpha)^{-k} + h_1(z),$$

met $c \neq 0$, k positief geheel, $h_1(z)$ analytisch op O_{0i}.

Met $h_1(z)$ correspondeert een op O_i gedefiniëerde functie H_1; daar $a \in O_i$, $a_n \in O_i$, $a_n \to a$, is $H_1(a_n) \to H_1(a)$, dus $H_1(a_n) = O(1)$.

Op O_{oij} zijn $h(z)$, $c(z-\alpha)^{-k}$ en $h_1(z)$ analytisch. Met $c(z-\alpha)^{-k}$ correspondeert de Banachfunctie $x \to c(x-\alpha)^{-k}$, en dus

$$H(a_n)-H_1(a_n) = c(a_n-\alpha)^{-k}.$$

We concluderen nu dat $(a_n-\alpha)^{-k}=O(1)$. Daar $a_n \to a$, is $a_n=O(1)$, dus ook $(a_n-\alpha)^{-1}=(a_n-\alpha)^{k-1} \cdot (a_n-\alpha)^{-k}=O(1)$.

Uit $(a_n-\alpha)^{-1}=O(1)$, $a_n \to a$ volgt dat $a-\alpha$ regulier is. Dit gaat als volgt. Gemakshalve $\alpha = 0$. De rij $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots$ is een fundamentaalrij, want

$$\|a_n^{-1} - a_m^{-1}\| = \|a_n^{-1}(a_m-a_n)a_m^{-1}\| = O(1). \|a_m-a_n\| \to 0.$$

Dus $a_n^{-1} \to c$ $(c \in A)$. $a_n . a_n^{-1} = a_n^{-1} . a_n \to e$, dus $ac=ca=e$.

We hebben nu bewezen dat $\sigma(a) \subset O_{oij}$, dus $a \in O_{ij}$. Evenzo $b \in O_{ji}$. De functie F_{ij} geeft een continue afbeelding van O_{ij} op O_{ji}, zodat wegens $a_n \to a$, $b_n \to b$, $F_{ij}(a_n)=b_n$, ook $F_{ij}(a)=b$ geldt. Hiermee is de Hausdorff-conditie bewezen.

E 5. Daar R een A_o-varieteit is, kan R door aftelbaar vele Ω_{om}'s worden overdekt. Bij elk dezer Ω_{om}'s kiezen we een aftelbare basis voor de open verzamelingen (d.i. een stel open deelverzamelingen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ met de eigenschap dat elk open deel van Ω_{om} een vereniging van ω_k's is; voor deze ω_k's kunnen we bijvoorbeeld kiezen de $\varphi_m^{-1}(o_k)$, waarin de o_k alle cirkels doorloopt met complex rationaal middelpunt en rationale straal, die geheel binnen O_{om} liggen). Voegen we deze bases van onze aftelbaar vele Ω_{om}'s samen, dan krijgen we een aftelbare basis $V_1, V_2, \ldots$ voor de open verzamelingen op R.

We beschouwen uit de collectie van alle Ω_{oi}'s $(i \in S)$ nu alleen de Ω's die de vereniging zijn van eindig vele V_k's; het is duidelijk dat er slechts aftelbaar veel van zulke Ω's zijn. Bij elk dezer Ω's kiezen we een speciale conforme afbeelding φ. De indices dezer φ's vormen een aftelbare indexverzameling S_o.

Laat nu (O_i, a) $(i \in S,\ a \in O_i)$ een willekeurig paar zijn. We zullen bewijzen dat er een $j \in S_o$ en een $b \in O_j$ is met $(O_i,a) \sim (O_j,b)$.

De $\varphi_i(V_k)$'s (i vast), voor zover $V_k \subset \Omega_{oi}$, vormen een basis voor de open verzamelingen van O_{oi}. Daar $\sigma(a)$ compact is, is er een eindig stel $\varphi_i(V_{k_1}), \ldots, \varphi_i(V_{k_n})$ te vinden dat $\sigma(a)$ overdekt. De vereniging van $V_{k_1}, \ldots, V_{k_n}$ kan conform in het complexe vlak worden afgebeeld en is dus een Ω_{oj} met $j \in S_o$.

Nu is $\Omega_{oj} \subset \Omega_{oi}$, en $\sigma(a) \subset \varphi_i(\Omega_{oj})$, dus $\sigma(a) \subset O_{oij}$. Derhalve is $F_{ij}(a) \in O_j$, en $(O_i,a) \sim (O_j, F_{ij}(a))$.

We hebben nu bewezen dat de op blz. 71 (onderaan) gedefiniëerde parencollectie (met equivalenties) aan de eisen E 1 t/m E 5 van blz. 55-56 voldoet, en dus een concrete A-variëteit is. Op de op blz.56-57 beschreven wijze kunnen we hieruit een abstracte A-variëteit maken (waarvan de punten klassen van onderling equivalente paren (O_i,a) zijn). Deze uit R voortgekomen A-variëteit zullen we met M(R) aanduiden.

Is R de z-bol, dan is M(R) de A-bol. De beschrijving van de A-bol op blz.57-58 wijkt in niet-essentiële punten van de definitie van M(R) af:
1^o. Op blz. 57-58 komt de z-bol zelf niet voor; de Ω_{oi}'s zijn daar dus niet expliciet genoemd; de relatie tussen de O_{oi}'s is niet via de Ω_{oi}'s, doch via een algebraische procedure beschreven. 2^o. Vertaalt men de op blz.57-58 gegeven definitie in termen van Ω_{oi}'s op de z-bol, dan blijkt dat niet alle mogelijke Ω_{oi}'s zijn genomen, doch slechts de speciale die de gehele z-bol op één punt na bedekken. Elk open deel van de z-bol dat in het vlak conform kan worden afgebeeld (d.i.: dat niet de gehele bol bedekt) is echter deel van zo'n speciale Ω_{oi}, zodat alle andere open delen bij de constructie van M(R) kunnen worden gemist.

Zoals op blz. 72 werd opgemerkt, kunnen we aan elk punt P van M(R) een verzameling $\sigma(P) \subset R$ toevoegen, die het <u>spectrum</u> van P heet, en als volgt gedefinieerd is: Is (O_i,a) een representant van P, dan is $\sigma(P) = \varphi_i^{-1}(\sigma(a))$. Als R een deel van het complexe vlak is, en M(R) als een deel van A is geïnterpreteerd zoals in voorbeeld 5 (blz.71), dan is P een element van A en de zojuist gedefinieerde $\sigma(P)$ stemt met de oorspronkelijke definitie overeen.

<u>Analytische afbeeldingen</u>. Laat M en M^* twee A-variëteiten zijn, en laat F een afbeelding zijn van M in M^*. F heet analytisch, als voor elke $P \in M$ en voor elke in F(P) gedefinieerde uniformizerende parameter φ^* geldt dat $\varphi^*(F(Q))$ een analytische functie (zie blz. 55) van Q is voor $Q \in \Omega$, waarin Ω een omgeving van P is.

Is $M^*=A$, dan is zo'n analytische afbeelding een analytische functie op R; is M^* de A-bol (met een vastgelegde afbeelding van een "eigenlijk deel" op A, zoals op blz. 59 is aangegeven), dan spreken we over een <u>meromorphe</u> functie.

Door in het bovenstaande $A=A_o$ te nemen, komen we tot de bekende definitie van analytische afbeeldingen van een Riemanns oppervlak in een ander Riemanns oppervlak, en tot het gewone begrip meromorphe functie. (Volgens deze definitie wordt een functie die overal ∞ is, ook meromorph genoemd).

Meromorphe functies op een A-variëteit kunnen singulariteiten hebben, nl. de punten P die op oneigenlijke punten van de A-bol worden afgebeeld. De verzameling der singuliere punten kan inwendige punten bevatten (Blz. 60 bovenaan).

Geïnduceerde analytische afbeeldingen. Laat R en R^* A_o-variëteiten zijn, en f een analytische afbeelding van R in R^* (in de practijk komen vaak afbeeldingen voor van een open deel R' van R in R^*, doch we kunnen R' dan weer R noemen). We zullen laten zien dat f een analytische afbeelding van $M(R)$ in $M(R^*)$ induceert, evenals we dat op blz.45 e.v. hebben gedaan voor het geval dat R en R^* delen van het complexe vlak waren. Hierbij moet echter een zeker voorbehoud worden gemaakt. We zullen onderstellen

(C) Voor elke $P \in M(R)$ geldt, dat de op R^* gelegen verzameling $f(\sigma(P))$ gelegen is in een open deel van R^* dat conform in A_o kan worden afgebeeld. (Is dit niet het geval, dan zal $f(\sigma(P))$ niet als het spectrum van een punt van $M(R^*)$ op kunnen treden).

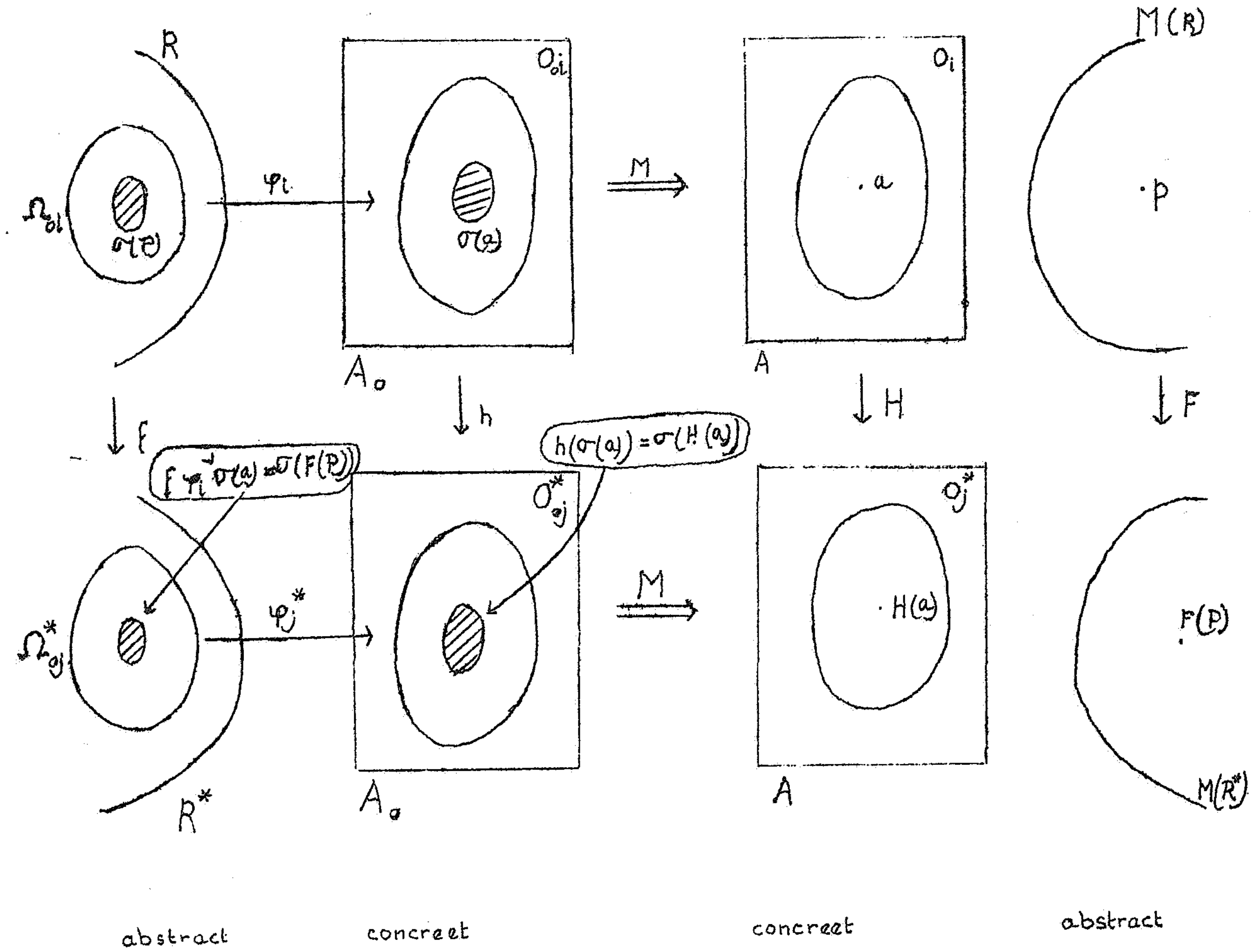
Aan de eis (C) is voldaan als $R^* = A_o$ is (en F wordt dan een analytische functie). Is echter R^* de z-bol, en bevat $\sigma(P)$ bijv. inwendige punten dan kan het voorkomen dat $f(\sigma(P))$ de gehele R^* overdekt.

We kunnen ook aan (C) voldoen door R, R^* en f willekeurig te houden, doch aan A eisen op te leggen. Het is bijv. voldoende te eisen dat, voor elke $a \in A$, $\sigma(a)$ hoogstens eindig vele verdichtingspunten heeft. Daar $\sigma(P)$ het beeld van een $\sigma(a)$ is bij een conforme afbeelding, geldt dan dezelfde eigenschap voor $\sigma(P)$ en dus ook voor $f(\sigma(P))$. Bedek nu elk verdichtingspunt van $f(\sigma(P))$ met een in A_o afbeeldbare omgeving O (zó dat bij verschillende verdichtingspunten disjuncte O's worden gekozen) en bedek de eindig vele nog niet bedekte elk afzonderlijk met zo'n O, weer ervoor zorgend dat alle O's disjunct zijn. Dit stel O's is weer conform in het complexe vlak af te beelden.

In het bijzonder is aan (C) voldaan als A een matrixalgebra is, waarbij immers alle spectra eindig zijn. Ook geldt het voor de algebra uit voorbeeld V blz. 35, en algemener voor de algebra der lineaire operatoren $\alpha I+K$ in de Hilbertruimte, waarin K een compacte operator voorstelt.

Inplaats van (C) te eisen, kunnen we natuurlijk ook de te construeren afbeelding van $M(R)$ in $M(R^*)$ beperken tot dàt deel van $M(R)$ waarvan de punten P aan de in (C) genoemde eis voldoen. Dit is een open deel van $M(R)$. We zullen echter gemakshalve de eis voor de gehele $M(R)$ handhaven.

De geinduceerde afbeelding F van $M(R)$ in $M(R^*)$ wordt als volgt gedefinieerd. (Voor notatie etc. zie blz. 71 e.v.). Zij $P \in M(R)$ en (O_i, a) $(a \in O_i \subset A)$ een representant van de bij P behorende klasse van equivalente paren, én $O_i = M(O_{oi})$, $O_{oi} = \varphi_i(\Omega_{oi})$, $\Omega_{oi} \subset R$. Op R^* kunnen we, volgens (C) een Ω^*_{oj} kiezen die $f(\varphi_i^{-1}(\sigma(a)))$ omvat. Ω^*_{oj} wordt door φ^*_j conform afgebeeld op O^*_{oj}. De samengestelde functie $h = \varphi_j f \varphi_i^{-1}$ behoeft



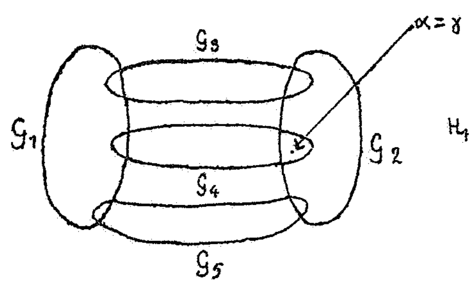
niet op de gehele O_{oi} gedefinieerd en analytisch te zijn, maar is dat wèl in een zekere omgeving van $\sigma(a)$. Derhalve is h op te trekken (blz.45, st.2) tot een analytische functie H gedefinieerd op een omgeving van a. Blijkens het spectral mapping theorem ligt het spectrum van H(a) in O^*_{oj}, en dus is $H(a) \in O^*_j$. We definiëren nu F(P) als het punt van $M(R^*)$ dat gerepresenteerd wordt door $(O^*_j, H(a))$.

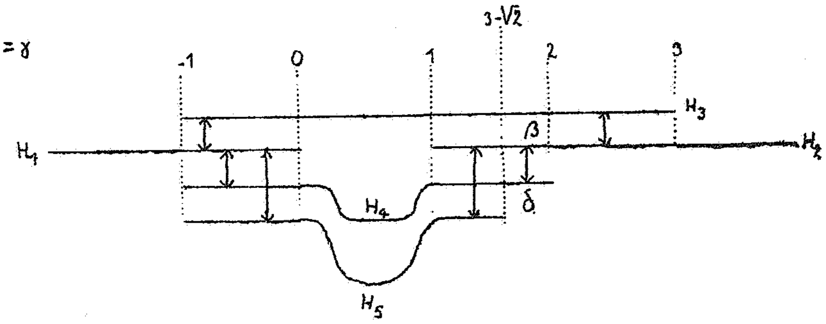
Het is niet moeilijk te laten zien dat de hier gedefinieerde F(P) niet afhangt van de keuze van i en j, en dat inderdaad $P \rightarrow F(P)$ een analytische afbeelding is. Uit het voorgaande blijkt overigens direct de volgende <u>generalisatie van het spectral mapping theorem</u>:

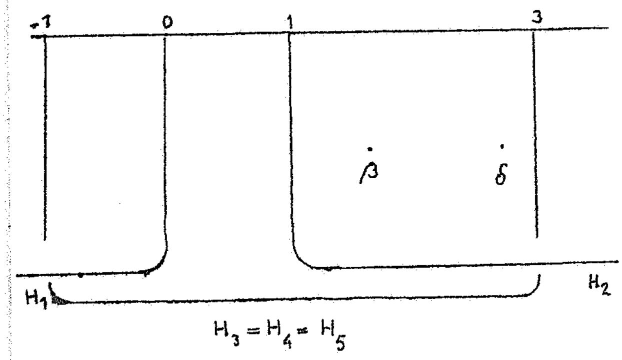
$$\sigma(F(P)) = f(\sigma(P)).$$

<u>Algemene A-variëteiten</u>. De vraag of elke A-variëteit kan worden ingebed (met behoud van analytische structuur) in een M(R), moet ontkennend worden beantwoord. Een tegenvoorbeeld is reeds te vinden in de eenvoudigste Banachalgebra $A \neq A_o$, nl. de algebra der diagonale 2x2 matrices. Deze algebra is ook als directe som A_o+A_o te beschouwen; we geven de elementen met (α, β) aan, waarin α en β complexe getallen zijn.

We bouwen een concrete A-variëteit op met 5 O's. Daartoe nemen we in het bovenhalfvlak 5 gebieden $G_1, \dots, G_5$, als getekend in figuur.







In de figuur is als voorbeeld aangegeven de equivalentie $(O_2, (\alpha,\beta)) \sim (O_4, (\gamma, \delta))$.

H_1 is het gebied Re $z < 0$, Im $z < 0$; H_2 is gegeven door Re $z > 1$, Im $z < 0$, $H_3 = H_4 = H_5$ zijn gegeven door $-1 <$ Re $z < 3$, Im $z < 0$. $O_i (i = 1, \dots, 5)$ bestaat uit alle (α, β) met $\alpha \in G_i, \beta \in H_i$. We definieren verder de volgende equivalenties:

$$(O_i, (\alpha, \beta)) \sim (O_j, (\gamma, \delta)) \text{ als } \alpha = \gamma, \beta = \delta - p_{ij},$$

waarin de p_{ij} reële getallen zijn: $p_{13} = p_{14} = p_{15} = 0$, $p_{23} = 0$, $p_{24} = 1$, $p_{25} = \sqrt{2}$, en bovendien $p_{ij} = -p_{ji}$ voor alle i en j. Het zo gedefinieerde systeem van equivalenties voldoet aan E 1 t/m E 5 (blz.55-56), hetgeen zo goed als triviaal is.

Neem nu aan dat deze A-variëteit in een M(R) kan worden ingebed. Dan bestaat er een meromorphe functie f(P) op R die op geen enkel deel van R constant is. Aan elk punt P van M(R) wordt nu door F een waarde (λ, μ) toegevoegd, (λ en μ zijn punten van de z-bol) zó dat noch λ, noch μ constant is in een omgeving van P. De functie F wordt nl. gegeven door $F((\alpha, \beta)) = (f(\alpha), f(\beta))$.

De waarde (λ, μ) hangt analytisch af van de uniformizerende parameters, en derhalve is μ op elk der gebieden $H_1, \dots, H_5$ als een meromorphe functie gedefinieerd. (Hierbij is de monodromiestelling gebruikt).

Uit de equivalenties blijkt dat de in H_1 beschouwde functie μ_1 in het gehele benedenhalfvlak analytisch kan worden voortgezet en dat $\mu_1(\beta) = \mu_1(\beta+1) = \mu_1(\beta+\sqrt{2})$. Hieruit volgt dat μ_1 constant is, hetgeen een tegenspraak oplevert.

Het ligt voor de hand te vragen welke voorwaarden voor een A-variëteit M voldoende zijn voor inbedbaarheid in een M(R). Daar voldoend kleine stukken van een A-variëteit steeds inbedbaar zijn (zelfs in A zelf) gaat het om een globale voorwaarde. Men kan waarschijnlijk als volgt te werk gaan: voeg aan elk "klein" stuk van M een stukje R_i van een complex vlak toe, zó dat het stuk van M in $M(R_i)$ is in te bedden. Definieer dan equivalentie op deze R_i's op de voor de hand liggende wijze. De Hausdorff-conditie is dan niet triviaal vervuld. Eist men nu het vervuld zijn van de Hausdorffconditie, dan is waarschijnlijk globale inbedding mogelijk.

Een dergelijk ingewikkeld systeem van condities is echter weinig bevredigend; bovendien zijn dergelijke voorwaarden niet noodzakelijk.

Er zijn, zoals we zoëven zagen, A-variëteiten waarop, behalve de constanten, geen meromorphe functies bestaan.

We veronderstellen nu dat we een A-variëteit M hebben waarop een verzameling V van meromorphe functies F bestaat, zó dat in elk punt één ervan als uniformizerende parameter kan worden gebruikt. Gemakshalve veronderstellen we verder dat A een matrixalgebra is, zodat de moeilijkheid van blz.77 niet optreedt, terwijl tevens de kwesties van aftelbare overdekbaarheid eenvoudiger worden.

We beschouwen inplaats van M een met M equivalente concrete A-variëteit, bestaande uit O_i's ($O_i \subset A$) met equivalentierelaties, waarbij de O_i's zó zijn gekozen dat de overeenkomstige φ_i op O_i met een $F \in V$ samenvalt. In dit systeem voegen we nu nieuwe equivalentierelaties toe: $(O_i, a) \sim (O_j, b)$ als er een ééneenduidige analytische afbeelding ψ van een omgeving O van a op een omgeving van b is, zó dat

$$(c \in O, \quad F \in V) \rightarrow F(\varphi_i^{-1}(c)) = F(\varphi_j^{-1}(\psi(c))).$$

Gemakkelijk is na te gaan dat dit uitgebreide systeem aan de eisen E 1 t/m E 5 (blz. 55-56) voldoet. We komen zo tot een nieuwe A-variëteit M_1, waarvan M een "dekvariëteit" is.

Vermoedelijk is M_1 een deel van een M(R). Als V eindig is, kan men zich de volgende bewijsschets voorstellen: neem een punt $P \in M$, daarbij een uniformizerende parameter $F_1 \in V$. Nu zijn $F_2, F_3, \ldots$ analytische functies van F_1; noem die $G_2(F_1)$, $G_3(F_1), \ldots$. Bij $G_2, G_3, \ldots$ kunnen we de gewone analytische functies $g_2, g_3, \ldots$ construeren, en daarbij het Riemannse dekvlak van de analytische voortzetting vgl. blz.83 (gewoonlijk wordt dat voor één functie beschreven, maar met eindig vele gaat het even goed). Maak dit tot Riemanns oppervlak R en maak daarbij M(R). Nu moet M_1 in $M(R)$ worden ingebed.

Bijzondere punten op een A-variëteit. Laat E een eigenschap zijn zodanig dat voor elke $a \in A$ en voor elke éénéénduidige analytische afbeelding $F(z)$ van een omgeving van A geldt: als a de eigenschap E heeft dan heeft ook $F(a)$ de eigenschap E. We zeggen nu dat een punt P van een A-variëteit de eigenschap E heeft, als voor één der uniformizerende parameters φ_i geldt dat $\varphi_i(P)$ de eigenschap E heeft. Automatisch geldt dan hetzelfde voor alle andere in P gedefiniëerde parameters, zodat de definitie onafhankelijk is van de keuze van i. Zo kunnen we steeds spreken over scalaire punten (P heet scalair als $\varphi_i(P)=\lambda e$, $\lambda \in A_0$). Is A een matrixalgebra, dan kunnen we nog definiëren: symmetrisch punt, diagonaal punt, triangulair punt, critiek punt. Begrippen als regulier punt, reëel punt, hebben echter geen zin.

Relaties tussen punten op een A-variëteit. Is M een M(R), dan hebben de uitdrukkingen "P en Q (beide $\in M$) hebben een spectrumpunt gemeen"; "P en Q hebben hetzelfde spectrum"; "$P = cQc^{-1}$ ($c \in A$, c regulier)" betekenis. Laatstgenoemde uitdrukking wordt als volgt geïnterpreteerd: $\sigma(P)=\sigma(Q)$, en er is een $\Omega_{oi} \supset \sigma(P)$, zó dat $P \sim (O_i,p)$, $Q \sim (O_i,q)$, $p=cqc^{-1}$. Bij overgang op een andere Ω_{oj} blijft deze relatie behouden.

Gemakkelijk is in te zien dat voor elke op M(R) analytische functie F geldt dat $F(cQc^{-1})=cF(Q)c^{-1}$.

Op een willekeurige A-variëteit kunnen dergelijke begrippen slechts min of meer locaal worden gedefiniëerd.

Is A een matrixalgebra, dan heeft het op een M(R) zin om te spreken over: P en Q zijn elkaars getransponeerde. Voor elke op M(R) analytische functie geldt dan $F(P)=F(Q)^T$.

Samenhangskwesties. Zij R een Riemanns oppervlak, bestaande uit de componenten $R_1, R_2, \ldots$. Zij M_1 een component van M(R).

Stelling. Er is een eindige verzameling $S=\{k_1,\ldots,k_n\}$ zó dat voor alle $P \in M_1$ geldt

$$k \in S \quad \leftrightarrows \quad \sigma(P) \cap R_k \text{ niet leeg.}$$

Bewijs. Zij $P \in M_1$. Met de notaties van blz.71 e.v. heeft P een representant (O_i,a), met $O_i=M(O_{oi})$, $O_{oi}=\varphi_i(\Omega_{oi})$, $\Omega_{oi} \subset R$. Daar $\sigma(a)$ compact is, en daar O_{oi} open is, hebben slechts eindig vele componenten van O_{oi} iets met $\sigma(a)$ gemeen. Hetzelfde geldt nu t.a.v. $\varphi_i^{-1}(O_{oi})=\Omega_{oi}$ en $\varphi_i^{-1}(\sigma(a))=\sigma(P)$. Dit wijst een eindig aantal R_k's aan, waarop iets van $\sigma(P)$ ligt.

Definieer nu $N_k(P)$ door

$$N_k(P) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ als } \sigma(P) \cap R_k \begin{cases} \text{leeg} \\ \text{niet leeg.} \end{cases}$$

Voor elke k is $N_k(P)$ een continue functie van P. Ligt nl., met de zojuist gebruikte notatie, b in een voldoend kleine omgeving van a, dan is $\sigma(b) \subset O_{oi}$(blz. 31 st.X) terwijl elke component van O_{oi} die iets van $\sigma(b)$ bevat, ook iets van $\sigma(a)$ bevat (blz.50 st.6).

Daar N_k continu is en slechts 0 of 1 kan zijn, is N_k constant op M_1. Daarmee is de stelling bewezen.

Bij sommige A's is elk spectrum samenhangend (d.i. niet splitsbaar in disjuncte compacte delen). In zulke gevallen is er bij de opbouw van een component M_1 van M(R) slechts één component van R betrokken.

Is M_1 een component van M(R). Dan bestaat $\sigma(M_1) = \bigcup_{P \in M_1} \sigma(P)$ uit een eindig aantal componenten van R. Het bewijs dat deze componenten werkelijk volledig worden opgevuld, is lastig. Hiermee hangt samen de stelling dat elke op M_1 analytische functie F voortkomt uit een op R gedefinieerde analytische functie f.

Zij M_1 een component van M(R), en zij k het aantal componenten van R dat bij M_1 is betrokken. *Is nu $k>1$, dan bevat M_1 geen scalaire punten.* Is nl. P scalair, en P gerepresenteerd door (O_i, a), dan is a scalair, dus $\sigma(a)$ bestaat uit één punt. Derhalve geldt hetzelfde voor $\sigma(P)$.

Omgekeerd is k=1 geen garantie voor de existentie van scalaire punten op M_1 (zie voorbeeld 5, blz.71). Dit is wèl het geval als A *volledig samenhangend* is.

Een Banach-algebra A noemen we volledig samenhangend, als voor elk gebied G in het complexe vlak geldt dat

$$M(G) = \{a \mid a \in A, \ \sigma(a) \in G\}$$

samenhangend is (vgl. st.11 blz.52).

Gemakkelijk is dan ook in te zien: Is A volledig samenhangend, en R een samenhangend Riemanns oppervlak, dan is M(R) samenhangend.

Een voldoende voorwaarde voor volledige samenhang is:

(D) *Voor elke $a \in A$ geldt dat het complement van $\sigma(a)$ samenhangend is.*

Als aan (D) is voldaan, kunnen we nl. als $\sigma(a) \in G$, een open verzameling O aangeven, bestaande uit eindig vele disjuncte en enkelvoudig samenhangende componenten, zó dat $\sigma(a) \in O \subset G$. (Voor de constructie van zo'n C kan men eerst G verkleinen tot de vereniging V van eindig vele cirkelschijven, en vervolgens de eindig vele randstukken van V door krommen, geheel buiten $\sigma(a)$, met elkaar verbinden). Via een continue schaar van locaal-analytische afbeeldingen kunnen we nu $\sigma(a)$ afbeelden op een eindige puntverzameling, en daarna wordt de zaak eenvoudig.

De voorwaarde (D) is niet noodzakelijk. De algebra van voorbeeld VI (blz.38) is volledig samenhangend, doch voldoet niet aan (D). Een zwakkere voldoende voorwaarde is

(E) Bij elke $a \in A$ is er een $b \in A$ en een functie f, analytisch op $\sigma(b)$, zó dat $a=F(b)$, terwijl het complement van $\sigma(b)$ samenhangend is.

Identiteitsstelling voor analytische afbeeldingen. Zij M een samenhangende A-variëteit, en laat F_1 en F_2 analytische afbeeldingen zijn van M in een tweede A-variëteit M^*. Onderstel dat $F_1(P)=F_2(P)$ voor alle P uit een open deel O van M. Dan is $F_1=F_2$ overal op M.

Bewijs. Zij V de verzameling $\{P \mid F_1(P)=F_2(P)\}$, en V_1 de verzameling der inwendige punten van V. Kennelijk is V_1 open en niet-leeg; we moeten bewijzen dat $M-V_1$ open is. Zij P een punt van $M-V_1$. Is $F_1(P)\neq F_2(P)$, dan is, daar F_1 en F_2 continu zijn, P een inwendig punt van $M-V_1$. Is P een randpunt van $M-V_1$, dan is dus $F_1(P)=F_2(P)$. We kunnen dan in omgevingen van P resp. $F_1(P)$ uniformizerende parameters beschouwen en verder het bewijs van hulpstelling 8 (blz.50) volgen.

Analytische voortzetting. Zij G een gebied in A, en F een analytische functie op G. Dan kunnen we als volgt een analytische voortzetting construeren.

Zij a een punt van G. Daarbij kiezen we een op een omgeving S van $\sigma(a)$ gedefinieerde analytische functie f(t), die in een omgeving O^* van a met F correspondeert (zie st.4 blz.47). Bij de op S geconstrueerde functie f(t) construeren we een gewoon Riemanns oppervlak R, waarop t en w meromorphe functies zijn, met $w=f(t)$ in het gebied van uitgang.

Vervolgens construeren we M(R), en daarop de opgetrokken functies T en W. Op M(R) is nu een deel dat door T wordt afgebeeld op G, en waarop $W=F(T)$ is.

Deze A-variëteit, met daarop de functies T en W, moet worden aangezien als de analytische voortzetting van het gegeven functieelement. Het "platslaan" van dit oppervlak tot "dekvlak" over het "T-vlak" heeft niet veel succes, daar de singulariteiten dan niet meer zo overzichtelijk kunnen worden beschreven als zulks in het klassieke geval $(A=A_0)$ gebeuren kan.

We merken op dat niet noodzakelijk voor de gehele G een éénwaardige functie f kan worden gebruikt. Dit is wèl het geval als G een sterk gebied is (zie blz.8).

Analytische completering. Zij M een A-variëteit, en M_1 een open deel van M. M heet een analytische completering van M_1 als elke op M_1 analytische functie op M analytisch kan worden voortgezet.

Voor $A=A_0$ is dit niet mogelijk (behalve als $M=M_1$)(wèl is dit verschijnsel bekend bij analytische functies van meer variabelen). We geven echter een niet-triviaal voorbeeld bij $A=MR_2$. Laat G een gebied in A_0 zijn, en O een open deel van G. Zij M de verzameling $M(G)=\{a \mid a \in A, \sigma(a) \subset G\}$, en M_1 de verzameling $\{a \mid a \in A, \sigma(a) \subset G, \sigma(a) \cap O \text{ niet leeg}\}$.

Dan is M een analytische completering van M_1.

Een voorbeeld van andere aard, ook in MR_2, is als volgt. Laat G_1 en G_2 disjuncte gebieden in A_0 zijn; MR_2^* de verzameling der reguliere matrices, en O een open, samenhangend deel van MR_2^*, met $e \in O$. Neem nu

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^T \middle| \alpha \in G_1, \beta \in G_2, T \in MR_2^* \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^T \middle| \alpha \in G_1, \beta \in G_2, T \in O \right\}.$$

<u>Impliciete functies</u>. Gemakshalve beschouwen we een algebraische vergelijking $f(\lambda, \mu)=0$. We vragen nu naar <u>alle</u> paren (z,w) met

$$z \in A, \quad w \in A, \quad zw=wz, \quad f(z,w)=0.$$

Deze collectie noemen we <u>de kromme</u> $f(z,w)=0$. Men kan nu vragen of dit w als een meerwaardige analytische functie van z definieert.

Bij de vergelijking $f(\lambda,\mu)=0$ kan men een Riemanns oppervlak R construeren en daarop de meromorphe functies $\varphi(P)$ en $\psi(P)$, zó dat de paren $(\lambda, \mu)(\lambda=\varphi(P), \mu=\psi(P))$ alle punten van de kromme voorstellen.

Gaan we nu over op M(R) met daarop de functies Φ en Ψ, dan vinden we $\Phi(P)\Psi(P)=\Psi(P)\Phi(P)$, $f(\Phi(P), \Psi(P))=0$ (alle $P \in M(R)$). Gemakshalve beperken we ons tot eigenlijke waarden van z en w. Dit levert dus een deel van de kromme $f(z,w)=0$; we noemen dit deel <u>de analytische kromme</u> $f(z,w)=0$. Merkwaardigerwijze is het niet altijd de gehele kromme.

Laat bijv. $f(\lambda,\mu)=\lambda^2-\mu^3$ zijn. De vergelijking $\lambda^2-\mu^3=0$ kan worden geparametrizeerd met $\lambda=\tau^3$, $\mu=\tau^2$ (R is hier de bol). Doorloopt nu t de hele A, dan stelt (t^3,t^2) de analytische kromme voor. Laat A de 2×2 matrixalgebra zijn, en $b=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dan is (b,b) een punt van de kromme. Voor geen enkele t is echter tegelijk $b=t^3$, $b=t^2$. (Uit $t^2=b$ volgt dat t nilpotent is, dus $t^2=0$), dus (b,b) ligt niet op de analytische kromme.

We konden bewijzen: Is A een MR_n, en heeft de kromme geen dubbelpunten, dan is de analytische kromme met de kromme zelf identiek. Of sterker: ligt (z,w) op de kromme, en is voor geen enkel dubbelpunt (λ,μ) tegelijk $\lambda \in \sigma(z)$, $\mu \in \sigma(w)$, dan ligt (z,w) op de analytische kromme.

Einde van het colloquium